СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 9 октября 2022 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи	
3	1.	Можно ли расставить в клетках таблицы 6×6 числа, среди которых нет одинаковых, так, чтобы в каждом прямоугольнике 1×5 (как вертикальном, так и горизонтальном) сумма чисел была равна 2022 или 2023? *Егор Бакаев*
4	2.	Существует ли натуральное число, которое можно представить в виде произведения двух палиндромов более чем 100 способами? (Палиндромом называется натуральное число, которое одинаково читается как слева направо, так и справа налево.) *Егор Бакаев*
5	3.	Пятиугольник $ABCDE$ описан около окружности. Углы при его вершинах A, C и E равны $100°$. Найдите угол ACE. *Михаил Евдокимов*
5	4.	Можно ли раскрасить все натуральные числа, большие чем 1, в три цвета (каждое число — в один цвет, все три цвета должны использоваться) так, чтобы цвет произведения любых двух чисел разного цвета отличался от цвета каждого из сомножителей? *Михаил Евдокимов*
5	5.	У Пети есть 8 монет, про которые он знает только, что 7 из них настоящие и весят одинаково, а одна фальшивая и отличается от настоящей по весу, неизвестно в какую сторону. У Васи есть чашечные весы — они показывают, какая чашка тяжелее, но не показывают, насколько. За каждое взвешивание Петя платит Васе (до взвешивания) одну монету из имеющихся у него. Если уплачена настоящая монета, Вася сообщит Пете верный результат взвешивания, а если фальшивая, то случайный. Петя хочет определить 5 настоящих монет и не отдать ни одну из этих монет Васе. Может ли Петя гарантированно этого добиться? *Александр Грибалко, Алексей Заславский*

СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 9 октября 2022 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

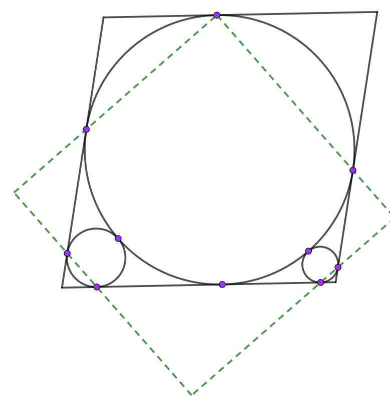
баллы задачи

3 1. При каком наибольшем натуральном m число $m! \cdot 2022!$ будет факториалом натурального числа?

Борис Френкин

5 2. Большая окружность вписана в ромб, каждая из двух меньших окружностей касается двух сторон ромба и большой окружности, как на рисунке справа. Через точки касания окружностей со сторонами ромба провели четыре штриховые прямые, как на рисунке. Докажите, что они образуют квадрат.

Егор Бакаев



5 3. На прямой отмечено 2022 точки так, что каждые две соседние точки расположены на одинаковом расстоянии. Половина точек покрашена в красный цвет, а другая половина — в синий. Может ли сумма длин всевозможных отрезков, у которых левый конец красный, а правый — синий, равняться сумме длин всех отрезков, у которых левый конец синий, а правый — красный? (Концы рассматриваемых отрезков — не обязательно соседние отмеченные точки.)

Александр Грибалко

5 4. Дан остроугольный неравнобедренный треугольник. Одним действием разрешено разрезать один из имеющихся треугольников по медиане на два треугольника. Могут ли через несколько действий все треугольники оказаться равнобедренными?

Егор Бакаев

5. Доска $2N \times 2N$ покрыта неперекрывающимися доминошками 1×2. По доске прошла хромая ладья, побывав на каждой клетке по одному разу (каждый ход хромой ладьи — на клетку, соседнюю по стороне). Назовём ход *продольным*, если это переход из одной клетки доминошки на другую клетку той же доминошки. Каково

1 а) наибольшее;

4 б) наименьшее возможное число продольных ходов?

Борис Френкин

СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 23 октября 2022 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 — 1. Сто друзей, среди которых есть Петя и Вася, живут в нескольких городах. Петя узнал расстояние от своего города до города каждого из оставшихся 99 друзей и сложил эти 99 чисел. Аналогично поступил Вася. Петя получил 1000 км. Какое наибольшее число мог получить Вася? (Города считайте точками плоскости; если двое живут в одном и том же городе, расстояние между их городами считается равным нулю.)

Борис Френкин

2. Для каждого из чисел 1, 19, 199, 1999 и т.д. изготовили одну отдельную карточку и записали на неё это число.

2 — а) Можно ли выбрать не менее трёх карточек так, чтобы сумма чисел на них равнялась числу, все цифры которого, кроме одной — двойки?

3 — б) Пусть выбрали несколько карточек так, что сумма чисел на них равна числу, все цифры которого, кроме одной — двойки. Какой может быть его цифра, отличная от двойки?

Сергей Маркелов

6 — 3. Барон Мюнхгаузен утверждает, что нарисовал многоугольник и точку внутри него так, что любая прямая, проходящая через эту точку, делит этот многоугольник на три многоугольника. Может ли барон быть прав?

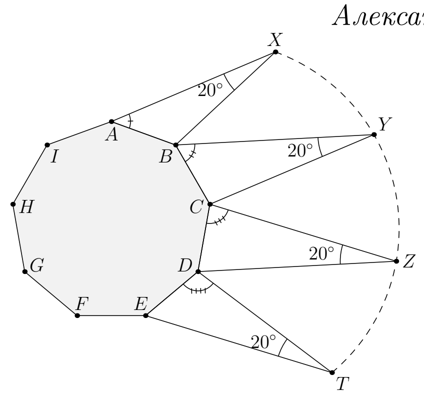
Татьяна Казицына

7 — 4. Пусть $n > 1$ — целое число. В одной из клеток бесконечной белой клетчатой доски стоит ладья. Каждым ходом она сдвигается по доске ровно на n клеток по вертикали или по горизонтали, закрашивая пройденные n клеток в чёрный цвет. Сделав несколько таких ходов, не проходя никакую клетку дважды, ладья вернулась в исходную клетку. Чёрные клетки образуют замкнутый контур. Докажите, что число белых клеток внутри этого контура даёт при делении на n остаток 1.

Александр Грибалко

9 — 5. На сторонах правильного девятиугольника $ABCDEFGHI$ во внешнюю сторону построили треугольники XAB, YBC, ZCD и TDE. Известно, что углы X, Y, Z, T этих треугольников равны 20° каждый, а среди углов XAB, YBC, ZCD и TDE каждый следующий на 20° больше предыдущего. Докажите, что точки X, Y, Z, T лежат на одной окружности.

Егор Бакаев



10 — 6. Петя прибавил к натуральному числу N натуральное число M и заметил, что сумма цифр у результата та же, что и у N. Тогда он снова прибавил M к результату, потом — ещё раз, и т.д. Обязательно ли он когда-нибудь снова получит число с той же суммой цифр, что и у N?

Александр Шаповалов

7. Известно, что среди нескольких купюр, номиналы которых — попарно различные натуральные числа, есть ровно N фальшивых. Детектор за одну проверку определяет сумму номиналов всех настоящих купюр, входящих в выбранный нами набор. Докажите, что за N проверок можно найти все фальшивые купюры, если

3 — а) $N = 2$;

8 — б) $N = 3$.

Сергей Токарев

СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 23 октября 2022 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

5 1. Какой наибольший рациональный корень может иметь уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c — натуральные числа, не превосходящие 100?

Михаил Евдокимов

5 2. Даны два взаимно простых числа p, q, больших 1 и различающихся больше, чем на 1. Докажите, что найдется натуральное n, для которого

$$\text{НОК}(p+n, q+n) < \text{НОК}(p, q).$$

Михаил Малкин

6 3. Даны две концентрические окружности Ω и ω. Хорда AD окружности Ω касается ω. Внутри меньшего сегмента AD круга с границей Ω взята произвольная точка P. Касательные из P к окружности ω пересекают большую дугу AD окружности Ω в точках B и C. Отрезки BD и AC пересекаются в точке Q. Докажите, что отрезок PQ делит отрезок AD на две равные части.

Иван Кухарчук

7 4. В клетчатом квадрате между любыми двумя соседними по стороне клетками есть закрытая дверь. Жук начинает с какой-то клетки и ходит по клеткам, проходя через двери. Закрытую дверь он открывает в ту сторону, в которую идёт, и оставляет дверь открытой. Через открытую дверь жук может пройти только в ту сторону, в которую дверь была открыта. Докажите, что если жук в какой-либо момент захочет вернуться в исходную клетку, то он сможет это сделать.

Александр Перепечко

8 5. В бесконечной арифметической прогрессии, где все числа натуральные, нашлись два числа с одинаковой суммой цифр. Обязательно ли в ней найдётся ещё одно число с такой же суммой цифр?

Александр Шаповалов

6. Известно, что среди нескольких купюр, номиналы которых — попарно различные натуральные числа, есть ровно N фальшивых. Детектор за одну проверку определяет сумму номиналов всех настоящих купюр, входящих в выбранный нами набор. Докажите, что за N проверок можно найти все фальшивые купюры, если

2 а) $N = 2$;

7 б) $N = 3$.

Сергей Токарев

7. У N друзей есть круглая пицца. Разрешается провести не более 100 прямолинейных разрезов, не перекладывая части до окончания разрезаний, после чего распределить все получившиеся кусочки между всеми друзьями так, чтобы каждый получил суммарно одну и ту же долю пиццы по площади. Найдутся ли такие разрезания, если

5 а) $N = 201$;

5 б) $N = 400$?

Андрей Аржанцев

БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

1. [3] Можно ли расставить в клетках таблицы 6×6 числа, среди которых нет одинаковых, так, чтобы в каждом прямоугольнике 1×5 (как вертикальном, так и горизонтальном) сумма чисел была равна 2022 или 2023?

(*Е. Бакаев*)

Ответ: нельзя. **Решение**. Пусть это удалось. Числа в соседних углах различаются на 1, так как каждое из них дополняет четыре клетки между ними до прямоугольника 1×5. Пусть a – наименьшее число из угловых. Тогда в соседних с ним углах стоят числа $a + 1$. Противоречие.

2. [4] Существует ли натуральное число, которое можно представить в виде произведения двух палиндромов более чем 100 способами? (Палиндромом называется натуральное число, которое одинаково читается как слева направо, так и справа налево.)

(*Е. Бакаев*)

Ответ: существует. Рассмотрим палиндром $1_n = \underbrace{1\ldots1}_{n}$.

Способ 1. Если n кратно k, то 1_n делится на палиндром 1_k, причём частное – тоже палиндром, состоящий из единиц, разделённых группами из k – 1 нуля. Осталось выбрать число n, имеющее более 100 собственных делителей. Например, 2^{101}.

Замечание. Число 6_n делится не только на 1_k, но и на 2_k, 3_k и 6_k. Это позволяет уменьшить n до числа, имеющего более 25 собственных делителей, например, годится $n = 720 = 2^4\cdot3^2\cdot5$.

Идея способа 2. Заметим, что если при умножении палиндромов не происходит переносов из одного разряда в другой, то произведение – тоже палиндром. Рассмотрим произведение $11\cdot101\cdot1\underbrace{0\ldots0}_{3}1\cdot1\underbrace{0\ldots0}_{7}1\cdot1\underbrace{0\ldots0}_{15}1\cdot1\underbrace{0\ldots0}_{31}1\cdot1\underbrace{0\ldots0}_{63}1\cdot1\underbrace{0\ldots0}_{127}1 = 1_{256}$. Можно доказать, что при умножении любого числа этих сомножителей переносов не происходит и получается палиндром из нулей и единиц. Поскольку 8 множителей можно $2^7 = 128$ способами разбить на две группы, можно получить 128 различных (поскольку множители взаимно просты) представлений числа 1_{256} в виде произведения двух палиндромов.

Замечание 2. Соображения из замечания к способу 1 показывают, что годится число 6_{64}. Можно показать, что подходит даже число

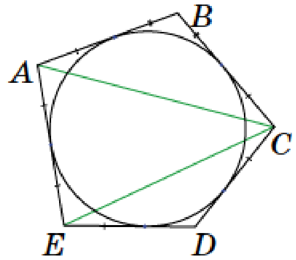
$$11\cdot101\cdot1001\cdot1\underbrace{0\ldots0}_{3}1\cdot1\underbrace{0\ldots0}_{4}1\cdot1\underbrace{0\ldots0}_{5}1\cdot1\underbrace{0\ldots0}_{6}1\cdot1\underbrace{0\ldots0}_{7}1.$$

3. [5] Пятиугольник $ABCDE$ описан около окружности. Углы при его вершинах A, C и E равны $100°$. Найдите угол ACE.

(*М. Евдокимов*)

Ответ: $40°$. Несложно понять, что такой пятиугольник существует.

Решение 1. Прямые, соединяющие вершины с центром O вписанной окружности ω, являются биссектрисами углов пятиугольника. Поэтому $\angle OAE = \angle OEA = 50°$, $\angle AOE = 80°$. Пусть ω касается сторон BC и AE в точках K и M соответственно. Тогда $\angle OCK = 50°$, и прямоугольные треугольники OMA, OKC и OME равны по катету и противолежащему углу. Значит, $OA = OC = OE$, т. е. точки A, C и E лежат на окружности с центром O. Следовательно, $\angle ACE = \frac{1}{2}\angle AOE = 40°$.



Решение 2. Так как углы A, C, E равны, все касательные к окружности из этих вершин равны. Поскольку касательные из вершины B тоже равны, треугольник ABC равнобедренный, и треугольник CDE тоже (аналогично). Сумма углов B и D равна $540° - 3\cdot100° = 240°$, поэтому $\angle ACB + \angle ECD = (2\cdot180° - 240°):2 = 60°$, а $\angle ACE = 100° - 60° = 40°$.

4. [5] Можно ли раскрасить все натуральные числа, большие 1, в три цвета (каждое число – в один цвет, все три цвета должны использоваться) так, чтобы цвет произведения любых двух чисел разного цвета отличался от цвета каждого из сомножителей?

(*М. Евдокимов*)

Ответ: нельзя. **Решение**. Пусть удалось раскрасить числа в синий, красный и зелёный цвета. Можно считать, что число 2 синее, а 4 не красное. Возьмём красное число k. Тогда число $2k$ зелёное, а $2\cdot(2k)$ красное. С другой стороны, $4\cdot k$ не красное. Противоречие.

5. [5] У Пети есть 8 монет, про которые он знает только, что 7 из них настоящие и весят одинаково, а одна фальшивая и отличается от настоящей по весу, неизвестно в какую сторону. У Васи есть чашечные весы – они показывают, какая чашка тяжелее, но не показывают, насколько. За каждое взвешивание Петя платит Васе (до взвешивания) одну монету из имеющихся у него. Если уплачена настоящая монета, Вася сообщит Пете верный результат взвешивания, а если фальшивая, то случайный. Петя хочет определить 5 настоящих монет и не отдать ни одну из этих монет Васе. Может ли Петя гарантированно этого добиться?

(*А. Грибалко, А. Заславский*)

Ответ: может. **Решение**. Обозначим монеты A, B, C, D, E, F, G, H. Петя отдаёт H и просит Васю сравнить $A + B$ с $C + D$.

1) Вася отвечает, что весы в равновесии. Тогда монеты A, B, C, D настоящие (независимо от того, какая монета досталась Васе). Петя отдаёт G за сравнение A с E. Если Вася ответит, что их веса не равны, то монета F настоящая. В противном случае монета E настоящая.

2) Вася отвечает, что $A + B$ тяжелее. Тогда монеты E, F, G настоящие. Петя отдаёт D за сравнение A с B. Если Вася отвечает, что их веса не равны, то более лёгкая из этих двух и монета C настоящие. В противном случае монеты A и B настоящие.

Случай, когда $C + D$ тяжелее рассматривается аналогично.

10–11 классы

1. [3] При каком наибольшем натуральном m число $m!\cdot 2022!$ будет факториалом натурального числа?

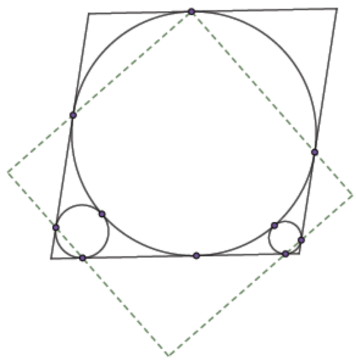
(*Б. Френкин*)

Ответ: при $m = 2022! - 1$.

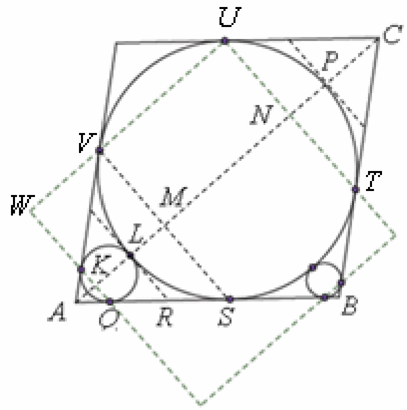
Решение. $(2022! - 1)!\cdot 2022! = (2022!)!$. Если $m \geq 2022!$, то $m! < m!\cdot 2022! < (m + 1)!$.

2. [5] Большая окружность вписана в ромб, каждая из двух меньших окружностей касается двух сторон ромба и большой окружности, как на рисунке справа. Через точки касания окружностей со сторонами ромба провели четыре штриховые прямые, как на рисунке. Докажите, что они образуют квадрат.

(*Е. Бакаев*)



Решение. Полученная фигура – прямоугольник, поскольку её стороны из симметрии перпендикулярны диагоналям ромба. Осталось проверить равенство его сторон. Для этого проведём несколько дополнительных прямых, перпендикулярных диагонали AC, и обозначим некоторые точки (см. рисунок).



Решение 1. Докажем, что $KL = LM$.

Способ 1. $RQ = RL = RS$ как касательные, проведённые из одной точки. Из равенства $RQ = RS$ по теореме Фалеса получаем $KL = LM$. □

Способ 2. $\angle KQL = \angle RQL$ (они измеряются половинами равных дуг), то есть QL – биссектриса угла KQR. Аналогично SL – биссектриса угла ASM. Следовательно. точка L равноудалена от прямых KQ, AB и SM, т.е. $KL = LM$. □

Далее, одна из сторон полученного в условии прямоугольника равна KN. Из симметрии $LM = NP$. Тогда $KN = LP$, то есть диаметру вписанной в ромб окружности.

Аналогично и другая сторона прямоугольника равна этому диаметру.

Решение 2. Рассмотрим гомотетию с центром L, переводящую маленькую окружность, вписанную в угол A, в большую окружность. Она переводит AQ в параллельную ей касательную к большой окружности, то есть в CU. При этом точка Q переходит в точку U, то есть точки Q, L, U лежат на одной прямой. Далее, $\angle VUL = \angle LUS$ как вписанные опирающиеся на симметричные дуги, поэтому прямоугольные треугольники QUW и QUS равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, $UW = US$. Аналогично и смежная с UW сторона полученного прямоугольника равна US.

3. [5] На прямой отмечено 2022 точки так, что каждые две соседние точки расположены на одинаковом расстоянии. Половина точек покрашена в красный цвет, а другая половина – в синий. Может ли сумма длин всевозможных отрезков, у которых левый конец красный, а правый – синий, равняться сумме длин всех отрезков, у которых левый конец синий, а правый – красный? (Концы рассматриваемых отрезков – не обязательно соседние отмеченные точки.)

(*А. Грибалко*)

Ответ: не может. **Решение**. Можно считать, что отмеченные точки – целые числа от 1 до 2022. Достаточно показать, что сумма S длин всех отрезков с разноцветными концами нечётна.

Способ 1. Пусть красно-чётных точек x, тогда красно-нечётных и сине-чётных – по $y = 1011 - x$, значит, сине-нечётных – x. «Разноцветные» отрезки чётной длины не влияют на чётность S, а количество таких отрезков нечётной длины равно $x^2 + y^2$. Осталось заметить, что числа x и y разной чётности.

Способ 2. Пусть k – координата красного конца отрезка, а c – синего. Заменим длину $|k - c|$ этого отрезка на $k + c$ – чётность S не изменится. Но теперь в сумме по всем «разноцветным» отрезкам каждое число встретится ровно 1011 раз, то есть сумма равна $1011(1 + 2 + ... + 2022)$. Она нечётна, так как в скобках 1011 нечётных слагаемых.

Способ 3. Приведём только идею. Можно проверить, что S чётна, для какой-то конкретной раскраски (например, когда слева направо идут сначала все синие точки, а потом все красные), после чего проверить, что чётность у S сохраняется, если менять местами цвета соседних точек.

4. [5] Дан остроугольный неравнобедренный треугольник. Одним действием разрешено разрезать один из имеющихся треугольников по медиане на два треугольника. Могут ли через несколько действий все треугольники оказаться равнобедренными?

(*Е. Бакаев*)

Ответ: не могут. **Решение**. Докажем, что всегда среди имеющихся треугольников найдется неравнобедренный непрямоугольный треугольник. В начальный момент это так.

Пусть на очередном ходе имеющийся неравнобедренный непрямоугольный треугольник ABC был разрезан по медиане BM. Так как он неравнобедренный, медиана BM не совпадает с высотой, то есть один из углов AMB, CMB – тупой. Пусть это угол AMB. Покажем, что AMB – нужный нам треугольник. Он тупоугольный (и значит, непрямоугольный). Так как $\angle ABC \neq 90°$, медиана BM не равна половине стороны AC, следовательно, $AM \neq BM$. Кроме того, $AB > AM$ и $AB > BM$ (AB – сторона напротив наибольшего угла в треугольнике AMB). Значит, треугольник AMB – неравнобедренный.

5. Доска $2N\times2N$ покрыта неперекрывающимися доминошками 1×2. По доске прошла *хромая* ладья, побывав на каждой клетке по одному разу (каждый ход хромой ладьи – на клетку, соседнюю по стороне). Назовём ход *продольным*, если это переход из одной клетки доминошки на другую клетку той же доминошки. Каково

а) [1] наибольшее;

б) [4] наименьшее возможное число продольных ходов?

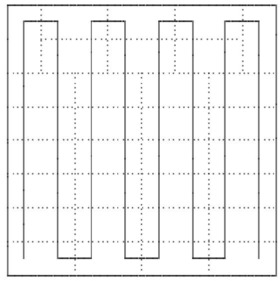
(*Б. Френкин*)

а) **Ответ:** $2N^2$ ходов. **Решение**. *Оценка*. Количество продольных ходов не превосходит количества $2N^2$ доминошек (так как в каждой доминошке не более одного продольного хода).

Пример. Возьмём любой обход ладьей и занумеруем клетки в порядке обхода. Пусть клетки $2k - 1$ и $2k$ образуют доминошку для всех k от 1 до $2N^2$. Тогда число продольных ходов равно числу доминошек.

б) **Ответ:** 1 ход при $N = 1$; 2 хода при $N \geq 2$. **Решение**. Случай $N = 1$ очевиден.

Пусть $N \geq 2$. *Оценка*. При проходе угла один из двух ходов будет продольным. Один угол может быть началом пути ладьи, другой – концом, а оставшиеся углы придётся проходить. Поэтому будет хотя бы два продольных хода.



Пример. Положим в верхние углы доски по вертикальной доминошке, а все остальные положим горизонтально. Пусть ладья идёт змейкой из левого нижнего угла (см. рисунок). Продольными будут лишь два хода – в вертикальных доминошках.

СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

8 – 9 классы

1. [4] Сто друзей, среди которых есть Петя и Вася, живут в нескольких городах. Петя узнал расстояние от своего города до города каждого из оставшихся 99 друзей и сложил эти 99 чисел. Аналогично поступил Вася. Петя получил 1000 км. Какое наибольшее число мог получить Вася? (Города считайте точками плоскости; если двое живут в одном и том же городе, расстояние между их городами считается равным нулю.)

Борис Френкин

Ответ. 99000 км.

Решение. *Оценка*. Пусть Вася живёт в городе V, а Петя – в городе P. Рассмотрим произвольного Васиного друга (это может быть и Петя), пусть он живёт в городе X. По неравенству треугольника $VX \leq PV + PX$, а эта сумма не больше суммы Пети, т. е. 1000 км. Значит, сумма расстояний от V до городов всех 99 друзей Васи не более $99 \cdot 1000$ км.

Пример. Все, кроме Васи, живут в одном городе, а Вася – в 1000 км от них.

2. Для каждого из чисел 1, 19, 199, 1999 и т. д. изготовили одну отдельную карточку и записали на ней это число.

а) [2] Можно ли выбрать не менее трёх карточек так, чтобы сумма чисел на них равнялась числу, все цифры которого, кроме одной, – двойки?

б) [3] Пусть выбрали несколько карточек так, что сумма чисел на них равна числу, все цифры которого, кроме одной, – двойки. Какой может быть его цифра, отличная от двойки?

Сергей Маркелов

а) **Ответ**. Можно. **Решение**. Например, 19 + 199 + 1999 + ... + 199999999 = 222222212.

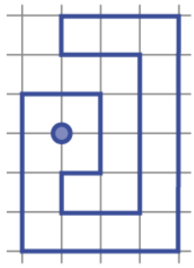
б) **Ответ**. 0 или 1. **Решение**. *Пример* с нулём: 1 + 19 = 20; *пример* с 1 дан в пункте **а**).

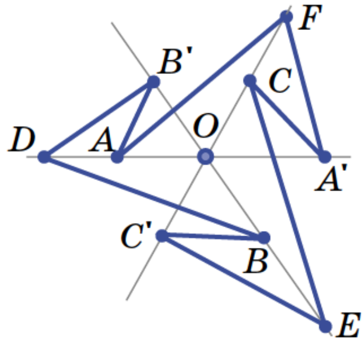
Оценка. Заметим, что $10^n \le \underbrace{19\ldots9}_{n} < 2\cdot10^n$. Поэтому сумма S чисел на выбранных k карточках удовлетворяет неравенству $E \le S < 2E$, где число E состоит из k единиц и, возможно, нескольких нулей. Значит, в записи S и $2E$ одинаковое количество цифр, причём хотя бы одна цифра числа S меньше соответствующей цифры числа $2E$, т. е. меньше 2. Это может быть только цифра 0 или 1.

Замечание. Как видно из решения, сумма чисел, начинающихся с единицы и имеющих попарно различное количество цифр, всегда содержит в своей записи 0 или 1.

3. [6] Барон Мюнхгаузен утверждает, что нарисовал многоугольник и точку внутри него так, что любая прямая, проходящая через эту точку, делит этот многоугольник на три многоугольника. Может ли барон быть прав?

Татьяна Казицына





Ответ: может. **Решение**. См. примеры справа. На втором рисунке существенно, что на одной прямой лежит тройка точек A, O, A', тройка B, O, B' и тройка C, O, C'.

4. [7] Пусть $n > 1$ – целое число. В одной из клеток бесконечной белой клетчатой доски стоит ладья. Каждым ходом она сдвигается по доске ровно на n клеток по вертикали или по горизонтали, закрашивая пройденные n клеток в чёрный цвет. Сделав несколько таких ходов, не проходя никакую клетку дважды, ладья вернулась в исходную клетку. Чёрные клетки образуют замкнутый контур. Докажите, что число белых клеток внутри этого контура даёт при делении на n остаток 1.

Александр Грибалко

Решение 1. Пусть сторона клеток доски равна 1. Отметим центр начальной клетки и центры всех клеток, до которых ладья может добраться за один или несколько ходов. Проведём через них синие прямые параллельно линиям сетки. Образуется вспомогательная синяя сетка, разбитая на клетки со стороной n. Если ладья прыгала из клетки A в клетку B, соединим центры этих клеток отрезком. Эти отрезки образуют замкнутый многоугольник; его вершины лежат в узлах синей сетки, а стороны идут по линиям синей сетки. Поэтому площадь многоугольника кратна n^2 (пусть она равна an^2). Периметр его кратен $2n$ (ведь шаги ладьи кратны n, причём сдвиги ладьи влево компенсируются сдвигами вправо, а сдвиги вверх – сдвигами вниз). Далее можно рассуждать по-разному.

Способ 1. Площадь многоугольника состоит из белой клетчатой части и из чёрной каёмки, окружающей белую часть. Разобьём контур многоугольника на отрезки между узлами синей сетки. К каждому из них изнутри прилегает чёрная прямоугольная полоска ширины $\frac{1}{2}$. Её площадь равна $\frac{n}{2}$. Так как число таких полосок чётно, их общая площадь – целое число, кратное n (пусть bn). Но эта «общая площадь» не совпадает с чёрной площадью внутри многоугольника. Несовпадения возникают из-за чёрных клеток в углах многоугольника: если угол равен 90°, то полоски перекрываются по четверти чёрной клетки; а при угле в 270° внутри остаётся четверть клетки, не покрытая полосками. Внешние углы многоугольника равны ±90°, а поскольку сумма внешних углов (с учётом знаков) равна 360°, то внешних углов в 90° на 4 больше, чем внешних углов в –90°, то есть внутренних углов в 90° на 4 больше, чем углов в 270°. Поэтому площадь чёрной каёмки внутри контура меньше суммарной площади полосок на 1. Значит, чёрная площадь внутри многоугольника равна bn – 1, а белая площадь внутри равна тогда $an^2 - (bn - 1) = n \cdot (an - b) + 1$. Но эта площадь равна числу белых клеток!

Способ 2. Проведём через центры всех клеток исходной доски красные прямые параллельно линиям сетки, образуется красная сетка с единичными клетками. Многоугольник, рассмотренный выше, – клетчатый многоугольник на этой сетке, поэтому количество Г красных узлов на его границе равно его периметру, а значит, кратно $2n$. Центром всякой клетки исходной доски является красный узел, поэтому такая клетка целиком лежит внутри этого многоугольника тогда и только тогда, когда внутри этого многоугольника лежит её центр. Поэтому количество В белых клеток внутри многоугольника равно количеству красных узлов внутри него. По формуле Пика для этого многоугольника и красной сетки, $В + \frac{Г}{2} - 1 = an^2$, откуда В $\equiv 1 \pmod{n}$.

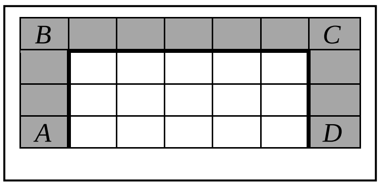
Решение 2. Назовём клетки, в которых может останавливаться ладья, *узлами*. Клетка является узлом, если до какого-то другого узла расстояние как по вертикали, так и по горизонтали кратно n. Чёрный контур вместе с белыми клетками внутри него образуют клетчатый многоугольник M.

Индукция по периметру M. *База*. Наименьший периметр равен $4(n + 1)$ у квадрата, внутри него находится $(n - 1)^2$ белых клеток.

Шаг индукции. Пусть периметр больше $4(n + 1)$.

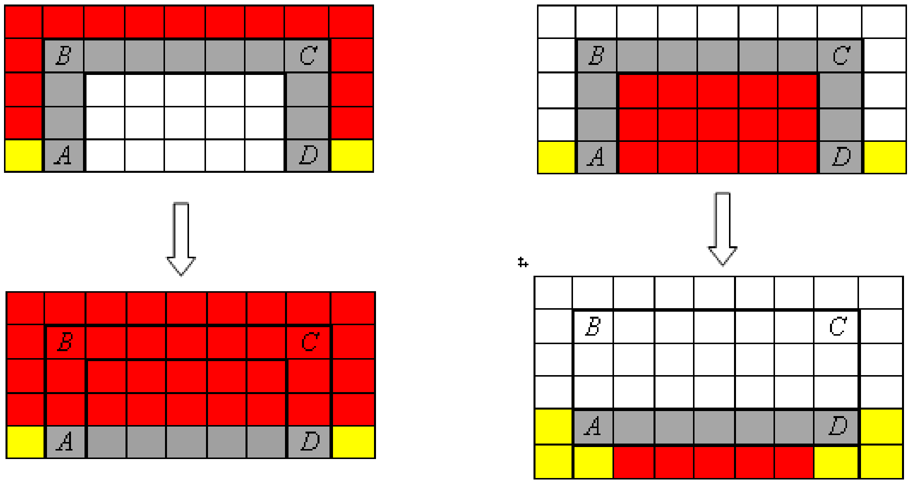
Способ 1. Тогда найдётся клетчатая вертикаль или горизонталь, содержащая узлы, по обе стороны от которой есть чёрные клетки. Она содержит несколько интервалов внутренних белых клеток с концами в чёрных узлах. Выберем любой из этих интервалов, он разбивает чёрный контур на два контура меньшей длины. По предположению индукции внутри каждого из них число белых клеток сравнимо с 1, а на «разбивающем» интервале сравнимо с –1 по модулю n. Поэтому число белых клеток внутри исходного контура сравнимо с $1 + 1 - 1 = 1 \pmod{n}$.

Способ 2. Многоугольник M имеет выпуклые (90°) и невыпуклые (270°) углы. Назовём сторону многоугольника *крайней*, если она соединяет два равных угла этого многоугольника. Крайние стороны, очевидно, есть, пусть BC – участок пути, соответствующий кратчайшей из них. Без ограничения общности можно считать, что он горизонтален, а ладья пришла в B снизу из ближайшего узла A и ушла из C вниз в ближайший узел D (см. рисунок справа, где n = 3).



Если из D контур поворачивает в сторону A (или из A в сторону D), то CD – крайняя сторона. Значит, $BC = CD$, то есть $ABCD$ – минимальный квадрат, что противоречит рассматриваемому случаю.

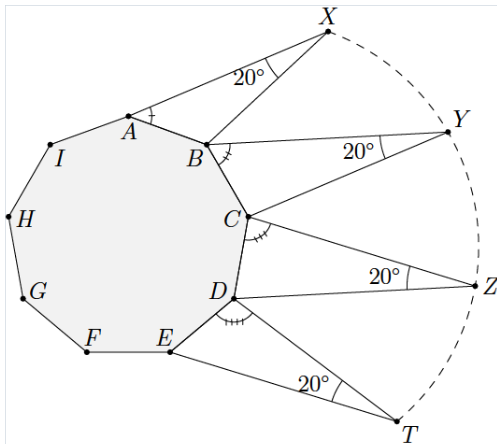
В противном случае внутри «отрезка» AD нет других участков пути ладьи: такой участок обязан быть крайним (путь вверх из его концов невозможен), но это противоречит выбору BC. Таким образом, все клетки между A и D белые либо все они лежат вне многоугольника. Заменим часть пути *ABCD* «отрезком» *AB*. При этом многоугольник *M* потеряет (рис. слева) либо приобретет (рис. справа) белый прямоугольник высоты *n*, то есть, количество белых клеток по модулю *n* не изменится. (На рисунках красные клетки заведомо лежат вне многоугольника, а где лежат жёлтые клетки зависит от того, куда продолжается чёрный контур из точек *A* и *D*.)



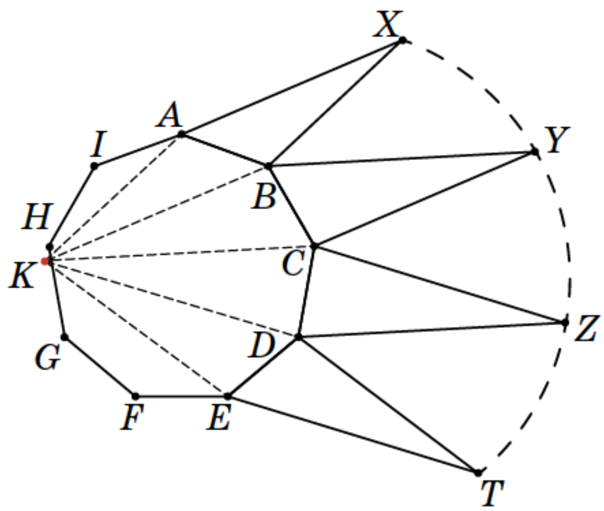
В обоих случаях периметр много-угольника уменьшится, поэтому по предположению индукции число белых клеток в нём сравнимо с 1 по модулю *n*.

5. [9] На сторонах правильного девятиугольника *ABCDEFGHI* во внешнюю сторону построили треугольники *XAB*, *YBC*, *ZCD* и *TDE*. Известно, что углы *X*, *Y*, *Z*, *T* этих треугольников равны 20° каждый, а среди углов *XAB*, *YBC*, *ZCD* и *TDE* каждый следующий на 20° больше предыдущего. Докажите, что точки *X*, *Y*, *Z*, *T* лежат на одной окружности.

Егор Бакаев



Решение 1. Отразив точку *X* относительно середины *AB*, получим точку *K*, лежащую на большей дуге *AC* описанной окружности девятиугольника (вписанный угол, опирающийся на хорду *AB*, равен 20°, а $\angle KBA = \angle XAB = \angle YBC - 20° < 160° - 20° = \angle CBA$). Далее, $\angle KCB = \angle KCA + \angle ACB = \angle KBA + 20° = \angle XAB + 20° = \angle YBC$. Значит, треугольники *KCB* и *YBC* равны по углам и стороне. Поэтому точка *Y* симметрична точке *K* относительно середины *BC*. Аналогично точки *Z* и *T* симметричны точке *K* относительно середин *CD* и *DE* соответственно. Следовательно, точки *X*, *Y*, *Z*, *T* лежат на окружности, получающейся из окружности, проходящей через середины сторон девятиугольника гомотетией с центром *K* и коэффициентом 2.



Решение 2 (конспект). Пусть O – центр девятиугольника, O_X, O_Y, O_Z, O_T – центры описанных окружностей Ω_X, Ω_Y, Ω_Z, Ω_T треугольников XAB, YBC, ZCD, TDE соответственно. Указанные описанные окружности равны в силу равенства хорд AB, BC, CD и DE и опирающихся на них вписанных углов, поэтому точки O_X, O_Y, O_Z, O_T лежат на окружности Ω с центром O.

При повороте вокруг O на $360°:9 = 40°$ по часовой стрелке, Ω_X переходит в Ω_Y, а треугольник XAB – в треугольник $X'BC$, вписанный в Ω_Y. По условию, $\angle YBX' = 20°$, откуда $\angle YO_YX' = 40°$. Таким образом, вектор $\overrightarrow{O_X X}$ переходит в $\overrightarrow{O_Y Y}$ при композиции двух поворотов вокруг O на $40°$ в *разных* направлениях. Следовательно, $\overrightarrow{O_Y Y} = \overrightarrow{O_X X}$. Аналогично $\overrightarrow{O_T T} = \overrightarrow{O_Z Z} = \overrightarrow{O_Y Y}$. Значит, точки X, Y, Z, T лежат на окружности, получающейся из Ω сдвигом на вектор $\overrightarrow{O_X X}$.

6. [10] Петя прибавил к натуральному числу N натуральное число M и заметил, что сумма цифр у результата та же, что и у N. Тогда он снова прибавил M к результату, потом – ещё раз, и т. д. Обязательно ли он когда-нибудь снова получит число с той же суммой цифр, что и у N?

Александр Шаповалов

Ответ: не обязательно. **Решение**. *Пример*. Пусть $N = 2$, $M = 1008$. Число M кратно 16, поэтому все полученные Петей числа дают остаток 2 mod 16. Число с суммой цифр 2 представляется как сумма двух степеней десятки. Степени 1, 10, 10^2 и 10^3 дают остатки 1, 10, 4 и 8 при делении на 16, остальные степени кратны 16. Остаток 2 можно получить лишь двумя способами: 1 + 1 или 10 + 8, они соответствуют числам 2 и 1010. Значит, других чисел с суммой цифр 2 Петя получить не сможет.

7. Известно, что среди нескольких купюр, номиналы которых – попарно различные натуральные числа, есть ровно N фальшивых. Детектор за одну проверку определяет сумму номиналов всех настоящих купюр, входящих в выбранный нами набор. Докажите, что за N проверок можно найти все фальшивые купюры, если **а**) [3] $N = 2$; **б**) [8] $N = 3$.

Сергей Токарев

Решение. Можно считать, что детектор выдаёт сумму номиналов *фальшивых* купюр в проверяемом наборе. Первая проверка – весь набор – даст сумму S номиналов всех фальшивых.

а) Вторая проверка – все купюры, меньшие $\frac{S}{2}$, – даст число X. В этом наборе ровно одна фальшивая, поэтому купюры с номиналами X и $S - X$ фальшивые.

Замечание. Во вторую проверку можно было взять по купюре из каждой пары с суммой S.

б) Назовём купюры и числа, меньшие $\frac{S}{3}$, *мелкими*, а остальные – *крупными*.

Вторая проверка – все мелкие купюры – даст число M. Теперь известна и сумма номиналов $K = S - M$ крупных фальшивых купюр. Заметим, что фальшивые есть и среди мелких, и среди крупных купюр. Поэтому возможны два вида троек фальшивых купюр:

(M_1, M_2, K), где числа M_1 и M_2 мелкие с суммой M, и (M, K_1, K_2), где K_1 и K_2 крупные с суммой K, а M мелкое.

Третья проверка – все купюры, меньшие $\frac{M}{2}$, и все крупные, меньшие $\frac{K}{2}$, – даст число X. Видно, что в этом наборе ровно одна фальшивая купюра. Поэтому, если число X мелкое, то тройка фальшивых – это (X, $M - X$, K), а если крупное, то – (M, X, $K - X$).

Замечание. Во вторую проверку можно взять наименьшую купюру от каждой тройки с суммой S. В третью проверку можно взять по одной купюре из каждой пары мелких с суммой M и из каждой пары крупных с суммой K.

Вариация решения пункта б).

Первая проверка – все купюры. После неё мы узнаем сумму номиналов всех настоящих купюр, а значит, и сумму номиналов всех фальшивых. Обозначим эту сумму через S_1. Построим таблицу, в которой три столбца, а в строках записаны в порядке возрастания все возможные тройки чисел, равные номиналам купюр, которые дают в сумме S_1.

Вторая проверка – все купюры, номиналы которых попали в первый столбец таблицы. После этой проверки мы будем знать сумму номиналов некоторых купюр в «фальшивой» тройке. Пусть эта сумма равна S_2. В неё точно входит число из первого столбца, так как соответствующая купюра участвовала в проверке. Также в неё может входить число из второго столбца. А вот числа из третьего столбца в ней точно нет, поскольку все числа первого столбца меньше $S_1/3$, а третьего – больше $S_1/3$, поэтому ни одно из чисел третьего столбца не может присутствовать в первом. Удалим из таблицы все строки, в которых ни первое число, ни сумма первого и второго не равны S_2.

Третья проверка – все купюры, номиналы которых находятся во втором столбце оставшейся таблицы. Заметим, что в каждой строке либо первое число равно S_2 и тогда второе число больше S_2, либо сумма первого и второго числа равна S_2 и тогда первое число меньше $S_2/2$, а второе – больше $S_2/2$, но меньше S_2. Значит, никакое число из первого столбца не может стоять во втором столбце. Кроме того, из этого следует, что все числа во втором столбце различны, иначе соответствующие тройки полностью совпадали бы.

Докажем, что и числа из третьего столбца не могли попасть во второй столбец. Предположим, что это не так, и в тройках (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) совпадают числа a_3 и b_2. Тогда $a_1 < a_2 < a_3 = b_2 < b_3$, а так как $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = S_1$, то $b_1 < a_1 < b_1 + b_2$ и $a_1 + a_2 > b_1 + b_2 > b_1$. Это противоречит тому, что в обеих тройках есть числа с суммой S_2.

Таким образом, результатом третьей проверки является номинал второй купюры в «фальшивой» тройке. А так как мы уже доказали, что во втором столбце нет равных чисел, то мы однозначно определим эту тройку.

10–11 классы

1. [5] Какой наибольший рациональный корень может иметь уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c – натуральные числа, не превосходящие 100?

Михаил Евдокимов

Ответ: $-\frac{1}{99}$. **Решение**. Заметим, что $-\frac{1}{99}$ – корень уравнения $99x^2 + 100x + 1 = 0$.

Докажем максимальность. Ясно, что корень x такого уравнения, как в условии, отрицателен. Пусть $|x| < \frac{1}{99}$. Тогда знаменатель q несократимой дроби $|x|$ больше 99. Но, как известно, q – делитель старшего коэффициента a, то есть он не больше 100. Значит, $q = 100$, а $|x| = 0{,}01$. Следовательно, $ax^2 + bx + c > 0 - 100\cdot 0{,}01 + 1 = 0$. Противоречие.

2. [5] Даны два взаимно простых числа p, q, больших 1 и различающихся больше, чем на 1. Докажите, что найдётся натуральное n, для которого НОК$(p + n, q + n) <$ НОК(p, q).

Михаил Малкин

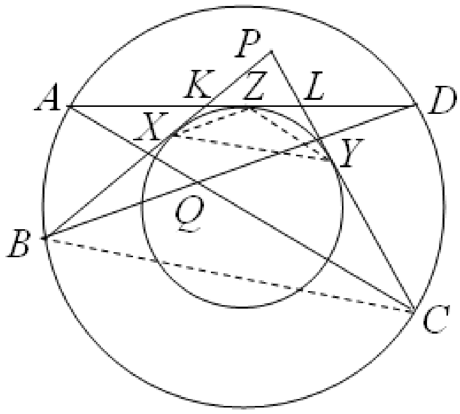
Решение. Можно считать, что число $m = q - p$ не меньше 2. При этом НОД(p, m) = =НОД$(p, q) = 1$. Числа p и q сравнимы по модулю m, но не кратны m, значит, после увеличения их на некоторое натуральное число $n < m$, станут кратными m.

Докажем, что такое n будет искомым. Заметим, что $(p - 1)(q - 1) > 1\cdot m \geq n + 1$, то есть $pq > p + q + n$. Поэтому $pqm \geq pq(1 + n) > pq + n(p + q + n) = (p + n)(q + n)$.

Поделив на m = НОД$(p + n, m)$ = НОД$(p + n, q + n)$, получим $pq >$ НОК$(p + n, q + n)$.

3. [6] Даны две концентрические окружности Ω и ω. Хорда AD окружности Ω касается ω. Внутри меньшего сегмента AD круга с границей Ω взята произвольная точка P. Касательные из P к окружности ω пересекают большую дугу AD окружности Ω в точках B и C. Отрезки BD и AC пересекаются в точке Q. Докажите, что отрезок PQ делит отрезок AD на две равные части.

Иван Кухарчук



Решение. Пусть O – центр окружностей, AD касается ω в точке Z, а PB и PC касаются ω в точках X и Y и пересекают AD в точках K и L соответственно. Точки A и D симметричны относительно OZ, поэтому Z – середина AD.

Касательные PX и PY симметричны относительно PO, значит, $XY \parallel BC$. Аналогично $XZ \parallel BD$, $ZY \parallel AC$. Рассмотрим гомотетию с центром P, переводящую отрезок BC в XY. Она переводит точку пересечения Q прямых BD и AC в точку пересечения параллельных им прямых XZ и YZ, то есть в точку Z. Следовательно, точки P, Z и Q лежат на одной прямой, что и требовалось.

4. [7] В клетчатом квадрате между каждыми двумя соседними по стороне клетками есть закрытая дверь. Жук начинает с какой-то клетки и ходит по клеткам, проходя через двери. Закрытую дверь он открывает в ту сторону, в которую идёт, и оставляет дверь открытой. Через открытую дверь жук может пройти только в ту сторону, в которую дверь была открыта. Докажите, что если жук в какой-либо момент захочет вернуться в исходную клетку, то он сможет это сделать.

Александр Перепечко

Решение. Если до какой-то закрытой двери можно добраться, направим жука к ней и откроем. Продолжим этот процесс. Общее количество закрытых дверей уменьшается, значит, в некоторый *прекрасный* момент не останется закрытых дверей, до которых можно дойти.

Предположим, что в этот момент осталось непустое множество N недостижимых клеток. Оставшиеся клетки образуют множество D достижимых клеток. Заметим, что все двери между N и D открыты в сторону D. Ясно, что таких дверей хотя бы две. Это значит, что жук когда-то открыл одну из них, попал в D, а потом смог вернуться в N, чтобы открыть вторую дверь. Но нет двери, через которую он мог попасть в N. Противоречие.

Следовательно, в прекрасный момент все клетки достижимы и жук может вернуться в исходную клетку.

Замечание. Аналогично решается задача, где жук гуляет по произвольному графу *без мостов*, рисуя стрелки на рёбрах в направлении их прохода, с запретом ходить против стрелок.

5. [8] В бесконечной арифметической прогрессии, где все числа натуральные, нашлись два числа с одинаковой суммой цифр. Обязательно ли в ней найдётся ещё одно число с такой же суммой цифр?

Александр Шаповалов

Ответ. Не обязательно. **Решение**. См. задачу 6 для 8–9 классов.

6. [2 + 7] См. задачу 7 для 8–9 классов.

7. У N друзей есть круглая пицца. Разрешается провести не более 100 прямолинейных разрезов, не перекладывая части до окончания разрезаний, после чего распределить все получившиеся кусочки между всеми друзьями так, чтобы каждый получил суммарно одну и ту же долю пиццы по площади. Найдутся ли такие разрезания, если

а) [5] $N = 201$; **б**) [5] $N = 400$?

Андрей Аржанцев

Ответ: найдутся. **Решение**. **а**) Пусть площадь пиццы равна 201. Тогда площадь вписанного в неё квадрата равна $\frac{402}{\pi} > 121$. Нарисуем внутри пиццы квадрат со стороной 11 так, чтобы центры квадрата и пиццы совпали. Проведя по 12 разрезов, параллельных сторонам квадрата, получим 121 кусок 1×1. Мысленно склеим куски пиццы вне квадрата и разобьём эту фигуру 40 разрезами через центр на 80 равновеликих кусков (в силу непрерывности это можно сделать, вращая диаметр). Всего хватило 64 разреза.

б) Пусть площадь пиццы равна 400. Тогда площадь вписанного правильного шестиугольника равна $\frac{600\sqrt{3}}{\pi} > 294$. Нарисуем внутри пиццы правильный шестиугольник площади 294 так, чтобы его центр и центр пиццы совпали. Отметим вершины и точки на сторонах шестиугольника так, чтобы каждая сторона разбилась на

7 равных частей. Если провести разрезы, параллельные сторонам шестиугольника через все отмеченные точки (всего таких разрезов $3 \cdot 15 = 45$), разобьём шестиугольник на $6 \cdot 7^2 = 294$ равных правильных треугольника площади 1. Мысленно склеим куски пиццы вне шестиугольника и разобьём эту фигуру 53 разрезами через центр на 106 равновеликих кусков. Всего хватило 98 разрезов.

Замечание. Количество разрезов можно сильно уменьшить, если воспользоваться следующей общей идеей. Положим пиццу нужной площади на единичную сетку, совместив центр пиццы с центром одной из клеток. Проведём все разрезы по линиям сетки, пересекающим пиццу. В результате она разрежется на единичные порции и кусочки по краям, составляющие каёмку. С каемкой поступим, как в вышеизложенном решении. Но по сравнению с ним площадь каемки сильно уменьшится и разрезов потребуется меньше. Например, в пункте а), положив пиццу на квадрат 15×15 и проведя 32 разреза по линиям сетки, мы обнаружим, что кроме квадрата 11×11, она содержит ещё 56 клеток. Площадь каёмки будет равна 24, поэтому всего потребуется $32 + 12 = 44$ разреза.