Зоран Мисајлески
Скопје

КАДЕ Е ГРЕШКАТА?

Математиката е прецизна наука, но содржи голем број на правила и теореми кои бараат исполнување на повеќе услови за нивна примена. Затоа може да се случи некои теореми погрешно да се применат и да се добие погрешен резултат.

Во продолжение се дадени погрешни постапки во решавањето на 11 задачи, а потоа е објаснет пропустот и е презентирана точната постапка.

Задача 1. Каде е грешката:

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^4}{6x^2-1} \overset{LP}{=} \lim_{x\to 1}\frac{20x^3}{12x} = \lim_{x\to 1}\frac{5}{3}x^2 = \frac{5}{3}.$$

Решение. Грешката е во првото равенство. Во дадената граница не може да се примени Лопиталовото правило, затоа што немаме неопределен облик. Границата е директно пресметлива:

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^4}{6x^2-1} = \frac{5}{6-1} = 1. \ \blacksquare$$

Задача 2. Каде е грешката?

$$\lim_{x\to 0}(1+\cos x)^{x+1} = \lim_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}(x+1)\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}((1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}})^{\lim\limits_{x\to 0}(x+1)\cos x} = e^{(0+1)\cos 0} = e$$

Решение. Не важи третото равенство. Имено, кога $x\to 0$, следува: $\cos x\to 1$, па дадената граница не може да ја сведеме на границата $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Точната постапка е:

$$\lim_{x\to 0}(1+\cos x)^{x+1} = (1+\cos 0)^{0+1} = 2. \ \blacksquare$$

Задача 3. Каде е грешката:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} 1 = 1.$$

Решение. Не важи првото равенство, бидејќи границите од функциите во броителот и во именителот треба истовремено да ги пресметаме. Точната постапка е:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty\,.\ \blacksquare$$

Задача 4. Каде е грешката:

$$x=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{x\ \text{пати}}\overset{1}{\Rightarrow}x^2=\underbrace{x+x+\ldots+x}_{x\ \text{пати}}\overset{2}{\Rightarrow}$$

$$(x^2)'=(\underbrace{x+x+\ldots+x}_{x\ \text{пати}})'\overset{3}{\Rightarrow}$$

$$2x=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{x\ \text{пати}}\overset{4}{\Rightarrow}2x=x\overset{5}{\Rightarrow}2=1\,.$$

Решение. Грешката е во чекор 3. Од првото равенство:

$$x=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{x\ \text{пати}},$$

следува дека x е природен број, односно константа. Затоа,

$$(x^2)'=0\ \text{и}\ (\underbrace{x+x+\ldots+x}_{x\ \text{пати}})'=0\,.\ \blacksquare$$

Задача 5. Каде е грешката:

$$\int\operatorname{tg}x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\begin{pmatrix} u=\frac{1}{\cos x} & dv=\sin x\,dx\\ du=\frac{1}{\cos^2 x}\sin x\,dx & v=-\cos x\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{\cos x}\cos x+\int\cos x\frac{1}{\cos^2 x}\sin x\,dx \qquad (1)$$

$$=-1+\int\operatorname{tg}x\,dx$$

Следува:

$$\int\operatorname{tg}x\,dx=-1+\int\operatorname{tg}x\,dx \qquad (2),$$

од каде што добиваме дека:

$$0=-1 \qquad (3).$$

Решение. Грешката е во чекор (3). Имено, равенството:

$$\int\operatorname{tg}x\,dx=-1+\int\operatorname{tg}x\,dx$$

претставува равенство меѓу множества,

$$\{F(x)+C \mid C\in\mathbb{R}\}=\{-1+F(x)+C \mid C\in\mathbb{R}\},$$

каде што $F(x)$ е една примитивна функција на $f(x)=tgx$, од каде што, следува дека:

$$F(x)+C_1=-1+F(x)+C,$$

за некои константи $C, C_1\in\mathbb{R}$. Оттука важи:

$$C_1=-1+C.$$

Па, во (3) би добиле:

$$F(x)-1+C=-1+F(x)+C \text{ т.е. } 0=0. \blacksquare$$

Задача 6. Каде е грешката? Од една страна:

$$\int -2\sin 2x dx=-2\frac{-\cos 2x}{2}=\cos 2x+C \quad (1)$$

додека од друга:

$$\int -2\sin 2x dx=-2\int 2\sin x\cos dx=\begin{pmatrix}\cos x=t\\ -\sin x dx=dt\end{pmatrix}$$
$$=4\int t dt=4\frac{t^2}{2}+C=2\cos^2 x+C \quad (2)$$

Следува:

$$\cos 2x=2\cos^2 x \quad (3)$$

Но, тогаш за $x=0$ би добиле:

$$1=2 \quad (4)$$

Решение. Грешката е во чекор (3). Неопределениот интеграл претставува множество функции од кои секои две се разликуваат за константа. Затоа, од (1) и (2) би следувало дека:

$$\cos 2x+C=2\cos^2 x+C_2$$

за некои константи C и C_2. Тогаш, за $x=0$ би добиле:

$$1+C=2+C_2, \text{ односно } C_2=C-1;$$

па точното равенство би било:

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1. \blacksquare$$

Задача 7*. Интегралот: $I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin x}dx$ се решава со смената:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t, \text{ од каде што } \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \text{ и } dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Заради:

$$\int \frac{1}{2+\sin x}dx = \int \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t^2+t+1}dt = \int \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dt$$

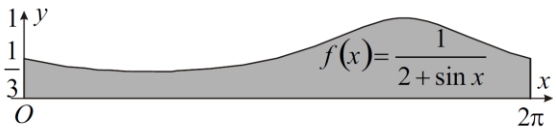
$$= \begin{pmatrix} t+\frac{1}{2}=k \\ dt=dk \end{pmatrix} = \int \frac{1}{k^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2k}{\sqrt{3}}+C \qquad (1)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C$$

следува:

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}) = 0 \qquad (2)$$

Но знаеме дека подинтегралната функција е позитивна (види цртеж 1), од каде следува дека и интегралот е позитивен.



цртеж 1

Решение. Грешката е во заклучокот (2). Не може да се примени формулата на Њутн-Лајбниц затоа што (1) не е примитивна функција на подинтегралната функција на интервалот $[0,2\pi]$. Имено смената $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ја скратува дефиниционата област во точките во кои тангенсот не е дефиниран, односно за интервалот $[0,2\pi]$ во точката $x=\pi$, па решението (1) се однесува на секој од интервалите $[0,\pi)$ и $(\pi,2\pi]$, но не и на $[0,2\pi]$. Може да се каже дека задачата за пресметување на неопределениот интеграл не е довршена. Ќе го најдеме неопределениот интеграл на интервалот $[0,2\pi]$. Утврдивме дека примитивните функции имаат облик:

$$F_1(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C_1,\ x\in[0,\pi) \text{ и}$$

$$F_2(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C_1,\ x\in(\pi,2\pi].$$

Останува уште да се усогласат константите на заедничкиот интервал и да се додефинираат функциите во граничната точка.

Бидејќи F се непрекинати, важи:

$$\lim_{x\to\pi^-} F_1(x) = \lim_{x\to\pi^+} F_2(x) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to\pi^-} \tfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C_1 = \lim_{x\to\pi^+} \tfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C_2 \Leftrightarrow$$

$$\tfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(+\infty\right) + C_1 = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(-\infty\right) + C_2 \Leftrightarrow$$

$$\tfrac{2}{\sqrt{3}}\tfrac{\pi}{2} + C_1 = \tfrac{2}{\sqrt{3}}(-\tfrac{\pi}{2}) + C_2 \Leftrightarrow C_2 = \tfrac{2\pi}{\sqrt{3}} + C_1 \text{ и}$$

$$F(\tfrac{\pi}{3}) = \lim_{x\to\pi^-} F_1\left(x\right) = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\tfrac{\pi}{2} = \tfrac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Ако земеме:

$$C_1 = C \text{ , тогаш } C_2 = \tfrac{2\pi}{\sqrt{3}} + C .$$

Да ги разгледаме функциите:

$$F\left(x\right) = \begin{cases} \tfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}, \ x\in\left[0,\pi\right) \\ \tfrac{\pi}{\sqrt{3}}, \ x=\pi \\ \tfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + \tfrac{2\pi}{\sqrt{3}}, \ x\in\left(\pi,2\pi\right] \end{cases} + C .$$

Јасно F се диференцијабилни и во π и имаат извод кој се совпаѓа со вредноста на подинтегралната функција. Следува дека F се примитивни функции на подинтегралната функција на $\left[0,2\pi\right]$. Сега може да се примени формулата на Њутн-Лајбниц, па:

$$I = F(x)\Big|_0^{2\pi} = F(2\pi) - F(0) = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\pi+1}{\sqrt{3}} + \tfrac{2\pi}{\sqrt{3}} - \tfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}0+1}{\sqrt{3}} = \tfrac{2\pi}{\sqrt{3}}. \ \blacksquare$$

Задача 8. Каде е грешката?

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx \overset{1}{=} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx \overset{2}{=} \begin{pmatrix} u = \dfrac{1}{\cos x} & dv = \sin x dx \\ du = \dfrac{1}{\cos^2 x}\sin x dx & v = -\cos x \end{pmatrix} \overset{3}{=}$$

$$-\frac{1}{\cos x}\cos x + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \frac{1}{\cos x^2 x}\sin x dx \overset{4}{=} -1 + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx .$$

Следува:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx \overset{5}{=} -1 + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx \text{ односно } 0 \overset{6}{=} -1.$$

Решение. Грешката е во примената на методот на парцијалната интеграција во равенството (3). Треба да стои:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx \overset{1}{=} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx \overset{2}{=}$$

$$\begin{pmatrix} u = \dfrac{1}{\cos x} & dv = \sin x dx \\ du = \dfrac{1}{\cos^2 x} \sin x dx & v = -\cos x \end{pmatrix} \overset{3}{=}$$

$$-\frac{1}{\cos x} \cos x \Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \frac{1}{\cos x^2 x} \sin x dx \overset{4}{=}$$

$$-1 \Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = -1 - (-1) + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx . \blacksquare$$

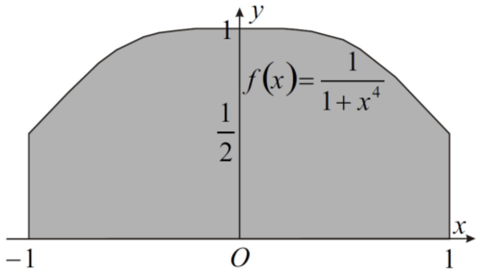
Задача 9. Каде е грешката?

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^4} \overset{1}{=} \int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}+1} dx \overset{1}{=}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{x^4} = t & x = -1 \Rightarrow t = 1 \\ -\dfrac{4}{x^5} dx = dt & x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{pmatrix} \overset{2}{=}$$

$$\int_{1}^{1} \frac{t}{t+1} \frac{t^{-\frac{5}{4}}}{-4} dt = 0 .$$

Но, знаеме дека почетниот интеграл е поголем од нула затоа што подинтегралната функција е позитивна.



Цртеж 2

Решение. Грешката е во равенството (2). Од: $x^{-4}=t$ следува дека:

$$x^4=t^{-1} \text{ од каде } x=-t^{-\frac{1}{4}} \text{ за } x<0 \text{ и } x=t^{-\frac{1}{4}} \text{ за } x>0.$$

Затоа од $-\frac{4}{x^5}dx=dt$ следува дека:

$$dx=\frac{1}{4}t^{-\frac{5}{4}}dt \text{ за } x<0 \text{ и } dx=-\frac{1}{4}t^{-\frac{5}{4}}dt \text{ за } x>0.$$

Коментар. Смената не ги исполнува условите од теоремата за смена на променливи, ниту е непрекината ниту монотона на интервалот $[-1,1]$, но бидејќи несвојствениот интеграл $\int\limits_1^{+\infty} dt/(4\sqrt[4]{t}(t+1))$ конвергира, условите во теоремата може да се модифицираат и теоремата да може да се примени. ■

Задача 10. Каде е грешката?

Ако $F(x)$ е примитивна функција за функцијата $f(x)$, т.е.

$$F'(x)=f(x),$$

тогаш фундаменталната теорема на интегралното сметање гласи:

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt \quad (1).$$

Нека: $f(x)=\cos x$ и $F(x)=\sin x+5$ (2). Јасно, $F'(x)=f(x)$. Тогаш,

$$\int\limits_a^x \cos t dt=F(x) \overset{3}{\Rightarrow} \sin x\Big|_a^x=\sin x+5 \overset{4}{\Rightarrow} \sin x-\sin a=\sin x+5 \overset{5}{\Rightarrow} -\sin a=5.$$

Но, $\sin a\in[-1,1]$.

Решение. Грешката е во заклучокот (2). Функцијата

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$$

е фиксна примитивна функција за $f\left(x\right)$ и не мора да важи:

$$F(x)=\sin x+5.$$

Всушност,

$$F(x)=\sin x-\sin a. \blacksquare$$

Задача 11. Каде е грешката во следниве равенства?

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx \overset{(1)}{=} \ln|x|\Big|_{-1}^{1} \overset{(2)}{=} \ln|1|-\ln|-1| \overset{(3)}{=} 0.$$

Решение. Грешката е во првото равенство. Не може да се примени формулата на Њутн Лајбниц, бидејќи се работи за несвојствен интеграл.

Правилната постапка би била следна. Функцијата $\frac{1}{x}$ неограничено расте близу точката 0, па

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{x}dx.$$

Бидејќи:

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}dx=\lim_{x\to0^-}\int_{-1}^{x}\frac{1}{t}dt=\lim_{x\to0^-}\ln|t|\Big|_{-1}^{x}=\lim_{x\to0^-}\left(\ln|x|-\ln|-1|\right)=\lim_{x\to0^-}\ln|x|=-\infty,$$

следува дека и интегралот $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ дивергира.

Коментар. Нема потреба да го дискутираме интегралот $\int_{0}^{1}\frac{1}{x}dx$, иако и тој, исто така, дивергира. ■

Литература

[1] Зоран Мисајлески, *Решени задачи по диференцијално и интегрално сметање* I (на функции од една променлива), е-издание на УКИМ, Скопје, 2019.