

Задачите се скенирани од книгата:

Републички натпревари по математика во СР Македонија 1968-1977

Подготвена од

Проф. д-р Наум Целаоски и проф. д-р Александар Самарџиски

XX РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР 1977

1.(I,77). Ако $a+b+c=0$ и $a^2+b^2+c^2=1$, да се пресмета $a^4+b^4+c^4$.

Решение. За да го пресметаме изразот $a^4+b^4+c^4$, потребно е него да го изразиме со помош на изразите $a+b+c$ и $a^2+b^2+c^2$. За таа цел ќе го користиме равенството

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$

Имаме:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = \\ &= 1 - 2[(ab+ac+bc)^2 - 2abc(a+b+c)] = \\ &= 1 - 2(ab+ac+bc)^2 = \\ &= 1 - 2\left[\frac{1}{2}(a+b+c)^2 - \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\right]^2 = \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2.(I,77). На која цифра завршува бројот 9^{9^9} ? Образложи!

Решение. Бројот 9^k завршува или на 1 или на 9 и тоа:

- ако k е парен број, тогаш 9^k завршува на 1,
- ако k е непарен број, тогаш 9^k завршува на 9.

Бидејќи бројот 9^9 е непарен, според претходното, бројот 9^{9^9} завршува на 9.

3.(I,77). Од една чаша полна со млеко, Петре испил $\frac{1}{5}$ и ја дополнително со кафе. Потоа пак испил $\frac{1}{5}$ од полната чаша и пак дотурил кафе. Откако трет пат испил $\frac{1}{5}$ од содржината на чашата, во неа останало 28 cm^3 повеќе млеко отколку кафе. Да се најде волуменот на чашата.

Решение. Да го означиме со x волуменот на чашата. По секое пиење, во чашата останувало млеко односно кафе како што следува:

- по I пиење има: $\frac{4}{5}x$ млеко и $\frac{1}{5}x$ кафе;

- по II пиење има: $\frac{4}{5}x - \frac{1}{5}(\frac{4}{5}x) = \frac{16}{25}x$ млеко и
 $\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}(\frac{1}{5}x) + \frac{1}{5}x = \frac{9}{25}x$ кафе;

- по III пиење има: $\frac{16}{25}x - \frac{1}{5}(\frac{16}{25}x) = \frac{64}{125}x$ млеко и
 $\frac{9}{25}x - \frac{1}{5}(\frac{9}{25}x) = \frac{36}{125}x$ кафе.

Според тоа:

$$\frac{64}{125}x - \frac{36}{125}x = 28,$$

од каде што добиваме дека $x = 125 \text{ cm}^3$.

4.(I,77). Ако полиномот $Ax^2 + Bx + C$ се анулира за три различни вредности на x , тогаш $A = B = C = 0$. Докажи!

Користејќи го тоа, да се докаже дека за произволни реални броеви a, b, c ($a \neq b \neq c \neq a$), важи равенството

$$a^2 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2. \quad (1)$$

Решение. Нека x_1, x_2, x_3 се три меѓусебно различни броеви, $x_1 < x_2 < x_3$, такви што:

$$\begin{aligned} Ax_1^2 + Bx_1 + C &= 0, \\ Ax_2^2 + Bx_2 + C &= 0, \\ Ax_3^2 + Bx_3 + C &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Едно решение на системот (2) е $A=B=C=0$. Ќе покажеме дека тоа е единственото решение на (2). За таа цел, доволно е да покажеме дека детерминантата на системот е различна од нула. Имаме:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1^2 x_2 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 - x_2 x_3^2 - x_1^2 x_3 - x_1 x_2^2 = \\ = x_1^2(x_2 - x_3) + x_2^2(x_3 - x_1) + x_3^2(x_1 - x_2) = \\ = x_1^2(x_2 - x_3) + x_2^2(x_3 - x_2) + (x_2 - x_1) + x_3^2(x_1 - x_2) = \\ = (x_1^2 - x_2^2)(x_2 - x_3) + (x_2^2 - x_3^2)(x_2 - x_1) = \\ = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)(x_2 + x_3)(x_2 - x_1) = \\ = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 + x_2 - x_2 - x_3) = \\ = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3) < 0.$$

Значи, решението $A=B=C=0$ на системот (2) е единствено, т.е. само нултиот полином го има укажаното својство.

Да ставиме:

$$p(x) = a^2 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} - x^2.$$

Полиномот $p(x)$ е од втор степен и притоа имаме $p(a) = p(b) = p(c) = 0$. Бидејќи $a \neq b \neq c \neq a$, според претходното, имаме $p(x) = 0$, т.е. важи равенството (1).

1.(II,77). Да се докаже дека за кои било цели броеви a и c равенката $x^2 + (2a+1)x + 2c+1 = 0$ нема рационални корени.

Решение. Задачата ќе ја решиме на два начина.

1) Секој рационален број може да се напише во обликот $\frac{p}{q}$, каде што p и q се заемно прости цели броеви и $q \neq 0$. Ако $x = \frac{p}{q}$ е решение на дадената равенка, тогаш ќе имаме:

$$\frac{p^2}{q^2} + (2a+1)\frac{p}{q} + 2c+1 = 0, \quad \frac{p^2}{q} = -(2a+1)p - (2c+1)q.$$

При $q \neq 1$, ова равенство не е можно, зашто од левата страна имаме нескратлива дробка, а на десната страна цел број.

Ако $q=1$, тогаш имаме $p(p+2a+1) = -(2c+1)$, коешто равенство не е можно, зашто левата страна е парен број, а десната не-парен.

II) За дадената равенка да има рационални корени, треба нејзината дискриминанта да биде полн квадрат, т.е.

$$D = (2a+1)^2 - 4(2c+1) = d^2.$$

Ќе покажеме дека оваа равенка нема решение во множеството на целите броеви.

Ако $d=2k$, тогаш имаме $a^2 + a - 2c - k^2 = \frac{3}{4}$, што не е можно.

Ако $d=2k+1$, тогаш имаме $(a+k+1)(a-k) = 2c+1$, коешто не е можно, зашто левата страна е парен број, а десната - непарен.

2.(II,77). Нека z_1 и z_2 се комплексни броеви, такви што $z_1 \bar{z}_1 = z_2 \bar{z}_2 = 1$, каде што $\bar{z}$ е конјугираниот број на z . Да се покаже дека

$$\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$$

е реален број.

Решение. Имаме:

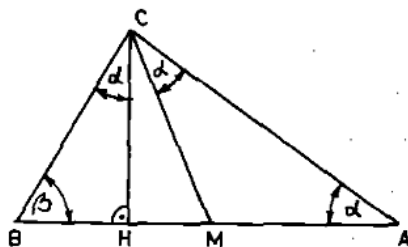
$$\begin{aligned} \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} &= \frac{(z_1 + z_2)(1 + \bar{z}_1 \bar{z}_2)}{(1 + z_1 z_2)(1 + \bar{z}_1 \bar{z}_2)} = \frac{z_1 + z_2 + z_1 \bar{z}_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_2 \bar{z}_1}{1 + z_1 z_2 + \bar{z}_1 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2} = \\ &= \frac{z_1 + z_2 + \bar{z}_2 + \bar{z}_1}{2 + z_1 z_2 + \bar{z}_1 \bar{z}_2} = \frac{(z_1 + \bar{z}_1) + (z_2 + \bar{z}_2)}{2 + (z_1 z_2 + \bar{z}_1 \bar{z}_2)} = \\ &= \frac{2x_1 + 2x_2}{2 + 2(x_1 y_2 + x_2 y_1)} = \frac{x_1 + x_2}{1 + x_1 y_2 + x_2 y_1} \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

каде што $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

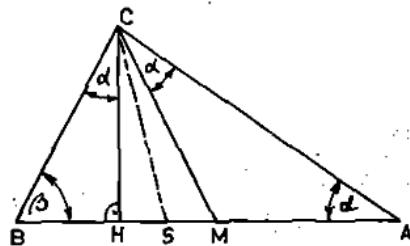
3.(II,77). Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол кај темето C. Со помош на остриите агли α и β да се изрази аголот меѓу висината и тежишната линија повлечени од темето на правиот агол.

Ако триаголникот не е рамнокарак, да се докаже дека симетралата на правиот агол е симетрала и на аголот меѓу висината и тежишната линија повлечени од темето на правиот агол.

Решение. Во триаголникот ABC (црт.1.77) повлечени се од темето C на правиот агол тежишната линија CM и висината CH. Да претпоставиме дека $\overline{AC} > \overline{BC}$. Тогаш точката M лежи меѓу точките A и H. Бидејќи M, како средина на хипотенузата, е центар на опишаната кружница, следува дека триаголниците MAC и MBC се рамнокраки. Од тоа добиваме дека $\angle ACM = \alpha$, а бидејќи и $\angle BCH = \alpha$, имаме $\angle MCH = 90^\circ - 2\alpha = (90^\circ - \alpha) - \alpha = \beta - \alpha$.



Црт.1.77



Црт.2.77

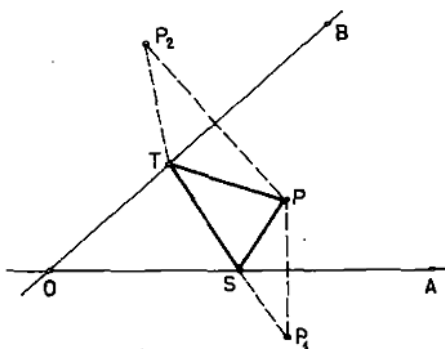
Да претпоставиме дека правоаголниот триаголник ABC не е рамнокрак (црт.2.77). Нека CM, CH и CS се тежишната линија, висината и симетралата повлечени од темето C на правиот агол. Тогаш S лежи меѓу H и M, па имајќи го предвид претходното и фактот дека $\angle ACS = \angle BCS$, добиваме дека

$$\angle MCS = \angle ACS - \alpha = \angle BCS - \alpha = \angle HCS.$$

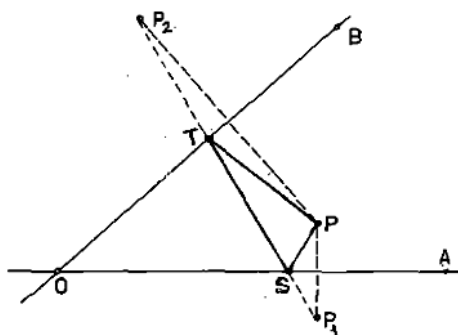
4.(II,77). Даден е аголот AOB и во неговата внатрешност точка P. Да се конструира триаголник PST, со најмал можен периметар, така што $S \in OA$, $T \in OB$.

Решение. Да претпоставиме дека задачата е решена, т.е. PST е бараниот триаголник (црт.3.77). Нека $P_1 = \sigma_{OA}(P)$, $P_2 = \sigma_{OB}(P)$; тогаш

$$PS + ST + TP = P_1S + ST + TP_2.$$



Црт.3.77



Црт.4.77

Значи, триаголникот PST да има најмал периметар, потребно е искршената линија P_1STP_2 да има најмала должина, а тоа е така ако точките P_1 , S, T и P_2 се колинеарни.

Следствено $S = OA \cap P_1P_2$, $T = OB \cap P_1P_2$ (црт.4.77).

1.(III,77). Да се реши системот равенки:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}, \\ x^z &= y^{8/3}, \\ y^z &= x^{2/3}. \end{aligned}$$

Решение. Од првата равенка на системот заклучуваме дека $x \geq 0$ и $y \geq 0$, а поради тоа и $z \geq 0$. При $z \neq 0$, втората равенка дава $x = y^{8/3z}$, па заменувајќи во третата, добиваме:

$$y^z = (y^{8/3z})^{2/3}, \text{ т.е. } y^z = y^{16/9z}.$$

Последното равенство е исполнето за:

1^o $y = 1$ и произволен $z (> 0)$;

2^o $z = \frac{16}{9z}$ и произволен $y (\geq 0)$.

Ако $y = 1$, тогаш, според третата равенка, имаме $x^{2/3} = 1$, т.е. $x = 1$, па, поради првата равенка, добиваме $z = 2$. Значи, едно решение на дадениот систем е тројката $(1, 1, 2)$.

Ако $z = \frac{16}{9z}$, тогаш (поради $z > 0$) $z = \frac{4}{3}$, па од втората (односно од третата) равенка добиваме $x = y^2$. Заменувајќи во првата, ја добиваме равенката

$$\sqrt[4]{y^2} + \sqrt[4]{y} = \frac{4}{3},$$

која, со смената $\sqrt[4]{y} = s$, се трансформира во квадратната равенка

$$3s^2 + 3s - 4 = 0.$$

Решенија на оваа равенка се $s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{6}$, од кои, поради $s = \sqrt[4]{y} \geq 0$, важи само $s = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{19}{3}}$. Така, $y = s^4$, т.е.

$$y = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{19}{3}}\right)^4, \quad x = y^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{19}{3}}\right)^8.$$

Значи, друго решение на дадениот систем е тројката

$$(x, y, z) = \left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{19}{3}}\right)^8, \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{19}{3}}\right)^4, \frac{4}{3}\right).$$

2.(III, 77): Да се докаже дека: ако страните a, b, c на еден триаголник го задоволуваат условот $a + c = 2b$, тогаш неговите агли α, β, γ го задоволуваат условот $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = 2 \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$.

Решение. Условот $a + c = 2b$ можеме да го напишеме како

$$b - a = c - b,$$

па имајќи ги предвид равенствата

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

(синусната теорема), добиваме:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} a - a = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} a - \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} a.$$

т.е.

$$\sin \beta - \sin \alpha = \sin \gamma - \sin \beta.$$

Применувајќи ги формулите за трансформација на разлика од синуси во производ, а потоа, имајќи предвид дека $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ и користејќи ја адиционата теорема за синус од разлика на два агла, добиваме:

$$2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta + \alpha}{2} = 2 \sin \frac{\gamma - \beta}{2} \cos \frac{\gamma + \beta}{2},$$

$$\sin\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \cos \frac{\pi - \gamma}{2} = \sin\left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}\right) \cos \frac{\pi - \alpha}{2},$$

$$\left(\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}\right) \sin \frac{\gamma}{2} = \left(\sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}\right) \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Делејќи со $\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$, добиваме:

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2},$$

т.е.

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = 2 \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}.$$

3.(III,77). Дадена е правилна n -страна пирамида. Да се докаже дека збирот на растојанијата од која било точка M на основата од таа пирамида до видовите на пирамидата е константен.

Решение. Сврзувајќи ја точката M со сите темиња на пирамидата, добиваме n тристрани пирамиди. Земајќи ги бочните видови на дадената пирамида за основи на добиените пирамиди, добиваме дека растојанијата од M до бочните видови на дадената пирамида се висини на добиените. Означувајќи ги со $d_1, d_2, \dots, d_n$ тие висини, со P - плоштината на бочниот вид и со V - волуменот на дадената пирамида, добиваме

$$V = \frac{P}{3}(d_1 + d_2 + \dots + d_n),$$

од каде што $d_1 + d_2 + \dots + d_n = \frac{3V}{P} = \text{конст.}$

4.(III,77). Дадени се k дробки

$$\frac{a_1}{c_1}, \frac{a_2}{c_2}, \dots, \frac{a_k}{c_k},$$

при што именителите се позитивни броеви. Да се докаже дека дробката

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{c_1 + c_2 + \dots + c_k}$$

не е помала од најмалата и не е поголема од најголемата од дадените дробки.

Решение. Да ја означиме со m најмалата, а со M - најголемата од дадените дробки. Тогаш

$$m \leq \frac{a_j}{c_j} \leq M$$

за $j=1,2,\dots,k$, т.е. поради $c_j > 0$, $mc_j \leq a_j \leq Mc_j$. Од тоа добиваме

$$m(c_1 + c_2 + \dots + c_k) \leq a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq M(c_1 + c_2 + \dots + c_k),$$

т.е.

$$m \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{c_1 + c_2 + \dots + c_k} \leq M.$$

1.(IV,77). а) Да се најдат збиравите:

$$S_n = a \sin x + a^2 \sin 2x + \dots + a^n \sin nx,$$

$$T_n = a \cos x + a^2 \cos 2x + \dots + a^n \cos nx.$$

б) Да се најдат $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ ако $|a| < 1$.

Решение. а) Задачата ќе ја решиме на два начина.

I) Ако првото равенство го помножиме со $\cos x$, а второто со $\sin x$ и ги собереме добиените равенства, добиваме

$$S_n \cos x + T_n \sin x = \frac{1}{a}(S_n - a \sin x + a^{n+1} \sin(n+1)x),$$

односно

$$(a \cos x - 1)S_n + a \sin x T_n = a^{n+1} \sin(n+1)x - a \sin x. \quad (1)$$

Ако, пак, првото равенство го помножиме со $\sin x$, а второто

со $\cos x$, а потоа ги извадиме добиените равенства добиваме

$$T_n \cos x - S_n \sin x = \frac{1}{a} (T_n - a \cos x + a^{n+1} \cos(n+1)x),$$

односно

$$-a \sin x S_n + (a \cos x - 1) T_n = a^{n+1} \cos(n+1)x - a \cos x. \quad (2)$$

Од равенките (1) и (2), решавајќи ги како систем равенки по S_n и T_n , добиваме

$$S_n = \frac{a^{n+2} \sin nx - a^{n+1} \sin(n+1)x + a \sin x}{a^2 - 2a \cos x + 1}, \quad (3)$$

$$T_n = \frac{a^{n+2} \cos nx - a^{n+1} \cos(n+1)x + a \cos x - a^2}{a^2 - 2a \cos x + 1} \quad (4)$$

II) Ако ставиме $z = \cos x + i \sin x$, тогаш имаме:

$$\begin{aligned} T_n + i S_n &= az + a^2 z^2 + \dots + a^n z^n = \\ &= \frac{az(a^n z^n - 1)}{az - 1} = \frac{az(a^n z^n - 1)(a\bar{z} - 1)}{a^2 - a(z + \bar{z}) + 1} = \\ &= \frac{(a^n z^n - 1)(a^2 - az)}{a^2 z^n - a(z + \bar{z}) + 1} = \frac{a^{n+2} z^n - a^{n+1} z^{n+1} + az - a^2}{a^2 - a(z + \bar{z}) + 1} = \\ &= \frac{a^{n+2} [\cos nx + i \sin nx] - a^{n+1} [\cos(n+1)x + i \sin(n+1)x] + a [\cos x + i \sin x] - a^2}{a^2 - 2a \cos x + 1}, \end{aligned}$$

од каде што ги добиваме изразите (3) и (4).

б) Имаме:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a \sin x}{a^2 - 2a \cos x + 1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{a \cos x - a^2}{a^2 - 2a \cos x + 1}.$$

2.(IV.77). Да се најде равенката на геометриското место на подножјата од нормалите спуштени од координатниот почеток врз правите, коишто со координатните оски градат триаголник со константна плоштина.

Решение. Равенката на произволна права, која со координатните оски гради триаголник со константна плоштина P , ќе ја напишеме во обликот

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

$$y = -\frac{b}{a}x \pm \frac{2P}{a}, \quad (1)$$

каде што

$$ab = \pm 2P. \quad (2)$$

Равенката на правата што минува низ координатниот почеток и е нормална на правата (1) е

$$y = \frac{a}{b}x. \quad (3)$$

Со елиминација на a и b од (1), (2) и (3) добиваме

$$(x^2 + y^2)^2 = \pm 2Pxy,$$

што претставува равенка на бараното геометриско место.

3.(IV.77). Дадени се параболите $y = x^2 - 2x$, $y = 2x - \frac{1}{2}x^2$.

а) На кое растојание од x -оската треба да се повлече права p , паралелна со таа оска, за дадените параболи на правата p да отсекуваат тетиви со еднакви должини?

б) Лаците на дадените параболи градат затворена контура. Да се одреди тетивата на оваа контура, којашто има максимална должина и е паралелна со y -оската.

Решение. а) Равенката на права паралелна со x -оската ќе биде $y = k$. Оваа права ја сече параболата $y = x^2 - 2x$ во точките:

$$A(1 - \sqrt{1+k}, k), \quad B(1 + \sqrt{1+k}, k),$$

а параболата $y = 2x - \frac{1}{2}x^2$ во:

$$C(2 - \sqrt{4-2k}, k), \quad D(2 + \sqrt{4-2k}, k).$$

Од $\overline{AB} = \overline{CD}$ добиваме $k = 1$, па, значи, бараната права е правата $y = 1$.

б) Параболите се сечат во точките $O(0,0)$ и $E(\frac{8}{3}, \frac{16}{9})$. Правата $x=a$, $0 \leq a \leq \frac{8}{3}$, ги сече параболите само во по една точка и тоа, параболата $y=x^2-2x$ во $M(a, a^2-2a)$, а параболата $y=2x-\frac{1}{2}x^2$ во $N(a, 2a-\frac{1}{2}a^2)$. Притоа,

$$d = \overline{MN} = |2a - \frac{1}{2}a^2 - a^2 + 2a| = |4a - \frac{3}{2}a^2|.$$

За $0 \leq a \leq \frac{8}{3}$ имаме $d = 4a - \frac{3}{2}a^2$, па $d' = 4 - 3a$, од каде што $a = \frac{4}{3}$.

Следствено, бараната тетива е на правата $x = \frac{4}{3}$, т.е.

$$MN [M(\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}), (\frac{4}{3}, \frac{8}{9})].$$

4.(IV,77). Даден е конвексен n -аголник $A_1A_2\dots A_n$, така што кои било три негови дијагонали не минуваат низ иста точка. Низ едно теме повлечени се сите $n-3$ дијагонали. Нека x е бројот на деловите ("дисјунктните отсечки") што на тие дијагонали ги отсекуваат останатите дијагонали и нека $f(n)$ е бројот на деловите ("дисјунктните исполнети многуаголници") на кои дијагоналите на многуаголникот ја разбиваат неговата внатрешност. Да се докаже дека

$$f(n) = f(n-1) + x + 1.$$

Решение. Прво, со директно пребројување, добиваме:

n	3	4	5	6
x	-	2	6	13
$f(n)$	1	4	11	25

Од ова се гледа дека:

- ако поминеме од триаголник на четириаголник, бројот $f(3)$ се зголемува за 3, т.е. $f(4) = f(3) + 3 = f(3) + 2 + 1$.

- ако поминеме од четириаголник на петаголник, тогаш $f(5) = f(4) + 6 + 1$.

Да земеме, сега, еден конвексен n -аголник $A_1A_2\dots A_n$ за кој

кои било три од неговите дијагонали не минуваат низ иста точка. Дијагоналата A_1A_{n-1} го разбива овој n -аголник на $(n-1)$ -аголникот $A_1A_2\dots A_{n-1}$ и триаголникот $A_1A_{n-1}A_n$. Да ги разгледаме, сега, дијагоналите што минуваат низ темето A_n . Дијагоналата A_nA_2 се разбива од дијагоналите што не минуваат низ A_n во $n-2$ отсечки и, притоа, бројот $f(n-1)$ се зголемува за $n-1$. Ако дијагоналата A_nA_k , $k=3,4,\dots,n-2$, се разбива со останатите дијагонали на x_k отсечки, тогаш бројот $f(n-1)$ се зголемува за x_k .

Следствено, имаме

$$f(n) = f(n-1) + x + 1.$$