БЕРНУЛИЈЕВА НЕЈЕДНАКОСТ

Видан Говедарица и Милан Јовановић, Електротехнички факултет, Бањалука

1. Једна од најпознатијих и често коришћених неједнакости је Бернулијева неједнакост (Jacob Bernoulli, 1654-1705):

За сваки природан број n и сваки реалан број x, такав да је $x \geq -1$, вриједи

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \tag{1}$$

при чему за $x \neq 0$ и $n \neq 1$ вриједи строга неједнакост.

Она се појавила 1689. године иако је била позната и раније Њутновом учитељу Бароуу (Isaak Barrow, 1630-1677). У блиској је вези са чувеном неједнакошћу између аритметичке и геометријске средине

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \tag{2}$$

n позитивних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Наиме, у [2] се доказ неједнакости (2) своди на Бернулијеву неједнакост. С друге стране, узимајући у (2) да је $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 1$, $a_n = 1+nx$, добијамо (1) за $1+nx > 0$ (ако је $1+nx \leq 0$ неједнакост је очигледна).

Неједнакост (1) се користи за доказивање монотоности и ограничености многих низова, међу којима је и добро познати низ $n \to \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

2. Бернулијева неједнакост се обично доказује математичком индукцијом, при чему је "проблематичан" индуктивни корак (одбацивање сабирка nx^2). Зато ћемо ми поступити овако.

Означимо неједнакост (1) са $B(n)$. Довољно је доказати тачност формула:

(а) $B(1)$,
(б) $(\forall n \in N) B(n) \Rightarrow B(n+1)$.

Јасно, $B(1)$ је тачна.Даље, претпоставимо да (б) не вриједи, тј. да постоји $m \in N$ такав да вриједи $B(m)$ и не вриједи $B(m+1)$. Сада, из $B(m)$ и $1+x \geq 0$ слиједи $(1+x)^{m+1} \geq (1+mx)(1+x)$. Посљедња неједнакост и $\neg B(m+1)$ дају

$$(1+mx)(1+x) < 1+(m+1)x,$$

односно, $mx^2 < 0$. Значи, m са наведеном особином не постоји, па вриједи (б).

3. Означимо са B скуп свих реалних бројева x таквих да је $B(n)$ тачна за сваки $n \in N$. Виђели смо да је

$$[-1, +\infty) \subset B.$$

Лако се показује да је и $[-2, -1) \subset B$. Заиста, за $x \in [-2, 1)$ имамо

$$(1+x)^n \geq -|1+x|^n \geq -|1+x| = 1+x \geq 1+nx;$$

па је $[-2,+\infty) \subset B$.

Показаћемо да је

$$B = [-2,+\infty). \tag{3}$$

Како је очигледно да $B(2n)$ вриједи за сваки $x \in R$ и сваки $n \in N$ нека је

$$f_n(x) = (1+x)^{2n+1} - 1 - (2n+1)x.$$

Из

$$f_n(x) - f_n(y) = (x-y)((1+x)^{2n} + (1+x)^{2n-1}(1+y) + \cdots + (1+y)^{2n} - 2n - 1)$$

слиједи да је за $x < y < -2$ $f_n(x) - f_n(y) < 0$ (због $|1+x| > 1$ и $|1+y| > 1$), па f_n строго расте на $(-\infty,-2]$. Исто тако, f_n строго опада на $[-2,0]$. Пошто је f_n непрекидна, $f_n(-3) = -2(4^n - 3n - 1) \leq 0$, $f_n(-2) = 4n > 0$ и $f_n(0) = 0$ слиједи да f_n има јединствену негативну нулу x_n која припада интервалу $[-3,-2)$. При томе је

$$f_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq x_n$$

па је

$$B = \bigcap_{n \in N} \{x \in R | x \geq x_n\}.$$

Сада (3) слиједи из сљедећих особина низа x_n: за сваки $n \in N$ вриједи

$$x_n < -2 - \frac{1}{2n+1}, \tag{4}$$

$$x_n < x_{n+1}, \tag{5}$$

$$\lim x_n = -2. \tag{6}$$

Прецизније, (3) слиједи из (5) и (6).

4. И докази особина (4), (5) и (6) су засновани на Бернулијевој неједнакости. Из $B(n+1)$ за $x = -\frac{1}{2n+2}$ добијамо да је

$$\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} < 4. \tag{7}$$

Претпоставимо да за неки $n \in N$ не вриједи (4). Тада је за такво n

$$(1+x_n)^{2n+1} > -\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1},$$

одакле, због (7) и $f_n(x_n) = 0$ имамо

$$1 + (2n+1)x_n > -4,$$

тј.

$$x_n > \frac{-5}{2n+1} > -2.$$

Контрадикција. Дакле, вриједи (4).

Како је

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_n) &= (1+x_n)^{2n+3} - 1 - (2n+3)x_n = (1+x_n)^2(1+(2n+1)x_n) - \\ &- (1+(2n+1)x_n) - 2x_n = x_n^2(1+(2n+1)(x_n+2)), \end{aligned}$$

из (4) слиједи да је

$$f_{n+1}(x_n) < 0 = f_{n+1}(x_{n+1}).$$

Пошто f_{n+1} строго расте на $[-3,2)$, вриједи (5).

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољан и $n > 4$ непаран такав да је $\frac{1}{n} < \varepsilon$. На основу сљедећих неједнакости

$$B(n^2) \text{ при } x = \frac{1}{n},\ (1+n)^n \geq n^4,\ n^2 - 1 < n^3$$

за $m = \frac{n^3-1}{2}$ имамо

$$\begin{aligned} f_m(-2-\frac{1}{n}) &= -\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^3} - 1 + n^3\left(2+\frac{1}{n}\right) < \\ &< -(1+n)^n + 3n^3 < -n^4 + 3n^3 < 0 = f_m(x_m). \end{aligned}$$

Одавде, на основу (5), слиједи да је за сваки $k \geq m$

$$-2-\frac{1}{n} < x_m \leq x_k < -2,$$

тј. $x_k \in (-2-\varepsilon, -2+\varepsilon)$, па вриједи (6).

5. У [1] је показано да вриједи

$$x_n \sim -2 - \frac{\ln n}{2n},$$

тј. да је $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{-2-\frac{\ln n}{2n}} = 1$.

Занимљива је сљедећа веза између x_n и $\pi(n)$

$$\pi(n) \sim -\frac{1}{2(2+x_n)},$$

гдје је $\pi(n)$ број простих бројева не већих од n. У вези са овим упоредити сљедећу табелу са табелом датом у [5].

n	x_n	$-2-\frac{\ln n}{2n}$
10	-2.19896405	-2.11512926
100	-2.03034718	-2.02302585
1000	-2.00415722	-2.00345388
10000	-2.00052996	-2.00046052
100000	-2.00006405	-2.00005757
1000000	-2.00000760	-2.00000691
10000000	-2.00000086	-2.00000081
80000000	-2.00000012	-2.00000011

На крају, ево неколико задатака за вјежбу.

1. Доказати да за $a > 0$ и $n \in N$ вриједи

$$a^n + \frac{n}{a} \geq n + 1. \tag{8}$$

2. Доказати да за природан број $n > 1$ вриједи

   (а) $(n+1)^{n-1}(n-1)^{n+1} < n^{2n} < (n-1)^{n-1}(n+1)^{n+1}$,

   (б) $n^{2n-1} < (n+1)^n(n-1)^{n-1}$,

   (в) $n^{2n+1} > (n+1)^{n+1}(n-1)^n$.

   Напомена. За $n = 10^6$ из лијеве стране неједнакости (а) се добија задатак **M17**, Тангента, 3(1995/96).

3. ([4]) Доказати неједнакост

$$3^n + 4^n + \cdots + (n+2)^n \leq (n+3)^n.$$

4. Математичком индукцијом доказати неједнакост између аритметичке и геометријске средине, тако што се у индуктивном кораку примјени индуктивна претпоставка на n-орку $(aa_1, aa_2, \ldots, aa_n)$, гдје је

$$a = \sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{G_{n+1}}}, G_{n+1} = \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}},$$

па затим искористити неједнакост (8).

6. Литература

[1] V. Govedarica and M. Jovanović, Some remarks on the Bernoulli inequality, Bull. Soc. Math. Banja Luka, 4 (1997), 33-35.

[2] D. J. Newman, Arithmetic, geometric mean inequality, Amer. Math. Monthly, 67 (1960), 886.

[3] Р. Ного, Задатак **M17**, Тангента, 3(1995/96).

[4] В. А. Садовничий, А. А. Грирорьйан, С. В. Конягин, Задачи студенческих математических олимпиад, МГУ, 1987.

[5] Р. Тошић, Прости бројеви, Тангента, 1(1995/96), 20-31.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 1999/00 година