Ристо Малчески
Мирјана Доковска

МАТЕМАТИКА 2

ЗА ВТОРА ГОДИНА ВО РЕФОРМИРАНОТО
ГИМНАЗИСКО ОБРАЗОВАНИЕ

СОДРЖИНА

ВОВЕД

Пред тебе е учебникот по изборниот предмет МАТЕМАТИКА за втора година од гимназиското образование. Тој е работен така, што ќе можеш и самостојно да се здобиваш со новите знаења и умеења што се предвидени со наставната програма по овој предмет.

Материјалот е поделен, согласно со програмата, во осум одделни целини (теми). На почетокот на секоја тема, покрај содржината што е разработена во неа даден е преглед на потребните предзнаења за успешно следење на материјалот кој е разработен во таа глава. Исто така, даден е и прегледот на новите знаења и умеења со кои треба да се стекнеш доколку успешно ги совладаш предвидените содржини. Секоја тема е заокружена целина и е разделена на одреден број лекции кои, исто така, претставуваат заокружени целини. Темите се означени со римски броеви, додека лекциите се означени со арапски броеви. Во секоја тема, дефинициите, примерите, забелешките и теоремите се нумерирани интегрално за темата. Истото се однесува и на задачите за вежбање кои се дадени по секоја лекција. На крајот од секоја тема е даден тест, со чија помош можеш да ги провериш и да ги оцениш своите знаења и умеења. Што се однесува до тестовите, тие се оформени така што бараат две нивоа на знаења, но при нивното решавање можеш да ги комбинираш нивоата од различните задачи. Притоа, од секоја задача избираш само една подзадача а) или б), а за да го оцениш своето знаење, ги собираш бодовите од решените задачи и како показател, во консултација со твојот професор, можеш да го користиш критериумот кој е даден за секој тест одделно.

Разработуваниот материјал содржи голем број тврдења (теореми), од кои дел треба да ги усвоиш без доказ, што е посебно назначено за секоја теорема. Примерите, кои ги има во доволен број, се целосно решени и се дадени како илустрација на тврдењата што се разработуваат. Затоа, особено е важно добро да ги разработиш, бидејќи само така можеш да се подготвиш за самостојно решавање на задачи, а потоа да преминеш кон решавање на задачите за вежбање.

За полесно користење на учебникот, дефинициите, примерите, теоремите, задачите за вежбање, тестовите и деловите кои се предвидени како незадолжителни т.е. за оние што сакаат да знаат повеќе, се обоени во следниве бои:

- дефиниција 🟦
- пример 🟩
- теорема 🟧
- за оние што сакаат да знаат повеќе 🟪
- задачи за вежбање 🟨
- провери го своето знаење ⬜

Исто така, за полесно користење на учебникот, даден е регистар на поимите со кои ќе се сретнеш во текот на учењето, како и список на користените ознаки.

На крајот од учебникот се дадени одговори и упатства на некои од задачите за вежбање. Пожелно е пред да го погледнеш одговорот или упатството на задачата, да се обидеш самостојно да ја решиш и да извршиш самопроверка. Само така ќе можеш да се здобиеш со самодоверба и ќе можеш успешно да усвојуваш нови знаења и умеења. Се разбира дека за посеопфатно и подлабоко усвојување на предвидениот материјал, пожелно е да користиш и дополнителна литература, па затоа таа е наведена во посебен дел, веднаш по одговорите и упатствата на задачите.

Авторите

ЛИСТА НА СИМБОЛИ

Симбол	*Значење*	*Симбол*	*Значење*
$\mathbf{N}$	множество природни броеви	i	имагинарна единица
$\mathbf{N}_0$	мн. природни броеви заедно со 0	D	дискриминанта на квадрат. рав.
$\mathbf{Z}$	множество цели броеви	$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$	реална функција
$\mathbf{Q}$	множество рационални броеви	Δ	триаголник
$\mathbf{I}$	множество ирационални броеви	$k(O,r)$	кружница со центар O и рад. r
$\mathbf{R}$	множество реални броеви	$\tau_{\vec{a}}$	транслација за вектор $\vec{a}$
$\mathbf{C}$	комплексни броеви	$\rho_{O,\alpha}$	ротација околу точ. O за аг. α
$\angle$	агол	σ_a	осна симетрија со оска a
$^\circ$	степен	σ_O	централна симетрија со цен. O
rad	радијан	$T[O,r]$	затворена топка, цен. O и рад. r
$\overline{AB}$	должина на отсечка	$T(O,r)$	отворена топка, цен. O и рад. r
sin	синус	$S(O,r)$	сфера со центар O и радиус r
cos	косинус	$P_{ABC...}$	плоштина на геом. фиг. $ABC...$
tg	тангенс	$V_{ABC...}$	волумен на геом. тело. $ABC...$
ctg	котангенс	B	основа на геометриско тело
$\bar{z}$	конугира комплексен број на z	M	бочна површина на геом. тело
$\|z\|$	модул од комплексен број z	π	бројот пи
$\bar{x}$	аритмеичка средина	s^2	дисперзија
s	стандардна девијација	mo	мода
me	медијана		

ГЛАВА I

ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ОСТАР АГОЛ ВО ПРАВОАГОЛЕН ТРИАГОЛНИК

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1. **Поим за агол. Мерење на агли**
2. **Дефиниција на тригонометриски функции од остар агол**
3. **Вредности на тригонометриски функции за аглите $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ и од произволен агол**
4. **Тригонометриски функции од комплементни агли**
5. **Менување на тригонометриските функции при промена на аголот од 0° до 90°**
6. **Врски меѓу тригонометриските функции од ист агол**
7. **Решавање на правоаголен триаголник**
8. **Решавање на практични проблеми**

ПОТРЕБНИ ПРЕДЗНАЕЊА

За успешно совладување на содржините кои ќе ги усвојуваш во оваа тема, потребно е да се потсетиш на:

- *помот за агол, комплементни агли и мерењето на агли во степени,*
- *рамностраниот и рамнокракиот правоаголен триаголник,*
- *признаците за слични триаголници,*
- *поимот функција и монотона функција,*
- *Питагоровата теорема,*
- *операциите со дробно-рационални изрази и формулите за скратено множење,*

НОВИ ЗНАЕЊА И УМЕЕЊА

Успешното совладување на содржините кои се разработени во оваа тема има за цел:

- да го утврдиш поимот за агол и да ги усвоиш мерните единици за агол,
- да ги усвоиш тригонометриските функции синус, косинус, тангенс и котангенс од остар агол,
- да го објаснуваш менувањето на тригонометриските функции кога аголот се менува од 0° до 90°,
- да ја усвоиш теоремата за комплементни агли и да можеш истата да ја применуваш,
- да ги користиш во задачи вредностите на тригонометриските функции за агли од 30°, 45° и 60°,
- со калкулатор да ја одредуваш вредноста на тригонометриската функција ако е даден агол и обратно,
- да ги користиш основните тригонометриски идентитети во решавање на задачи,
- да научиш да решаваш правоаголен триаголник со дадени потребни елементи и
- да решаваш практични задачи кои се сведуваат на решавање на правоаголен триаголник.

Интересот на човекот за триаголникот датира уште од најрани времиња. Тоа е природно, особено ако се има предвид неговата премена во изучувањето на другите геометриски фигури и при решавањето на голем број практични проблеми во градежништвото, геодезијата итн. Еден таков пример е и следниот, кој во натамошните разгледувања ќе го решиме.

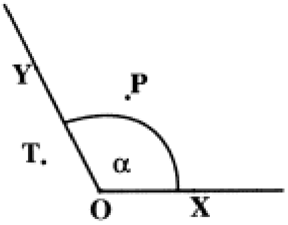
Да се одреди растојанието на бродот до езерскиот брег, ако е позната висината на светилникот и со помош на соодветен мерен инструмент е одреден аголот α (црт. 1).

Црт. 1

Триаголникот ќе биде предмет на наш интерес и во оваа тема. Поконкретно ќе се запознаеме со некои зависности меѓу елементите на правоаголниот триаголник и низ решавање на карактеристични примери ќе ја согледаме практичната примена на истите.

1. ПОИМ ЗА АГОЛ. МЕРЕЊЕ НА АГЛИ

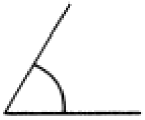
Во основното образование се запознавме со повеќе геометриски фигури, меѓу кои и аголот. Да се потсетиме на дефиницијата на агол.



Црт. 2

Дефиниција 1. Две полуправи OX и OY со заеднички почеток ја делат рамнината на два дела. Секој од овие делови заедно со двете полуправи се нарекува *агол*, во ознака $\angle XOY$ (црт. 2).

Заедничката точка O на полуправите OX и OY ја нарекуваме *теме* на $\angle XOY$. Полуправите OX и OY ги нарекуваме *краци* на $\angle XOY$. Еден агол е наполно определен со точка P што не лежи на краците. Точката P што не лежи на краците ја нарекуваме внатрешна точка, а множеството внатрешни точки го нарекуваме *внатрешност* на аголот $\angle XOY$, а делот од рамнината кој не ја содржи P го нарекуваме *надворешност* на аголот $\angle XOY$ (ја содржи точката M).



Црт. 3

Како што можеме да забележиме, со помош на точката P еднозначно се определени внатрешноста и надворешноста на аголот. Во натамошните разгледувања често пати наместо да ја потенцираме точката P од дефиниција 1, за означување на внатрешноста на аголот ќе користиме кружен лак (црт. 3).

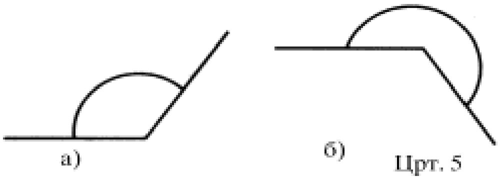
Дефиниција 2. За $\angle DCE$ ќе велиме дека е *рамен агол*, ако полуправите CD и CE образуваат права (црт. 4). За аголот кој е половина од рамниот агол ќе велиме дека е *прав агол*.

Црт. 4

За аголот α ќе велиме дека е *остар*, ако тој е помал од правиот агол, а ако е поголем од правиот агол и помал од рамниот агол, тогаш ќе велиме дека α е *тап* агол.

Практичните потреби налагаат мерење на геометриските фигури, што значи и мерење на аглите. Во основното образование се запознавме степенот, кој го означуваме со $^\circ$, како мерна единица за агол и истиот го определивме како еден деведесетти дел од правиот агол. Исто така, воведовме и помали единици од степенот за мерење на агили и тоа, минута и секунда кои ги означуваме со $'$ и $''$, соодветно. Притоа минутата ја дефиниравме како шеесетти дел од степенот, т.е. $1^\circ = 60'$, а секундата ја дефиниравме као шеесетти дел од минутата, т.е. $1' = 60''$.

Дефиниција 3. За аголот α ќе велиме дека е *конвексен* ако тој е помал или еднаков на рамниот агол (црт. 5а), т.е. помал од или еднаков на 180° (зошто?), а ако тој е поголем од рамниот агол го нарекуваме *конкавен* (црт. 5б).



Црт. 5

Пример 1. а) Претвори го во минути аголот $\alpha = 12^\circ\, 45'$.

б) Претвори го во степени аголот $\alpha = 45^\circ\, 15'36''$.

Решение. а) Степените ги претвораме во минути и добиваме

$$\alpha = 12^\circ\, 45' = 12 \cdot 60' + 45' = 720' + 45' = 765'.$$

б) Прво секундите ги претвораме во минути, а потоа минутите ги претвораме во степени и добиваме

$$\alpha = 45^\circ\, 15'36'' = 45^\circ + 15' + (\tfrac{36}{60})' = 45^\circ + 15' + 0{,}6' = 45^\circ + 15{,}6' = 45^\circ + (\tfrac{15{,}6}{60})^\circ = 45^\circ + 0{,}26^\circ = 45{,}26^\circ. \ ♦$$

За мерење на аглите во математиката постои уште една мерна единица, која детално ќе ја објасниме при изучувањето на должина на лак на кружница, а овде истата ќе ја воведеме без детални објаснувања.

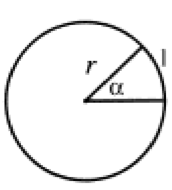
Дефиниција 4. Нека е дадена кружница $k(O,r)$. За централниот агол α ќе велиме дека има големина од *еден радијан*, во ознака $1rad$, ако должината на припадниот кружен лак е еднаква на радиусот на кружницата.

Од дефиниција 3 следува дека, за да ја определиме големината на аголот α, изразена во радијани, доволно е должината l на припадниот кружен лак да ја поделиме со радиусот на кружниот лак, т.е. $\alpha = \frac{l}{r} rad$ (црт. 6).

Пример 2. а) Најди ја големината на аголот α, изразена во радијани, ако должината на кружниот лак соодветен на аголот е двапати поголема од радиусот.

б) Пресметај ја големината на правиот агол изразена во радијани.

Решение. а) Од условот на задачата имаме $l = 2r$, па затоа големината на аголот α изразена во радијани е



Црт. 6

$$\alpha = \frac{l}{r} rad = \frac{2r}{r} rad = 2rad .$$

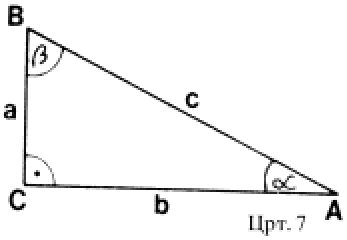
б) Како што знаеме, должината на кружницата со радиус r е еднаква на $2\pi r$, и како полниот агол е збир на четири прави агли добиваме дека должината на кружниот лак соодветен на правиот агол е $l = \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2}$. Според тоа, големината на правиот агол изразена во радијани е $\alpha = \frac{l}{r} rad = \frac{\frac{\pi r}{2}}{r} rad = \frac{\pi r}{2r} rad = \frac{\pi}{2} rad$. ♦

Коментар 1. Од пример 2 б) и фактот дека мерата на агол од 0° изразена во радијани е $0 rad$ (зошто?), заклучуваме дека ако $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$, тогаш $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, и обратно.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Со помош на линијар и агломер нацртај агол од:
   а) 36°, б) 185°, в) 225° и г) 310°.
2. Претвори ги во степени аглите:
   а) $85^\circ 36' 54''$, б) $25^\circ 42'$ и в) $77^\circ 24' 42''$.
3. Претвори ги во минути аглите
   а) $55^\circ 17'$, б) $35^\circ 41'$ и в) $77^\circ 24'$.
4. Претвори ги во секунди аглите
   а) $15^\circ 16' 17''$, б) $52^\circ 24'$ и в) $77^\circ 24' 42''$.
5. Изрази ја големината на рамниот агол во степени и радијани. Што заклучуваш?

2. ДЕФИНИЦИЈА НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ОСТАР АГОЛ



Црт. 7

При изучувањето на правоаголниот триаголник видовме дека негови основни елементи се катетите a и b, хипотенузата c и острите агли α и β. При стандардно обележување на елементите на правоаголниот триаголник за аголот α велиме дека е спротивен на катетата a, а за аголот β катетата a е налегната (црт. 7). Понатаму, бидејќи аголот при темето C е прав агол, од теоремата за збир на агли во триаголникот добиваме дека

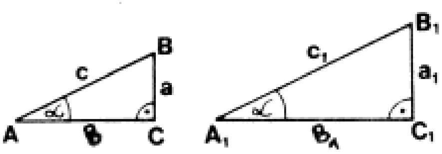
$$\alpha + \beta = 90^\circ . \tag{1}$$

Исто така, знаеме дека за страните на правоаголниот триаголник важи Питагоровата теорема, т.е. дека

$$a^2 + b^2 = c^2 , \tag{2}$$

што значи дека *во правоаголен триаголник збирот на квадратите на катетите е еднаков на квадратот на хипотенузата.*

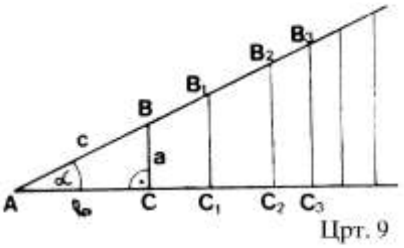
Како што знаеме два триаголници се слични, ако имаат еднакви агли. Бидејќи кај правоаголните триаголници едниот агол е прав агол, од (1) следува дека тие се слични ако имаат еднаков еден остар агол. Така, на пример, од црт. 8 имаме дека триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ се слични, што значи



Црт. 8

$$\frac{a}{c}=\frac{a_1}{c_1},\ \frac{b}{c}=\frac{b_1}{c_1} \text{ и } \frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}.$$

Нека е даден правоаголниот триаголник ABC и преку темињата B и C да ги продолжиме краците на остриот агол $\angle CAB$ (црт. 9). На кракот AC произволно избираме точки $C_1, C_2, C_3,...$ и во овие точки повлекуваме прави нормални на AC кои го сечат кракот AB во точките $B_1, B_2, B_3,...$, соодветно. Од претходно кажаното следува дека триаголниците $ABC, A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3,...$ се слични, што значи дека нивните соодветни страни се пропорционални. Така, ги имаме следните низи равенства



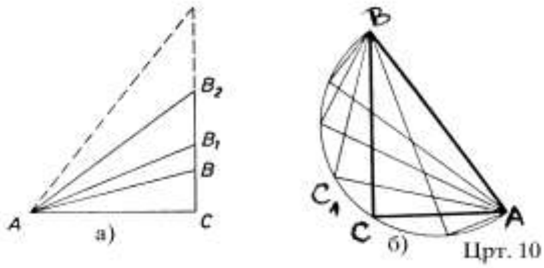
Црт. 9

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}}=\frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}}=\frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AB_3}}=...=\frac{a}{c}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}}=\frac{\overline{AC_2}}{\overline{AB_2}}=\frac{\overline{AC_3}}{\overline{AB_3}}=...=\frac{b}{c}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}}=\frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}}=\frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AC_3}}=...=\frac{a}{b} \text{ и}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AC_1}}{\overline{B_1C_1}}=\frac{\overline{AC_2}}{\overline{B_2C_2}}=\frac{\overline{AC_3}}{\overline{B_3C_3}}=...=\frac{b}{a}.$$



Црт. 10

Од претходните равенства заклучуваме дека, за даден остар агол α односите на соодветните страни во правоаголните триаголници, чиј еден агол е α се константни. Но, што станува со количниците, ако остриот агол се менува (црт. 10 а)). Очигледно, ако аголот се менува, тогаш правоаголните триаголници имаат иста налегната катета, а различни хипотенузи и спротивни катети, што значи дека односот на катетите и односот на налегнатата катета и хипотенузата се менува, т.е. $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \neq \frac{\overline{B_1C}}{\overline{AC}}$ и $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \neq \frac{\overline{AC}}{\overline{AB_1}}$. Слично, од црт. 10 б), бидејќи за сите правоаголни триаголници хипотенузата е константна, а спротивната катета се менува заклучуваме дека при промена на остриот агол односот на спротивната катета и хипотенузата се менува $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \neq \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB}}$. Со други зборорви, односот на две страни на правоаголен триаголник се менува ако се менува остриот агол на тој триаголник.

Значи, на *еден ист остар агол* или на *еднакви остри* агли секогаш им соодветствуваат *еднакви бројни вредности* на односите на страните на правоаголен триаголник на кој му припаѓа остиот агол, а на *разлини остри* агли им соодвествуваат *различни бројни вредности* на односите на страните на соодветните правоаголни триаголници. Според тоа, со помош на количиниците на страните на правоаголниот триаголник можеме да дефинираме функции од остар агол, кои ги нарекуваме *тригонометриски функции*. Овие функции ќе бидат предмет на нашите натамошни разгледувања.

Дефиниција 5. Односот на спротивната катета a на острiот агол α и хипотенузата c во правоаголниот триаголник го нарекуваме синус од аголот α и го означуваме со $\sin\alpha$, т.е. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.

Дефиниција 6. Односот на налегнатата катета b на острiот агол α и хипотенузата c во правоаголниот триаголник го нарекуваме косинус од аголот α и го означуваме со $\cos\alpha$, т.е. $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

Дефиниција 7. Односот на спротивната катета a и налегнатата катета b на острiот агол α во правоаголниот триаголник го нарекуваме тангенс од аголот α и го означуваме со $\mathrm{tg}\alpha$, т.е. $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$.

Дефиниција 8. Односот на налегнатата катета b и спротивната катета a на острiот агол α во правоаголниот триаголник го нарекуваме котангенс од аголот α и го означуваме со $\mathrm{ctg}\alpha$, т.е. $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$.

Забелешка 1. Од дефиициите 7 и 8 имаме $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$, односно $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}$.

Да споменеме дека и други врски меѓу тригонометриските функции, некои од кои подоцна ќе ги разгледаме.

Проучувањето на тригонометриските функции, соодносите меѓу нив, решавањето на таканаречените тригонометриски равенки и примената на тригонометриските функции при решавањето на триаголник го сочинуваат математичката област *тригонометрија*, кој е една од најстарите математички дисциплини.

Пример 3. Пресметај ги вредностите на тригонометриските функции на острiот агол во правоаголниот триаголник со катети $a = 2cm$ и $b = 2\sqrt{3}cm$.

Решение. Прво ќе ја определиме хипотенузата на правоаголниот триаголник. Од Питагоровата теорема имаме

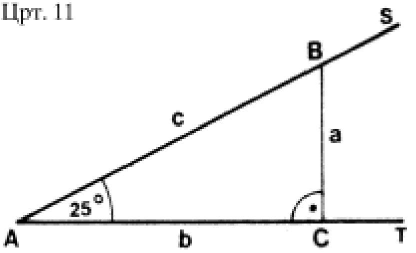
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2}cm = \sqrt{4+12}cm = 4cm.$$

Сега од дефинициите на тригонометриските функции за дадените вредности на a, b и c добиваме

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ и } \mathrm{ctg}\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \ \blacklozenge$$

Определувањето на точните вредности на тригонометриските функции од произволен остар агол не е ниту малку едноставна задача. Сепак, приближните вредности на овие функции, користејќи едноставен графички метод, можат да се определат. Да разгледаме еден пример.

Црт. 11



Пример 4. Приближно определи ги вредностите на тригонометриските функции од аголот $\alpha = 25^\circ$.

Решение. Прво ќе нацртаме $\angle SAT = 25^\circ$ и на кракот AS земаме произволна точка B од која повлекуваме права нормална на кракот AT и ја добиваме точката C (црт. 11). Ги мериме страните на ΔABC и добиваме $a = 22mm$, $b = 45mm$ и $c = 50mm$. Според тоа, вредностите на тригонометриските функции се

$$\sin 25^\circ = \frac{a}{c} \approx \frac{22}{50} = 0{,}44,\ \cos 25^\circ = \frac{b}{c} \approx \frac{45}{50} = 0{,}9,$$

$$\text{tg}25^\circ = \frac{a}{b} \approx \frac{22}{45} \approx 0{,}489 \text{ и } \text{ctg}25^\circ = \frac{b}{a} \approx \frac{45}{22} \approx 2{,}054.$$ ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

6. За правоаголниот триаголник се дадени хипотенузата $c = 13cm$ и катетата $a = 12cm$. Пресметај ги вредностите на тригонометриските функции од аголот α.
7. Дадена е коцка со раб a. Пресметај ги вредностите на тригонометриските функции за аголот формиран од дијагоналата на коцката и дијагоналата на основата на коцката.
8. Графички одреди ги вредностите на тригонометриските функции од аголот:

   а) $\alpha = 55^\circ$, б) $\alpha = 35^\circ$ и в) $\alpha = 80^\circ$.
9. а) Конструирај остар агол α таков, што $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

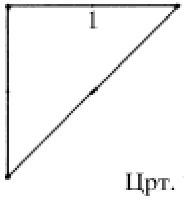
   б) Конструирај остар агол α таков, што $\text{tg}\alpha = \frac{3}{4}$.

   в) Конструирај остар агол α таков, што $\text{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$.
10. Дали може да се конструира агол α таков, што $\sin\alpha = \frac{3}{2}$? Одговорот да се образложи.
11. Графички определи ги вредностите на $\cos 30^\circ$ и $\sin 45^\circ$.

3. ВРЕДНОСТИ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ ЗА АГЛИТЕ $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ И ПРОИЗВОЛЕН ОСТАР АГОЛ

При решавањето на задача 9 од задачите за вежбање, во зависност од прецизноста на цртежот, некој од вас вредноста на $\cos 30^\circ$ добија приближно $0{,}86$, друг $0{,}87$, трет $0{,}84$ итн. Ако вака добиените приближни вредности ги користиме за натамошни пресметувања, тогаш веќе направените грешки сигурно негативно да се одразат при решавање на практични проблеми, т.е. точноста на добиените резултати нема да биде задоволителна. Затоа, логично е да се запрашаме дали од некои агли можеме едноставно да ги пресметаме вредностите на тригонометриските функции. Одговорот на ова прашање е позитивен и како што ќе видиме, тоа можеме да го направиме за агли со големина 30°, 45° и 60°.

Прво ќе ги определиме вредностите на тригонометриските функции од агол $\alpha = 45^\circ$. За таа цел да го разгледаме рамнокракиот правоаголен триаголник со катети $a = b = 1$ (црт. 12). Острите агли на овој триаголник се $\alpha = \beta = 45^\circ$, а од Питагоровата теорема за неговата хипотенуза наоѓаме $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$.



Црт. 12

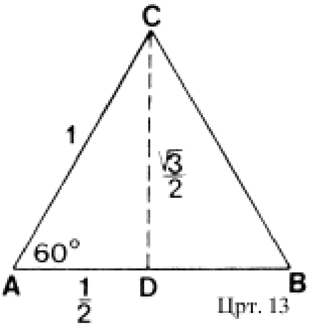
Од дефинициите на тригонометриските функции наоѓаме

$$\sin 45^\circ = \tfrac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos 45^\circ = \tfrac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \mathrm{tg} 45^\circ = \tfrac{a}{b} = 1 \text{ и } \mathrm{ctg} 45^\circ = \tfrac{b}{a} = 1.$$

Забелешка 2. Од претходните разгледувања заклучуваме дека $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ и $\mathrm{tg} 45^\circ = \mathrm{ctg} 45^\circ$. Важно е да напоменеме дека ова е единствениот остар агол за кој синусот е еднаков на косинусот, а тангенсот е еднаков на котангенсот, што покасно и подетално ќе го образложиме.

За да ги определиме вредностите на тригонометриските функции од 30° и 60° ќе го искористиме рамностраниот триаголник ABC со страна 1 (црт. 13). Ја повлекуваме висината CD и го добиваме правоаголниот триаголник CAD чии остари агли се $\angle CAD = 60^\circ$ и $\angle DCA = 30^\circ$. За страните на овој триаголник имаме $\overline{AC} = 1$, $\overline{AD} = \frac{1}{2}$ и

$$\overline{CD} = \sqrt{1^2 - (\tfrac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Црт. 13

Да ги пресметаме вредностите на тригонометриските функции за неговите остри агли. За аголот од 30° имаме:

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2},\ \cos 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \mathrm{tg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ и } \mathrm{ctg} 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

а за аголот од 60° добиваме

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2},\ \mathrm{tg} 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \text{ и } \mathrm{ctg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Како што можеме да забележиме, за пресметување на вредностите на тригонометриските функции од споменатите агли доволно е да ги знаеме дефинициите на тригонометриските функции и својствата на рамнокракиот правоаголен и рамностраниот триаголник. Меѓутоа, заради полесно помнење и поедноставна примена можеме да ја составиме следната табела.

	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Пример 5. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $3\sin 30^\circ \,\mathrm{tg} 30^\circ + \cos 60^\circ \,\mathrm{ctg} 60^\circ$,

б) $\frac{1}{\sin 45^\circ}+\frac{1}{\cos 45^\circ}$.

Решение. а) За дадениот израз имаме

$$3\sin 30^\circ \operatorname{tg}30^\circ+\cos 60^\circ \operatorname{ctg}60^\circ=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

б) $\frac{1}{\sin 45^\circ}+\frac{1}{\cos 45^\circ}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$. α

Во досегашните разгледувања видовме како графички можеме приближно да ги пресметаме вредностите на тригонометриските функции од остар агол, а исто така научивме и како да ги пресметаме точните вредности на тригонометриските функции од 30°, 45° и 60°. Меѓутоа, во практиката најчесто треба да определиме вредност на некоја од тригонометриските функции од агол α, различен од 30°, 45° и 60°, и таа вредност мора да биде најдена со голема точност. Наоѓањето на вакви вредности се заснива на познавање на доста посложени математички теории, па затоа во практиката најчесто се користиме со калкулатор. Имено, ако сакаме да најдеме вредност на $\sin, \cos$ или tg од некој агол α, тогаш постапуваме на следниот начи:

- проверуваме дали активната мерна единица (степен или радијан) на калкулаторот се совпаѓа со мерната единица во која е изразен аголот од кој ја пресметуваме вредноста на тригонометриската функција,
- ако аголот е изразен во степени и помали единици (минути или секунди), тогаш го претвораме во степени, а ако е во радијани нема што да претвораме,
- ја внесуваме вредноста на аголот и го притискаме копчето $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$ или $\boxed{\operatorname{tg}}$, соодветно, со што ја добиваме бараната вредност на тригонометриската функција.

Пример 6. Пресметај $\sin 39^\circ$, $\cos 25^\circ$, $\operatorname{tg}56^\circ 15'$ и $\operatorname{ctg}43^\circ 30'$.

Решение. Внесуваме 39° и со притискање на копчето $\boxed{\sin}$ добиваме

$$\sin 39^\circ \approx 0{,}6293203 \approx 0{,}62932,$$

при што заокруживме на пет децимали.

Внесуваме 25° и со притискање на копчето $\boxed{\cos}$ добиваме $\cos 25^\circ \approx 0{,}90630$.

Бидејќи $56^\circ 15'=56{,}25^\circ$ внесуваме $56{,}25^\circ$ и со притискање на копчето $\boxed{\operatorname{tg}}$ добиваме $\operatorname{tg}56^\circ 15'\approx 1{,}49660$.

На повеќето калкулатори нема копче за пресметување на функцијата котангенс, па затоа во овој случај ја користиме релација $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ и тоа на следниот начи: за дадениот агол пресметуваме $\operatorname{tg}\alpha$, а потоа го притискаме копчето $\boxed{\frac{1}{x}}$ (или $\boxed{x^{-1}}$). Според тоа, во случајот внасуваме $43^\circ 30'=43{,}5^\circ$, го притиска копчето $\boxed{\operatorname{tg}}$ и го притискаме копчето $\boxed{\frac{1}{x}}$ и добиваме $\operatorname{ctg}43^\circ 30'\approx 1{,}05378$. ♦

Видовме како со помош на калкулатор може да се пресметаат вредностите на тригонометриските функции од остри агли. Логично е да се запрашаме дали можеме да го направиме обратното, т.е. ако е позната вредноста на една од тригонометриските функции, дали можеме да го определиме остриот агол во кој функцијата ја прима дадената вредност. Одговорот на ова прашање е потврден и за таа цел постапуваме на следниот начин: ја внесуваме дадената вредност на тригонометриската функција, да кажеме $\sin\alpha = 0{,}5362$, и го притискаме копчето $\boxed{\text{arcsin}}$ (читај *аркусинус*) со што го добиваме аголот $\alpha = 32{,}425329^\circ \approx 32^\circ 25'$.

Забелешка 3. Во случајот имаме нова реална функција, која ја нарекуваме аркусинус и притоа ако $\sin\alpha = a$, тогаш $\alpha = \arcsin a$ (читај α е аркуссинус од a).

Аналогно, ако $\cos\alpha = a$, тогаш $\alpha = \arccos a$ (читај α е аркускосинус од a) и ако $\operatorname{tg}\alpha = a$, тогаш $\alpha = \operatorname{arctg} a$ (читај α е аркуссинус од a). Притоа, ако работиме на дигитрон ги користиме копчињата $\boxed{\text{arccos}}$ и $\boxed{\text{arctg}}$.

Во случај ако знаеме $\operatorname{ctg}\alpha = a$, тогаш прво наоѓаме $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1}{a}$, а потоа го внесуваме бројот $\frac{1}{a}$ и со притискање на копчето $\boxed{\text{arctg}}$ ја добиваме бараната вредност на аголот α.

Пример 7. Пресметај го аголот α ако

а) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}0934$, **б)** $\cos\alpha = 0{,}88624$.

Решение. а) На калкулаторот внесуваме $2{,}0934$, го притискаме копчето $\boxed{\text{arctg}}$ и добиваме $\alpha = \operatorname{arctg} 2{,}0934 \approx 64{,}4667^\circ \approx 64^\circ 28'$.

б) На калкулаторот внесуваме $0{,}88624$, го притискаме копчето $\boxed{\text{arccos}}$ и добиваме $\alpha = \arccos 0{,}88624 \approx 27^\circ 35'$. ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

12. Пресметај ја вредноста на изразот:
а) $(1-\sin 30^\circ)(1+\sin 30^\circ)$, б) $\frac{2\cos 45^\circ - \sin 45^\circ}{1+\sin^2 45^\circ}$ и в) $\frac{\sin^2 30^\circ + 2\sin^2 45^\circ}{3\cos^2 30^\circ - \cos^2 45^\circ}$.

13. Провери ја точноста на равенствата:
а) $3\operatorname{tg} 30^\circ + 2\cos 30^\circ = 2\operatorname{ctg} 30^\circ$, б) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ$ и
в) $\frac{1}{\sin 30^\circ} + \frac{1}{\cos 60^\circ} = (\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ)^2$.

14. Пресметај:
а) $\sin 55^\circ 20'$, б) $\cos 84^\circ 40'21''$, в) $\operatorname{tg} 25^\circ 30'$ и г) $\operatorname{ctg} 71^\circ 39'4''$.

15. Одреди го остриот агол α ако:
а) $\sin\alpha = 0{,}1937$, б) $\sin\alpha = 0{,}9336$, в) $\cos\alpha = 0{,}8631$, г) $\cos\alpha = 0{,}2070$,
д) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}3805$, ѓ) $\operatorname{tg}\alpha = 6{,}968$, е) $\operatorname{ctg}\alpha = 5{,}066$ и ж) $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}9271$.

16. а) За кои два агли велиме дека се комплементни?
б) Дали острите агли во правоаголен триаголник се комплементни?

17. Провери ја точноста на релациите: а) $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ и б) $\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ$.

18. Пресметај $\cos 50^\circ$ и $\sin 40^\circ$. Што забележуваш?

4. ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД КОМПЛЕМЕНТНИ АГЛИ

Ако ја анализираме табелата на страна 14 ќе забележиме дека

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ,\ \cos 30^\circ = \sin 60^\circ,\ \mathrm{tg}60^\circ = \mathrm{ctg}30^\circ \text{ и } \mathrm{tg}30^\circ = \mathrm{ctg}60^\circ,$$

а аглите 30° и 60° се комплементни. Исто така, доколку ја реши задача 18 сигурно забележа дека комплементните агли 50° и 40° важи $\cos 50^\circ = \sin 40^\circ$. Претходните разгледувања не наведуваат на заклучок дека некои од тригонометриските функции од комплементни агли се еднакви меѓу себе. Во оваа смисла ја имаме следната теорема.

Теорема 1. Ако α е остар агол, тогаш

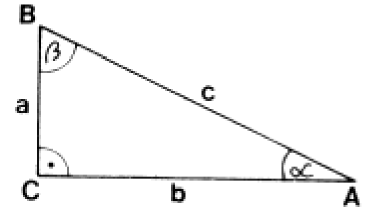
$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha),\quad \cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha),\quad \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha),\quad \mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{tg}(90^\circ - \alpha)\,. \qquad (1)$$

Доказ. Нека е даден правоаголниот ΔABC со остри агли α и β (црт. 14). Вредностите на тригонометриските функции од аголот α се:

$$\sin\alpha = \tfrac{a}{c},\ \cos\alpha = \tfrac{b}{c},\ \mathrm{tg}\alpha = \tfrac{a}{b},\ \mathrm{ctg}\alpha = \tfrac{b}{a}\,. \qquad (2)$$

а вредностите на тригонометриските функции за аголот β се

$$\sin\beta = \tfrac{b}{c},\ \cos\beta = \tfrac{a}{c},\ \mathrm{tg}\beta = \tfrac{b}{a},\ \mathrm{ctg}\beta = \tfrac{a}{b}\,. \qquad (3)$$



Црт. 14

Од равенствата (2) и (3) ги добиваме равенствата

$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{ctg}\beta \text{ и } \mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{tg}\beta\,. \qquad (4)$$

Меѓутоа, α и β се остри агли во правоаголен триаголник, па затоа $\alpha + \beta = 90^\circ$, т.е. $\beta = 90^\circ - \alpha$ и ако замениме во равенствата (4) ги добиваме равенствата

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha),\quad \cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha),\quad \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha),\quad \mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{tg}(90^\circ - \alpha)\,,$$

што и требаше да се докаже. ♦

Пример 8. Во пример 7 пресметавме дека

$$\sin 39^\circ = 0{,}62932,\ \cos 25^\circ = 0{,}90630,\ \mathrm{tg}56^\circ 15' = 1{,}49660 \text{ и } \mathrm{ctg}43^\circ 30' = 1{,}05378.$$

Од теорема (1) добиваме

$$\cos 51^\circ = \cos(90^\circ - 39^\circ) = \sin 39^\circ = 0{,}62932,$$

$$\sin 65^\circ = \sin(90^\circ - 25^\circ) = \cos 25^\circ = 0{,}90630,$$

$$\mathrm{ctg}33^\circ 45' = \mathrm{ctg}(90^\circ - 56^\circ 15') = \mathrm{tg}56^\circ 15' = 1{,}49660 \text{ и}$$

$$\mathrm{tg}46^\circ 30 = \mathrm{tg}(90^\circ - 43^\circ 30') = \mathrm{ctg}43^\circ 30' = 1{,}05378. \ ♦$$

Пример 9. Определи го остриот агол α ако:

а) $\sin\alpha = \sin 28^\circ$ и **б)** $\sin\alpha = \cos 42^\circ$.

Решение. При воведувањето на тригонометриските функции покажавме дека за кои било два различни агли меѓу 0° и 90° вредностите на синусот, а и на останатите тригонометриски функции од тие агли се различни меѓу себе, т.е. ако $\alpha_1 \neq \alpha_2$, тогаш $\sin\alpha_1 \neq \sin\alpha_2$. Но, тоа значи, ако α_1 и α_2 се остри агли и $\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2$, тогаш $\alpha_1 = \alpha_2$ (зошто?).

Претходно изнесеното ќе го изкористиме за да го определиме аголот α.

а) Од $\sin\alpha = \sin 28^\circ$ следува $\alpha = 28^\circ$.

б) Од теорема 1 следува

$$\sin\alpha = \cos 42^\circ = \sin(90^\circ - 42^\circ) = \sin 48^\circ$$

па затоа $\alpha = 48^\circ$. ♦

Пример 10. Определи го остриот агол α ако:

а) $\sin(\alpha + 30^\circ) = \cos 20^\circ$ и **б)** $\sin(\alpha + 10^\circ) = \cos(\alpha + 10^\circ)$

Решение. а) Од теорема 1 и од условот на задачата следува $\sin(\alpha + 30^\circ) = \sin 70^\circ$. Понатаму, ако ја искористиме постапката од пример 9 добиваме $\alpha + 30^\circ = 70^\circ$, од што следува $\alpha = 40^\circ$.

б) Од теорема 1 и од условот на задачата следува $\sin(\alpha + 10^\circ) = \sin(80^\circ - \alpha)$. Понатаму, ако ја искористиме постапката од пример 9 добиваме $\alpha + 10^\circ = 80^\circ - \alpha$, од што следува $\alpha = 35^\circ$.♦

Пример 11. Упрости го изразот $\frac{8\text{tg}20^\circ + 2\text{ctg}70^\circ}{3\text{tg}20^\circ - \text{ctg}70^\circ}$.

Решение. Со примена на теорема 1 добиваме

$$\frac{8\text{tg}20^\circ + 2\text{ctg}70^\circ}{3\text{tg}20^\circ - \text{ctg}70^\circ} = \frac{8\text{tg}20^\circ + 2\text{tg}20^\circ}{3\text{tg}20^\circ - \text{tg}20^\circ} = \frac{10\,\text{tg}20^\circ}{2\,\text{tg}20^\circ} = 5. \ ♦$$

Пример 12. Нека α и β се остри агли на правоаголен триаголник. Упрости го изразот $\frac{\sin\alpha + \cos^2\beta}{\cos\beta + \sin^2\alpha}$.

Решение. Од теорема 1 следува и равенството $\beta = 90^\circ - \alpha$ следува

$$\frac{\sin\alpha + \cos^2\beta}{\cos\beta + \sin^2\alpha} = \frac{\cos(90^\circ - \alpha) + \cos^2\beta}{\cos\beta + \cos^2(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos\beta + \cos^2\beta}{\cos\beta + \cos^2\beta} = 1. \ ♦$$

На крајот од овој дел, да забележиме дека во случај на остар агол α релацијата

$$\mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{tg}(90^\circ - \alpha)$$

можеме да ја искористиме за пресметување на $\mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{tg}(90^\circ - \alpha)$. Навистина, ако со помош на калкулатор треба да пресметаме $\mathrm{ctg}13^\circ 25$, тогаш користејќи ја претходната релација добиваме

$$\mathrm{ctg}13^\circ 25' = \mathrm{tg}(90^\circ - 13^\circ 25') = \mathrm{tg}76^\circ 35' = 4{,}1921.$$

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

19. Определи го комплементниот агол на аголот:
    а) $84^\circ 40'21''$, б) $53^\circ 20'$, в) $33^\circ 14'$
20. Кои од следните равенства се точни:
    а) $\sin 55^\circ = \cos 35^\circ$, б) $\cos 44^\circ = \sin 36^\circ$, в) $\mathrm{tg}\, 38^\circ = \mathrm{ctg}\, 52^\circ$ и г) $\mathrm{ctg}\, 63^\circ = \mathrm{tg}\, 17^\circ$.
    Одговорот да се образложи.
21. Определи го остриот агол α ако
    а) $\sin\alpha = \cos 35^\circ$, б) $\cos\alpha = \sin 36^\circ$, в) $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{ctg}\, 52^\circ$ и г) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{tg}\, 17^\circ$
22. Определи го остриот агол α ако
    а) $\sin(\alpha + 15^\circ) = \cos 35^\circ$, б) $\cos(\alpha + 22^\circ) = \sin 36^\circ$.
23. Определи го остриот агол α ако
    а) $\cos(\alpha - 20^\circ) = \sin(\alpha + 20^\circ)$, в) $\mathrm{tg}(\alpha - 15^\circ) = \mathrm{ctg}(\alpha + 25^\circ)$ и г) $\mathrm{ctg}(\alpha + 20^\circ) = \mathrm{tg}(70^\circ - \alpha)$
24. Најди ги тригонометриските функции на помалиот остар агол на правоаголниот триаголник, кај кој едната катета претставува 75% од другата катета.
25. Упрости ги изразите:
    а) $\dfrac{4\sin 40^\circ + \cos 50^\circ}{3\sin 40^\circ - 2\cos 50^\circ}$, б) $\dfrac{\sin^2 65^\circ - \cos 25^\circ}{\cos^2 25^\circ - \sin 65^\circ}$, в) $\dfrac{\mathrm{tg}\, 72^\circ - \mathrm{ctg}^2 18^\circ}{\mathrm{ctg} 18^\circ - \mathrm{tg}^2 72^\circ}$ и г) $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}^2 \beta}{\mathrm{ctg}\,\beta + \mathrm{tg}^2 \alpha}$.

5. МЕНУВАЊЕ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ ПРИ ПРОМЕНА НА АГОЛОТ ОД 0° ДО 90°

Во претходните разгледувања заклучивме дека при $\alpha_1 \neq \alpha_2$ важи $\sin\alpha_1 \neq \sin\alpha_2$, $\cos\alpha_1 \neq \cos\alpha_2$ итн.. Меѓутоа, сакаме да утврдиме како се однесуваат вредностите на тригонометриските функции кога вредностите на аголот α се менуваат од 0° до 90°. За таа цел прво ќе разгледаме еден пример.

Пример 13. Со пресметување на вредностите на функцијата $\sin$ за аглите 25°, 38° и 65° добиваме $\sin 25^\circ = 0{,}42261$, $\sin 38^\circ = 0{,}61566$ и $\sin 65^\circ = 0{,}9063$. Како што можеме да видиме, со зголемување на вредноста на аргументот се зголемува и вредноста на функцијата $\sin$. ♦

Да се вратиме на прашањето поставено на почетокот од овој дел. За таа цел ќе го разгледаме делот од кружницата со радиус r, во кој впишуваме правоаголни триаголници OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3, ..., OA_nB_n,... (црт. 15), за кои хипотенузите се еднакви, т.е.

$$r=\overline{OB}_1=\overline{OB}_2=\overline{OB}_3=\ldots=\overline{OB}_n=\ldots,$$

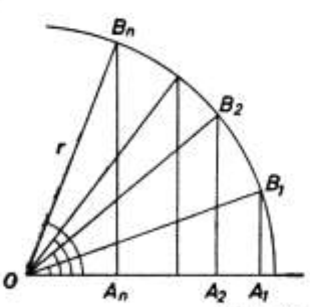
а за аглите во темето O важи

$$\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\ldots<\alpha_n<\ldots.$$

Понатаму, од црт. 15 гледаме дека

$$\overline{A_1B_1}<\overline{A_2B_2}<\overline{A_3B_3}<\ldots<\overline{A_nB_n}<\ldots$$

па затоа $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}}<\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}}<\frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}}<\ldots<\frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{OB_n}}<\ldots$, од што следува дека



Црт. 15

$$\sin\alpha_1<\sin\alpha_2<\sin\alpha_3<\ldots<\sin\alpha_n<\ldots.$$

Од досега изнесеното следува дека *со зголемувањето на вредноста на аголот* α*, се зголемува и вредноста на* $\sin\alpha$, што значи дека функцијата $\sin\alpha$ монотоно расте на интервалот $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Од црт. 15 лесно се воочува дека кога аголот α се приближува до 0° се намалува должината на спротивната катета на впишаните триаголници и таа се приближува кон нула, а како хипотенузата на впишаните триаголници е фиксна, заклучуваме дека количникот на катетата и хипотенузата се приближува кон нула, што значи дека $\sin\alpha$ се приближува кон нула, па затоа можеме да ставиме $\sin 0^\circ=0$. Понатаму, ако аголот α се приближува до 90°, тогаш должината на спротивната катета на впишаните триаголници се приближува до должината на хипотенузата и како должината на хипотенузата е константна (црт. 15), заклучуваме дека количникот на катетата и хипотенузата се приближува до еден, па затоа можеме да ставиме $\sin 90^\circ=1$.

Од претходно изнесеното и од коментар 1 следува точноста на следната теорема.

Теорема 2. Функцијата $\sin\alpha$ монотоно расте на интервалот $[0,\frac{\pi}{2}]$ и притоа $0\le\sin\alpha\le 1$, за секој $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$. ♦

Пример 14. а) Без да пресметуваш, подреди ги по големина $\sin 15^\circ 43'$, $\sin 35^\circ$, $\sin 75^\circ$ и $\sin 43^\circ 12''$.

б) Без да пресметуваш, определи го знакот на изразот $\sin 35^\circ-\sin 42^\circ$.

Решение. а) Од теорема 2 и неравенствата $15^\circ 43'<35^\circ<43^\circ 12''<75^\circ$ следува

$$\sin 15^\circ 43'<\sin 35^\circ<\sin 43^\circ 12''<\sin 75^\circ.$$

б) Од теорема 2 и неравенството $35^\circ<42^\circ$ следува $\sin 35^\circ<\sin 42^\circ$, што значи

$$\sin 35^\circ-\sin 42^\circ<0.\ ♦$$

Повторно да го разгледаме црт. 15. Очигледно

$$\overline{OA_1} > \overline{OA_2} > \overline{A_3} > \ldots > \overline{OA_n} > \ldots$$

па затоа $\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}} > \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OB_2}} > \frac{\overline{OA_3}}{\overline{OB_3}} > \ldots > \frac{\overline{OA_n}}{\overline{OB_n}} > \ldots$, од што следува дека

$$\cos\alpha_1 > \cos\alpha_2 > \cos\alpha_3 > \ldots > \cos\alpha_n > \ldots .$$

Од досега изнесеното следува дека *со зголемувањето на вредноста на аголот* α *, се намалува вредноста на* $\cos\alpha$, што значи дека функцијата $\cos\alpha$ монотоно опаѓа на интервалот $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Од црт. 15 лесно се воочува дека кога аголот α се приближува до 0° се зголемува налегнатата катета на впишаните триаголници и нејзината должина се приближува до должината на хипотенузата, а како должината на хипотенузата на впишаните триаголници е константна, заклучуваме дека количиникот на катетата и хипотенузата се приближува кон еден, што значи дека $\cos\alpha$ се приближува кон еден, па затоа можеме да ставиме $\cos 0^\circ = 1$. Понатаму, ако аголот α се приближува до 90°, тогаш должината на налегната катета на впишаните триаголници се приближува до нула и како должината на хипотенузата е константна (црт. 15), заклучуваме дека количникот на катетата и хипотенузата се приближува до нула, па затоа можеме да ставиме $\cos 90^\circ = 0$.

Од претходно изнесеното и од коментар 1 следува точноста на следната теорема.

Теорема 3. Функцијата $\cos\alpha$ монотоно опаѓа на интервалот $[0, \frac{\pi}{2}]$ и притоа $0 \le \cos\alpha \le 1$, за секој $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. ♦

Пример 15. Без да пресметуваш, подреди ги по големина $\cos 13^\circ$, $\cos 82^\circ$ и $\cos 75^\circ$.

Решение. а) Од теорема 3 и неравенствата $13^\circ < 75^\circ < 82^\circ$ следува

$$\cos 13^\circ > \cos 75^\circ > \cos 82^\circ. \ ♦$$

Да го разгледаме црт. 16, на кој се нацртани неколку правоаголни триаголници со заедничка налегната катета $\overline{AC}$ и за аглите во темето A важи

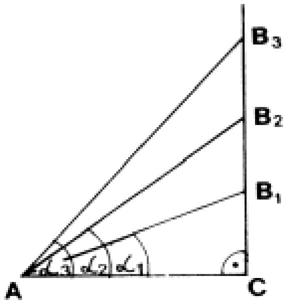
$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$$

Очигледно

$$\overline{CB_1} < \overline{CB_2} < \overline{CB_3}$$

па затоа $\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AC}} < \frac{\overline{CB_2}}{\overline{AC}} < \frac{\overline{CB_3}}{\overline{AC}}$, од што следува дека

$$\mathrm{tg}\alpha_1 < \mathrm{tg}\alpha_2 < \mathrm{tg}\alpha_3 .$$



Црт. 16

Од досега изнесеното следува дека *со зголемувањето на вредноста на аголот* α *, се зголемува вредноста на* $\mathrm{tg}\alpha$, што значи дека функцијата $\mathrm{tg}\alpha$ монотоно расте на разгледуваниот интервал.

Од црт. 16 лесно се воочува дека кога аголот α се приближува до 0° се намалува спротивната катета на вака конструираните триаголници и нејзината должина се приближува до нула, а како должината на налегнатата катета е константна, заклучуваме дека количникот на спротивната и налегнатата катета се приближува до нула, што значи $\operatorname{tg}\alpha$ се приближува до нула, па затоа можеме да ставиме $\operatorname{tg}0^\circ = 0$. Понатаму, ако аголот α се приближува до 90°, тогаш должината на спротивната катета на вака конструираните триаголници неограничено расте и како должината на налегнатата катета е константна заклучуваме дека количникот на спротивната и налегнатата катета неограничено расте. Последното можеме да го искажеме на следниот начин: *ако аголот* α *расте и се стреми кон* $90^\circ = \frac{\pi}{2}$*, тогаш* $\operatorname{tg}\alpha$ *неограничено расте и се стреми кон бесконечност,* т.е. *ако* $\alpha \to \frac{\pi}{2}$*, тогаш* $\operatorname{tg}\alpha \to +\infty$.

Од претходно изнесеното и од коментар 1 следува точноста на следната теорема.

Теорема 4. Функцијата $\operatorname{tg}\alpha$ монотоно расте на интервалот $[0,\frac{\pi}{2})$ и притоа $0 \le \operatorname{tg}\alpha < +\infty$, за секој $\alpha \in [0,\frac{\pi}{2})$. ♦

Пример 16. а) Без да пресметуваш, подреди ги по големина $\operatorname{tg}13^\circ$, $\operatorname{tg}82^\circ$ и $\operatorname{tg}75^\circ$.

б) Без да пресметуваш, подреди ги по големина острите агли α, β, γ и δ, ако се дека $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}437$, $\operatorname{tg}\beta = 5{,}678$, $\operatorname{tg}\gamma = 1{,}0234$ и $\operatorname{tg}\delta = 25{,}786$.

Решение. а) Од теорема 4 и неравенствата $13^\circ < 75^\circ < 82^\circ$ следува

$$\operatorname{tg}13^\circ < \operatorname{tg}75^\circ < \operatorname{tg}82^\circ.$$

б) Од $0{,}437 < 1{,}0234 < 5{,}678 < 25{,}786$ следува $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\gamma < \operatorname{tg}\beta < \operatorname{tg}\delta$, па од теорема 4 заклучуваме дека $\alpha < \gamma < \beta < \delta$. ♦

Пример 17. За кои вредности на острирот агол α важи $\operatorname{tg}\alpha < \sqrt{3}$, а за кои $\operatorname{tg}\alpha > \sqrt{3}$.

Решение. Знаеме дека $\operatorname{tg}60^\circ = \sqrt{3}$. Сега од теорема 4 следува:

- ако $0^\circ < \alpha < 60^\circ$, тогаш $\operatorname{tg}\alpha < \sqrt{3}$, а
- ако $60^\circ < \alpha < 90^\circ$, тогаш $\operatorname{tg}\alpha > \sqrt{3}$. ♦

Во претходните разгледувања видовме дека од $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ следува

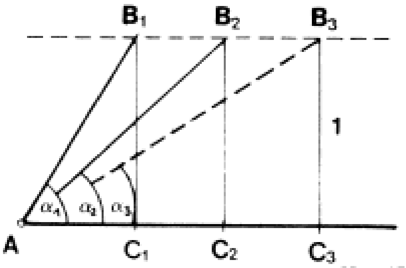
$$0 < \operatorname{tg}\alpha_1 < \operatorname{tg}\alpha_2 < \operatorname{tg}\alpha_3.$$

Но за позитивни реални броеви x и y од $x < y$ следува $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$, па затоа

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1} > \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_2} > \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_3},$$

и ако искористиме дека за секој остар агол α важи $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$ добиваме

$$\operatorname{ctg}\alpha_1 > \operatorname{ctg}\alpha_2 > \operatorname{ctg}\alpha_3.$$



Црт. 17

Понатаму, со аналогни размислувања, како и за тангенсот можеме да заклучиме дека $\mathrm{ctg}90^\circ=0$ и *ако аголот* α *опаѓа и се стреми кон* 0°*, тогаш* $\mathrm{ctg}\alpha$ *неограничено расте и се стреми кон бесконечност,* т.е. *ако* $\alpha\to0^\circ$ *, тогаш* $\mathrm{ctg}\alpha\to+\infty$. Обиди се ова самостојно да го заклучиш.

Од претходно изнесеното и од коментар 1 следува точноста на следната теорема.

Теорема 5. Функцијата $\mathrm{ctg}\alpha$ монотоно опаѓа на интервалот $(0,\frac{\pi}{2}]$ и притоа $0\leq\mathrm{ctg}\alpha<+\infty$, за секој $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2}]$. ♦

Пример 18. а) Без да пресметуваш, определи го знакот на изразот $\mathrm{ctg}28^\circ-1$.

б) Провери дали е точно неравенството $\mathrm{ctg}35^\circ-\mathrm{tg}25^\circ>0$.

в) Без да пресметуваш, определи го знакот на изразот $\frac{\mathrm{tg}55^\circ-\mathrm{tg}25^\circ}{\mathrm{ctg}37^\circ-\mathrm{ctg}45^\circ}$.

Решение. Знаеме дека $\mathrm{ctg}45^\circ=1$ и како $45^\circ>28^\circ$ од теорема 5 следува

$$\mathrm{ctg}28^\circ>\mathrm{ctg}45^\circ,\text{ т.е. }\mathrm{ctg}28^\circ-\mathrm{ctg}45^\circ>0.$$

Според тоа, $\mathrm{ctg}28^\circ-1=\mathrm{ctg}28^\circ-\mathrm{ctg}45^\circ>0$.

б) Ако го искористиме равенството $\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{ctg}(90^\circ-\alpha)$, тогаш од теорема 5 имаме

$$\mathrm{ctg}35^\circ-\mathrm{tg}25^\circ=\mathrm{ctg}35^\circ-\mathrm{ctg}65^\circ>0.$$

в) Бидејќи $55^\circ>25^\circ$ од теорема 4 добиваме $\mathrm{tg}55^\circ>\mathrm{tg}25^\circ$, т.е. $\mathrm{tg}55^\circ-\mathrm{tg}25^\circ>0$. Но, $37^\circ<45^\circ$, па затоа $\mathrm{ctg}37^\circ>\mathrm{ctg}45^\circ$, т.е. $\mathrm{ctg}37^\circ-\mathrm{ctg}45^\circ>0$. Конечно, $\frac{\mathrm{tg}55^\circ-\mathrm{tg}25^\circ}{\mathrm{ctg}37^\circ-\mathrm{ctg}45^\circ}>0$ (зошто?). ♦

Пример 19. За кои вредности на остриот агол α важи $\mathrm{ctg}\alpha<1$, а за кои $\mathrm{ctg}\alpha>1$.

Решение. Знаеме дека $\mathrm{ctg}45^\circ=1$. Сега од теорема 5 следува:

- ако $0^\circ<\alpha<45^\circ$, тогаш $\mathrm{ctg}\alpha>1$, а
- ако $45^\circ<\alpha<90^\circ$, тогаш $\mathrm{ctg}\alpha>1$. ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

26. Без да пресметуваш, определи кој број е поголем:

    а) $\sin 33^\circ$ или $\sin 44^\circ$ б) $\sin 72^\circ$ или $\sin 27^\circ$

27. Без да пресметуваш, подреди ги броевите да растат:

    а) $\sin 38^\circ$, $\sin 25^\circ$, $\sin 74^\circ$, $\sin 45^\circ$, $\sin 17^\circ 30'$

    б) $\sin 52^\circ$, $\sin 41^\circ$, $\sin 18^\circ$, $\sin 81^\circ$, $\sin 12^\circ 45'$

28. Без да пресметуваш, определи кој број е поголем:

    а) $\cos 17^\circ$ или $\cos 18^\circ$ б) $\cos 31^\circ 20'$ или $\cos 30^\circ 40'$

    в) $\mathrm{tg}\,39^\circ$ или $\mathrm{tg}\,29^\circ$ г) $\mathrm{ctg}\,56^\circ$ или $\mathrm{ctg}\,65^\circ$

29. Без да пресметуваш, подреди ги по опаѓање броевите:

а) $\cos 14^\circ$, $\cos 25^\circ$, $\cos 75^\circ$, $\cos 48^\circ$, $\cos 10^\circ 20'$;

б) $\operatorname{tg} 39^\circ$, $\operatorname{tg} 73^\circ$, $\operatorname{tg} 24^\circ$, $\operatorname{tg} 48^\circ 50'$, $\operatorname{tg} 26^\circ 10'$.

30. Без да пресметуваш, подреди ги по големина остриte агли α , β , γ и δ ако:

а) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\beta = 0{,}34$, $\sin\gamma = \frac{2}{5}$, $\sin\delta = 0{,}33$,

б) $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, $\cos\beta = 0{,}77$, $\cos\gamma = \frac{7}{9}$, $\cos\delta = 0{,}77$.

31. Без да пресметуваш, спореди ги броевите

а) $\sin 27^\circ$ и $\cos 27^\circ$, б) $\sin 72^\circ$ и $\cos 45^\circ$,

в) $\operatorname{tg} 39^\circ$ и $\operatorname{ctg} 25^\circ$, г) $\operatorname{tg} 37^\circ$ и $\operatorname{ctg} 39^\circ$,

32. Без да пресметуваш определи го знакот на изразот:

а) $\frac{\operatorname{tg} 57^\circ - \operatorname{ctg} 34^\circ}{\operatorname{ctg} 57^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ}$, б) $\frac{\sin 57^\circ - \cos 34^\circ}{\operatorname{tg} 10^\circ - \operatorname{ctg} 23^\circ}$

33. За кои вредности на агол α , $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$ е точно неравенството:

а) $\operatorname{tg}\alpha < 1$, б) $\sin\alpha \le \frac{1}{2}$, в) $\cos\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

34. Ако $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$, најди ја најголемата вредност на изразот:

а) $\sin\alpha + 1$; б) $2\cos\alpha + 3$, в) $4 - 3\cos\alpha$.

35. Ако $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$, најди ја најмалата вредност на изразот:

а) $\sin\alpha + 2$, б) $2\cos\alpha - 3$, в) $4 - 3\sin\alpha$.

36. Ако $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$, најди во кои граници се менува вредноста на изразот:

а) $5 - \sin\alpha$, б) $2 + 3\cos\alpha$, г) $4\sin\alpha - 5$.

6. ВРСКИ МЕЃУ ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ ОД ИСТ АГОЛ

При дефинирањето на тригонометриските функции, во забелешка 1 видовме дека $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$, за секој остар агол α и ова е одредена зависност меѓу две тригонометриски функции од ист агол (понатаму под ист агол ќе подразбираме само исти остри агли). Во овој дел ќе изведеме неколку основни зависности меѓу тригонометриските функции од ист агол. Да разгледаме еден пример.

Пример 20. Пресметај

а) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ$, **б)** $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$.

Решение. Имаме,

а) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$ и

б) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$. ♦

Примерот 20 не наведува на претпоставката дека збирот на квадратите на функциите синус и косинус од еден ист агол α е еднаков на еден. Во следната теорема ќе покажеме дека нашата претпоставка е точна.

Теорема 6. Збирот на квадратите на синус и косинус од еден ист агол α е еднаков на единица, т.е.

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1. \tag{1}$$

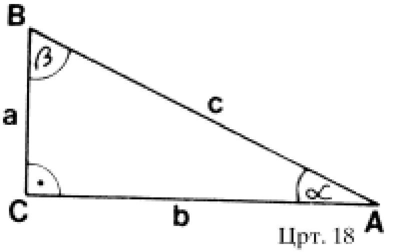
Доказ. Нека ABC е правоаглоен триаголник со остар агол α. Од дефиницијата на синус и косинус имаме $\sin\alpha=\frac{a}{c}$, $\cos\alpha=\frac{b}{c}$, што значи

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=(\tfrac{a}{c})^2+(\tfrac{b}{c})^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}.$$

Но, триаголникот ABC е правоаголен со катети a и b и хипотенуза c, па од Питагоровата теорема имаме $a^2+b^2=c^2$ и ако замениме во последното равенство добиваме

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1,$$

што и требаше да се докаже. ♦



Црт. 18

Забележуваме дека равенството (1) се однесува на вредностите на функциите синус и косинус од ист агол α, па затоа истото може да се искористи за определување вредноста, да кажеме на косинус, од некој агол ако е позната вредноста на синус од истиот агол. Да разгледаме еден пример.

Пример 21. а) За острииот агол α најди $\cos\alpha$ ако $\sin\alpha=0{,}6$.

б) Упрости го изразот $(2-\cos\alpha)(2+\cos\alpha)-3$.

Решение. а) Од идентитетот (1) и $\sin\alpha=0{,}6$ последователно добиваме

$$0{,}6^2+\cos^2\alpha=1,$$

$$0{,}36+\cos^2\alpha=1 \text{ и}$$

$$\cos^2\alpha=1-0{,}36=0{,}64.$$

Но, $\cos\alpha>0$, па од посаледното равенство следува $\cos\alpha=0{,}8$.

б) Ако искористиме дека $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, тогаш од идентитетот (1) добиваме

$$(2-\cos\alpha)(2+\cos\alpha)-3=2^2-\cos^2\alpha-3=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha. \ ♦$$

Како што знаеме, точна е формулата $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}$ од која следуват формулите

$$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1 \text{ и} \tag{2}$$

$$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}. \tag{3}$$

Од друга страна, од $\sin\alpha=\frac{a}{c}$, $\cos\alpha=\frac{b}{c}$ следува $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{a}{b}=\mathrm{tg}\alpha$, т.е. точна е формулата

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (4)$$

Сега, од (3) и (4) добиваме $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, т.е. точна е формулата

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (5)$$

Равенствата (1), (2), (4) и (5) во литературата се познати како основни тригонометриски идентитети. Во следните примери ќе укажеме на некои примени на истите.

Пример 22. За остриот агол α пресметај $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и $\mathrm{ctg}\alpha$, ако $\mathrm{tg}\alpha = \frac{12}{5}$

Решение. Ако го искористиме идентитетот (3) добиваме

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{5}{12}.$$

Сега од идентитетот (4) имаме $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha = \frac{12}{5}$ т.е. $\sin\alpha = \frac{12}{5}\cos\alpha$ па затоа

$$\sin^2\alpha = \frac{144}{25}\cos^2\alpha$$

и ако замениме во (1) добиваме

$$\frac{144}{25}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

па затоа $\cos^2\alpha = \frac{25}{169}$ и ако земеме придвид дека $\cos\alpha > 0$ наоѓаме $\cos\alpha = \frac{5}{13}$. Конечно, со замена во $\sin\alpha = \frac{12}{5}\cos\alpha$ добиваме

$$\sin\alpha = \frac{12}{5}\cos\alpha = \frac{12}{5}\cdot\frac{5}{13} = \frac{12}{13}.$$ ♦

Ќе решиме уште едва примери во кои ќе ја илустрираме примената на основните тригонометриски идентитети.

Пример 23. Докажи го идентитетот:

$$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha$$

Решение. Докажувањето на вакви идентитети може да се утврди на два начина:

1. Со трансформација, едната страна на равенството се сведува на другата

2. Се трансформираат и двете страни на равенството се до нивно сведување на очигледно вистинито равенство

Во овој случај ќе го избереме првиот начин. Имено, од (1) добиваме

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha,$$

и ја трансформираме левата страна на даденото равенство

$$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha$$

што и требаше да докажеме. ♦

Пример 24. Докажи го идентитетот:

$$\frac{1}{1-\sin\alpha} - \frac{1}{1+\sin\alpha} = \frac{2tg\alpha}{\cos\alpha}$$

Решение. За разлика од претходниот пример во овој пример дадениот идентитет ќе го докажеме на вториот начин и тоа:

$$\frac{1+\sin\alpha-1+\sin\alpha}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}=\frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \frac{2\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{2\sin\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha}{\cos^2\alpha},$$

со што идентитетот е докажан. ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

37. Одреди ги останатите тригонометриски функции од остриот агол α ако:

а) $\sin\alpha = 0{,}7$, б) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

38. Одреди ги останатите тригонометриски функции од остриот агол α ако:

а) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, б) $\cos\alpha = 0{,}6$.

39. Одреди ги останатите тригонометриски функции од остриот агол α ако:

а) $\operatorname{tg}\alpha = 3$, б) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{8}$.

40. Одреди ги останатите тригонометриски функции од остриот агол α ако:

а) $\operatorname{ctg}\alpha = 5{,}6$, б) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

41. Пресметај ја вредноста на изразот

а) $\frac{5\sin\alpha-2\cos\alpha}{3\cos\alpha}$, ако $\operatorname{tg}\alpha = \frac{20}{21}$, б) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{1-\operatorname{tg}\alpha}$, ако $\sin\alpha = \frac{3}{5}$,

в) $\frac{15-13\sin\alpha}{5\operatorname{tg}\alpha-12\operatorname{ctg}\alpha}$, ако $\cos\alpha = \frac{5}{13}$.

42. Одреди го $\operatorname{tg}\alpha$ од равенството:

а) $\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha} = 4$, б) $\frac{5\sin\alpha-3\cos\alpha}{2\cos\alpha} = -\frac{1}{2}$.

43. Докажи го идентитетот:

а) $\frac{1}{1+\sin\alpha}-\frac{1}{1-\sin\alpha}=\frac{2}{\cos^2\alpha}$, б) $\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$,

в) $(\operatorname{tg}\alpha+1)^2+(\operatorname{tg}\alpha-1)^2=\frac{2}{\cos^2\alpha}$, г) $\frac{1-2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha-1}=1$.

44. Докажи го идентитетот:

а) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=1-\sin\alpha$, б) $\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\sin\alpha\cdot\cos\alpha$,

в) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{2\cos\alpha}=\sin\alpha$, г) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$.

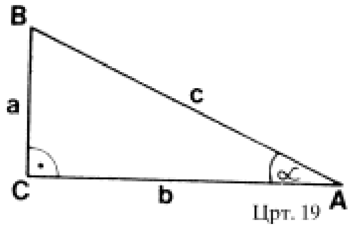
7. РЕШАВАЊЕ НА ПРАВОАГОЛЕН ТРИАГОЛНИК

На почетокот на оваа тема рековме дека една од целите кои сакаме да ги постигнеме со воведувањето на тригонометриските функции од остар агол е решавањето на правоаглниот триаголник. Последното подразбира одредување на основните елементи на правоаголниот триаголник, страни и остри агли, кога се дадени два негови елементи, различни од правиот агол. Поставената задача има решение, во што ние ќе се увериме разгледувајќи ги четирите типа задачи за решавање на правоаголен триаголник, и тоа:

- познати се хипотенузата и еден агол,
- познати се катета и агол,
- познати се катета и хипотенуза и
- познати се двете катети.

Пример 25. Реши го правоаголниот триаголник зададен со хипотенузата $c=56cm$ и аголот $\alpha=53^\circ 28'$.

Решение. Дадени се $c=56cm$ и $\alpha=53^\circ 28'$ (црт. 19). Треба да ги определиме a,b и β.



Црт. 19

Аголот β ќе го определиме од условот

$$\alpha+\beta=90^\circ .$$

Имаме,

$$\beta=90^\circ-\alpha=90^\circ-53^\circ 28'=36^\circ 32'.$$

Понатаму, од $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ следува

$$a=c\sin\alpha=56\sin 53^\circ 28'=45cm,$$

а од $\cos\alpha=\frac{b}{c}$ следува

$$b=c\cos\alpha=56\cos 53^\circ 28'=33{,}3cm. \ \blacklozenge$$

Забелешка 6. Пожелно е сите елементи на триаголникот да ги определиме со почетните податоци, бидејќи во случај ако користиме веќе пресметани вредности, тогаш повеќекратните приближни пресметувања можат да доведат до поголеми грешки.

Пожелно е на крајот да направиш проверка на добиените резултати. Имено, тоа можеш да го направиш со помош на Питагоровата теорема. Во случајот имаме

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{45^2+33{,}3^2}=\sqrt{2025+1108{,}89}=\sqrt{3133{,}89}\approx 55{,}89.$$

Пример 26. Реши го правоаголниот триаголник зададен со катета $a=123cm$ и аголот $\beta=41^\circ 12'$.

Решение. Дадени се $a=123cm$ и $\beta=41^\circ 12'$ (црт. 19). Треба да ги определиме b,c и α.

Аголот α ќе го определиме од условот $\alpha+\beta=90^\circ$. Имаме,

$$\alpha=90^\circ-\beta=90^\circ-41^\circ 12'=48^\circ 48'.$$

Понатаму, од $\cos\beta=\frac{a}{c}$ следува

$$c=\frac{a}{\cos\alpha}=\frac{123}{\cos 41^\circ 12'}=163{,}5cm,$$

а од $\mathrm{tg}\beta=\frac{b}{a}$ следува

$$b=a\,\mathrm{tg}\beta=123\,\mathrm{tg}41^\circ 12'=107{,}7. \ \blacklozenge$$

Пример 27. Реши го правоаголниот триаголник зададен со катета $a=24cm$ и хипотенуза $c=30cm$.

Решение. Дадени се $a=24cm$ и $c=30cm$ (црт. 19). Треба да ги определиме b,α и β.

Од Питагоровата теорема имаме

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{30^2-24^2}=\sqrt{900-576}=\sqrt{324}=18cm.$$

Понатаму, $\cos\beta=\frac{a}{c}=\frac{24}{30}=0,8$, па е $\beta=\arccos 0,8=36^\circ 52'$ и $\alpha=90^\circ-\beta=90^\circ-36^\circ 52'=53^\circ 8'$. ♦

Пример 28. Реши го правоаголниот триаголник зададен со катети $a=2,4cm$ и $b=3,5cm$.

Решение. Дадени се $a=2,4cm$ и $b=3,5cm$ (црт. 19). Треба да ги определиме c,α и β.

Од Питагоровата теорема имаме

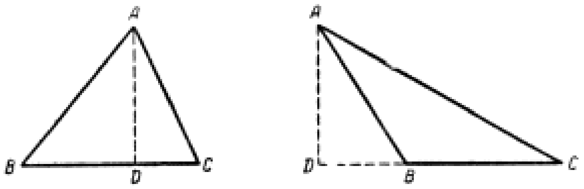
$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2,4^2+3,5^2}=\sqrt{5,76+12,25}=\sqrt{18,01}\approx 4.2cm.$$

Понатаму, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{a}{b}=\frac{24}{35}$, па е $\alpha=\mathrm{arctg}\frac{24}{35}=34^\circ 26'$ и $\beta=90^\circ-\alpha=90^\circ-34^\circ 26'=55^\circ 34'$. ♦

ЗА ОНИЕ ШТО САКААТ ДА ЗНААТ ПОВЕЌЕ

Стекнатите знаења за тригонометриските функции од остар агол и решавањето на правоаголниот триаголник можеме да ги искористиме за решавање на произволен триаголник, остроаголен или тапоаголен.

На црт. 20 се дадени остроаголен и тапоаголен триаголник. И во двата случаи со помош на висината AD добиваме два правоаголни триаголници ABD и ACD. Според тоа, за да го решиме триаголникот ABC за кој се познати три елементи, потребно е да ги решиме правоаголните триаголници ABD и ACD. Може да се покаже дека последното е секогаш можно, што ние ќе го илустрираме на еден пример, без да ги разгледуваме сите можни случаи.



Црт. 20

Пример 29. Реши го триаголникот ABC зададен со $a=28,5$, $\alpha=68^\circ$ и $\beta=54^\circ$.

Решение. Од теоремата за збирот на аглите во триаголник, за аголот γ добиваме

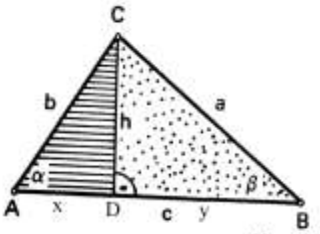
$$\gamma=180^\circ-\alpha-\beta=180^\circ-68^\circ-54^\circ=58^\circ.$$

Од правоаголниот триаголник BCD имаме

$$h=a\sin\beta=28,5\sin 54^\circ=23 \text{ и } y=a\cos\beta=16,7,$$

а од правоаголниот триаголник CAD имаме

$$b=\frac{h}{\sin\alpha}=\frac{23}{\sin 68^\circ}=24,8 \text{ и } b=\frac{h}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{23}{\mathrm{tg}\, 68^\circ}=9,3.$$



Црт. 21

Конечно, за третата страна добиваме $c=x+y=9,3+16,7=26$, со што триаголникот е решен. ♦

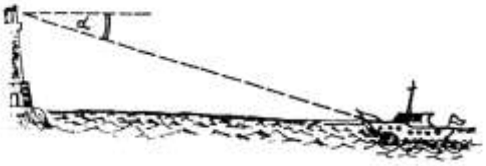
ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

45. Реши го правоаголниот триаголник зададен со:
а) $a = 0{,}5$ и $c = 1{,}3$; б) $c = 15$ и $b = 8$.
46. Реши го правоаголниот триаголник зададен со:
а) $a = 0{,}5$ и $\alpha = 22^\circ 30'$; б) $a = 236$ и $\beta = 54^\circ$.
47. Реши го правоаголниот триаголник зададен со:
а) $\beta = 33^\circ 22'$ и $c = 71{,}5$; б) $c = 15{,}6$ и $\alpha = 44^\circ 28'$.
48. Реши го правоаголниот триаголник зададен со:
а) $\beta = 29^\circ 29'$ и $b = 12{,}3$; б) $b = 72$ и $\alpha = 56^\circ 10'$.
49. Определи ги аглите на правоаголниот триаголник, ако
а) $a = 18$ и $b = 31$; б) $a = 7{,}9$ и $b = 5{,}6$
50. Одреди ги аглите на рамнокракиот триаголник со основа 25 и висина спуштена кон основата 15.
51. Пресметај го периметарот на рамнокракиот триаголник, чиј крак е $14cm$, а аголот при основата е 50°.
52. Пресметај ги аглите и страните на ромбот, ако неговите дијагонали се $32cm$ и $60cm$.
53. Рамнокракиот трепез е зададен со поголемата основа $a = 42cm$, кракот $c = 25cm$ и аголот при поголемата основа $47^\circ 20'$. Пресметај ја другата основа и висината..
54. Пресметај го периметарот на правоаголникот на кој аголот меѓу дијагоналите му е $64^\circ 40'$ и дијагоналата е $10cm$.
55. Пресметај го периметарот на правоаголникот со страна $a = 18cm$ и агол меѓу страната a и дијагоналата $\alpha = 44^\circ$.

8. РЕШАВАЊЕ НА ПРАКТИЧНИ ПРОБЛЕМИ

Да се вратиме на почетниот пример од воведот на темата, во кој се бараше:

Да се одреди растојанието a *на бродот до езерскиот брег, ако е позната висината на светилникот* $h = 68m$ *и со помош на соодветен мерен инструмент е одреден аголот* $\alpha = 1^\circ 30'$ (црт. 22).



Црт. 22

Јасно, решавањето на поставениот проблем се сведува на решавање на правоаголен триаголник во кој се бара страната, и притоа

$$a = h\,\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = 68\,\mathrm{tg}\,88^\circ 30' = 2597m\,.$$

Во следните примери ќе разгледаме практични проблеми чие решавање се сведува на решавање на правоаголен триаголник.

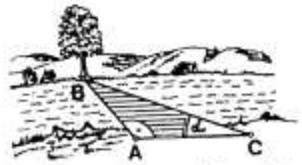
Пример 30. Точките A и B се наоѓаат на спротивни брегови на една река. За одредување растојанието $\overline{AB}$ е избрана трета точка C, така што $CA \perp AB$ и $\overline{AC} = 85m$ (црт. 23). Пресметај го растојанието $\overline{AB}$, ако $\angle ACB = 35^\circ 40'$.

Решение. Дадени се $\overline{AC} = 85m$ и $\alpha = \angle ACB = 35^\circ 40'$ (црт. 23). Треба да се одреди $\overline{AB}$.

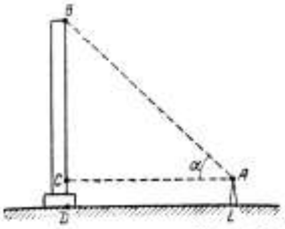
Од правоаголниот триаголник ABC имаме

$$\overline{AB} = \overline{AC}\,\mathrm{ctg}\alpha = 85\,\mathrm{ctg}35^\circ 40' \approx 61m,$$

што значи, бараното растојание е приближно $61m$. ♦



Црт. 23



Црт. 24

Пример 31. Одреди ја висината на цилиндричен фабрички оџак, кој се наоѓа на хоризонтална рамнина, ако на растојание $\overline{AC} = 40m$ од оџакот, е поставен инструмент со висина $\overline{AE} = 1{,}5m$ со кој е определен $\angle CAB = 31^\circ$ (црт. 24)

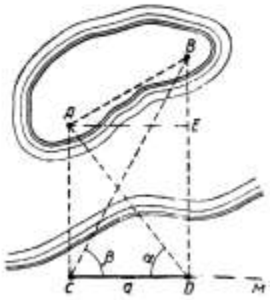
Решение. Од условот на задачата следува дека висината на оџакот е

$$\overline{DB} = \overline{DC} + \overline{CB} = \overline{AE} + \overline{AB}\,\mathrm{ctg}\alpha = 1{,}5 + 40\,\mathrm{ctg}31^\circ \approx 26m.♦$$

Пример 32. Од езерскиот брег на еден остров се забележани два предмети A и B (црт. 25). Како може да се определи растојанието меѓу A и B.

Решение. Поставениот проблем можеме да го решиме на следниот начин. Од точката C, која се наоѓа на брегот, на правата AC повлекуваме нормална полуправа CM и на неа со помош на мерен инструмент наоѓаме точка D таква, што $\angle CDB = 90^\circ$.

Потоа, со мерен инструмент ги определуваме аглите α и β и растојанието $\overline{CD} = a$.



Црт. 25

Ако замислиме дека $AE \parallel CD$, тогаш од правоаголниот трапез $DBAC$ добиваме

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2}, \qquad (1)$$

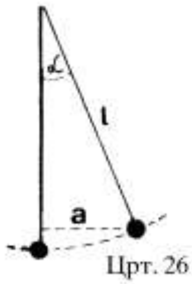
каде $\overline{AE} = \overline{CD} = a$ и $\overline{BE} = \overline{BD} - \overline{AC}$. Понатаму, од правоаголните триаголници ACD и BCD имаме

$$\overline{DB} = \overline{CD}\,\mathrm{tg}\alpha = a\,\mathrm{tg}\alpha \text{ и } \overline{AC} = \overline{CD}\,\mathrm{tg}\beta = a\,\mathrm{tg}\beta.$$

Конечно, ако замениме во (1) добиваме

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2} = \sqrt{a^2 + (\overline{BD} - \overline{AC})^2} = \sqrt{a^2 + (a\,\mathrm{tg}\alpha - a\,\mathrm{tg}\beta)^2} = a\sqrt{1 + (\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta)^2}.♦$$

Пример 33. На конец закрепен на еден крај и долг $l = 1{,}2m$ обесена е тешка топка (нишало). За колкав агол е отклонето нишалото од рамнотежната положба ако е направен отклон (амплитуда) $a = 17cm$ (црт. 26).



Црт. 26

Решение. Прво да ги претвориме должините на нишалото и амплитудата во иста мерна единица. Имаме, $l = 1{,}2m = 120cm$ и $a = 17cm$. Нека со α го означиме аголот за кој е отклонето нишалото од рамнотежната положба. Тогаш,

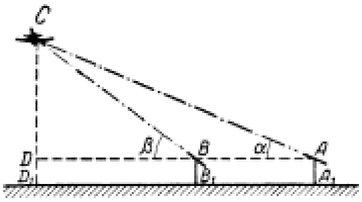
$$\sin\alpha = \frac{a}{l} = \frac{17}{120} = 0{,}14166.$$

Според тоа,

$$\alpha = \arcsin 04166 \approx 8^\circ 9' .\ \blacklozenge$$

ЗА ОНИЕ ШТО САКААТ ДА ЗНААТ ПОВЕЌЕ

Авион лета на константна висина, непозната за набљудувачите од земјата кои располагаат со два мерни инструменти за определување на агли. Дали може да се определи висината на која лета авионот?



Црт. 27

Одговорот на поставеното прашање е позитивен. Ќе покажеме како при дадените услови може да се определи висината на која лета авионот.

Нека висината на инструментите е h. Ги поставуваме инструментите за мерење на агли AA_1 и BB_1 на хоризонтална рамнина на растојание $\overline{A_1B_1} = a$, така што рамнината AA_1B_1B ја сече патеката на движење на авионот (црт. 27). Во моментот кога авионот ја сече рамнината AA_1B_1B со двата инструменти ги мериме аглите α и β.

Од правоаголните триаголници CDB и CDA имаме

$$\overline{CD} = \overline{DB}\,\mathrm{tg}\,\beta \tag{2}$$

$$\overline{CD} = \overline{DA}\,\mathrm{tg}\,\alpha \tag{3}$$

па затоа

$$\overline{DA}\,\mathrm{tg}\,\alpha = \overline{DB}\,\mathrm{tg}\,\beta .$$

Но, $\overline{DA} = \overline{DB} + \overline{BA} = \overline{DB} + a$, па затоа од последното равенство добиваме

$$(\overline{DB} + a)\,\mathrm{tg}\,\alpha = \overline{DB}\,\mathrm{tg}\,\beta$$

т.е.

$$\overline{DB} = \frac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha} . \tag{4}$$

Ако од (4) замениме во (2) добиваме $\overline{CD} = \frac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha}$. Според тоа, бараната висина на авионот е

$$\overline{CD_1} = \overline{CD} + \overline{DD_1} = \frac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha} + h . \tag{5}$$

На пример, ако при мерењето се добиени следните резултати: $h = 1{,}5m$, $a = 93{,}5m$, $\alpha = 39^\circ$ и $\alpha = 44^\circ$, тогаш со замена во формулата (5) за висината на авионот наоѓаме

$$\overline{CD_1} = \frac{93{,}5\,\mathrm{tg}\,39^\circ\,\mathrm{tg}\,44^\circ}{\mathrm{tg}\,44^\circ - \mathrm{tg}\,39^\circ} + 1{,}5 \approx 470m .$$

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

56. Од подножјето на една планина до нејзиниот врв под агол $\alpha = 32^\circ 40'$ во однос на хоризонталната рамнина е праволиниски е поставена жицарница, чија должина е $1260m$. Пресметај ја висината на планината.
57. Колкава амплитуда (отклон) прави нишало долго $55cm$, ако аголот на отклонување од рамнотежната положба е $12^\circ 40'$.
58. Сила со големина $p = 385N$ е разложена на две заемно нормални компоненти. Најди ги големините на компонентите, ако аголот меѓу силата и едната компонента е $\alpha = 32^\circ$.
59. Железничка пруга се издига по $1m$ на секои $60m$ од патот. Најди го наклонот на тој дел од пругата.
60. Врвот на една кула од точка A во рамнината на подножјето на кулата се гледа по агол $\alpha = 27^\circ$. Одреди ја висната на кулата, ако точката A е оддалечена $100m$ од подножјето на кулата.
61. Еден светилник, висок $150m$, се гледа од брод под агол $\alpha = 9^\circ$. Колкаво е растојанието од бродот до светилникот.
62. Точките A и B се наоѓаат на спротивни брегови на една река. За одредување растојанието $\overline{AB}$ е избрана трета точка C, така што $CA \perp AB$ и $\overline{AC} = 125m$ (црт. 23). Пресметај го растојанието $\overline{AB}$, ако $\angle ACB = 25^\circ 30'$.
63. Ако на хоризонталната површина на Земјата сакаме да насадиме дрва на растојание $a = 4{,}5m$ (црт 28), тогаш на кое растојание една од друга треба да ги копаме дупките за садење на дрвата на стрмнина која со хоризонталната рамнина зафаќа агол $\alpha = 21^\circ$?

Црт. 28

ПРОВЕРИ ГО СВОЕТО ЗНАЕЊЕ

1. **а)** Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{\sin^2 30^\circ + 2\sin^2 45^\circ}{3\cos^2 30^\circ - \cos^2 45^\circ}$. (4 б)

   б) Конструирај остар агол α таков, што $\sin\alpha = \frac{3}{7}$. (6 б)

2. **а)** Пресметај го остриот агол α ако $\sin(\alpha + 5^\circ) = \cos 35^\circ$. (4 б)

   б) Упрости го изразот $\frac{\sin^2 65^\circ - \cos 25^\circ}{\cos^2 25^\circ - \sin 65^\circ}$. (6 б)

3. **а)** Без да пресметува, определи го знакот на изразот $\frac{\mathrm{tg}\, 57^\circ - \mathrm{ctg}\, 34^\circ}{\mathrm{ctg}\, 57^\circ - \mathrm{ctg}\, 45^\circ}$. (6 б)

   б) Подреди ги по големина аглите $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ако $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, $\sin\beta = 0{,}77$,

   $\sin\gamma = \frac{7}{9}$, $\sin\delta = 0{,}77$. (8 б)

4. **а)** Пресметај ги вредностите на останатите тригинометриски функции од остриот агол α, ако $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. (8 б)

   б) Пресметај ги вредностите на останатите тригонометриски функции на остиот агол α, ако $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{12}{7}$. (12 б)

5. **а)** Докажи го идентитетот $\frac{1}{1-\sin\alpha} - \frac{1}{1+\sin\alpha} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\alpha}$. (16 б)

б) Докажи го идентитетот $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=2\operatorname{tg}\alpha$. (20 б)

6. **а)** Реши го правоаголниот триаголник $\beta=39^\circ 29'$ и $b=15{,}3$. (14 б)

б) Рамнокракиот трепез е зададен со поголемата основа $a=40cm$, кракот $c=2{,}7dm$ и аголот при поголемата основа $39^\circ 30'$. Пресметај ја другата основа и висината на трапезот. (17 б)

7. **а)** Пресметај ја висината на фабричкиот оџак ако од точка M, што е на растојание $76m$ од неговото подножје, оџакот се гледа под агол (спрема земјата) од 32°. (11 б)

б) До која висина допираат пожарникарски скали долги $30m$ кога ќе се наведнат спрема земјата под агол од 58° (13 б)

Забелешка. При решавањето треба да избереш само по една подзадача од секоја задача. Доколку сакаш самостојно да се оцениш, можеш да го искористиш следниот критериум:

Бодови:	29-44	45-58	59-71	72-82
Оценка:	2	3	4	5

ГЛАВА II

КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1. **Проширување на множеството реални во множество комплексни броеви**
2. **Собирање, множење и одземање на комплексни броеви**
3. **Коњугирано комплексни броеви. Модул на комплексен број**
4. **Делење и степенување на комплексни броеви**
5. **Геометриска интерпретација на комплексен број**

ПОТРЕБНИ ПРЕДЗНАЕЊА

За успешно совладување на содржините кои ќе ги усвојуваш во оваа тема, потребно е да се потсетиш на:

- *својствата на реалните броеви и операциите со нив,*
- *формулите за скратено множење*
- *линеарните равенки и системите линеарни равенки,*
- *Питагоровата теорема,*
- *векторите и операциите со нив и*
- *Декартовиот координатен систем во рамнина.*

НОВИ ЗНАЕЊА И УМЕЕЊА

Успешното совладување на содржините кои се разработени во оваа тема има за цел:

- да ја воочиш потребата од проширувањето на множеството реални броеви;
- да го усвоиш поимот за комплексен број;
- да ги усвоиш операциите со комплексните броеви (собирање, одземање, множење и делење);
- да ги усвоиш поимите коњугиран комплексен број и модул на комплексен број;
- да ја усвоиш геометриската интерпретација на комплексните броеви, т.е. нивната врска со векторите во рамнината;
- да ја согледаш врската меѓу векторското претставување на комплексниот број и неговиот модул;
- да го усвоиш поимот комплексна рамнина;
- да ја воочиш положбата на спротивните и коњугираните комплексни броеви во комплексната рамнина;
- да можеш да го одредуваш реалниот и имагинарниот дел на комплексен број запишан алгебарски или претставен со точка во рамнина; и
- да можеш да решаваш линеарни равенки во множеството комплексни броеви.

Во досегашното изучување на множествата броеви се запознавме со природните, целите, рационалните и реалните броеви, со што всушност се оспособивме да ги мериме геометриските велични (должина, плоштина на рамнинска фигура и волумен на геометриско тело). Исто така, видовме дека во множеството реални броеви можеме да ја решиме секоја равенка од облик $ax+b=0,\ a,b\in\mathbf{R}, a\neq 0$. Од друга страна, бидејќи $x^2\geq 0$, за секој $x\in\mathbf{R}$ добиваме дека $x^2+1\geq 1>0$, за секој $x\in\mathbf{R}$, што значи дека равенката $x^2+1=0$ нема решение во множеството реални броеви. Токму овој факт е непосредна причина за проширувањето на множеството реални броеви, т.е. за воведувањето на комплексните броеви. Меѓутоа, значењето на комплексните броеви е далеку поголемо, при што доволно е само да напоменеме дека истите овозможуваат алгебарско толкување на транслацијата, осната и централната симетрија, ротацијата и редица други пресликувања во рамнината, а лежат и во основата на комплексната анализа, која се вбројува меѓу најзначајните математички дисциплини.

1. ПРОШИРУВАЊЕ НА МНОЖЕСТВОТО РЕАЛНИ БРОЕВИ ВО МНОЖЕСТВО КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Прво се запознавме со множеството природни броеви $\mathbf{N}=\{1,2,3,...\}$. Збирот и производот на два природни броја е природен број и притоа за собирањето и множењето важат комутативниот и асоцијативниот закон, а множењето е дистрибутивно во однос на собирањето. Според тоа, за секои $a,b,c\in\mathbf{N}$ важат правилата:

$$a+b=b+a,\quad ab=ba\,, \tag{1}$$

$$(a+b)+c=a+(b+c),\quad (ab)c=a(bc)\,, \tag{2}$$

$$(a+b)c=ac+bc\,. \tag{3}$$

Меѓутоа, во множеството природни броеви разликата $3-6$ не е определена. Со други зборови равенката $6+x=3$ нема решение во множеството $\mathbf{N}$. Воопшто, равенката

$$a+x=b,\quad a,b\in\mathbf{N}$$

има решение x во множеството $\mathbf{N}$ ако и само ако $a<b$.

За да го овозможиме изведувањето на операцијата одземање без било какви предуслови, го проширивме множеството $\mathbf{N}$ во множеството цели броеви $\mathbf{Z}=\{0,1,-1,2,-2,...\}$. Сега, решение на равенката $6+x=3$ во множеството $\mathbf{Z}$ е бројот -3 т.е. $x=3-6=-3$. Воопшто, равенката $a+x=b,\quad a,b\in\mathbf{Z}$ во множеството $\mathbf{Z}$ има решение $x=b-a$, за секои $a,b\in\mathbf{Z}$, па затоа таа има решение и кога $a,b\in\mathbf{N}$. Да забележиме дека правилата (1)-(3) важат за секои $a,b,c\in\mathbf{Z}$, т.е. операцеиите собирање и множење на цели броеви се комутативни и асоцијативни и множењето е дистрибутивно во однос на собирањето.

Како што знаеме во множеството $\mathbf{Z}$ количникот $5:3$ не е определен, т.е. равенката $3x=5$ нема решение во множеството $\mathbf{Z}$. За да го овозможиме изведувањето на операцијата делење на цели броеви $b:a$, $a,b\in\mathbf{Z}$, $a\neq 0$, без дополнителни предуслови го проширивме множеството $\mathbf{Z}$ во множеството рационални броеви $\mathbf{Q}=\{\frac{b}{a}\,|\,b\in\mathbf{Z}, a\in\mathbf{N}\}$. Сега решение на равенката $3x=5$ во множеството $\mathbf{Q}$ е бројот $\frac{5}{3}$ т.е. $x=5:3=\frac{5}{3}$. Воопшто, равенката $ax=b,\ \ a,b\in\mathbf{Q}, a\neq 0$ во множеството $\mathbf{Q}$ има решение $x=\frac{b}{a}$, за секои $a,b\in\mathbf{Q}, a\neq 0$, па затоа таа има решение и кога $a,b\in\mathbf{Z}, a\neq 0$. Понатаму, како и при воведувањето на целите броеви, правилата (1)-(3) важат за секои $a,b,c\in\mathbf{Q}$, т.е. операциите собирање и множење на рационални броеви се комутативни и асоцијативни и множењето е дистрибутивно во однос на собирањето.

Зошто не можеме да бидеме задоволни ни со множеството $\mathbf{Q}$? Да земеме квадрат чија должина на страна е еднаква на 1. Тогаш, според Питагоровата теорема, квадратот на должината на неговата дијагонала е еднаков на 2. Може да се докаже дека не постои рационален број чиј квадрат е еднаков на 2, т.е. равенката $x^2=2$ нема решение во множеството $\mathbf{Q}$. А природно е да имаме некој број кој ќе ја означува должината на дијагоналата на квадратот мерена со страната на тој квадрат како единична мерка. Според тоа, повторно мора да извршиме проширување, и тоа од множеството $\mathbf{Q}$ до множеството $\mathbf{R}$ на реални броеви. Множеството $\mathbf{R}$ е унија на множеството рационални броеви $\mathbf{Q}$ и на множеството ирационални броеви $\mathbf{I}$. На овој начин добивме множество кое е затворено во однос на собирањето, одземањето, множењето, делењето (освен делењето со 0) и наоѓањето корен од ненегативен број. Имено, за секој реален број $a\geq 0$ и за секој природен број n равенката $x^n=a$ има решение во множеството реални броеви кое го означуваме со $\sqrt[n]{a}$. Понатаму, како и при воведувањето на рационалните броеви, правилата (1)-(3) важат за секои $a,b,c\in\mathbf{R}$, т.е. операциите собирање и множење на рационални броеви се комутативни и асоцијативни и множењето е дистрибутивно во однос на собирањето.

Да ја разгледаме равенката $x^2=-2$. Бидејќи $x^2\geq 0$, за секој $x\in\mathbf{R}$ добиваме дека $x^2\geq 0>-2$, за секој $x\in\mathbf{R}$, што значи дека равенката $x^2=-2$ нема решение во множеството реални броеви. Сега сме во ситуација или да се помириме со фактот дека така едноставни равенки како што се

$$x^2=-2\,,\ x^2=-1\,,\ x^2=-\tfrac{2}{5}\ \text{итн.}$$

немаат решение или пак, како и во неколкуте претходни случаи, множеството $\mathbf{R}$ да го прошириме до ново множество броеви - множеството $\mathbf{C}$ *комплексни броеви,* во кое наведените равенки и равенките слични на нив ќе имаат решение. Ова проширување го налагаат и други проблеми во математиката и техниката за кои овде од разбирливи причини нема да говориме.

За да проширувањето на множеството $\mathbf{R}$ во множеството $\mathbf{C}$ комплексни броеви е целисходно ќе ги почитуваме следните барања:

а) множеството реални броеви е вистинско подмножество од множеството комплексни броеви, т.е. $\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$, б) во множеството $\mathbf{C}$ равенката $x^2=-1$ има барем едно решение и

в) комплексните броеви ги собираме, одземаме, множиме и делиме (освен со 0) на сличен начин како и реалните броеви. Собирањето и множењето на комплексни броеви се комутативни и асоцијативни операции и множењето е дистрибутивно во однос на собирањето, т.е. важат (1)-(3).

За да го задоволиме барањето б), воведуваме комплексен број i кој е решение на равенката $x^2=-1$, т.е. таков, што

$$i^2 \overset{\text{деф}}{=} -1.$$

Вака дефинираниот број i го нарекуваме *имагинарна единица* и јасно тој е решение на равенката $x^2=-1$. Според тоа, $i\in\mathbf{C}$.

Имајќи ги во предвид барањата а) и в), за секој реален број b и имагинарната единица i, множеството $\mathbf{C}$ треба да го содржи и нивниот производ bi (затвореност на операцијата множење).

Исто така, множеството $\mathbf{C}$, покрај реалниот број a и производот bi, треба да го содржи и нивниот збир $a+bi$ (затвореност на операцијата собирање).

Од досега изнесеното следува дека множеството $\mathbf{C}$ мора да ги содржи сите броеви од видот $a+bi$, каде што $a,b\in\mathbf{R}$. Всушност, земаме дека секој комплексен број има облик

$$a+bi,$$

каде што $a,b\in\mathbf{R}$ и ќе велиме дека тоа е *алгебарски* (*стандарден*) *облик на комплексен број*. Значи, земаме дека

$$\mathbf{C}=\{a+bi \mid a,b\in\mathbf{R}\}. \qquad (4)$$

Комплексниот број $a+bi$ често пати ќе го означуваме и со една буква z, т.е. $z=a+bi$.

По договор, т.е. по дефиниција земаме дека $0\cdot i=0, 1\cdot i=i$ и $(-1)i=-i$. Затоа, $a+i\cdot 0=a$, т.е. комплексниот број $a+i\cdot 0$ е реалниот број a. Последното е една од причините за воведувањето на следната дефиниција.

Дефиниција 1. Нека е даден комплексниот број $z=a+bi$. За реалниот број a велиме дека е *реален дел* или *реална компонента* на z и пишуваме $a=\operatorname{Re}z$. За реалниот број b велиме дека е *имагинарен дел* или *имагинарна компонента* на z и пишуваме $b=\operatorname{Im}z$.

Пример 1. Определи ги реалниот и имагинарниот дел на z ако е:

а) $z=6+5i$, **б)** $z=\frac{1}{2}$, **в)** $z=-i$ и **г)** $z=\sqrt{2}+1-\frac{2+\sqrt{3}}{3}i$.

Решение. а) Од дефиниција 1 непосредно следува дека $\operatorname{Re}z=6$ и $\operatorname{Im}z=5$.

б) Бидејќи $z=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+0\cdot i$ од дефиниција 1 добиваме $\operatorname{Re}z=\frac{1}{2}$ и $\operatorname{Im}z=0$.

в) Од $z=-i=0+(-1)i$ и дефиниција 1 следува $\operatorname{Re}z=0$ и $\operatorname{Im}z=-1$.

г) Имаме $z=\sqrt{2}+1-\frac{2+\sqrt{3}}{3}i=\sqrt{2}+1+(-\frac{2+\sqrt{3}}{3})i$ па затоа

$$\operatorname{Re} z=\sqrt{2}+1 \text{ и } \operatorname{Im} z=-\frac{2+\sqrt{3}}{3}. \ \blacklozenge$$

Претходно видовме дека, ако кај комплексниот број $z=a+bi$ имагинарниот дел $b=0$, тогаш z е реален број. Ако $b\neq 0$, тогаш за комплексниот број z ќе велиме дека е *имагинарен број*. Понатаму, ако $a=0$ и $b\neq 0$, тогаш за бројот $z=bi$ ќе велиме дека е *чисто имагинарен*.

Пример 2. Определи ги реалниот број x така да и комплексниот број

$$z=2\sqrt{2}-\frac{3-2x}{3}i$$

биде реален.

Решение. За да комплексниот број z биде реален потребно и доволно е неговиот имагинарен дел да биде еднаков на 0, т.е. $\frac{3-2x}{3}=0$. Решение на последната равенка е $x=\frac{3}{2}$ и притоа $z=2\sqrt{2}\in\mathbf{R}$. ♦

Според тоа, множеството $\mathbf{C}$ е унија на две дисјунктни множества и тоа на множеството реални броеви $\mathbf{R}$ и на множеството имагинарни броеви $\mathbf{J}$. Оваа поделба е прикажана во следната табела:

Множество комплексни броеви: $\mathbf{C}=\{a+bi \mid a,b\in\mathbf{R}\}$

Множество реални броеви $\mathbf{R}=\{a+bi \mid a\in\mathbf{R}, b=0\}$	Множество имагинарни броеви $\mathbf{J}=\{a+bi \mid a,b\in\mathbf{R}, b\neq 0\}$
	Множество чисто имагинарни броеви $\{bi \mid b\in\mathbf{R}\setminus\{0\}\}$

Природно е да се запрашаме: Кога два комплексни броја се еднакви? Бидејќи секој комплексен број се состои од два дела: реален и имагинарен дел, логично е еднаквоста на два комплексни броја да се поврзе со еднаквоста на нивните реални и имагинарни делови. Така ја имаме следната дефиниција.

Дефиниција 2. За комплексните броеви $z=a+bi$ и $w=c+di$ ќе велиме дека *се еднакви* ако тие имаат еднакви реални делови и еднакви имагинарни делови, т.е. ако $a=c$ и $b=d$.

Притоа ќе пишуваме $z=w$.

Забелешка 1. При споредувањето на два реални броја a и b можни се два случаја: $a=b$ или $a\neq b$. Ако $a\neq b$, тогаш или $a<b$ или $a>b$. Исто така, при споредувањето на два комплексни броја $z=a+bi$ и $w=c+di$ можни се два случаја: $z=w$ или $z\neq w$ (кога се разликуваат реалните или имагинарните делови). Меѓутоа, ако $z\neq w$ и z и w не се реални броеви, тогаш релациите "е помал од" и "е поголем од" немаат смисла, т.е. во множеството $\mathbf{C}$ немаме подредување на броевите како што тоа беше случај кај реалните броеви. Затоа, за броевите $z=1+2i$ и $w=2+3i$ можеме да кажеме само дека $z\neq w$, но не можеме да говориме дека едниот е помал или поголем од другиот.

Пример 3. Најди ги реалните броеви x и y така да се исполнети равенствата

а) $x-2+(y+3)i=1-4i$ и **б)** $x+(x+3y)i=2y+5i$.

Решение. **а)** Од дефиниција 2 непосредно добиваме дека даденото равенство е исполнето ако и само ако $x-2=1$ и $y+3=-4$ од каде што наоѓаме $x=3$ и $y=-7$.

б) Аналогно на решението под а) имаме дека x и y се решенија на системот равенки

$$\begin{cases} x=2y \\ x+3y=5. \end{cases}$$

Ако од првата равенка за x замениме во втората после средувањето добиваме $5y=5$, т.е. $y=1$ од што следува $x=2$. ♦

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. **а)** Кој е почетниот мотив за проширување на множеството $\mathbf{R}$.
   б) Кои три барања ги поставуваме при проширување на множеството $\mathbf{R}$ во множеството $\mathbf{C}$?
   в) Какви се броевите a, b и i кај комплексниот број $z=a+bi$?
2. Дополни го текстот:
   а) Ако $b=0$, тогаш комплексниот број $z=a+bi$ е ______________________ .
   б) Ако $b\neq 0$, тогаш комплексниот број $z=a+bi$ е ______________________ .
   в) Ако $a=0, b\neq 0$, тогаш комплексниот број $z=a+bi$ е ____________________________ .
3. Определи ги реалниот и имагинарниот дел на комплексниот број:
   а) $z=\frac{2+\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}i$, **б)** $z=-\frac{\sqrt{3}}{3}i$ и **в)** $z=\frac{13}{12}$.
4. Напиши го комплексниот број $z=a+bi$ ако
   а) $\operatorname{Re} z=\operatorname{Im} z=1$, **б)** $\operatorname{Re} z=2\sqrt{3}$, $\operatorname{Im} z=0$ и **в)** $\operatorname{Re} z=-\frac{5}{3}+\sqrt{2}, \operatorname{Im} z=0{,}5$.
5. За кои реални броеви x и y важат равенствата:
   а) $2x+(y-1)i=4-3i$, **б)** $x+2-yi=3-i$ и **в)** $x+3-2yi=4-6i$.

2. СОБИРАЊЕ, МНОЖЕЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Како ќе ги собираме и множиме комплексните броеви? За да одговориме на ова прашање ќе се придржуваме на барањето в) искажано при проширувањето на реалните броеви, а тоа е дека за овие операции треба да важат комутативниот и асоцијативниот закон, а множењето е дистрибутивно во однос на собирањето, т.е. дека собираме и множиме на сличен начин како во $\mathbf{R}$. Да разгледаме еден пример.

Пример 4. Најди го збирот и производот на броевите $z=1+3i$ и $w=2-5i$.

Решение. Ако за момент "заборавиме" дека станува збор за нови броеви за збирот на дадените броеви добиваме:

$$z+w=(1+3i)+(2-5i)=1+3i+2-5i=1+2+3i-5i=(1+2)+(3-5)i=3-2i.$$

Слично, ако земеме во предвид дека $i^2 = -1$, тогаш за производот на броевите z и w наоѓаме:

$$z \cdot w = (1+3i)\cdot(2-5i) = 1\cdot(2-5i) + 3i\cdot(2-5i) = 1\cdot 2 + 1\cdot(-5i) + 3i\cdot 2 + 3i\cdot(-5i)$$
$$= 2 - 5i + 6i - 15i^2 = 2 - 5i + 6i - 15\cdot(-1) = (2+15) + (-5+6)i = 17 + i.$$

Како што можеме да забележиме, комплексните броеви ги собираме и множиме како да се полиноми по имагинарната единица i, со тоа што водиме сметка дека $i^2 = -1$. ♦

Постапката од пример 4 важи во општ случај. Имено, ако $z = a+bi$ и $w = c+di$ се произволни комплексни броеви, тогаш на потполно ист начин наоѓаме:

$$z + w = (a+bi) + (c+di) = a + bi + c + di = (a+c) + (bi+di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$z\cdot w = (a+bi)\cdot(c+di) = a\cdot(c+di) + bi\cdot(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2$$
$$= ac + adi + bci - bd = (ac-bd) + (ad+bc)i.$$

Од претходната дискусија природно се наметнува следната дефиниција.

Дефиниција 3. Нека $z = a+bi$ и $w = c+di$ се произволни комплексни броеви. *Збир* на z и w го нарекуваме комплексниот број

$$u = (a+c) + (b+d)i\ .$$

Притоа пишуваме $u = z + w$.

Производ на z и w го нарекуваме комплексниот број

$$v = (ac-bd) + (ad+bc)i\ .$$

Притоа пишуваме $v = zw$.

Пример 5. а) Најди го збирот и производот на броевите $z = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $w = \sqrt{3} - 5i$.

б) Најди ги реалните броеви x и y за кои важи

$$(3i-8)x + (2i-5)y = i\ .$$

Решение. а) Непосредно од дефиниција следува дека

$$z + w = (1+\sqrt{3}) + (\frac{\sqrt{3}}{2} - 5)i \text{ и } zw = [1\cdot\sqrt{3} - (-5)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}] + [\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\cdot(-5)\cdot i] = \frac{7\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{2}i.$$

б) Со еквивалентни трансформации на дената равенка последователно добиваме:

$$3xi - 8x + 2iy - 5y = i\ ,$$

$$-8x - 5y + (3x+2y)i = i\ .$$

Сега од дефиницијата за еднаквост на комплексни броеви го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} -8x - 5y = 0 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

чие решение е $x = -5,\ y = 8$. ♦

Забелешка 2. Како што можеме да видиме збир и производ на два комплексни броја е комплексен број, што значи дека множеството комплексни броеви **C** е затворено во однос на операциите собирање и множење на комплексни броеви, т.е. од $z, w \in \mathbf{C}$ следува $z+w, zw \in \mathbf{C}$.

Понатаму, од дефиниција 3 и $a = a + 0 \cdot i, b = b + 0 \cdot i$, за секои $a, b \in \mathbf{R}$ добиваме дека

$$a + b = (a + 0 \cdot i) + (b + 0 \cdot i) = (a + b) + (0 + 0)i = (a + b) + 0 \cdot i$$
$$ab = (a + 0 \cdot i)(b + 0 \cdot i) = (ab - 0 \cdot 0) + (a \cdot 0 + 0 \cdot b)i = ab + 0 \cdot i$$

што значи дека дефинициите за збир и производ на два комплексни броја се во склад со дефинициите за збир и производ на два реални броја.

Како што рековме, при проширувањето на реалните броеви едно од барањата беше за операциите собирање и множење на комплексни броеви да важат комутативниот и асоцијативниот закон, а множењето е дистрибутивно во однос на собирањето, односно да е точна следната теорема.

Теорема 1. За секои $z, w, u \in \mathbf{C}$ важат правилата:

$$z + w = w + z, \quad zw + wz, \tag{1}$$
$$(z + w) + u = z + (w + u), \quad (zw)u = z(wu) \tag{2}$$
$$(z + w)u = zu + wu. \tag{3}$$

Доказ. Нека $z = a + bi, w = c + di$ и $u = e + fi$. Ако се искористи дека операциите собирање и множење на реални броеви се комутативни, тогаш од дефиниција 3 следува

$$z + w = (a + c) + (b + d)i = (c + a) + (d + b)i = w + z$$

и

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i = (ca - db) + (da + cb)i = wz$$

т.е. важи (1).

Останатите правила се проверуваат аналогно, со тоа што треба да се користи дека собирањето и множењето на реални броеви се асоцијативни операции и дека множењето е дистрибутивно во однос на собирањето. Обиди се самостојно да ги докажеш (2) и (3). ♦

Пред да преминема на воведување на операцијата одземање на комплексни броеви, да се потсетиме дека за секој реален број x постои реален број $-x$ кој го нарекуваме спротивен на x и за кој важи $x + (-x) = 0$. Нека $z = a + bi$ е произволен комплексен број и да го разгледаме бројот $w = -a - bi$. Од дефиниција 3 следува дека

$$z + w = (a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0 \cdot i = 0.$$

Последното равенство е непосредна причина за следната дефиниција.

Дефиниција 4. За комплексниот број $w = -a - bi$ ќе велиме дека е *спротивен* на бројот $z = a + bi$. Притоа пишуваме $w = -z$.

Пример 6. а) За комплексниот број $z = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ неговиот спротивен број е $-z = -2 + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

б) За комплексниот број $w=-5\sqrt{2}i$ неговиот спротивен број е $-w=5\sqrt{2}i$. ♦

Операцијата одземање на комплексни броеви ја воведуваме на потполно ист начин како кај реалните броеви.

Дефиниција 5. Нека $z=a+bi$ и $w=c+di$ се произволни комплексни броеви. *Разлика* на z и w го нарекуваме комплексниот број $u=z+(-w)$.

Притоа пишуваме $u=z-w$

Забелешка 3. Од дефинициите на спротивен комплексен број и собирање на комплексни броеви непосредно следува дека разликата на два комплексни броја е комплексен број, чиј реален дел е еднаков на разликата од реалните делови, а имагинарниот дел е еднаков на разликата од имагинарните делови на дадените броеви.

Пример 7. а) Најди ја разликата на броевите $z=2-\frac{\sqrt{5}}{2}i$ и $w=1+\frac{\sqrt{5}}{3}i$.

б) Реши ја равенката $z+2-\frac{\sqrt{3}}{2}i=3-\frac{\sqrt{3}}{3}i$.

Решение. а) Согласно со забелешка 3 имаме

$$z-w=(2-1)+(-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{3})i=1-\frac{3\sqrt{5}+2\sqrt{5}}{6}i=1-\frac{5\sqrt{5}}{6}i\,.$$

б) Од дадената равенка последователно добиваме

$$z+(2-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=3-\frac{\sqrt{3}}{3}i\,,$$

$$z=3-\frac{\sqrt{3}}{3}i-(2-\frac{\sqrt{3}}{2}i)\,,$$

$$z=(3-2)+(-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2})i\,,$$

$$z=1+\frac{\sqrt{3}}{6}i\,.$$ ♦

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

6. **а)** Докажи ги асоцијативните закони на собирањето и множењето на комплексни броеви.
   б) Докажи дека множењето е дистрибутивно во однос на собирањето комплексни броеви.
7. Определи го збирот на комплексните броеви:
   а) $3+2i$ и $5-8i$; **б)** $-3-4i$ и $8+2i$; **в)** $8+4i$, $7-2i$ и $-6+i$.
8. Пресметај:
   а) $(7+i)-(2-8i)+(9-12i)$, **б)** $(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}i)+(-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}i)-(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}i)$,
   в) $(7x-2yi)+(3x+5yi)-(x+yi)$, $x,y\in\mathbf{R}$.
9. Пресметај:
   а) $(-5+2i)(3+2i)$, **б)** $(-7+2i)(6+3i)$ и **в)** $(\sqrt{3}+i\sqrt{2})(\sqrt{3}-i\sqrt{2})$.
10. Најди ги реалните броеви x и y, ако:
   а) $3x+xi-2y=12-yi-i$, **б)** $5x-3yi+2i=6-xi-y$ и **в)** $x+yi-2=4xi+3y+3i$.

3. КОЊУГИРАНО КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ. МОДУЛ НА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

Да ги разгледаме комплексните броеви $z=3+4i$ и $w=3-4i$. Збирот на овие броеви е

$$z+w=(3+4i)+(3-4i)=6\,,$$

а нивниот производ е

$$zw=(3+4i)(3-4i)=9+16+(-12+12)i=25\,.$$

Забележуваме дека и во двата случаи крајниот резултат е реален број. Ова важи за кои било два комплексни броеви чии реални делови се еднакви, а имагинарните делови им се спротивни броеви. Последното е непосреден повод за воведување на поимот коњугирано комплексни броеви. Така ја имаме следната дефиниција.

Дефиниција 6. За комплексниот број $z=a+bi$, $a,b\in\mathbf{R}$, бројот $a-bi$ го нарекуваме *коњугиран комплексен број на бројот* z и го означуваме со $\overline{z}$ (читај z црта).

Пример 8. а) Ако $z=2-3i$, тогаш $\overline{z}=2+3i$, што значи $\overline{(\overline{z})}=2-3i$.

б) За комплексните броеви $z=2-3i$ и $w=4+i$ имаме $\overline{z}=2+3i$ и $\overline{w}=4-i$. Според тоа, $z+w=6-2i$, па затоа $\overline{z+w}=6+2i$ и како $\overline{z}+\overline{w}=6+2i$ добиваме $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$.

Од друга страна $zw=11-10i$, па затоа $\overline{zw}=11+10i$ и како $\overline{z}\cdot\overline{w}=11+10i$ добиваме $\overline{zw}=\overline{z}\cdot\overline{w}$. ♦

Добиените равенства за конкретните комплексни броеви во пример 8 важат и во општ случај, т.е. точна е следната теорема.

Теорема 2. а) За секој комплексен број z важи $\overline{(\overline{z})}=z$.

б) За секој комплесен број z важи $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}z$ и $z-\overline{z}=2i\operatorname{Im}z$.

в) За секои комплексни броеви z и w важи

$$\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w} \tag{1}$$

и

$$\overline{zw}=\overline{z}\cdot\overline{w}\,. \tag{2}$$

Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе). а) Нека $z=a+bi$ е произволен комплексен број. Тогаш, $\overline{z}=a-bi$, па затоа $\overline{(\overline{z})}=a+bi=z$.

б) Нека $z=a+bi$ е произволен комплексен број. Тогаш, $\operatorname{Re}z=a$, $\operatorname{Im}z=b$ и $\overline{z}=a-bi$, па затоа

$$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=2\operatorname{Re}z \text{ и } z-\overline{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi=2i\operatorname{Im}z\,.$$

в) Нека $z=a+bi$ и $w=c+di$ се произволни комплексни броеви. Тогаш

$$\overline{z+w}=\overline{(a+bi)+(c+di)}=\overline{(a+c)+(b+d)i}=(a+c)-(b+d)i=(a-bi)+(c-di)=\overline{z}+\overline{w}$$

и

$$\overline{zw}=\overline{(a+bi)(c+di)}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}=(ac-bd)-(ad+bc)i=[ac-(-b)(-d)]+[a(-d)+(-b)c)i=\overline{z}\cdot\overline{w}$$

што и требаше да се докаже. ♦

Забелешка 4. Како што видовме во теорема 2 за секој комплексен број z коњугираниот комплексен број на бројот $\overline{z}$ е самиот број z, па затоа можеме да кажеме дека броевите z и $\overline{z}$ се *заемно коњугирани комплексни броеви.*

Формулите (1) и (2) од претходната теорема важат за произволен број комплексни броеви. Имено, ако $z_1, z_2,...,z_n$ се произволни комплексни броеви, тогаш

$$\overline{z_1+z_2+...+z_n}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+...+\overline{z_n} \quad \text{и} \quad \overline{z_1 z_2\cdot ...\cdot z_n}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot ...\cdot\overline{z_n}\ .$$

Логично е да се запрашаме кога комплексниот број z е еднаков на својот коњугиран комплексен број $\overline{z}$. Ако $z=a+bi$. тогаш $\overline{z}=a-bi$, па од равенството $z=\overline{z}$ следува $a+bi=a-bi$, што значи $b=-b$ т.е. $b=0$. Според тоа, ако $z=\overline{z}$, тогаш комплексниот број z е реален. Важи и обратното тврдење, т.е. секој реален број е еднаков на својот коњугиран комплексен број. Навистина, $a=a+0\cdot i=a-0\cdot i$.

Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема 3. За комплексниот број z важи $z=\overline{z}$ ако и само ако $z\in\mathbf{R}$. ♦

На почетокот од оваа лекција видовме дека производот на комплексниот број $z=3+4i$ со неговиот коњугиран комплексен број $\overline{z}=3-4i$ е еднаков на 25 и тоа е реален број. Последното е точно за секој комплексен број, т.е. точна е следната теорема.

Теорема 4. За секој комплексен број z производот $z\overline{z}$ е ненегативен реален број.

Доказ. Навистина, ако $z=a+bi$, тогаш $\overline{z}=a-bi$, па затоа

$$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2+(ab-ab)i=a^2+b^2\geq 0\,,$$

$z\overline{z}$ е ненегативен реален број. ♦

Забелешка 5. Од теорема 4 следува дека за секои $a,b\in\mathbf{R}$ важи

$$a^2+b^2=(a+ib)(a-ib)\,. \tag{3}$$

Формулата (3) дава разложување на збир на квадрати на реални броеви во множеството $\mathbf{C}$. Како што знаеме, такво разложување (факторизација) не е можно во множеството $\mathbf{R}$.

Во теорема 4 докажавме дека за секој комплексен број z производот $z\overline{z}$ е ненегативен реален број, т.е. $z\overline{z}=a^2+b^2\geq 0$. Затоа бројот $\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$ е ненегативен реален број. Да го означиме овој број со $|z|$, т.е.

$$|z|=\sqrt{z\overline{z}}\,. \tag{4}$$

Од досега изнесеното следува дека за секој $z\in\mathbf{C}$ постои единствен ненегативен реален број $|z|$, кој е зададен со (4). Така, ја имаме следната дефиниција.

Дефиниција 7. Реалниот број $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$ го нарекуваме *апсолутна вредност* или *модул на комплексниот број* z.

Пример 9. а) Модулот на комплексниот број $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ е

$$|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{(\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}}=1.$$

б) Модулот на комплексниот број $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ е

$$|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{(\tfrac{\sqrt{2}}{2})^2+(\tfrac{\sqrt{2}}{2})^2}=\sqrt{\tfrac{2}{4}+\tfrac{2}{4}}=1. \blacklozenge$$

Во претходниот пример видовме дека два различни комплексни броеви можат да имаа ист модул. Ова својство како да го намалува значењето на поимот модулот на комплексен број. Меѓутоа, тоа е само на прв поглед, бидејќи како што ќе видиме при геометриското толкување на комплексните броеви модулот има огромно геометриско значење. Во следната теорема ќе наведеме неколку својства на модулот на комплексен број.

Теорема 5. а) $|z|=0$ ако и само ако $z=0$.

б) За секои комплексни броеви број z и w важи

$$|zw|=|z|\cdot|w|. \tag{5}$$

Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе). а) Ако $z=0=0+0\cdot i$, тогаш $|z|=\sqrt{0^2+0^2}=0$.

Нека $z=a+bi$ и $|z|=0$. Тогаш $\sqrt{a^2+b^2}=0$, па затоа $a^2+b^2=0$ и како $a^2\geq 0,\ b^2\geq 0$, за секои $a,b\in\mathbf{R}$ добиваме дека $a^2=b^2=0$ т.е. $a=b=0$. Конечно, $z=0+0\cdot i=0$, што и требаше да се докаже.

б) Нека z и w се произволни комплексни броеви. Од дефиницијата на модул на комплексен број и од теорема 2 б) следува

$$|zw|=\sqrt{zw\cdot\overline{zw}}=\sqrt{zw\cdot\bar{z}\cdot\bar{w}}=\sqrt{(z\bar{z})(w\bar{w})}=\sqrt{z\bar{z}}\sqrt{w\bar{w}}=|z|\cdot|w|. \blacklozenge$$

Пример 10. Пресметај $|zw|$ каде $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ и $w=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$.

Решение. Во пример 9 видовме дека $|z|=1$. Од друга страна $|w|=\sqrt{(\frac{4}{5})^2+(\frac{3}{5})^2}=1$, па од равенството (5) следува $|zw|=|z|\cdot|w|=1$. ♦

Во претходната теорема наведовме две важни својства на модулот на комплексен број. Исто така, за комплексните броеви важи и неравенството на триаголник, кое ќе го прифатиме без доказ, а неговата точност ќе ја потврдиме при разгледувањето на геометриската интерпретација на комплексните броеви.

Теорема 6. За секои комплексни броеви број z и w важи

$$|z+w|\leq|z|+|w|. \blacklozenge \tag{6}$$

Пример 11. За комплексните броеви $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ и $w=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$ провери го неравенството (4).

Решение. Од примерите 9 и 10 имаме $|z|=|w|=1$. Од друга страна

$$z+w=(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{5})+(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{5})i$$

па затоа

$$|z+w|=\sqrt{2+\frac{7\sqrt{2}}{5}}<2=|z|+|w|. \ ♦$$

Забелешка 6. Формулите (5) и (6) важат за произволен број комплексни броеви. Имено, ако $z_1, z_2, ..., z_n$ се произволни комплексни броеви, тогаш

$$|z_1+z_2+...+z_n|\le|z_1|+|z_2|+...+|z_n| \text{ и } |z_1 z_2\cdot ...\cdot z_n|=|z_1|\cdot|z_2|\cdot...\cdot|z_n|.$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

11. Дадени се броевите $z=3-2i$ и $w=1+3i$. Пресметај ја вредноста на изразот:
    а) $\bar{z}-\bar{w}$, **б)** $z+\bar{w}-w\bar{z}$ и **в)** $z\bar{w}-\bar{z}w$.
12. Провери ги формулите $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$ и $\overline{zw}=\bar{z}\cdot\bar{w}$ ако
    а) $z=3-2i$ и $w=1+3i$, **б)** $z=\frac{1}{\sqrt{2}}+i$ и $w=\sqrt{2}-i$.
13. Што може да се каже за модулите на:
    а) два коњугирано комплексни броеви и
    б) два спротивни комплексни броеви.
14. Одреди ги модулите на комплексните броеви:
    а) $2+3i$, б) $3+7i$, в) $\sqrt{2}+2i$, г) $5+12i$ и д) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i$.
15. Дадени се броевите $z=3-2i$ и $w=1+3i$. Пресметај ја вредноста на изразот:
    а) $|z-w+3\bar{z}|$ и б) $|z+w|+|z-w|$.
16. Провери дека за броевите $z=3-6i$ и $w=1-i$ важи $|zw|=|z|\cdot|w|$ и $|z+w|\le|z|+|w|$.
17. Докажи дека $zw=0$ ако и само ако $z=0$ или $w=0$.
    Упатство. Равенството $zw=0$ помножи го со $\overline{zw}$ и потоа примени ја теорема 5 а).

4. ДЕЛЕЊЕ И СТЕПЕНУВАЊЕ НА КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Во претходната лекција видовме дека за секои реални броеви a и b во множеството комплексни броеви важи разложувањето

$$a^2+b^2=(a-bi)(a+bi).$$

Ќе покажеме како оваа едноставна формула може да се искористи за наоѓање на количник на два комплексни броја. Имено, ако се дадени комплексните броеви $z=a+bi\neq 0$ и

$w=c+di$, тогаш за да го определиме количникот $\frac{w}{z}$ доволно е броеителот и именителот да ги помножиме со $\bar{z}$. Притоа добиваме:

$$\frac{w}{z}=\frac{c+di}{a+bi}=\frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{ac+bd+(ad-bc)i}{a^2+b^2}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}i$$

т.е.

$$\frac{w}{z}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}i\,. \tag{1}$$

Формулата (1) јасно покажува дека количникот на два комплексни броја е комплексен број. Нема потреба оваа формула да се памти, бидејќи доволно е само да се знае дека проблемот на делење на два комплексни броја се решава со множење на броителот и именителот со коњугираниот комплексен број на именителот.

Пример 12. а) За броевите $z=-1+5i$ и $w=2+3i$ пресметај $\frac{w}{z}$.

б) Реши ја по z равенката

$$(2+i)z+2z-3=4+6i\,.$$

Решение. а) Согласно претходно кажаното имаме

$$\frac{w}{z}=\frac{2+3i}{-1+5i}=\frac{(2+3i)(-1-5i)}{(-1+5i)(-1-5i)}=\frac{(2+3i)(-1-5i)}{(-1)^2+5^2}=\frac{(-2+15)+(-3-10)i}{26}=\frac{13-13i}{26}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\,.$$

б) Со последователни еквивалентни трансформации добиваме:

$(2+i)z+2z-3=4+6i$,

$(2+i+2)z=4+6i+3$,

$(4+i)z=7+6i$ и

$z=\frac{7+6i}{4+i}=\frac{(7+6i)(4-i)}{(4+i)(4-i)}=\frac{(28+6)+(24-7)i}{4^2+1^2}=\frac{34+17i}{17}=2+i$.

Конечно, решение на дадената равенка е $z=2+i$. ♦

Кога сме кај операцијата делење на комплексни броеви, природно е да се запрашаме како се наоѓа реципрочната вредност на даден комплексен број z. Аналогно, како и кај реалните броеви за реципрочната вредност $\frac{1}{z}$ на комплексниот број $z=a+bi\neq 0$ имаме

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z}\cdot\frac{\bar{z}}{\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i\,. \tag{2}$$

Од претходно изнесеното следува дека за секој комплексен број $z\neq 0$ постои број $z'\in\mathbf{C}$ таков, што $z\cdot z'=1$ и тоа е бројот $\frac{1}{z}$ кој е реципрочен на z.

Пример 12. а) Реципрочната вредност на имагинарната единица i е

$$\frac{1}{i}=\frac{-i}{i(-i)}=\frac{-i}{-i^2}=-i\,.$$

б) Ако ја искористиме формулата (2), за реципрочната вредност на комплексниот број $w=2+3i$ добиваме $\frac{1}{w}=\frac{2-3i}{2^2+3^2}=\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i$. ♦

Нека z и w се произволни комплексни броеви. Во теорема 5 б) докажавме дека $|zw|=|z|\cdot|w|$. Природно е да се запрашаме, ако $z\neq 0$, дали аналогно равенство важи за количникот на комплексните броеви z и w. Ако го искористиме равенствот $\frac{w}{z}\cdot z=w$, тогаш од теорема 5 б) следува $|w|=\left|\frac{w}{z}\cdot z\right|=\left|\frac{w}{z}\right|\cdot|z|$, што значи $\left|\frac{w}{z}\right|=\frac{|w|}{|z|}$, т.е. точна е следната теорема.

Теорема 7. За секои комплексни броеви број z и w , $z\neq 0$ важи

$$\left|\frac{w}{z}\right|=\frac{|w|}{|z|}\,. \qquad (6)$$

◆

Пример 13. Пресметај го модулот на комплексниот број:

а) $z=\frac{\sqrt{3}+i}{6-8i}$, **б)** $z=\frac{2i}{1+i\sqrt{3}}$.

Решение. а) Од претходната теорема непосредно следува

$$|z|=\frac{|\sqrt{3}+i|}{|6-8i|}=\frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}{\sqrt{6^2+(-8)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}\,.$$

б) Имаме

$$|z|=\frac{|2i|}{|1+i\sqrt{3}|}=\frac{2}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{5}\,.$$

◆

Степенувањето на комплексен број z го дефинираме како и степенувањето на реален број. Имено:

$$z^1=z,\quad z^{n+1}=z^n\cdot z,\ n\in\mathbf{N},$$

а степенот на бројот $z\neq 0$ со степенов показател нула и цел негативен број го воведуваме со:

$$z^0=1,\quad z^{-n}=\frac{1}{z^n},\ n\in\mathbf{N}\,.$$

Пред да разгледаме некои примери да забележиме дека, како и кај реалните броеви, за степените на комплексните броеви важат равенствата

$$z^k w^k=(zw)^k,\quad z^k z^m=z^{k+m},\quad \frac{z^k}{z^m}=z^{k-m},\quad \left(\frac{z}{w}\right)^k=\frac{z^k}{w^k},\quad (z^k)^m=z^{km}\,.$$

Пример 14. а) Докажи дека за секој природен број k важи

$$i^{4k}=1,\quad i^{4k+1}=i,\quad i^{4k+2}=-1 \text{ и } i^{4k+3}=-i\,.$$

б) Пресметај

$$i^{25}+(-i)^{50}+i^{62}+i^{83}.$$

Решение. а) Имаме, $i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=i^{2+1}=i^2 i=-i$ и $i^4=i^2 i^2=(-1)(-1)=1$, па затоа

$$i^{4k}=(i^4)^k=1^k=1,\quad i^{4k+1}=i^{4k}i=1\cdot i=i,$$

$$i^{4k+2}=i^{4k}i^2=1\cdot(-1)=-1 \quad \text{и} \quad i^{4k+3}=i^{4k}i^3=1\cdot(-i)=-i\,.$$

б) Ако се искористат равенствата во задачата под а) добиваме

$$i^{25}+(-i)^{50}+i^{62}+i^{83}=i^{6\cdot4+1}+(-1)^{50}i^{4\cdot12+2}+i^{4\cdot15+2}+i^{4\cdot20+3}=i-1-1-i=-2\,.\ \blacklozenge$$

Пример 15. а) Докажи дека $(1+i)^4-(1-i)^4$ е реален број.

б) Пресметај $(\frac{1+i}{1-i})^{208}$.

Решение. а) Ако ја примениме формулата $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ добиваме

$$(1+i)^4-(1-i)^4=[(1+i)^2]^2-[(1-i)^2]^2=(1+2i+i^2)^2-(1-2i+i^2)^2=(2i)^2-(-2i)^2=0\,,$$

што значи дека $(1+i)^4-(1-i)^4$ е реален број.

б) Имаме

$$(\frac{1+i}{1-i})^{208}=\frac{(1+i)^{208}}{(1-i)^{208}}=\frac{[(1+i)^2]^{104}}{[(1-i)^2]^{104}}=\frac{(1+2i+i^2)^{104}}{(1-2i+i^2)^{104}}=\frac{(2i)^{104}}{(-2i)^{104}}=\frac{(2i)^{104}}{(-1)^{104}(2i)^{104}}=1\,.\ \blacklozenge$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

18. Најди ја реципрочната вредност на бројот z :

а) $z=5+12i$, **б)** $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ и **в)** $z=-7+2i$.

19. Пресметај $\frac{w}{z}$ ако:

а) $w=2+3i, z=2-3i$, **б)** $w=5-2i, z=1-i$ и **в)** $w=1-3i, z=1+i$.

20. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}}$ ако $z=1+i$ и **б)** $\frac{z+\bar{z}}{2z+3}$ ако $z=\frac{i-1}{2}$.

21. Пресметај:

а) $i^{20}+i^{30}+i^{40}+i^{50}+i^{60}+i^{70}$ и **б)** $(-i)^{63}-i^{102}+i^{-112}+i^{201}$

22. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) z^2+2z-3, за $z=2\pm i$ и **б)** $2z^2+z-1$, за $z=3\pm5i$.

23. Пресметај $\frac{(1+i)^3}{(2-3i)^2}(\frac{3-i}{2+i}-\frac{2-i}{3+i})$.

24. Докажи дека $(\frac{1+i\sqrt{7}}{2})^4+(\frac{1-i\sqrt{7}}{2})^4=1$.

25. Реши ја по z равенката:

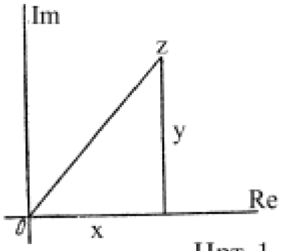
а) $2z(3-5i)+z-1=-30-65i$ и **б)** $(z+i)(1+2i)+(1+zi)(3-4i)=1+7i$.

5. ГЕОМЕТРИСКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА НА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

Како што знаеме множеството реални броеви го претставуваме на бројна оска и притоа на секој реален број му соодветствува една и само една точка од бројната оска. Важи и обратното, т.е. на секоја точка од бројната оска и соодветствува еден и само еден реален број.

Логично е да се запрашаме дали слично претставување е можно и за комплексните броеви. Како што знаеме секој комплексен број $z = x + iy$ можеме да го определиме ако ни се зададени неговиот реален и имагинарен дел. Последното не нацедува на размисла дека за геометриско претставување на комплексните броеви треба да ја искористиме рамнината.

Нека xOy е правоаголен координатен систем во рамнината и нека точката A лежи во рамнината. Точката A во рамнината е наполно определена со нејзините координати x и y, т.е. со подредениот пар (x, y). Ако првата координата во подредениот пар (x, y) ја земеме за реален, а втората за имагинарен дел на некој комплексен број z, тогаш комплексниот број е еднозначно определен. Според тоа, на секоја точка од рамнината $A(x, y)$ и соодветствува точно определен комплексен број $z = x + iy$. Јасно, важи и обратното, т.е. на секој комплексен број z му соодветствува една и само една точка A во рамнината (црт. 1). Притоа $\operatorname{Re} z$ е $x-$координатата на точката A, а $\operatorname{Im} z$ е $y-$координатата на A, па затоа апсцисната оска ја нарекуваме *реална оска*, а ординатната оска ја нарекуваме *имагинарна оска*. Рамнината со зададен во неа правоаголен координатен ситем, користен за претставување на комплексните броеви, ја нарекуваме *комплексна рамнина*.



Црт. 1

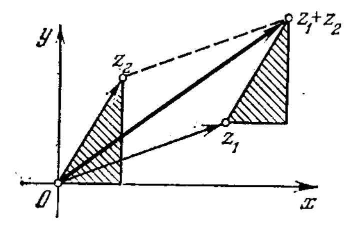
Пример 16. Обиди се, во кординатен систем да ги претставиш комплексните броеви:

$$z_1 = 1 + 2i\,,\ z_2 = 1 - 2i\,,\ z_3 = -1 - 2i\,,\ z_4 = 3 + i \text{ и } z_5 = 1{,}5 - 2{,}5i\,. \ \blacklozenge$$

Во претходниот пример забележуваме дека z_1 и z_2 се коњугирано комплексни броеви и дека точките кои им соодветствуваат се симетрични во однос на реалната оска. Понатаму, броевите z_1 и z_3 се спротивни еден на друг и како што може да се види точките кои им соодвествуваат се симетрични во однос на координатниот почеток.

Лесно се гледа дека претходно кажаното важи за секој пар коњугирано комплексни броеви и за секој пар спротивни броеви. Имено, ако $z = x + iy$, тогаш $-z = (-x) + i(-y)$ и $\bar{z} = x + (-y)i$ и точките кои им се придружени на овие броеви се $A(x, y)$, $B(-x, -y)$ и $C(x, -y)$. Јасно, точите A и C, соодветни на коњугираните броеви z и $\bar{z}$, се симетрични во однос на реалната оска, а точките A и B, соодветни на спротивните броеви z и $-z$, се симетрични во однос на координатниот почеток.

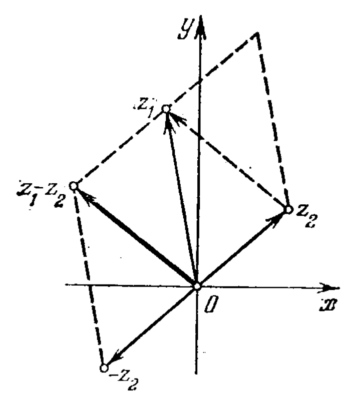
Како што рековме на секој комплексен број z соодветствува една и само една точка во комплексната рамнина, па затоа до крајот на овој дел за точката соодветна на комплексниот број z ќе ја користиме ознаката Z.



Црт. 2

Веќе рековме дека при даден координатен систем на комплексниот број $z = x + yi$ му соодветствува една и само една точка $Z(x, y)$. Од друга страна координатниот почеток O земен како почетна и точката Z земана како крајна точка определуваат еден и само еден вектор $\overrightarrow{OZ}$. Според тоа, на секој комплексен број z му соодветствува еден и само еден вектор $\overrightarrow{OZ}$.

Сега можеме да се осврнеме на геометриската смисла на операциите собирање и одземање на комплексни броеви. Нека се дадени комплексните броеви z_1 и z_2, на кои им ги придружуваме векторите $\overrightarrow{OZ}_1$ и $\overrightarrow{OZ}_2$. За да го најдеме збирот $z_3 = z_1 + z_2$, го конструираме паралелограмот (црт. 2) над векторите $\overrightarrow{OZ}_1$ и $\overrightarrow{OZ}_2$. Јасно, векторот $\overrightarrow{OZ}_3$ (црт. 2), кој е дијагонала на паралелограмот $OZ_1Z_3Z_2$, му соодветствува на збирот на комплексните броеви z_1 и z_2.



Црт. 3

Разликата на комплексните броеви z_1 и z_2 ја наоѓаме како збир на комплексните броеви z_1 и $-z_2$, т.е. $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$. Според тоа, геометриски таа може да се најде со нанесување на векторите соодветни на комплексните броеви z_1 и $-z_2$ и ако ги собереме овие вектори (црт. 3).

Да го разгледаме цртеж 2, $z_2 = a + bi$. Триаголникот OMZ_2 е правоаголен со катети $\overline{OM} = a$ и $\overline{MZ}_2 = b$. Од Питагоровата теорема имаме

$$\overline{OZ}_2 = \sqrt{\overline{OM}^2 + \overline{MZ}_2^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Од друга страна $|z_2| = \sqrt{a^2 + b^2}$, што заедно со претходното равенство значи дека модулот на комплексниот број е еднаков на должината на векторот соодветен на комплексниот број. Понатаму, растојанието меѓу точките соодветни на комплексните броеви z_1 и z_2 е еднакво на должината на векторот соодветен на комплексниот број $z_1 - z_2$, а тоа значи дека е еднакво на $|z_1 - z_2|$.

Пример 17. На тело кое се наоѓа во координатниот почеток O (црт. 4) дејствуваат силите $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$. Нормалната компонента (проекцијата) на силата $\vec{p}_1$ на $x-$оската е $5N$ (5 њутни), а на $y-$оскатае $2N$. За силата $\vec{p}_2$ овие компоненти се $2N$ и $4N$. Најди го интензитетот на резултантата на овие сили.

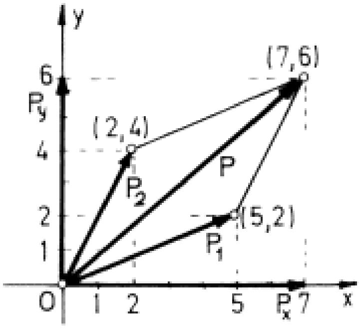
Решение. На црт. 4 силте $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ се претставени со комплексните броеви $z_1 = 5 + 2i$ и $z_2 = 2 + 4i$. Според тоа, на резултантата на овие сили и соодветствува векторот претставен со комплексниот број

$$z = z_1 + z_2 = 7 + 6i.$$

Но,

$$|z| = \sqrt{7^2 + 6^2} = \sqrt{49 + 36} = \sqrt{85},$$

што значи интензитетот на резултантата е $\sqrt{85}N$. ♦



Црт. 4

Во претходните разгледувања рековме дека точноста на неравенството 6 од теорема 6 ќе ја потврдиме при разгледување на геометриската интерпретација на комплексните броеви. За таа цел да го разгледаме црт. 2. Ако неравенството на триаголник го примениме на ΔOZ_1Z_3 добиваме $\overline{OZ}_3 \le \overline{OZ}_1 + \overline{Z_1Z_3}$ што значи

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_1 + z_2 - z_1| \text{ т.е. } |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|,$$

што всушност е и тврдењето на теорема 6.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

26. Претстави ги геометриски (со помош на вектори) комплексните броеви z и w и геометриски одреди го нивниот збир:

а) $z = 5 + 2i$, $w = 3 + i$ **б)** $z = 1 - 2i$, $w = -2 + 3i$ и **в)** $z = -2 - 3i$, $w = -3 + i$.

27. Претстави ги геометриски (со помош на вектори) комплексните броеви z и w и геометриски одреди ја нивната разлика:

а) $w = 2 + 3i,\ z = 2 - 3i$, **б)** $w = 5 - 2i,\ z = 1 - i$ и **в)** $w = 1 + 3i,\ z = 1 + i$.

28. Пресметај го растојанието меѓу точките, кои им соодветствуваат на комплексните броеви z и w:

а) $z = 5 + 2i$, $w = 3 + i$ **б)** $z = 1 - 2i$, $w = -2 + 3i$ и **в)** $z = -2 - 3i$, $w = -3 + i$.

29. **а)** Што е геометриското место на точки во комплексната рамнина за кои $|z| = 1$?

б) Што е геометриското место на точки во комплексната рамнина за кои $|z - 1| = |z - i|$?

30. Образложи ги следните тврдења:

а) На коњугирано комплексните броеви z и $\bar{z}$ им соодветствуваат точки од комплексната рамнината, кои се симетрични во однос на реалната оска.

б) На заемно спротивните комплексни броеви z и $-z$ им соодвествуваат точки од комплексната рамнина кои се симетрични во однос на координатниот почеток.

31. На тело кое се наоѓа во координатниот почеток O дејствуваат силите $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$. Нормалната компонента (проекцијата) на силата $\vec{p}_1$ на $x-$оската е $2N$, а на $y-$оскатае $3N$. За силата $\vec{p}_2$ овие компоненти се $3N$ и $1N$. Најди го интензитетот на резултантата на овие сили.

ПРОВЕРИ ГО СВОЕТО ЗНАЕЊЕ

1. **а)** Определи го реалниот и имагинарниот дел на: $z = 2 + 4i,\ w = \frac{1}{2} i - 12$. (4 б)

   б) Определи го реалниот број x така да комплексниот број $z = \frac{x-3}{4} + 2 - 12i$ биде чисто имагинарен. (6 б)

2. **а)** Најди ги реалните броеви x и y така да е исполнето равенството $(x + iy)((2 + i) = 1 + 3i$. (6 б)

   б) Најди ги реалните броеви x и y така да е исполнето равенството $\frac{x+iy-4-i}{1+i} = 2 - 5i$. (8 б)

3. **а)** Дадени се комплексните броеви $z = 2 + 3i$ и $w = 1 - i$. Пресметај ја вредноста на изразот $|z + \overline{w}| - |\overline{z} + w|$.. (10 б)

   б) Дадени се комплексните броеви $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ и $w = 1 + i$. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{|z+w|+|z-w|}{|z-\overline{w}|+|\overline{z}-w|}$. (15 б)

4. **а)** Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{1+i}{(2-3i)^2}(\frac{3-i}{2+i} - \frac{2-i}{3+i})$. (15 б)

   б) Пресметај ја вредноста на изразот $(\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^4 + (\frac{1-i\sqrt{3}}{2})^4$. (20 б)

5. **а)** Реши ја по z равенката $2z(2 - 5i) + 3z - 4 = -33 - 65i$ (15 б)

   б) Реши ја по z равенката $(z + i)(1 + 2i) + (1 + zi)(3 - 4i) = 1 + 7i$. (20 б)

6. **а)** Претстави ги геометриски (со помош на вектори) комплексните броеви $z = 2 - i$ и $w = -1 + 4i$ и геометриски одреди ги нивниот збир и разлика. (10 б)

   б) На тело кое се наоѓа во координатниот почеток O дејствуваат силите $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$. Нормалната компонента (проекцијата) на силата $\vec{p}_1$ на $x-$оската е $4N$, а на $y-$оската е $\frac{3}{2}N$. За силата $\vec{p}_2$ овие компоненти се $\frac{3}{2}N$ и $2{,}5N$. Најди го интензитетот на резултантата на овие сили. (15 б)

Забелешка. При решавањето треба да избереш само по една подзадача од секоја задача. Доколку сакаш самостојно да се оцениш, можеш да го искористиш следниот критериум:

Бодови:	30-46	47-59	60-72	73-84
Оценка:	2	3	4	5

ГЛАВА III

КВАДРАТНА РАВЕНКА

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

ПОТРЕБНИ ПРЕДЗНАЕЊА

За успешно совладување на содржините кои ќе ги усвојуваш во оваа тема, потребно е да се потсетиш на:

- *својствата на реалните броеви и операциите со нив;*
- *својствата на комплексните броеви и операциите со нив;*
- *формулите за скратено множење;*
- *линеарните равенки;*
- *полиноми и операциите со нив;*
- *дробно-рационалните и ирационалните алгебарски изрази и операциите со нив; и*
- *решавањето на системите линеарни равенки со метод на замена.*

НОВИ ЗНАЕЊА И УМЕЕЊА

Успешното совладување на содржините кои се разработени во оваа тема има за цел:

- да го усвоиш поимот за квадратна равенка;
- да сведуваш квадратна равенка од општ вид во нормален вид;
- да решаваш неполна квадратна равенка од видот $ax^2+bx=0$ и да ги анализираш решенијата на истата;
- да решаваш неполна квадратна равенка од видот $ax^2+c=0$ и да ги анализираш решенијата на истата;
- да решаваш полна квадратна равенка користејќи ја формулата за корените на квадратна равенка;
- да дискутираш за корените на квадратна равенка според знакот на нејзината дискриминанта;
- да решаваш полна и неполна параметарска квадратна равенка;
- да ги усвоиш Виетовите формули закорените на квадратна равенка и истите да ги користиш при решавање на задачи;
- да составуваш квадратна равенка чии корени се дадени;
- да решаваш практични задачи кои се сведуваат на решавање квадратни равенки;
- да ја усвоиш и ја користиш теоремата за разложување на квадратен трином на множители;
- да се запознаеш со дробно рационалните равенки и да се оспособиш истите да ги решаваш;
- да решаваш и дискутираш параметарски дробно линеарни равенки;
- да дифинираш биквадратна равенка и да се оспособиш истата да ја решаваш;
- да дифинираш и да препознаваш ирационална равенка;
- да го определуваш дифиниционото множество на ирационалните равенки;
- да решаваш ирационални равенки кои се сведуваат на линеарни или квадратни равенки;
- да ги дискутираш решенијата на ирационалните равенки;
- да се запознаеш со систем од една линеарна и една квадратна равенка со две непознати; и
- да решаваш системи од една линеарна и една квадратна равенка со две непознати.

Решавањето на задачата: "*Еден воз растојанието од* $650km$ *го минува за 3 часа побрзо од друг воз, чија брзина е за* $15km/h$ *помала од брзината на првиот воз. Најди ги брзините на возовите.*" не доведува до равенката $x^2-15x-3250=0$. Слично, решавањето на задачите од вертикален и хоризонтален истрел најчесто се сведува на решавање на равенки од видот $at^2+bt+c=0$, каде со t е означено непознатото време, а реалните броеви a,b и c се дадени и притоа важи $a\neq 0$. Равенките од ваков вид се среќаваат и при решавањето на други практични проблеми, па затоа во овој дел истите ќе ги проучиме и ќе се осврнеме на нивнта примена при решавањето на други видови равенки.

1. ПОИМ ЗА КВАДРАТНА РАВЕНКА. ВИДОВИ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

Да ги разгледаме равенките

$$x^2-5x+6=0,\quad -\tfrac{1}{2}x^2+2x+4=0,\quad \sqrt{3}x^2+4x=0 \text{ и } 7x^2-2\sqrt{2}=0.$$

Забележуваме дека кај секоја од овие равенки нивната лева страна е полином од втор степен во однос на непознатата x, т.е. квадратен трином, а десната страна на сите равенки е еднаква на нула. Ако ова својство на горните равенки го земеме како карактеристично својство ја имаме следната дефиниција.

Дефиниција 1. Равенката од видот

$$ax^2+bx+c=0, \tag{1}$$

каде што x е непозната, а $a,b,c\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$ ја нарекуваме *квадратна равенка со една непозната.*

Броевите a,b и c ги нарекуваме *коефициенти на квадратната равенка,* и тоа: a е коефициент на квадратниот член, b е коефициент на линеарниот член и c е слободен член.

Забелешка 1. Претпоставката $a\neq 0$ е од суштинско значење, бидејќи во спротивно равенката (1) би била линеарна, а не квадратна.

Пример 1. Определи ги коефициентите на квадратните равенки:

а) $(1-\sqrt{2})x^2+\sqrt[3]{4}x-12=0$, **б)** $\frac{1}{2}x^2-x=0$ и **в)** $0{,}5x^2-12=0$.

Решение. а) Согласно со дефиниција 1 имаме $a=1-\sqrt{2}$, $b=\sqrt[3]{4}$ и $c=-12$.

б) Дадената равенка ја запишуваме во обликот $\frac{1}{2}x^2 - 1 \cdot x + 0 = 0$ од каде согласно дефиниција 1 наоѓаме $a = \frac{1}{2},\ b = -1,\ c = 0$.

в) Дадената равенка ја запишуваме во обликот $0{,}5x^2 + 0 \cdot x - 12 = 0$ од каде согласно дефиниција 1 наоѓаме $a = 0{,}5,\ b = 0,\ c = -12$. ♦

Забележуваме дека коефициентите b и c на квадратната равенка во примерот 1 а) се различни од нула, коефициентот c во кавдратната равенка од пример 1 б) е еднаков на нула и коефициентот b во квадратната равенка од пример 1 в) е еднаков на нула. Во општ случај во зависност од вредноста на коефициентите b и c ја имаме следната поделба на квадратните равенки:

- ако коефициентите b и c се различни од нула, тогаш квадратната равенка (1) ја нарекуваме *полна квадратна равенка* и
- ако барем еден од коефициентите b и c е еднаков на нула, тогаш квадратната равенка (1) ја нарекуваме *неполна квадратна равенка*.

Јасно, неполните квадратни равенки се:

$$ax^2 + bx = 0,\ b \neq 0; \qquad ax^2 + c = 0,\ c \neq 0; \qquad ax^2 = 0.$$

Да ги разгледаме равенките $x^2 - 5x + 6 = 0$ и $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4 = 0$. Заблежуваме дека во првата равенка коефицеентот на квадратниот член е $a = 1$, а во втората равенка имаме $a = -\frac{1}{2}$ и ова е причина за уште една поделба на квадратните равенки и тоа:

- ако $a \neq 1$, тогаш за квадратната равенка (1) ќе велиме дека е од *општ вид*,
- ако $a = 1$, тогаш за квадратната равенка ќе велиме дека е од *нормален вид* или *сведен вид*, и обично за истата го користиме записот

$$x^2 + px + q = 0,\ p, q \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Нека е дадена квадратната равенка (1). Ако истата ја поделиме со a, $a \neq 0$, тогаш сме ја запишале во нормален вид, при што $p = \frac{b}{a}$ и $q = \frac{c}{a}$.

Пример 2. Квадратните равенки од пример (1) запиши ги во нормален вид:

Решение. а) Согласно со претходно кажаното доволно е равенката да ја поделиме со $a = 1 - \sqrt{2}$ и притоа добиваме

$$x^2 + \frac{\sqrt[3]{4}}{1-\sqrt{2}}x - \frac{12}{1-\sqrt{2}} = 0.$$

б) Аналогно, како во примерот под а), после делењето на равенката со $a = \frac{1}{2}$ наоѓаме $x^2 - 2x = 0$.

в) Аналогно, како во примерот под а), после делењето на равенката со $a = 0{,}5$ наоѓаме $x^2 - 24 = 0$. ♦

На крајот од овој дел ќе спомeнеме уште еден тип квадратни равенки, кои многу често се среќаваат во практиката. Имено, ако барем еден од коефициентите a, b или c

на квадратната равенка (1) зависи од параметар, тогаш ќе велиме квадратната равенка е *параметарска*, т.е. со *параметри* или *општи коефициенти*.

Пример 3. За кои вредности на параметарот m равенката

а) $(m-1)x^2+4mx+12=0$, **б)** $(m+2)t^2+t+(m+2)=0$,

в) $(m-2)y^2+2(m+1)y+m-4=0$,

е квадратна, а за кои е неполна квадратна равенка.

Решение. а) За да параметарската равенка е квадратна потребно и доволно е коефициентот пред x^2 да е различен од нула. Значи $m-1\neq 0$, т.е $m\neq 1$. Според тоа, за $m\in(-\infty,1)\cup(1,\infty)$ дадената равенка е квадратна.

Слободниот член е различен од нула, па затоа дадената равенка може да биде неполна само ако коефициентот пред линеарниот член е еднаков на нула, т.е $4m=0$, што значи $m=0$ и притоа равенката е $-x^2+12=0$.

б) Дадената равенката е квадратна за $m+2\neq 0$, што значи $m\neq -2$, односно $m\in(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$.

Коефициентот пред линеарниот член е различен од нула, па затоа дадената равенка може да биде неполна квадратна равенка само ако слободниот член е еднаков на нула. Но, тоа не е можно бидејќи слободниот член е еднаков на коефициентот пред квадратниот член, т.е. во овој случај равенката е линеарна. Според тоа, за ниту една вредност на параметарот m дадената равенка не може да биде неполна квадратна равенка.

в) Дадената равенка е квадратна за $m-2\neq 0$, што значи $m\neq 2$, т.е.

$$m\in(-\infty,2)\cup(2,\infty).$$

Дадената равенка е неполна квадратна равенка ако слободниот член е еднаков на нула, т.е. $m=4$ и притоа добиваме $2y^2+10y=0$. Но, таа е неполна и ако $m=-1$ и во овој случај равенката е $-3y^2-5=0$. ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Трансформирај ги дадените равенки во општ вид, а потоа истите запиши ги во нормален (сведен) вид:

   а) $4x(x+1)=2+3x$, **б)** $(x-\frac{1}{2})^2+2x-3=(2+x)(3-x)$, **в)** $\frac{3+4x}{5}+\frac{x(1-3x)}{2}=5+\frac{x^2-1}{4}$.

2. За кои вредности на параметарот k равенката:

   а) $(k-2)x^2+(k+1)x-k+1=0$, **б)** $x^2-k=2kx^2+kx+3$, **в)** $3kx^2-10=x^2+(k-\frac{1}{3})x$,

   е квадратна, а за кои е неполна квадратна равенка.

3. Определи ја вредноста на квадратниот трином $6x^2-3x+7$ за: **а)** $x=0$, **б)** $x=3$, **в)** $x=\frac{1}{3}$.

4. Испитај кои од броевите $-2,-1,2,3,5,$ се решенија на равенката $x^2-5x+6=0$.

5. Разложи го на множители биномот: **а)** $6x^2-3x$, **б)** x^2-6, **в)** $(x-\frac{1}{2})^2-\frac{25}{4}$, **г)** $(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$.

6. За кои вредности на x е еднаков на нула производот: **а)** $x(2x+3)$, **б)** $(x+2)(x-5)$.

2. РЕШАВАЊЕ НА НЕПОЛНИ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

Да ја разгледаме равенката $2x^2+3x=0$. Ако на левата страна на равенката пред заграда извадиме x, тогаш дадената равенка ја трансформираме во еквивалентната на неа равенка $x(2x+3)=0$. На тој начин добивме производот на два мономи да е еднаков на нула, а тоа е можно ако и само ако $x=0$ или $2x+3=0$, т.е. $x=0$ или $x=-\frac{3}{2}$. Вистинитоста на последните тврдења се заснива на добро познатиот факт дека производот на два комплексни броја е еднаков на нула ако и само ако барем еден од броевите е еднаков на нула.

Претходното има своја генерализација, која се состои во следното. При решавање на нелинеарна равенка од облик $f(x)=0$ најпрво го разложуваме изразот $f(x)$ и истиот истиот го запишуваме во облик $f(x)=g(x)h(x)$, т.е. дадената равенка ја трансформираме во еквивалентната на неа равенка $h(x)g(x)=0$, која е еквивалентна на

$$h(x)=0 \text{ или } g(x)=0.$$

Сега ги решаваме равенките $h(x)=0$ и $g(x)=0$и нивните решенија се решенија на равенката $f(x)=0$.

Да разгледаме еден пример.

Пример 4. Реши ја равенката

$$(x+1)(2x-3)-4(x+1)(3-x)=0.$$

Решение. Ако на левата страна извадиме пред заграда $x+1$ последователно добиваме

$$(x+1)[2x-3-4(3-x)]=0$$
$$(x+1)(2x-3-12+4x)=0$$
$$(x+1)(6x-15)=0.$$

Понатаму, последната равенка е еквивалентна на $x+1=0$ или $6x-15=0$ т.е. на вкупноста на овие равенки

$$\left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ 6x-15=0. \end{array}\right.$$

Ја решаваме секоја равенка од вкупноста и добиваме $x=-1, x=\frac{5}{2}$, па множеството решенија на вкупноста, а со тоа и на дадената равенка е $M=\{-1,\frac{5}{2}\}$. ♦

Теорема 1. Неполната квадратна равенка од видот

$$ax^2+bx=0, \quad a\neq 0, \tag{1}$$

има решенија

$$x_1=0, \quad x_2=-\frac{b}{a}. \tag{2}$$

Доказ. Левата страна на равенката (1) ја разложуваме на множители и добиваме дека таа е еквивалентна на равенката $x(ax+b)=0$, односно на вкупноста равенки

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ ax+b=0, \quad a\neq 0 \end{array}\right.$$

чие решение е $x_1=0, x_2=-\frac{b}{a}$, а тоа се решенијата и на почетната равенка. ♦

Дискусија 1. Очигледно дека равенката (1) има секогаш две реални решенија и тоа се $x_1=0, x_2=-\frac{b}{a}$. Јасно, ако $b=0$, тогаш $x_2=-\frac{0}{a}=0$ и во овој случај велиме дека $x_1=x_2=0$ е *двоен* (*двократен*) *корен* на равенката $ax^2=0, a\neq 0$.

Пример 5. Реши ја равенката $4x^2+7x=0$.

Решение. Дадената равенка е неполна квадратна равенка од видот (1) со $a=4$ и $b=7$. Согласно со теорема 1 нејзините решенија се $x_1=0$ и $x_2=-\frac{7}{4}$.

Се разбира за решавање на оваа задача може и непосредно да не ја користиме теорема 1. Притоа имаме

$$4x^2+7x=0 \Leftrightarrow x(4x+7)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ или } 4x+7=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ или } x=-\tfrac{7}{4}.$$ ♦

Пример 6. За кои вредности на параметарот k едно решение на равенката

$$x^2+5x-(2k^2+4k)=0$$

е еднакво на нула. За најдената вредност на k определете го и другото решение.

Решение. Прво да забележиме дека едно решение на равенката $ax^2+bx+c=0$ е еднакво на нула ако и само ако $c=0$. Навистина, ако $c=0$, тогаш равенката е неполна од видот (1) и според теорема 1 едно нејзино решение е $x_1=0$. Обратно, ако $x_1=0$ е решение на равенката $ax^2+bx+c=0$, тогаш $a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=0$ т.е. $c=0$.

Од претходно изнесеното следува дека дадената равенка има едно решение нула ако и само ако $-(2k^2+4k)=0$ т.е. ако и само ако $2k^2+4k=0$. Сега од теорема 1 следува дека $k_1=0$ и $k_2=-\frac{1}{2}$.

За најдените вредности на k дадената равенка го добива обликот $x^2+5x=0$ и второто нејзино решение е $x_2=-5$. ♦

Теорема 2. Неполната квадратна равенка од видот

$$ax^2+c=0, \quad a\neq 0, \tag{2}$$

има решенија

$$x_{1/2}=\pm\sqrt{-\tfrac{c}{a}}. \tag{3}$$

Доказ. Слободниот член c го префрламе на десната страна на равенката и потоа равенката ја делиме со $a \neq 0$, со што ја добиваме еквивалентна на равенка $x^2 = -\frac{c}{a}$. Решенија на последната равенка се $x_{1/2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ и тоа се решенија на дадената равенка. ♦

Дискусија 2. а) Ако $-\frac{c}{a} > 0$, т.е. ако c и a се со различни знаци, тогаш равенката (3) има реални и различни решенија и тие се дадени со $x_{1/2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

б) Ако $-\frac{c}{a} < 0$, т.е. ако c и a се со исти знаци, тогаш равенката (3) има коњугирано комплексни корени и тие се дадени со $x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{c}{a}} \cdot i$.

в) Ако $c = 0$, тогаш $x_1 = x_2 = 0$ е двоен корен на равенката $ax^2 = 0, a \neq 0$.

Пример 7. Реши ја равенката:

а) $4x^2 - 25 = 0$, **б)** $9x^2 + 49 = 0$

Решение. а) За дадената равенка имаме $a = 4$ и $c = -25$ т.е. $-\frac{c}{a} = \frac{25}{4} > 0$, па од дискусија 2 а) следува дека нејзини решенија се $x_{1/2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} = \pm\frac{5}{2}$.

б) За дадената равенка имаме $a = 9$ и $c = 49$ т.е. $-\frac{c}{a} = -\frac{49}{9} < 0$, па од дискусија 2 б) следува дека нејзини решенија се $x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{c}{a}} \cdot i = \pm\sqrt{\frac{49}{9}} \cdot i = \pm\frac{7}{3} \cdot i$.

Се разбира за решавање на оваа задача може и непосредно да не ја користиме теорема 2. Притоа имаме

а) $4x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (2x-5)(2x+5) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5 = 0$ или $2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ или $x = -\frac{5}{2}$.

б) $9x^2 + 49 = 0 \Leftrightarrow (3x - 7i)(3x + 7i) = 0 \Leftrightarrow 3x - 7i = 0$ или $3x + 7i = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}i$ или $x = -\frac{7}{3}i$. ♦

Во следниот ќе разгледаме параметарска квадратна равенка која е неполана квадратна равенка од видот $ax^2 + c = 0$.

Пример 8. Реши ја равенката $(12 - 3k)x^2 - 17k + 3 = 0$.

Решение. Дадената равенка е неполна квадратна равенка ако $12 - 3k \neq 0$ т.е. $k \neq 4$. Притоа имаме

$$(12 - 3k)x^2 - 17k + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{17k-3}{12-3k}.$$

Ако $\frac{17k-3}{12-3k} > 0$, т.е. $k \in (\frac{3}{17}, 4)$, равенката има реални и различни корени $x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{17k-3}{12-3k}}$. Ако $17 - 3k = 0$, т.е. $k = \frac{3}{17}$ равенката има двоен корен $x_{1/2} = 0$. Ако $\frac{17k-3}{12-3k} < 0$ т.е. $k \in (-\infty, \frac{3}{17}) \cup (4, +\infty)$, равенката има коњугирано комплексни корени $x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{17k-3}{3k-12}} \cdot i$. ♦

Пример 9. Која релација треба да ја задоволуваат параметрите a и b, за да едно решение на равенката $(2a-1)x^2-15b+25=0$ е бројот -5? За така најдената зависност најди го и другото решение на равенката.

Решение. Ако $x_1=-5$ е решение на дадената равенка, тогаш

$$(2a-1)\cdot(-5)^2-15b+25=0 \text{ т.е. } 50a-25-15b+25=0,$$

од каде наоѓаме $b=\frac{10}{3}a$ и тоа е бараната релација.

Понатаму, во равенката заменуваме $b=\frac{10}{3}a$ и ја добиваме равенката

$$(2a-1)x^2-50a+25=0,$$

која е еквивалентна на равенката $(2a-1)(x^2-25)=0$. Ако $2a-1=0$, т.е. $a=\frac{1}{2}$, тогаш решение е секој реален број. Ако $a\neq\frac{1}{2}$, тогаш $x_{1/2}=\pm5$, т.е. второто решение е 5. ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

7. Реши ги равенките:

   а) $(x-4)(x+1)=0$, **б)** $(x-1)^2+(1-x)(x-3)=0$, **в)** $x-2+(4+x)(2-x)=0$.

8. Реши ги равенките:

   а) $(x-2)^2-9=0$, **б)** $(x+1)^2-25=0$, **в)** $(3x+4)^2+25=0$, **г)** $(x+5)^2+5=0$.

9. Реши ги равенките:

   а) $(y-3)^2+(y-4)^2=y^2+25$, **б)** $2t(t-5)+3(t+12)=36-4t$.

10. Реши ги параметарските равенки:

    а) $(\lambda-2)x^2-\lambda+1=0$, **б)** $\lambda x^2+4=x^2$, **в)** $x^2-\lambda=2\lambda x^2+3$, **г)** $(3-\lambda)x^2-2=\lambda$.

11. Запиши го како разлика на квадрати на два изрази полиномот:

    а) x^2+2ax, **б)** x^2-3x, **в)** $2x^2+7x$, **г)** x^2+4x+3.

12. Разложи го на линеарни множители триномот: **а)** $x^2+7x+12$, **б)** x^2+2x-8.

3. РЕШАВАЊЕ НА ПОЛНИ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ. ДИСКРИМИНАНТА НА КВАДРАТНА РАВЕНКА

Во претходните разгледувања покажавме дека неполните квадратни равенки можеме да ги решиме со разложување на нивната лева страна на множители и користење на фактот дека $g(x)h(x)=0$ ако и само ако $g(x)=0$ или $h(x)=0$. Ќе покажеме дека оваа идеја може да се искористи и за решавање на полните квадратни равенки. Најпрво ќе го разгледаме следниот пример.

Пример 10. Реши ја квадратната равенка

а) $x^2+8x+12=0$, **б)** $x^2-8x+20=0$.

Решение. а) Ја трансформираме левата страна на равенката

$$x^2+8x+12=x^2+2\cdot 4x+12=\underline{x^2+2\cdot 4x+16}-16+12=(x+4)^2-4$$
$$=(x+4)^2-2^2=(x+4-2)(x+4+2)=(x+2)(x+6).$$

Значи, дадената равенка е еквивалентна на равенката $(x+2)(x+6)=0$ чии решенија се $x_1=-2$ и $x_2=-6$.

б) Ја трансформираме левата страна на равенката

$$x^2-8x+20=x^2-2\cdot 4x+20=\underline{x^2-2\cdot 4x+16}-16+20=(x-4)^2+4$$
$$=(x-4)^2-(2i)^2=(x-4-2i)(x-4+2i).$$

Значи, дадената равенка е еквивалентна на равенката $(x-4-2i)(x-4+2i)=0$ чии решенија се $x_1=4+2i$ и $x_2=4-2i$. ♦

Како што можеме да забележиме, во претходниот пример при разложувањето на левата страна на равенката на множители прво вршевме дополнување до полн квадрат, а потоа аналогно на постапката при решавањето на неполна равенка од видот $ax^2+c=0$ ги наоѓавме решенијата на дадените равенки. Ќе покажеме дека оваа постапка може да се искористи и за решавање на квадратна равенка од општ вид. Нека е дадена равенката

$$ax^2+bx+c=0,\quad a\neq 0. \tag{1}$$

Ја трансформираме нејзината лева страна на следниот начин:

$$ax^2+bx+c=a(x^2+\tfrac{b}{a}x+\tfrac{c}{a})=a[\underline{x^2+2\cdot\tfrac{b}{2a}x+(\tfrac{b}{2a})^2}-(\tfrac{b}{2a})^2+\tfrac{c}{a}]=a[(x+\tfrac{b}{2a})^2-\tfrac{b^2}{4a^2}+\tfrac{c}{a}]$$
$$=a[(x+\tfrac{b}{2a})^2-\tfrac{b^2-4ac}{4a^2}].$$

Според тоа, равенката (1) е еквивалентна на равенката $a[(x+\tfrac{b}{2a})^2-\tfrac{b^2-4ac}{4a^2}]=0$, т.е. на равенката $(x+\tfrac{b}{2a})^2=\tfrac{b^2-4ac}{4a^2}$ од каде што следува

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\,,$$

па затоа корените на равенката (1) се $x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ и $x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ и истите можеме да ги запишеме со помош на формулата:

$$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\,. \tag{2}$$

која ја нарекуваме *формула за корените на квадратната равенка* (1). Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема 3. Корените на полната квадратна равенка (1) се дадени со формулата (2).

Забелешка 2. Добиената формула за корените на квадратната равенка (1) може да се искористи и за наоѓање на корените на неполните квадратни равенки, т.е. и за оние квадратни равенки кај кои $b=0$ или $c=0$. Во ова можете да се уверите со непосредна проверка.

Во случај кога равенката (1) е дадена во нормален вид имаме $a=1, b=p$ и $c=q$, па затоа формулата (2) можеме да ја запишеме во обликот

$$x_{1/2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}=\frac{-p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2-4q}{4}}=\frac{-p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\,. \tag{3}$$

Пример 11. Реши ја квадратната равенка

а) $2x^2-5x-25=0$, **б)** $x^2-2x-28=0$, **в)** $x^2-6x+58=0$

Решение. а) Коефициентите на равенката се $a=2$, $b=-5$ и $c=-25$. Со замена во формулата (2) за корените на равенката добиваме

$$x_{1/2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 2\cdot(-25)}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm\sqrt{25+200}}{4}=\frac{5\pm 15}{4}\,.$$

Според тоа, решенија на равенката се $x_1=\frac{5-15}{4}=-\frac{5}{2}$ и $x_1=\frac{5+15}{4}=5$.

б) Имаме, $p=-2$ и $q=-28$ т.е.равенката е дадена во нормален вид, па затоа ја користиме формулата (3) и добиваме:

$$x_{1/2}=\frac{-(-2)}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2-(-28)}=1\pm\sqrt{1+28}=1\pm\sqrt{29}\,.$$

в) Имаме, $p=-6$ и $q=58$ па затоа т.е.равенката е дадена во нормален вид, па затоа ја користиме формулата (3) и добиваме:

$$x_{1/2}=\frac{-(-6)}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2-58}=3\pm\sqrt{9-58}=3\pm\sqrt{-49}=3\pm 7i\,.\ \blacklozenge$$

Во примерите 11 а) и б) корените на равенките се реални, а во пример 11 в) тие се коњугирано коплексни броеви. Логично е да се запрашаме од што зависи дали корените ќе бидат реални или коњугирано комплексни броеви. Ова прашање е особено важно кога решаваме параметарски равенки, па затоа на крајот од овој дел истото посебно ќе го разгледаме.

Дефиниција 2. Реалниот број

$$D=b^2-4ac \tag{4}$$

го нарекуваме *дискриминанта на квадратната равенка* (1).

Ако ја искористиме дискриминантата D, тогаш формулата (2) можеме да ја запишеме во обликот

$$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}\,. \tag{5}$$

Бидејќи D е реален број, можни се следните случаи: $D>0$, $D=0$ или $D<0$. Ќе ги разгледаме одделно овие случаи.

a) Ако $D>0$, тогаш $\sqrt{D}$ е позитивен реален број, па затоа квадратната равенка (1) има два реални и различни корени кои се дадени со (5).

b) Ако $D=0$, тогаш $\sqrt{D}=0$, па квадратната равенка (1) има двоен корен $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

c) Ако $D<0$, тогаш $-D>0$ е реален број и $\sqrt{D}=i\sqrt{-D}$, па затоа корените на равенката (1) се коњугирано комплексни броеви, т.е. $x_{1/2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$.

Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема 4. Корените на квадратната равенка

$$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$$

се:

- реални и различни ако $D>0$,
- реални и еднакви ако $D=0$ и
- коњугирано комплексни броеви ако $D<0$. ♦

Во следните примери ќе ја покажеме примената на оваа теорема при дискусијата на корените на параметарските равенки.

Пример 12. Без да ја решаваш квадратната равенка одреди ја природата на нејзините корени.

а) $3x^2 - 4x + 12 = 0$ и **б)** $2x^2 + 5x - 7 = 0$,

Решение. а) Имаме $D=(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 16 - 144 < 0$, што значи дека корените на равенката се коњугирано комплексни броеви.

б) Имаме $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7) = 25 + 56 > 0$, што значи дека корените на равенката се реални и различни.

Пример 13. За кои вредности на *m*, равенката

$$mx^2 + 2(m+1)x - 1 - m = 0,$$

има еден двоен корен? За секоја од тие вредности на *m*, да се најде двојниот корен на добиената равенка.

Решение. За да равенката има двоен корен треба нејзината дискриминанта да е еднаква на нула т.е. $(2(m+1))^2 - 4m(-1-m) = 0$ односно $4m^2 + 8m + 4 + 4m + 4m^2 = 0$. Ова е квадратна равенка $2m^2 + 3m + 1 = 0$ чии решенија се

$$m_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 1}{4}; m_1 = -\frac{1}{2}; \quad m_2 = -1.$$

За $m_1 = -\frac{1}{2}$, $x_{1,2} = 1$ додека за $m_2 = -1$, $x_{1,2} = 0$. ♦

Пример 14. Испитај ја, во зависност од параметарот k, природата на корените на квадратната равенка $x^2 + 2x - k + 2 = 0$.

Решение. Дискриминантата на квадратната равенка е

$$D = b^2 - 4ac = 4 - 4(-k+2) = 4k - 4.$$

Согласно теорема 4, ако $D = 0$, т.е. $4k - 4 = 0$ односно $k = 1$ равенката има двоен корен. Понатаму, ако $D > 0$ т.е. $4k - 4 > 0$ односно $k > 1$ равенката има реални и различни корени. Конечно, ако $D < 0$ т.е. $k < 1$ равенката има коњугирано комплексни корени. ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

13. Реши ги равенките:

а) $y^2 + 12y - 13 = 0$, **б)** $x^2 - 4x + 13 = 0$, **в)** $\frac{2x^2}{3} - 1\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{4} = 1\frac{1}{3}x - 3\frac{3}{4}$.

14. Реши ги равенките:

а) $(1+\sqrt{2})x^2 - 2(1-\sqrt{2})x - 3\sqrt{2} + 1 = 0$, **б)** $x^2 - (3+2\sqrt{5})x + 7 + 3\sqrt{5} = 0$,

в) $x^2 - (3-2\sqrt{2})x + 4 - 3\sqrt{2} = 0$.

15. Реши ги равенките:

а) $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0,\ a > 0$, **б)** $6x^2 + ax = a^2,\ a > 0$.

16. Без да ја решаваш квадратната равенка одреди ја природата на нејзините корени:

а) $x^2 - 4x + 12 = 0$, **б)** $x^2 + 7x + 10 = 0$, **в)** $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 - \sqrt{2} = 0$.

17. За кои вредности на *m*, равенката

а) $mx^2 + 2(m-1)x + 1 - m = 0$, **б)** $x^2 - 2(3m+1)x + 14m + 21 = 0$.

има двоен корен? За секоја од тие вредности на *m*, да се најде двојниот корен на добиената равенка.

18. За која вредност на параметарот k и двете квадратни равенки $x^2 + x + a = 0$ и $x^2 + x - a = 0$ ќе имаат по два реални корени?

19. Испитај ја, во зависност од параметарот m, природата на корените на квадратната равенка

а) $mx^2 - (2m+3)x + m + 2 = 0$, **б)** $3mx^2 + 8x + 5 = 0$, **в)** $x^2 - 2x + m - 3 = 0$.

20. За секоја од равенките

а) $x^2 + 5x + 7 = 0$, **б)** $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 - \sqrt{2} = 0$, **в)** $x^2 - 4x + 12 = 0$,

пресметај го збирот и производот на нејзините корени и добиените резултати спореди ги со нејзините коефициенти.

4. ВИЕТОВИ ФОРМУЛИ

Да ја разгледаме равенката $x^2 - 7x + 6 = 0$ чии решенија се $x_{1/2} = \frac{7\pm\sqrt{49-24}}{2} = \frac{7\pm5}{2}$ т.е. $x_1 = 1$ и $x_2 = 6$. Забележуваме дека $x_1 + x_2 = 1 + 6 = 7 = -(-7)$ и $x_1 x_2 = 1 \cdot 6 = 6$ т.е. збирот на корените на оваа равенка е еднаков коефициентот пред линеарниот член земен со знак "-", а производот на нејзините корени е еднаков на слободниот член. Логично е да се запрашаме дали вакви или слични релации важат за корените и коефициентите на секоја квадратна равенка или тоа важи само за некои квадратни равенки.

За да одговориме на претхоното прашање ќе ја рагледаме квадратната равенка

$$ax^2+bx+c=0, a\neq 0. \qquad (1)$$

Како што знаеме нејзините корени се:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ и } x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Според тоа,

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b)^2-\sqrt{b^2-4ac}^{\,2}}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

Покажавме дека, ако x_1 и x_2 се корени на квадратната равенка (1), тогаш важат равенствата

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \text{ и } x_1x_2=\frac{c}{a}, \qquad (2)$$

кои се познати како *Виетови формули* (според францускиот математичар Франсоа Виет, 1540-1603).

Ќе докажеме дека важи и обратното тврдење, т.е. ако за броеви x_1 и x_2 важат равенствата (2), тогаш тие се корени на равенката (1). Јасно x_1 и x_2 се корени на равенката

$$(x-x_1)(x-x_2)=0, \qquad (3)$$

која е еквивалентна на равенката $x^2-xx_1-xx_2+x_1x_2=0$ т.е. на равенката

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0.$$

Во последната од (2) равенка заменуваме $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ и $x_1x_2=\frac{c}{a}$ и добиваме дека x_1 и x_2 се корени на равенката $x^2-(-\frac{b}{a})x+\frac{c}{a}=0$, која е еквивалентна на равенката (1).

Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема 5. Броевите x_1 и x_2 се корени на равенката (1) ако и само ако важат равенствата (2). ♦

Забелешка 3. Ако квадратната равенка е дадена во нормален вид $x^2+px+q=0$, тогаш равенствата (2) имаат поедноставен облик, т.е.

$$x_1+x_2=-p \text{ и } x_1x_2=q. \qquad (4)$$

Пример 15. а) Виетовите формули за квадратната равенка $4x^2-7x+5=0$ се

$$x_1+x_2=-\frac{-7}{4}=\frac{7}{4} \text{ и } x_1x_2=\frac{5}{4}.$$

б) Виетовите формули за квадратната равенка $x^2-(1+\sqrt{2})x-2\sqrt{2}=0$ се

$$x_1+x_2=1+\sqrt{2} \text{ и } x_1x_2=-2\sqrt{2}\,. \ \blacklozenge$$

Забелешка 4. Ако се дадени корените на една квадратна равенка, тогаш истата можеме да ја составиме користејќи ја формулата (3). Меѓутоа, тоа можеме многу поедноставно да го направиме користејќи ги Виетовите формули, што може да се види од следниот пример.

Пример 16. Состави квадратна равенка чии корени се:

а) $x_1=-5,\ x_2=7$, **б)** $x_1=-\frac{5}{2},\ x_2=\frac{3}{4}$.

Решение. а) Ако ги искористиме формулите (3) добиваме

$$p=-(x_1+x_2)=-(-5+7)=-2 \text{ и } q=x_1x_2=-5\cdot 7=-35,$$

што значи дека бараната квадратна равенка е

$$x^2-2x-35=0.$$

б) Имаме, $p=-(x_1+x_2)=-(-\frac{5}{2}+\frac{3}{4})=\frac{7}{4}$ и $q=x_1x_2=-\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{4}=-\frac{15}{8}$, па затоа бараната равенка е $x^2+\frac{7}{4}x-\frac{15}{8}=0$, т.е. $8x^2+14x-15=0$. ♦

Во претходниот дел ги усвоивме Виетовите формули за квадратна равенка. Во следните неколку примери ќе ја разгледаме примената на овие формули.

Пример 17. За која вредност на m, равенката $x^2+mx+12=0$ има еден корен еднаков на 3? Потоа, најди го и другиот корен.

Решение. Бидејќи $x_1=3$ е корен равенката, со замена во истата добиваме $9+3m+12=0$, па затоа $m=-7$. Сега од Виетовите правила имаме $x_1+x_2=-m=7$ т.е. $x_2=4$. ♦

Пример 18. За која вредност на параметарот p корените x_1 и x_2 на равенката $x^2-4x+p-5=0$ го задоволуваат условот $x_1-x_2=0$? За таа вредност на p, да се најдат корените на равенката.

Решение. Од Виетовите правила имаме $x_1+x_2=4$ и $x_1x_2=p-5$. Од условот на задачата имаме $x_1=x_2$ па ако замениме во $x_1+x_2=4$ наоѓаме $x_1=x_2=2$. Конечно, со замена во $x_1x_2=p-5$ добиваме $p=9$. ♦

Пример 19. Да се најде параметарот a така што збирот на квадратите на корените на равенката $x^2-(a+1)x+2a=0$ е еднаков на 5.

Решение. Од Виетовите формули имаме $x_1+x_2=a+1, x_1x_2=2a$ па затоа

$$5=x_1^2+x_2^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(a+1)^2-4a=a^2-2a+1$$

т.е. ја добиваме равенката $a^2-2a-4=0$ чии решенија се

$$a_1=1+\sqrt{5},\quad a_2=1-\sqrt{5}\,. \ \blacklozenge$$

Пример 20. Во квадратната равенка $x^2-2(m+1)x+3m+2=0$ да се определи параметарот m така што збирот на корените на дадената равенка да е еднаков на збирот на нивните квадрати.

Решение. Од Виетовите правила имаме $x_1+x_2=2(m+1)$ и $x_1x_2=3m+2$. Понатаму, од условот на задачата имаме

$$2(m+1)=x_1+x_2=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4(m+1)^2-2(3m+2)$$

од каде после средувањето добиваме $2m^2-1=0$. Решенијата на последната равенка се $m_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $m_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. ♦

Пример 21. Нека x_1 и x_2 се корените на равенката $6x^2-5x+1=0$. Без да ја решаваш дадената равенка, состави квадратна равенка по y чии решенија се

$$y_1=\frac{x_1+1}{x_1-1},\quad y_2=\frac{x_2+1}{x_2-1}.$$

Решение. За дадената равенка од Виетовите формули имаме $x_1+x_2=\frac{5}{6}$ и $x_1x_2=\frac{1}{6}$. Нека бараната равенка по y е $y^2+py+q=0$. Тогаш, повторно од Виетовите формули имаме

$$-p=y_1+y_2=\frac{x_1+1}{x_1-1}+\frac{x_2+1}{x_2-1}=\frac{2x_1x_2-2}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}=\frac{2\cdot\frac{1}{6}-2}{\frac{1}{6}-\frac{5}{6}+1}=-5 \text{ т.е. } p=5$$

$$q=y_1y_2=\frac{x_1+1}{x_1-1}\cdot\frac{x_2+1}{x_2-1}=\frac{x_1x_2+(x_1+x_2)+1}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}=\frac{\frac{1}{6}+\frac{5}{6}+1}{\frac{1}{6}-\frac{5}{6}+1}=6.$$

Според тоа, бараната равенка по y е $y^2+5y+6=0$. ♦

ЗА ОНИЕ ШТО САКААТ ДА ЗНААТ ПОВЕЌЕ

а) Нека е дадена квадратната равенка $ax^2+bx+c=0, a,b,c\in\mathbf{R}, a\neq 0$ и нека комплексниот број z е нејзин корен. Ќе докажеме дека $\overline{z}$ е исто така корен на дадената равенка.

Навистина, бидејќи z е корен на равената имаме $az^2+bz+c=0$. Но тоа значи дека $\overline{az^2+bz+c}=0$ т.е. $\overline{a}\cdot\overline{z}^2+\overline{b}\cdot\overline{z}+\overline{c}=0$. Но, $a,b,c\in\mathbf{R}$ т.е. $\overline{a}=a, \overline{b}=b$ и $\overline{c}=c$, што значи дека последното равенство е еквивалентно на равенството $a\overline{z}^2+b\overline{z}+\overline{c}=0$, што значи дека и комплексниот број $\overline{z}$ е решение на равенката дадената равенка.

Пример 22. Состави квадратна равенка со реални коефициенти, ако еден нејзин корен е комплексниот број $z=2-3i$.

Решение. Од претходно изнесеното имаме дека другиот корен на бараната равенка е бројот $\overline{z}=2+3i$. Сега од Виетовите формули добиваме $p=-(z+\overline{z})=-4$ и $q=z\overline{z}=|z|^2=13$. Според тоа, бараната равенка е $x^2-4x+13=0$. ♦

б) Нека е дадена квадратната равенка $ax^2+bx+c=0, a,b,c\in\mathbf{Q}, a\neq 0$ и нека ирационалниот број $x_1=u+v\sqrt{r},\ u,v,r\in\mathbf{Q}, \sqrt{r}\notin\mathbf{Q}$ е корен на истата. Ќе докажеме дека бројот $x_2=u-v\sqrt{r}$ е вториот корен на дадената равенка.

Од x_1 е корен на дадената равенка следува

$$\begin{aligned}&ax_1^2+bx_1+c=0,\\&a(u+v\sqrt{r})^2+b(u+v\sqrt{r})+c=0,\\&au^2+av^2r+bu+c+(2auv+bv)\sqrt{r}=0.\end{aligned}$$

Од последното равенство следува $2auv+bv=0$ (зошто?) и како $v\neq 0$ добиваме $2au+b=0$ т.е. $-\frac{b}{a}=2u$. Понатаму, од Виетовите формули следува $x_2=-\frac{b}{a}-x_1=2u-(u-v\sqrt{r})=u+v\sqrt{r}$, што и требаше да се докаже.

Пример 23. Состави квадратна равенка со рационални коефициенти, ако еден нејзин корен е $x_1=1-\sqrt{2}$.

Решение. Од претходно изнесеното следува дека другиот корен на бараната равенка е $x_2=1+\sqrt{2}$. Сега од Виетовите формули добиваме $p=-(x_1+x_2)=-2$ и $q=x_1x_2=-1$. Според тоа, бараната равенка е $x^2-2x-1=0$. ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

21. Напиши ги Виетовите формули за равенките:

а) $4x^2+3ax+7a^2=0$, б) $x^2-(2k+1)x+2k+2=0$, в) $3x^2-(3a+2)x+a^2-4=0$.

22. Состави квадратна равенка чии корени се:

а) $x_1=3, x_2=\frac{1}{2}$, б) $x_1=k+1, x_2=2k-1$, в) $x_1=\frac{k}{2}, x_2=-1$.

23. Без да ја решаваш квадратната равенка $2x^2-5x+9=0$, пресметај ја вредноста на изразот $x_1^3+x_2^3$, каде x_1 и x_2 се корените на дадената равенка.

Упатство. Искористи го разложувањето $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)=\ldots$ и потоа примени ги Виетовите формули.

24. Ако x_1 и x_2 се корените на равенката $5x^2-3x-1=0$, пресметај ја вредноста на изразот $A=2x_1^3-3x_1^2x_2+2x_2^3-3x_2^2x_1$.

Упатство. Искористи дека $A=2x_1^3-3x_1^2x_2+2x_2^3-3x_2^2x_1=2(x_1^3+x_2^3)-3x_1x_2(x_1+x_2)=\ldots$ и потоа примени ги Виетовите формули.

25. За која вредност на параметарот m корените x_1 и x_2 на равенката $x^2-9x+m=0$ го задоволуваат условот $x_1-x_2=5$?

26. За која вредност на параметарот m корените x_1 и x_2 на равенката $x^2-6x+m=0$ го задоволуваат условот $x_1-x_2=10$?

27. За која вредност на параметарот a квадратната равенка $x^2-ax+a-1=0$ има решенија такви, што збирот на квадратите од реципрочните вредности на корените е еднаков на 5.

28. Да се најде параметарот k така што да важи $x_1^2+x_2^2=1$, каде x_1 и x_2 се корени на равенката $x^2+(k-1)x+k=0$.

29. Нека x_1 и x_2 се корените на равенката $3x^2+5x-6=0$. Без да ја решаваш дадената равенка, состави квадратна равенка по y чии решенија се $y_1=x_1+\frac{1}{x_2}$, $y_2=x_2+\frac{1}{x_1}$.

30. Состави квадратна равенка со реални коефициенти, ако еден нејзин корен е комплексниот број $z=-3-\sqrt{3}i$.

31. Состави квадратна равенка со рационални коефициенти, ако еден нејзин корен е $x_1=4-2\sqrt{2}$.

5. РАЗЛОЖУВАЊЕ НА КВАДРАТЕН ТРИНОМ НА ЛИНЕАРНИ МНОЖИТЕЛИ

Претходно ја изучивме квадратната равенка, т.е. ги усвоивме методот за нејзино решавање и Виетовите формули, а ја разгледавме и примената на квадратните равенки при решавање на неколку видови проблеми. Во овој дел ќе се осврнеме на квадратниот трином кој се дефинира како што следува.

Дефиниција 3. Нека $a,b,c\in\mathbf{R}$ и $a\neq 0$. Полиномот

$$P(x)\equiv ax^2+bx+c, \tag{1}$$

го нарекуваме *квадратен трином* по однос на променливата x. Бројот $D=b^2-4ac$ го нарекуваме *дискриминанта* на квадратниот трином, а корените на квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$ ги нарекуваме *нули* на квадратниот трином (1).

При изучувањето на квадратниот трином прво ќе се задржиме на неговото разложување на линеарни множители, кое е особено од полза при решавањето на голем број задачи поврзани со квадратниот трином. За таа цел прво ќе ја докажеме следната теорема.

Теорема 6. Нека x_1 и x_2 се реални нули на квадратниот трином (1). Ако $x_1,x_2\in\mathbf{R}$, тогаш постои разложување на квадратниот трином (1) на линеарни множители со реални коефициенти кое е дадено со

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Доказ. Нека x_1 и x_2 се нули на триномот (1). Од Виетовите формули следува $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ и $x_1x_2=\frac{c}{a}$, т.е.

$$b=-a(x_1+x_2) \text{ и } c=ax_1x_2. \tag{2}$$

Ако од (2) замениме во (1) последователно наоѓаме

$$ax^2+bx+c=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2=a[x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2]$$
$$=a[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)]=a(x-x_1)(x-x_2)$$

што и требаше да се докаже. ♦

Забелешка 5. Како што знаеме, нулите на квадратниот трином се реални ако и само неговата дискриминанта е ненегативна, т.е. $D\geq 0$. Може да се докаже дека за $D<0$, т.е. ако нулите на триномот (1) се коњугирано комплексни броеви, тогаш истиот не може да се разложи на линеарни множители со реални коефициенти.

Меѓутоа, ако сакаме квадратниот трином да го разложиме на линеарни множители со комплексни коефициенти, тогаш бараното разложување секогаш постои. Доказот на ова тврдење е аналоген на доказот на теорема 6.

Од претходната теорема непосредно следува дека ако $x_1=x_2\in\mathbf{R}$, тогаш разложувањето на квадратниот трином (1) е дадено со $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$.

Пример 24. Разложи го на линеарни множители се реални коефициенти квадратниот трином:

а) $P(x)=2x^2-9x-5$, **б)** $P(x)=3x^2-2x-5$, **в)** $P(x)=2x^2-2x+5$.

Решение. а) Нулите на триномот се дадени со $x_{1/2}=\frac{9\pm\sqrt{81+40}}{4}=\frac{9\pm 11}{4}$ т.е. тие се $x_1=-\frac{1}{2}$ и $x_2=5$. Сега од теорема 6 следува дека бараното разложување е

$$P(x)=2x^2-9x-5=2(x+\tfrac{1}{2})(x-5)=(2x+1)(x-5).$$

б) Нулите на триномот се дадени со $x_{1/2}=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{6}=\frac{2\pm 8}{6}$ т.е. тие се $x_1=-1$ и $x_2=\frac{5}{3}$. Сега од теорема 6 следува дека бараното разложување е

$$P(x)=3x^2-2x-5=3(x-\tfrac{5}{3})(x+1)=(3x-5)(x+1).$$

в) Нулите на триномот се дадени со $x_{1/2}=\frac{2\pm\sqrt{4-40}}{4}=\frac{2\pm 6i}{4}$ т.е. тие се $x_1=\frac{1-3i}{2}$ и $x_2=\frac{1+3i}{2}$. Сега од забелешка 5 следува дека бараното разложување не постои. Меѓутоа, овој трином може да се разложи на линеарни множители со комплексни коефициенти и притоа имаме

$$P(x)=2x^2-2x+5=2(x-\tfrac{1-3i}{2})(x-\tfrac{1+3i}{2}).\ \blacklozenge$$

Во следниот пример ќе дадеме една примена на разложувањето на квадратниот трином на линеарни множители со реални коефициенти.

Пример 25. Скрати ја дропката, ако тоа е можно:

а) $\frac{x^2+x}{3x^2-2x-5}$, **б)** $\frac{x^2-4}{3x^2+4x-4}$, **в)** $\frac{2x^2+7x-4}{x^2-9}$.

Решение. а) Според пример 29 б) за именителот на дропката имаме

$$3x^2-2x-5=3(x-\tfrac{5}{3})(x+1)\ .$$

Од друга страна за броителот на дропката добиваме $x^2+x=x(x+1)$, па затоа

$$\frac{x^2+x}{3x^2-2x-5}=\frac{x(x+1)}{3(x-\frac{5}{3})(x+1)}=\frac{x}{3(x-\frac{5}{3})}=\frac{x}{3x-5}\,.$$

Јасно, дропката е дефинирана за секој реален број различен од нулите на именителот, т.е. за $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,\frac{5}{3}\}$.

б) Аналогно како во задачата под а) добиваме $3x^2+4x-4=3(x-\frac{2}{3})(x+2)$ и $x^2-4=(x-2)(x+2)$, па затоа

$$\frac{x^2-4}{3x^2+4x-4}=\frac{(x-2)(x+2)}{3(x-\frac{2}{3})(x+2)}=\frac{x-2}{3(x-\frac{2}{3})}=\frac{x-2}{3x-2}\,.$$

Дропката е дефинирана за $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,\frac{2}{3}\}$.

в) За именителот на дропката имаме $x^2-9=(x-3)(x+3)$. Понатаму, нулите на броителот на дропката се $x_1=-4$ и $x_2=\frac{1}{2}$, па затоа неговото разложување на линеарни фактори со реални коефициенти е $2x^2+7x-4=2(x-\frac{1}{2})(x+4)$. Очигледно броителот и именителот немаат заеднички линеарен фактор, па затоа во овој случај скратување не е можно. Дропката е дефинирана за $x\in\mathbf{R}\setminus\{-3,3\}$. ♦

Сега ќе се осврнеме на прашањето за знакот на квадратниот трином (1). За таа цел истиот го запишуваме во обликот

$$P(x)=ax^2+bx+c=a[(x+\tfrac{b}{a})^2-\tfrac{b^2-4ac}{4a^2}]=a[(x+\tfrac{b}{a})^2-\tfrac{D}{4a^2}].\qquad(3)$$

Ќе покажеме како со помош на знакот на дискриминантата D и коефициентот пред квадратниот член може да се определи знакот на квадратниот трином. За таа цел ќе ги разгледаме следните случаи.

1) Ако $D<0$, т.е. нулите на триномот се коњугирано комплексни броеви, тогаш $-\frac{D}{4a^2}>0$, па затоа и $(x+\frac{b}{a})^2-\frac{D}{4a^2}>0$. Според тоа, за секој $x\in\mathbf{R}$ знакот на квадратниот трином се совпаѓа со знакот на коефициентот пред квадратниот член, те.
   - а) ако $D<0$ и $a>0$, тогаш $P(x)>0$, за секој $x\in\mathbf{R}$ и
   - б) ако $D<0$ и $a<0$, тогаш $P(x)<0$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

2) Ако $D=0$, т.е. нулите на триномот $x_{1/2}$ се реални и еднакви, тогаш $-\frac{D}{4a^2}=0$, па затоа и $(x+\frac{b}{a})^2-\frac{D}{4a^2}\geq 0$. Според тоа, за секој $x\in\mathbf{R}\setminus\{x_1\}$ знакот на квадратниот трином се совпаѓа со знакот на коефициентот пред квадратниот член, те.
   - а) ако $D=0$ и $a>0$, тогаш $P(x)>0$, за секој $x\in\mathbf{R}\setminus\{x_1\}$ и

  б) ако $D=0$ и $a<0$, тогаш $P(x)<0$, за секој $x\in\mathbf{R}\setminus\{x_1\}$.

3) Ако $D>0$, т.е. триномот има две реални и различни нули x_1 и x_2, тогаш според теорема 6 триномот може да се разложи на линеарни множители со реални коефициенти, кое раложување е дадено со

$$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x_1<x_2$. Тогаш нулите на триномот го разбиваат множеството реални броеви на три дисјунктни интервали: $(-\infty,x_1),[x_1,x_2]$ и $(x_2,+\infty)$. Ќе го определиме знакот на триномот на секој од овие интервали.

  а) Ако $x\in(-\infty,x_1)$, тогаш $x-x_1<0$ и $x-x_2<0$, па затоа $(x-x_1)(x-x_2)>0$, што значи дека знакот на квадратниот трином се совпаѓа со знакот на коефициентот пред квадратниот член, т. е.

    i) $a>0$, тогаш $P(x)>0$, за секој $x\in(-\infty,x_1)$ и

    ii) $a<0$, тогаш $P(x)<0$, за секој $x\in(-\infty,x_1)$.

  б) Ако $x\in[x_1,x_2]$, тогаш $x-x_1\geq 0$ и $x-x_2\leq 0$, па затоа $(x-x_1)(x-x_2)\leq 0$, (знак на равенство важи само на краевите на интервалот), што значи дека знакот на квадратниот трином е спротивен на знакот на коефициентот пред квадратниот член, т. е.

    i) $a>0$, тогаш $P(x)\leq 0$, за секој $x\in[x_1,x_2]$ и

    ii) $a<0$, тогаш $P(x)\geq 0$, за секој $x\in[x_1,x_2]$.

  в) Ако $x\in(x_2,+\infty)$, тогаш $x-x_1>0$ и $x-x_2>0$, па затоа $(x-x_1)(x-x_2)>0$, што значи дека знакот на квадратниот трином се совпаѓа со знакот на коефициентот пред квадратниот член, т. е.

    i) $a>0$, тогаш $P(x)>0$, за секој $x\in(x_2,+\infty)$ и

    ii) $a<0$, тогаш $P(x)<0$, за секој $x\in(x_2,+\infty)$.

Пример 26. Определи го знакот на триномот:

а) $P(x)=3x^2-4x+4$, **б)** $P(x)=-2x^2+5x-2$ и **в)** $p(x)=9x^2+12x+4$.

Решение. а) Бидејќи $D=(-4)^2-4\cdot3\cdot4=16-48=-32<0$ и $a=3>0$, од 1 а) следува дека $P(x)>0$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

б) Од $D=5^2-4(-2)(-2)=9>0$ следува дека триномот има две реални нули и тоа се $x_1=\frac{1}{2}$ и $x_2=2$. Понатаму, бидејќи $a=-2<0$ од 3) следува дека: $P(x)<0$ на интервалот $(-\infty,\frac{1}{2})$, $P(x)\geq 0$ на интервалот $[\frac{1}{2},2]$ и $P(x)<0$ на интервалот $(2,+\infty)$.

в) Бидејќи $D=12^2-4\cdot9\cdot4=144-144=0$ и $a=9>0$ од 2 а) следува дека тогаш $P(x)>0$, за секој $x\in\mathbf{R}$. ♦

Забелешка 6. Може да се докаже дека:

а) ако квадратниот трином (1) е позитивен за секој $x\in\mathbf{R}$, тогаш $D<0$ и $a>0$,

б) ако квадратниот трином (1) е негативен за секој $x\in\mathbf{R}$, тогаш $D<0$ и $a<0$.

Пример 27. Определи го параметарот m така што квадратниот трином

$$P(x) = (m-2)x^2 - (m+1)x + 4$$

да биде негативен за секој $x \in \mathbf{R}$.

Решение. Според забелешка 6 ако квадратниот трином (1) е негативен за секој $x \in \mathbf{R}$, тогаш $D < 0$ и $a < 0$, што значи $m-2<0$ и $(m+1)^2 - 16(m-2) < 0$, т.е.

$$m < 2 \text{ и } m^2 - 14m + 33 < 0.$$

За квадратниот трином $P(m) = m^2 - 14m + 33$ имаме $D = 196 - 132 = 64$ што значи дека тој има реални нули $m_1 = 3$ и $m_2 = 11$ и ако неговиот коефициент пред квадратниот член е $a = 1 > 0$ според 3) б) *i*) добиваме дека $P(m) \le 0$ ако $m \in [3,11]$, т.е. $3 \le m \le 11$.

Значи, треба $m < 2$ и $3 \le m \le 11$, што не е можно. Според тоа, не постои реален број m така што квадратниот трином $P(x) = (m-2)x^2 - (m+1)x + 4$ да биде негативен за секој $x \in \mathbf{R}$. ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

32. Разложи ги на линеарни множители со реални коефициенти квадратните триноми:
    а) $x^2 - 10x + 24$, б) $6x^2 + x - 15$, в) $3x^3 + 10x^2 + 3x$ и г) $3x^4 - 7x^3 - 4x^2$.
33. Дали можат да се разложат на линеарни множители со реални коефициенти триномите:
    а) $3x^2 + 5x + 3$, б) $2x^2 - 7x + 7$, в) $5x^2 - 5x + \sqrt{2}$ и г) $-2x^2 + 3\sqrt{2}x - 2\sqrt{3}$.
34. Скрати ја дропката:
    а) $\frac{4x^2-19x+12}{12x^2-x-6}$, б) $\frac{a^2+6a+8}{a^3+5a^2+4a}$, в) $\frac{x^2-4ax+3a^2}{x^2-(a+b)x+ab}$, г) $\frac{15x^2+ax-2a^2}{6x^2+ax+a^2}$.
35. Определи го знакот на квадратниот трином:
    а) $6x^2 + 7x - 3$, б) $4x^2 - 2x + 3$, в) $2x^2 - 7x + 7$ и г) $-2x^2 + 3\sqrt{2}x - 2\sqrt{3}$.
36. За кои вредности на параметрите k и p квадратниот трином $kx^2 + px - 3$ прима позитивни вредности само во интервалот $(1,3)$?
37. Одреди ја дефиниционата област на изразот
    а) $\frac{2x+1}{x^2-4}$, б) $\frac{a+8}{a^3+5a^2+4a}$, в) $\frac{12x^3+1}{12x^2-x-6}$ и г) $\frac{x+8}{x^2+x-2}$.

6. ДРОБНО РАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ КОИ СЕ СВЕДУВААТ НА КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

Досега ги проучивме линеарните и квадратните равенки, нивното решавање и својства, како и некои својства на квадратниот трином. Меѓутоа, во практиката решавањето на голем број се сведува на равенки кои не се квадратни. Токму затоа, овде ќе ги разгледаме дробно рационалните равенки кои се сведуваат на квадратни равенки.

За таа цел напрво ќе го воведеме поимитте за рационална дрпка и дробно рационална равенка.

Дефиниција 4. *Рационална дропка* е изразот $\frac{P(x)}{Q(x)}$ каде $P(x)$ и $Q(x)$ се полиноми со реални коефициенти и $Q(x)$ е ненулти полином. Ако $Q(x) \neq c,\ c \in \mathbf{R}$, ќе велиме дека $\frac{P(x)}{Q(x)}$ е *вистинска рационална дропка.*

Пример 28. Изразите $\frac{2x^2+5x-4}{7}$, $\frac{3}{x+5}$, $\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2+x-1}$ $\frac{\frac{1}{3}x^2-2x+7}{4}$, $\frac{x-2}{x^2+x-1}$ и $\frac{a^7+1}{a^5+4a-5}$ се рационални дропки. Меѓу овие нив само дропките $\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2+x-1}$, $\frac{x-2}{x^2+x-1}$, $\frac{a^7+1}{a^5+4a-5}$ се вистински. ♦

Дефиниција 5. Равенката од видот $f(x)=0$, каде изразот $f(x)$ содржи само рационални дропки поврзани со операциите собирање, множење, одземање и делење на, од кои барем една дропка е вистинска ја нарекуваме *дробно рационална равенка.*

Пример 29. Равенките

а) $\frac{4-x}{x}+\frac{2x}{x-4}-1=0$, **б)** $\frac{x}{x-2}+\frac{5}{x+2}-\frac{8}{x^2-4}+12=0$ и **в)** $\frac{x-2}{x^2+x-1}-\frac{x^2-4}{x^2-x-1}=0$

се дробно рационални равенки. ♦

Како што можеме да забележиме во равенката $\frac{4-x}{x}+\frac{2x}{x-4}-1=0$ се јавува рационалната дропка $\frac{2x}{x-4}$. Бидејќи делењето со 0 не е можно, заклучуваме дека оваа рационална дропка е определена за секој реален број x, освен за бројот $x=4$ што значи дека нејзината дефинициона област е $D_1=\mathbf{R}\setminus\{4\}$. Аналогно заклучуваме дека дефиниционата област на рационалната дропка $\frac{4-x}{x}$ е $D_2=\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Јасно, равенката е дефинирана ако сите изрази на нејзината лева страна се дефинирани, па оттука следува дека нејзината дефинициона област е пресек на D_1 и D_2, т.е $D=D_1\cap D_2=\mathbf{R}\setminus\{0,4\}$.

Слично, дефиниционата област на равенката од пример 29 б) се наоѓа од условите $x-2\neq 0$, $x+2\neq 0$ и $x^2-4\neq 0$ (зошто?). Според тоа, дефиниционата област на оваа равенка е $D=\mathbf{R}\setminus\{-2,2\}$. Определи ја дефиниционата област на реванката од пример 29 в).

При решавањето на дробно рационалните равенки најчесто постапуваме според следниот редослед:

- ги раложуваме именителите на рационалните дропки на множители,
- ја определуваме дефиниционата област на равенката,
- равенката ја множиме со НЗС на рационалните дропки, со што се ослободуваме од дропките,
- ја решаваме добиената равенка и
- проверуваме кои од добиените решенија на последната равенка припаѓаат на дефиниционата област на почетната равенка и тие се решенија на почетната равенка.

Ќе разгледаме неколку примери.

Пример 30. Во множеството комплексни броеви реши ја равенката:

а) $\frac{x-4}{x+4}+\frac{x+4}{x-4}=3\frac{1}{3}$ **б)** $\frac{5-x}{x+5}+\frac{5+x}{5-x}=\frac{100}{25-x^2}$, **в)** $\frac{2x-1}{x^2+2x-3}-\frac{3x+1}{x^2-6x+5}=\frac{x-20}{x^2-2x-15}$.

Решение. а) Дадената равенка е еквивалентна на равенката $\frac{x-4}{x+4}+\frac{x+4}{x-4}=\frac{10}{3}$. За дефиниционата област на равенката имаме $x+4\neq 0$ и $x-4\neq 0$, т.е. $x\neq -4$ и $x\neq 4$, па затоа $D=\mathbf{R}\setminus\{-4,4\}$. НЗС на рационалните дропки во равенката е еднаков на $3(x-4)(x+4)$ и ако извршиме множење ја добиваме равенката $3(x-4)^2+3(x+4)^2=10(x-4)(x+4)$, која е еквивалентна на квадратната равенка

$$x^2=64.$$

Јасно, последната равенка во дефиниционата област $D=\mathbf{R}\setminus\{-4,4\}$ е еквивалентна на почетната равенка. Според тоа, решавањето на почетната равенка го сведовме на решавање на равенката

$$x^2=64, \qquad x\in D=\mathbf{R}\setminus\{-4,4\}.$$

Корените на равенката $x^2=64$ се $x_1=-8$ и $x_2=8$ и бидејќи тие припаѓаат на областа $D=\mathbf{R}\setminus\{-4,4\}$ заклучуваме дека тие се корени и на почетната равенка.

б) Дадената равенка е еквивалентна на равенката $\frac{5-x}{x+5}+\frac{5+x}{5-x}=\frac{100}{(5-x)(5+x)}$. За дефиниционата област на равенката наоѓаме $x+5\neq 0$, $5-x\neq 0$ и $(5-x)(5+x)\neq 0$, од што следува дека $x\neq -5$ и $x\neq 5$, па затоа $D=\mathbf{R}\setminus\{-5,5\}$. НЗС на рационалните дропки во равенката е еднаков на $(x-5)(x+5)$ и ако извршиме множење ја добиваме равенката

$$(5-x)^2+(5+x)^2=100,$$

која е еквивалентна на равенката

$$x^2=25.$$

Јасно, последната равенка во дефиниционата област $D=\mathbf{R}\setminus\{-5,5\}$ е еквивалентна на почетната равенка. Според тоа, решавањето на почетната равенка го сведовме на решавање на равенката

$$x^2=25, \qquad x\in D=\mathbf{R}\setminus\{-5,5\}.$$

Корените на равенката $x^2=25$ се $x_1=-5$ и $x_2=5$ и бидејќи тие не припаѓаат на областа $D=\mathbf{R}\setminus\{-5,5\}$ заклучуваме дека почетната равенка нема решение.

в) Прво ги раложуваме именителите на рационалните дропки на линеарни множители со реални коефициенти. Имаме,

$$x^2+3x-3=(x-1)(x+3),\ x^2-6x+5=(x-1)(x-5) \text{ и } x^2-2x-15=(x-5)(x+3).$$

Според тоа, дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+3)}-\frac{3x+1}{(x-1)(x-5)}=\frac{x-20}{(x-5)(x+3)}.$$

Дефиниционата област на равенката е $D=\mathbf{R}\setminus\{-3,1,5\}$ (зошто?). НЗС на рационалните дропки во равенката е еднаков на $(x-1)(x+3)(x+5)$ и ако извршиме множење ја добиваме равенката $(2x-1)(x-5)-(3x+1)(x+3)=(x-20)(x-1)$ која е еквивалентна на равенката $x^2+9=0$ чии решенија се $x_{1/2}=\pm 3i$ и тие се решенија на почетната равенка (зошто?). ♦

Пример 31. Во множеството комплексни броеви реши ја равенката:

а) $3x^2-7x-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}=0$ и **б)** $\frac{21}{x^2-4x+10}-(x^2-4x+6)=0$.

Решение. а) Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$3(x^2+2+\frac{1}{x^2})-6-7(x+\frac{1}{x})=0$$

т.е. на равенката

$$3(x+\frac{1}{x})^2-6-7(x+\frac{1}{x})=0,$$

чија дефинициона област е $D=\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Воведуваме замена на непозната $x+\frac{1}{x}=t$ и ја добиваме равенката $3t^2-7t-6=0$ чии решенија се $t_1=3$ и $t_2=-\frac{2}{3}$. За $t_1=3$ ја добиваме равенката $x+\frac{1}{x}=3$ чии решенија се $x_{1/2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, а за $t_2=-\frac{2}{3}$ ја добиваме равенката $x+\frac{1}{x}=-\frac{2}{3}$ чии решенија се $x_{3/4}=\frac{-1\pm 2\sqrt{2}i}{2}$.

Конечно, решенијата на почетната равенка се $x_{1/2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ и $x_{3/4}=\frac{-1\pm 2\sqrt{2}i}{2}$ (зошто?).

б) Дефиниционата област на равенката е $D=\mathbf{C}\setminus\{2-i\sqrt{2},2+i\sqrt{2}\}$. Воведуваме замена на непознатата $x^2-4x=t$ и ја добиваме равенката $\frac{21}{t+10}-(t+6)=0$ чија дефинициона област е $D=\mathbf{R}\setminus\{-10\}$. Последната равенка ја множиме со $t+10$ и ја добиваме равенката $t^2+16t+39=0$ чии решенија се $t_1=-3$ и $t_2=-13$ кои припаѓаат на дефиниционата област на равенката $\frac{21}{t+10}-(t+6)=0$.

Сега се враќаме на старата непозната x. За $t_1=-3$ ја добиваме равенката

$$x^2-4x+3=0$$

чии решенија се $x_1=1$ и $x_2=3$, а за $t_2=-13$ ја добиваме равенката

$$x^2-4x+13=0$$

чии решенија се $x_{3/4}=2\pm 3i$. Јасно, најдените решенија $x_1=1$, $x_2=3$ и $x_{3/4}=2\pm 3i$ се решенија и на почетната равенка (зошто?). ♦

При решавањето на дробно линеарните равенки особено треба да се внимава ако истите содржат параметар. Во следниот пример ќе покажеме како се решава една едноставна дробно линеарна параметарска равенка.

Пример 32. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\frac{a}{x-b}+\frac{b}{x-a}=2\,,\ a,b\in\mathbf{R}\,.$$

Решение. Ќе разгледаме четири мижности за параметрите a и b.

1) Јасно, за $a=b=0$ равенката нема решение (зошто?).

2) Ако $a=0, b\neq 0$, тогаш равенката е линеарна и нејзино решение е $x=\frac{b}{2}$ (провери!).

3) Аналогно, за $b=0, a\neq 0$ решение е $x=\frac{a}{2}$.

4) Нека сега $b\neq 0, a\neq 0$. Тогаш, дефиниционата област на дадената равенка е $D=\mathbf{R}\setminus\{a,b\}$. Ако равенката ја помножиме со $(x-a)(x-b)$ ја добиваме равенката

$$2x^2-3(a+b)+(a+b)^2=0\,,$$

чии решенија се $x_1=\frac{a+b}{2}$ и $x_2=a+b$. За да $x_1=\frac{a+b}{2}$ е решение на почетната равенка потребно и доволно е да $x_1\neq a$ и $x_1\neq b$, од што следува дека $\frac{a+b}{2}\neq a$ и $\frac{a+b}{2}\neq b$, односно $b\neq a$. За да $x_2=a+b$ е решение на почетната равенка потребно и доволно е да $x_2\neq a$ и $x_2\neq b$, од што следува дека $a+b\neq a$ и $a+b\neq b$, односно $b\neq 0$ и $a\neq 0$. ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

38. Одреди ја дефиниционата област на равенката:

а) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=0$ и б) $\frac{4}{x^2-2x}+\frac{x+8}{x^2+x}-\frac{4x-1}{x^2-x-2}=0$

38. Во множеството реални броеви реши ја равенката :

а) $\frac{x}{x-2}+\frac{5}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$, б) $\frac{x-2}{x+1}-\frac{2}{x-1}=\frac{6}{x^2-1}$ и в) $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{13}{6}$.

39. Во множеството комплексни броеви реши ги равенките:

а) $2x^2+3x+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=16$, б) $-2x^2+7x+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}=9$ и в) $6(x-\frac{1}{x})^2-25(x-\frac{1}{x})+24=0$.

40. Реши ги равенките:

а) $\frac{x^2+x-2}{x}+\frac{x}{x^2+x-2}=3$, б) $\frac{x^2+3x}{x}-\frac{8x}{x^2+3x}=2$ и в) $\frac{x^2+5x}{x+1}+\frac{x+1}{x^2+5x}=\frac{37}{6}$.

Упатство. а) Воведи смена на непознатата $\frac{x^2+x-2}{x}=t$. **б)** Воведи смена на непознатата $\frac{x^2+3x}{x}=y$. **в)** Воведи смена $\frac{x^2+5x}{x+1}=t$.

41. Реши ги равенките:

а) $x^2+4x-\frac{1}{x^2+4x+4}=\frac{44}{9}$, б) $\frac{6}{x^2+3x+2}+\frac{8}{x^2+3x-4}=1$ и в) $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=1$.

Упатство. а) Воведи смена $x^2+4x=t$. **б)** Воведи смена $x^2+3x=t$. **в)** Воведи смена $x^2+2x=t$.

42. Докажи дека корените на равенката $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=m^2$ се реални за кои било $a,b,m\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$ или $b\neq 0$ или $m\neq 0$.

43. Реши ги равенките:

а) $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, б) $\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=\frac{(a+b)^2}{ab}$ и в) $\frac{x-a}{x-b}-\frac{x-b}{x-a}+\frac{4ab}{a^2-b^2}=0$.

7. БИКВАДРАТНИ РАВЕНКИ

При разгледувањето на дробно линеарните равенки видовме дека некои равенки од повисок степен може да се решат така што со погодна смена ги сведуваме на квадратни равенки. Во овој дел ќе ги проучиме биквадратните равенки, кои со едноставна смена ги сведуваме на квадратни. Прво да разгледаме еден пример.

Пример 33. Реши ја равенката $x^4-5x^2+6=0$.

Решение. Со смената $x^2=t$, при која $x^4=t^2$ дадената равенка се сведува на квадратната равенка

$$t^2-5t+6=0,$$

чии решениеја се $t_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}$ т.е. $t_1=2$ и $t_2=3$. Сега, од смената $x^2=t$ за $t_1=2$ ја добиваме квадратната равенка $x^2=2$ чии решенија се $x_{1/2}=\pm\sqrt{2}$, а за $t_2=3$ ја добиваме квадратната равенка $x^2=3$ чии решенија се $x_{3/4}=\pm\sqrt{3}$. Според тоа, равенката од четврти степен

$$x^4-5x^2+6=0$$

има четири решенија $x_{1/2}=\pm\sqrt{2}$ и $x_{3/4}=\pm\sqrt{3}$. ♦

Дефиниција 6. Равенката од видот

$$ax^4+bx^2+c=0 \tag{1}$$

каде $a,b,c\in\mathbf{R}$ и $a\neq 0$ ја нарекуваме *биквадратна равенка.*

Како што можеме да забележиме биквадратната равенка (1) е од четврти степени истата со смената $x^2=t$ ја сведуваме на квадратната равенка

$$at^2+bt+c=0. \tag{2}$$

Равенката (2) ја решаваме на вообичаениот начин и нека нејзините корени се t_1 и t_2. Потоа имајќи ја предвид смената $x^2=t$ ја добиваме вкупноста од две квадратни равенки

$$x^2=t_1 \text{ и } x^2=t_2, \tag{3}$$

чии решенија

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{t_1} \text{ и } x_{3/4} = \pm\sqrt{t_2}\,, \tag{4}$$

соодветно, всушност се решенијата на биквадратната равенка (1). Согласно претходно изученото, вкупноста равенки знаеме да ја решиме ако t_1 и t_2 се реални броеви, што значи ако дискриминантата $D = b^2 - 4ac$ на равенката (2) е ненегативна. Во случај кога $D < 0$ решенијата t_1 и t_2 на (2) се коњугирано комплексни броеви, па за да ја решиме вкупноста равенки (3) треба да знаеме да наоѓаме квадратен корен од комплексен број и на ова прашање ќе се навратиме при изучувањето на системите квадратни равенки.

За решенијата на равенката во пример 33 забележуваме дека

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 0 \text{ и } x_1x_2x_3x_4 = (-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{3})\cdot\sqrt{3} = 6$$

и притоа $6 = \frac{6}{1} = \frac{c}{a}$. Логично е да се запрашаме дали овие релации важат за секоја биквадратна равенка. Ќе покажеме дека претходните релации важат за решенијата на секоја биквадратна равенка, т.е. дека е точна следната теорема.

Теорема 7. За корените x_1, x_2, x_3 и x_4 на биквадратната равенка (1) точни се следните формули

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \tag{5}$$

и

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{c}{a}. \tag{6}$$

Доказ. Ако x_1, x_2, x_3 и x_4 се корените на биквадратната равенка (1), тогаш $x_{1/2} = \pm\sqrt{t_1}$ и $x_{3/4} = \pm\sqrt{t_2}$, каде t_1 и t_2 се корените на квадратната равенка (2). Според тоа, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \sqrt{t_1} - \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} - \sqrt{t_2} = 0$ т.е. точна е формулата (5). Понатаму, имаме $x_1x_2x_3x_4 = t_1t_2$ и како, согласно Виетовите формули применети на равенката (2) важи $t_1t_2 = \frac{c}{a}$ добиваме $x_1x_2x_3x_4 = \frac{c}{a}$, што и требаше да се докаже. ♦

Како што знаеме, за решавање на квадратна равенка имаме готова формула. Логично е да се запрашаме дали и за биквадратна равенка можеме да изведеме готова формула, наместо постојано да ја повторуваме постапката со смена на непознатата. Одговорот на прашањето е позитивен и за да ја изведеме формулата да ги разгледаме решенијата t_1 и t_2 на равенката (2) кои се дадени со $t_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ и $t_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Сега, од формулите (4) добиваме дека решенијата на вкупноста равенки (3), а со тоа и на биквадратната равенка (1), се дадени со

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \text{ и } x_{3/4} = \pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\,. \tag{7}$$

Пример 34. Реши ја биквадратната равенка $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Решение. Имаме, $a = 1, b = -13$ и $c = 36$. Ако ги искористиме формулите (7) за решенијата на биквадратната равенка добиваме

$$x_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{13-\sqrt{169-144}}{2}}=\pm 2 \text{ и } x_{3/4}=\pm\sqrt{\frac{13+\sqrt{169-144}}{2}}=\pm 3.\ ♦$$

При изучувањето на квадратниот трином посебно внимание посветивме на неговото разложување на линеарни множители. Користејќи го претходно наученото овде ќе се осврнеме на разложување на множители на биквадратниот трином.

$$P(x)=ax^4+bx^2+c=0, \tag{8}$$

кој со смената $x^2=t$ го сведуваме на квадратниот трином $Q(t)=at^2+bt+c$. Ако t_1 и t_2 се решенија на равенката (2), тогаш квадратниот трином го разложуваме на линеарни множители $Q(t)=a(t-t_1)(t-t_2)$, па затоа

$$Q(t)=a(t-t_1)(t-t_2)=a(\sqrt{t}-\sqrt{t_1})(\sqrt{t}+\sqrt{t_1})(\sqrt{t}-\sqrt{t_2})(\sqrt{t}-\sqrt{t_2})$$

Понатаму, ако се има предвид дека $x^2=t$, $x_{1/2}=\pm\sqrt{t_1}$ и $x_{1/2/3/4}$ се корените на биквадратната равенка (1) од последното равенство

$$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4), \tag{9}$$

и тоа е бараното разложување на биквадратниот трином на линеарни множители.

Забелешка 7. Јасно, ако корените на биквадратната равенка се реални, тогаш биквадратниот трином се разложува на линеарни множители со реални коефициенти, но ако меѓу корените има комплексни броеви, тогаш ваквото разложување не е можно. Ќе разгледаме еден пример.

Пример 35. Разложи го биквадратниот трином на множители:

а) $P(x)=x^4-13x^2+36$, **б)** $P(x)=x^4-5x^2+6$ и **в)** $P(x)=4x^4+35x^2-9$.

Решение. а) Според пример 34 корените на соодветната биквадратна равенка се $x_{1/2}=\pm 2$ и $x_{3/4}=\pm 3$. Согласно (9) бараното разложување е

$$P(x)=(x-2)(x+2)(x-3)(x+3).$$

б) Според пример 33 корените на соодветната биквадратна равенка се $x_{1/2}=\pm\sqrt{2}$ и $x_{3/4}=\pm\sqrt{3}$. Согласно (9) бараното разложување е

$$P(x)=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}).$$

в) За дадената равенка имаме $a=4, b=35$ и $c=-9$. Ако ги искористиме формулите (7) за решенијата на биквадратната равенка добиваме

$$x_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{-35-\sqrt{1225+144}}{8}}=\pm\sqrt{\frac{-35-37}{8}}=\pm 3i \text{ и } x_{3/4}=\pm\sqrt{\frac{-35+\sqrt{1225+144}}{8}}=\pm\sqrt{\frac{-35+37}{8}}=\pm\frac{1}{2}.$$

Согласно (9) бараното разложување е

$$P(x)=4(x-3i)(x+3i)(x-\tfrac{1}{2})(x+\tfrac{1}{2})=(x-3i)(x+3i)(x-1)(x+1).$$

Како што можеме да зебележиме во овој случај имаме разложување на линеарни фактори со комплексни коефициенти. Ако сакаме во разложувањето да имаме само фактори со реални коефициенти, тогаш ги множиме факторите кои при разложувањето се добиваат со помош на коњугираните комплексни корени на биквадратната равенка. За разгледуваниот биквадратен трином разложувањето е

$$P(x)=(x^2-(3i)^2)(x+3i)(x-1)(x+1)=(x^2+9)(x-1)(x+1)\,.\ \blacklozenge$$

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

44. Која од следните равенки е биквадратна:

а) $3x^4-7x^2+5=0$, б) $-2x^4-5x^3+5=0$, в) $-x^4-5x^2+5=0$ и г) $x^4-\frac{21}{4}x+3=0$.

Одговорот да се образложи.

45. Реши ги биквадратните равенки:

а) $9x^4-13x^2+4=0$, б) $x^4-3x^2-4=0$, в) $4x^4+17x^2+4=0$ и г) $x^4+8x^2-9=0$.

46. Реши ги биквадратните равенки:

а) $x^4-8x^2+16=0$, б) $x^4+18x^2+81=0$, в) $x^4-4x^2=0$ и г) $4x^4+9x^2=0$.

47. Разложи го на множители биквадратниот трином:

а) x^4-11x^2+18, б) y^4-13y^2+40, в) $2x^4-7x^2-4$ и г) $3t^4-t^2-2$.

48. Скрати ги дропките

а) $\frac{a^4-16}{a^4-13a^2+36}$ и б) $\frac{x^4-11x^2+24}{x^4-17x^2+72}$.

8. ИРАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ

Досега научи да решаваш линеарни, квадратни, биквадратни и дробно рационални равенки кои се сведуваат на квадратни равенки. Овде ќе се запознаеме со таканаречените ирационални равенки чие решавање се сведува на решавање на квадратни равенки.

Пример 36. Равенките

а) $\sqrt{7-x}=x-1$, **б)** $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$, **в)** $x-\sqrt{37-x^2}=5$,

г) $(x+5)\sqrt{3-x}=\sqrt{\frac{3}{3x-1}}$, **д)** $\frac{1}{x-\sqrt{x^2-x}}-\frac{1}{x+\sqrt{x^2-x}}=\sqrt{3}$ и **ѓ)** $\frac{x-1}{x+2}=\sqrt{\frac{2x+3}{2x-5}}$

се ирационални. ♦

Како што можеме да видиме, во наведените примери на ирационални равенки среќаваме само рационални дропки поврзани со операциите собирање, множење, одземање, делење и коренување, при што барем еднаш имаме коренување на рационална дропка. Во оваа смисла ја имаме следната дефиниција на ирационална равенка.

Дефиниција 7. Равенката од видот $f(x)=0$, каде изразот $f(x)$ содржи само рационални дропки поврзани со операциите собирање, множење, одземање, делење и коренување, при што барем еднаш имаме коренување на рационална дропка која не е реален број, ја нарекуваме *ирационална равенка.*

Да забележиме дека, согласно дефиниција 7, равенката $x^2 + 2\sqrt{2}x - 4 = 0$ не е ирационална равенка. Имено, во оваа равенка немаме коренување на рационална дропка која не е реален број.

Ирационални равенки ги решаваме само во множеството реални броеви. Што ова значи може да се види од следниот пример.

Пример 37. а) Да ја разгледаме равенката $2 + \sqrt{x+3} = 0$. Бидејќи во множеството реални броеви квадратен корен постои само за ненегативни реални броеви, добиваме дека дефиниционата област на оваа равенка се добива за $x + 3 \geq 0$, т.е. $D \equiv [-3,+\infty)$. Меѓутоа, за секој $x \in D$ имаме $\sqrt{x+3} \geq 0$, што значи $2 + \sqrt{x+3} \geq 2 > 0$, па затоа равенката $2 + \sqrt{x+3} = 0$ нема решение.

б) Да ја разгледаме равенката $2 + \sqrt[3]{x+3} = 0$. Како што знаеме, непарен корен е определен за секој реален број и притоа тој е позитивен ако поткоренoвата величина е позитивна, а е негативен ако поткоренoвата величина е негативна. Според тоа, дефиниционата област на оваа равенка е множеството **R** и од $2 + \sqrt[3]{-11+3} = 2 + \sqrt[3]{-8} = 2 + (-2) = 0$ следува дека $x_1 = -11$ е еден корен на разгледуваната равенка. ♦

При разгледувањето на равенките од пример 41 посебно внимание посветивме на дефиниционата област на овие равенки. Наоѓањето на дефиниционата област на ирационална равенка е од посебно значење, што може да се види од следниот пример.

Пример 38. Реши ја ирационалната равенка $\sqrt{2-x} + \sqrt{x-3} = 2$.

Решение. Првиот квадратен корен во равенката е определен ако $2 - x \geq 0$, а вториот ако $x - 3 \geq 0$. Според тоа, дефиниционата област ја наоѓаме од системот неравенки

$$\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases}$$

кој нема решение, т.е. $D = \varnothing$. Бидејќи при решавањето на ирационалната равенка нејзините решенија треба да ги бараме во дефиниционата област од $D = \varnothing$ следува дека равенката нема решение. ♦

При решавањето на ирационалните равенки најчесто постапуваме според следниот редослед:

- ја определуваме дефиниционата област на равенката,
- се ослободуваме од корените во равенката, степенувајќи ја истата потребниот број пати,
- ја решаваме добиената равенка,
- проверуваме кои од добиените решенија на последната равенка припаѓаат на дефиниционата област на почетната равенка и
- проверуваме дали решенијата кои припаѓаат на дефиниционата област на дадената равенка се и решенија на истата.

Како што рековме определувањето на дефиниционата област на ирационалната равенка има посебно значење. Покрај причината од пример 42, ова е важно бидејќи при степенувањето на ирационална равенка на парен степен не добиваме еквивалентна равенка, што може да се види од следниот пример.

Пример 39. Аналогно како во пример 38 имаме дека дефиниционата област на равенката $\frac{1}{\sqrt{x-7}}=\sqrt{5-x}$ е $D=\varnothing$, што значи дека дадената равенка нема решение.

Сега ја квадрираме дадената равенка и ја добиваме равенката $\frac{1}{x-7}=5-x$, која е дефинирана за $x\neq 7$ и $x_1=6$ е нејзин коре.

Според тоа, со квадрирање на равенка која нема решение добивме равенка која има решение, па затоа при степенувањето на ирационална равенка на парен степен не добиваме еквивалентна равенка. ♦

Применувајќи ја претходно опишаната постапка ќе решиме неколку ирационални равенки.

Пример 40. Реши ги ирационалните равенки:

а) $\sqrt{3x-2}=2$, **б)** $x-\sqrt{x-1}=3$ и **в)** $\sqrt{1-2x}-\sqrt{1+2x}=2x$.

Решение. а) Дефиниционата област на равенката се добива за $3x-2\geq 0$, т.е. $D=[\frac{2}{3},+\infty)$. Ја квадрираме дадената равенка и ја добиваме равенката $3x-2=4$ чие решение е $x_0=2$. Бидејќи $2\in D$ проверуваме дали е решение на дадената равенка. Имаме, $\sqrt{3\cdot 2-2}=\sqrt{4}=2$, што значи дека единствено решение на дадената равенка е $x_0=2$.

б) Дефиниционата област на равенката е множеството $D=[1,+\infty)$. За да се ослободиме од квадратниот корен со едно квадрирање, равенката ја запишуваме во обликот $x-3=\sqrt{x-1}$. Сега со квадрирање ја добиваме равенката

$$(x-3)^2=x-1$$

која ја доведуваме во нормален вид

$$x^2-7x+10=0.$$

Последната равенка има корени $x_1=2$ и $x_2=5$ и тие припаѓаат на дефиниционата област на дадената равенка. Проверуваме дали $x_1=2$ и $x_2=5$ навистина се корени на почетната равенка. Од $x_1-\sqrt{x_1-1}=2-\sqrt{2-1}=1\neq 3$ добиваме дека $x_1=2$ не е корен на дадената равенка. Понатаму, од $x_2-\sqrt{x_2-1}=5-\sqrt{5-1}=3$ добиваме дека $x_2=5$ е корен на дадената равенка.

в) Дефиниционата област на равенката се добива како решение на системот линеарни неравенки

$$\begin{cases}1-2x\geq 0\\1+2x\geq 0\end{cases}$$

па затоа $D=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. Дадената равенка ја квадрираме и последователно добиваме

$$\begin{aligned}
&1-2x-2\sqrt{1-4x^2}+1+2x=4x^2\\
&\sqrt{1-4x^2}=1-2x^2\\
&(1-4x^2)=(1-2x^2)^2\\
&1-4x^2=4x^4-4x^2+1
\end{aligned}$$

т.е. $4x^4=0$. Последната равенка има корен $x_0=0$, тој припаѓа на дефиниционата област и како $\sqrt{1-2\cdot 0}-\sqrt{1+2\cdot 0}=1-1=0=2\cdot 0$ заклучуваме дека тој е корен на дадената равенка. ♦

Фактот дека во пример 40 б) иако $x_1=2$ припаѓа на дефиниционата област на равенката сепак тој не е нејзин корен, сам за себе доволно говори за неопходноста од проверка дали најдените вредности се навистина корени на дадената равенка.

Како што можеме да забележиме, решавањето на ирационалните равенки воопшто не е едноставно. Затоа во натамошните разгледувања ќе се осврнеме на проблемот на решавање на некои типови ирационални равенки, сведувајќи ги истите на квадратни равенки.

За да ја решиме равенката од видот $ax^2+bx+\sqrt{ax^2+bx+c}=d$ ја користиме смената $\sqrt{ax^2+bx+c}=t, t\geq 0$.

Пример 41. Реши ја ирационалната равенка $x^2-5x+10=4\sqrt{x^2-5x+7}$

Решение. Бидејќи дискриминантите на квадратниот трином на левата страна на равенката и на квадратниот трином под коренот на десната страна од равенката се негативни (провери!), а коефициентот пред квадратниот член и во двата случаја е $a=1>0$ заклучуваме дека и двата триноми се позитивни за секој реален број, па затоа дефиниционата област на равенката е множеството реални броеви $\mathbf{R}$.

Воведуваме смена $\sqrt{x^2-5x+7}=t\geq 0$ и ја добиваме равенката $t^2+3=4t$ чии корени се $t_1=1$ и $t_2=3$ и тие го задоволуваат условот $t\geq 0$. Оттука ги добиваме равенките $x^2-5x+7=1$ и $x^2-5x+7=9$ чии корени се $x_{1/2}=\frac{5\pm 1}{2}$ и $x_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{33}}{2}$, соодветно. Со проверка констатираме дека најдените четири корени ја задоволуваат почетната равенка. ♦

Со две квадрирања равенката од видот $\sqrt{a_1x^2+b_1x+c_1}\pm\sqrt{a_2x^2+b_2x+c_2}=d$ се сведува на полиномна равенка од четврти ред за чие решавање постои точно определен алгоритам, но истиот излегува надвор од нашите разгледувања. Меѓутоа, ако $a_1=a_2=a$, т.е. равенката е од видот $\sqrt{ax^2+b_1x+c_1}\pm\sqrt{ax^2+b_2x+c_2}=d$, тогаш истата ја запишуваме во еквивалентна на неа равенка

$$\sqrt{ax^2+b_1x+c_1}=d\mp\sqrt{ax^2+b_2x+c_2}$$

и со две квадрирања ја сведуваме на квадратна равенка.

Пример 42. Реши ја ирационалната равенка $\sqrt{x^2+5x+2}-\sqrt{x^2-3x+3}=3$.

Решение. Имаме $\sqrt{x^2+5x+2}=3+\sqrt{x^2-3x+3}$ од што после квадрирањето добиваме $x^2+5x+2=9+6\sqrt{x^2-3x+3}+x^2-3x+3$ т.е. $4x-5=3\sqrt{x^2-3x+3}$. Последната равенка повторно ја квадрираме и ја добиваме равенката $16x^2-40x+25=9(x^2-3x+3)$, која е еквивалентна на равенката $7x^2-13x-2=0$. Оттука $x_1=2$ и $x_2=-\frac{1}{7}$.

Со непосредна проверка наоѓаме дека само $x_1=2$ е корен на почетната равенка. ♦

При решавањето на ирационалните равенки од следниот вид ќе ја користиме формулата $(a\pm b)^3=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b)$. Имено, ако е дадена равенка од видот

$$\sqrt[3]{ax+b}\pm\sqrt[3]{cx+d}=e$$

тогаш иста ја кубираме и ја добиваме еквивалентната равенката

$$ax+b\pm(cx+d)\pm 3\sqrt[3]{ax+b}\cdot\sqrt[3]{cx+d}\,(\sqrt[3]{ax+b}\pm\sqrt[3]{cx+d})=e^3,$$

која е еквивалентна на равенката

$$\pm 3\sqrt[3]{ax+b}\cdot\sqrt[3]{cx+d}=e^2-(ax+b)\mp(cx+d).$$

Конечно, со повторно кубирање добиваме кубна равенка за чие решавање постои точно определен алгоритам, но истиот излегува надвор од нашите разгледувања. Ќе разгледаме пример кој се сведува на решавање на квадратна равенка.

Пример 43. Реши ја ирационалната равенка $\sqrt[3]{2+x}+\sqrt[3]{2-x}=1$.

Решение. Дадената равенка ја кубираме и добиваме еквивалентна на неа равенка

$$1=2+x+2-x+3\sqrt[3]{2+x}\cdot\sqrt[3]{2-x}\cdot(\sqrt[3]{2+x}+\sqrt[3]{2-x})=4+3\sqrt[3]{2+x}\cdot\sqrt[3]{2-x}.$$

Последната равенка е еквивалентна на равенката $\sqrt[3]{2+x}\cdot\sqrt[3]{2-x}=-1$, која со повторно кубирање ја трансформираме во еквивалентна равенка $4-x^2=-1$ т.е. $x^2=5$. Решенија на последната равенка се $x_{1/2}=\pm\sqrt{5}$. Заради симетричност доволно е да провериме дека, на пример, $x_1=\sqrt{5}$ е решение на дадената равенка. Имаме,

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\frac{16+8\sqrt{5}}{8}}+\sqrt[3]{\frac{16-8\sqrt{5}}{8}}=\frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{5})^3}}{2}+\frac{\sqrt[3]{(1-\sqrt{5})^3}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1.\ ♦$$

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

49. Реши ги ирационалните равенки:
    а) $\sqrt{2x-3}+7=\sqrt{1-x}$, б) $\sqrt{x-2}=1-x$ и в) $\sqrt{x-2}=\sqrt{3-x}$
50. Реши ги ирационалните равенки:
    а) $(2x-2)\sqrt{x+10}=x^2+x-2$, б) $\left(2x+2\right)\sqrt{x+5}=x^2+3x+2$ и в) $\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}=2x$.

Упатство. а) Разложи го квадратниот трином x^2+x-2. **б)** Разложи го квадратниот трином x^2+3x+2 на множители.

51. Реши ги ирационалните равенки:

а) $x^2+x-2\sqrt{x^2+x}=0$ и б) $x^2-x+\sqrt{x^2-x+9}=3$.

52. Реши ги ирационалните равенки:

а) $\sqrt[3]{4+x}+\sqrt[3]{4-x}=2$ и б) $\sqrt[3]{2x+17}-\sqrt[3]{2x-37}=6$.

53. Реши ги ирационалните равенки:

а) $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$ и б) $\sqrt{x^2+4x-3}-\sqrt{x^2-2x+4}=1$.

9. СИСТЕМ ОД ЕДНА ЛИНЕАРНА И ЕДНА КВАДРАТНА РАВЕНКА СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Во прва година научи да решаваш системи од две линеарни равенки со две непознати. На крајот од оваа тема ќе разгледаме како се решава систем од една квадратна и една линеарна равенка со две непознати. За таа цел најпрво ќе ги дефинираме поимите кои ќе ги користиме во натамошната работа.

Дефиниција 8. Равенката од видот

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0, \qquad (1)$$

каде $a,b,c,d,e,f\in\mathbf{R}$ и $a\neq 0$ или $b\neq 0$ или $c\neq 0$ ја нарекуваме *квадратна равенка со две непознати.*

Системот од видот

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \\ px+qy+r=0 \end{cases} \qquad (2)$$

го нарекува *систем од една квадратна и една линеарна равенка со две непознати.*

Подредениот пар (x_0,y_0) кој ја задоволува равенката (1) (системот (2)) го нарекуваме *решение* на равенката (1) (системот (2)).

Системот (2) најчесто го решаваме со методот на замена. Имено, од линеарната равенка ја изразуваме едната непозната и ја заменуваме во квадратната равенка. Така добиваме квадратна равенка со една непозната. Ги наоѓаме решенијата на квадратната равенка, а потоа истите ги заменуваме во линеарната равенка со што ги наоѓаме соодветните вредности на другата непозната.

Пример 44. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2-2y^2+3xy+x+2=0 \\ 2x-y=5. \end{cases}.$$

Решение. Од линеарната равенка имаме $y=2x-5$ и ако замениме во квадратната равенка ја добиваме равенката

$$x^2-2(2x-5)^2+3x(2x-5)+x+2=0$$

која е еквивалентна на равенката

$$x^2-26x+48=0.$$

Корените на последната равенка се $x_1=2$ и $x_2=24$. Сега со замена во равенката $y=2x-5$ за соодветните вредности на непозната y добиваме $y_1=-1$ и $y_2=43$. Според тоа, дадениот систем равенки има две решенија, т.е. множеството решенија на системот е $M=\{(2,-1),(24,43)\}$.

Дека подредените парови $(2,-1)$ и $(24,43)$ се решенија на системот можеме да провериме со замена во равенките на системот. Тоа ќе го направиме за подредениот пар $(2,-1)$. Имаме

$$\begin{cases} x_1^2-2y_1^2+3x_1y_1+x_1+2=2^2-2(-1)^2+3\cdot2\cdot(-1)+2+2=4-2-6+2+2=0 \\ 2x_1-y_1=2\cdot2-(-1)=4+1=5 \end{cases}$$

т.е. подредениот пар $(2,-1)$ ги задоволува равенките на системот, па затоа тој е негово решение. ♦

Пример 45. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} xy+3=0 \\ 3x-2y=11. \end{cases}.$$

Решение. Од линеарната равенка имаме $y=\frac{3x-11}{2}$ и ако замениме во квадратната равенка ја добиваме равенката

$$x\frac{3x-11}{2}+3=0$$

која е еквивалентна на равенката

$$3x^2-11x+6=0.$$

Корените на последната равенка се $x_1=\frac{2}{3}$ и $x_2=3$. Сега со замена во равенката $y=\frac{3x-11}{2}$ за соодветните вредности на непозната y добиваме $y_1=-\frac{9}{2}$ и $y_2=-1$. Според тоа, дадениот систем равенки има две решенија, т.е. множеството решенија на системот е $M=\{(\frac{2}{3},-\frac{9}{2}),(3,-1)\}$. ♦

Да го разгледаме системот

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b. \end{cases} \qquad (3)$$

Ако воведеме помошна непозната z, чии корени се x и y, тогаш од Виетовите формули добиваме квадратна равенка по z:

$$z^2 - az + b = 0\,,$$

чии корени се $z_{1/2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$. Последното значи дека множеството решенија на системот (3) е

$$M = \{(\tfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}, \tfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}), (\tfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}, \tfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2})\}\,.$$

Со наведената постапка ќе го решиме системот од пример 49. За таа цел истиот да го запишеме во обликот

$$\begin{cases} (3x)\cdot(-2y) = 18 \\ 3x + (-2y) = 11. \end{cases}$$

Според тоа, непознатите $3x$ и $-2y$ можеме да ги определиме решавајќи ја квадратната равенка $z^2 - 11z + 18 = 0$ чии корени се $z_1 = 2$ и $z_2 = 9$. Конечно, решенијата на системот ги добиваме од $3x_1 = 2, -2y_1 = 9$ и $3x_2 = 9, -2y_2 = 2$, од што наоѓаме дека множеството решенија на системот е $M = \{(\frac{2}{3}, -\frac{9}{2}), (3,-1)\}$.

ЗА ОНИЕ ШТО САКААТ ДА ЗНААТ ПОВЕЌЕ

Да го разгледаме системот

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 = c \\ xy = d \end{cases} \tag{4}$$

кој се состои од две квадратни равенки со две непознати. Во натамошните разгледувања ќе претпоставиме дека $a \neq 0, b \neq 0$ и $d \neq 0$, бидејќи во спротивно решавањето на системот (4) е тривијално. Од втората равенка ја изразуваме едната непозната, на пример $y = \frac{d}{x}$ и ја заменуваме во вторарата равенка со што ја добиваме равенката $ax^2 + \frac{bd^2}{x^2} = c$. Множејќи ја последнта равенка со x^2 ја добиваме биквадратната равенка

$$ax^4 - cx^2 + bd^2 = 0\,. \tag{5}$$

Ги наоѓаме решенијата на равенката (5) и со замена во $y = \frac{d}{x}$ ги определуваме решенијата на системот (4).

Пример 46. Реши го системот

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ xy = 3. \end{cases}$$

Решение. Од втората равенка имаме $y = \frac{3}{x}$ и со замена во првата равенка, после средувањето ја наоѓаме биквадратната равенка $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ чии решенија се $x_{1/2} = \pm 3$ и $x_{3/4} = \pm i$. Со замена во $y = \frac{3}{x}$ наоѓаме $y_{1/2} = \pm 1$ и $y_{3/4} = \mp 3i$. Конечно, множеството решенија на системот е $M\{(3,1), (-3,-1), (i,-3i), (-i,3i)\}$. ♦

При изучувањето на комлексните броеви ги воведовме операциите собирање, одземање, множење и делење на комплексни броеви, како и степенувањето на комплексен број со целоброен експонент. Меѓутоа, воопшто не се осврнавме на операцијата коренување на комплексен број иако истата природно се јавува при решавање на биквадратните равенки. Тоа не го направивме од едноставна причина што коренувањето на комплексни броеви е доста сложено и се потребни дополнителни знаења од тригонометрија, но сепак овде ќе покажеме како на едноставен начин се наоѓа квадратен корен од комплексен број.

Дефиниција 9. За комплексниот број w ќе велиме дека е *квадратен корен* од комплексниот број z ако $w^2 = z$.

Нека $z = a + ib$ и неговиот квадратен корен е бројот $w = x + iy$. Од дефиниција 9 следува

$$x^2 - y^2 + 2xyi = a + ib\,,$$

Од каде го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b, \end{cases} \tag{6}$$

чии решенија треба да ги бараме во множеството реални броеви. Според тоа, наоѓањето на квадратен корен од комплексниот број $z = a + ib$ се сведува на решавање на системот (6), за што претходно говоревме.

Пример 47. Најди квадратен корен од комплексниот број $4 + 3i$.

Решение. Нека бараниот корен е $w = x + iy$. За дадениот комплексен број системот (6) е

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ 2xy = 3, \end{cases} \tag{7}$$

кој треба да го решиме во множеството реални броеви. Од втората равенка имаме $y = \frac{3}{2x}$ и со замена во првата, после средувањето ја добиваме биквадратната равенка

$$4x^4 - 16x^2 - 9 = 0\,.$$

Корените на оваа равенка се $x_{1/2} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$ и $x_{3/4} = \pm\frac{i\sqrt{2}}{2}$ и како системот (7) треба да го решиме во множеството реални броеви бараните решенија се $x_{1/2} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Со замена во $y = \frac{3}{2x}$ добиваме $y_{1/2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Според тоа, броевите $w_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ и $w_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ се бараните квадратни корени на комплексниот број $4 + 3i$. ♦

Забелешка 8. Квадратната равенка $az^2 + bz + c = 0$, каде $a \neq 0, b$ и c се комплексни броеви има решение решенија во множеството комплексни броеви и тие се наоѓаат според истата формула како и за квадратна равенка со реални коефициенти. Значи, $z_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ и притоа со $\sqrt{b^2 - 4ac}$ е означен еден од комплексните броеви чиј квадрат е $b^2 - 4ac$.

Пример 48. Во множеството комплексни броеви реши ја равенката $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$.

Решение. Согласно забелешка 8 решенијата на равенката се дадени со

$$z_{1/2} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3+4i}}{2}\,, \tag{8}$$

па затоа треба да ги определиме квадратните корени на комплексниот број $3 + 4i$. Аналогно како во пример 47 наоѓаме дека тие се $w_1 = 2 + i$ и $w_2 = -2 - i$. Конечно, со замена во (8) за корените на дадената равенка наоѓаме $z_1 = \frac{\sqrt{3}+2+i}{2}$ и $z_2 = \frac{\sqrt{3}-2-i}{2}$. ♦

Забелешка 9. Претходно изнесеното сега ни овозможува секогаш да можеме да ги најдеме корените на биквадратна равенка со реални коефициенти. Имено, ако дискриминантата на биквадратната равенка $ax^4 + bx^2 + c = 0$ е $D = b^2 - 4ac < 0$, тогаш решавањето на истата се сведува на наоѓање на квадратни корени од комплексните броеви $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ и $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Да разгледаме еден пример.

Пример 49. Реши ја биквадратната равенка $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$.

Решение. Воведуваме смена $x^2 = t$ и ја добиваме равенката $t^2 - 2t + 2 = 0$ чии корени се $t_1 = 1 + i$ и $t_1 = 1 - i$. Според тоа, $x^2 = 1 + i$ и $x^2 = 1 - i$. Последните две равенки ги решаваме со наоѓање на квадратни корени од комплексните броеви $1 + i$ и $1 - i$ и тоа се решенијата на биквадратната равенка. Аналогно како во пример 47 наоѓаме

$$x_{1/2} = \pm\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2} \pm \frac{i}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}} \text{ и } x_{3/4} = \pm\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2} \mp \frac{i}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}} . \blacklozenge$$

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

54. Реши ги системите равенки:

а) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 - 2y^2 + 3x = 10, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0 \end{cases}$ и в) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + 2xy = 12. \end{cases}$

55. Реши ги системите равенки:

а) $\begin{cases} x + y = 9 \\ xy = 14, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 7 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{3}{10} \end{cases}$ и в) $\begin{cases} xy = 35 \\ \frac{x+y}{x-y} = 6. \end{cases}$

56. Реши ги системите равенки:

а) $\begin{cases} \frac{1+x+x^2}{1+y+y^2} = 3 \\ x - y = 2, \end{cases}$ и б) $\begin{cases} \frac{1-y+x^2}{1-x+y^2} = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$ и в) $\begin{cases} (x-2)(y-3) = 1 \\ \frac{x-2}{y+3} = 1. \end{cases}$

57. Реши ги системите равенки:

а) $\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 - y^2 = 4, \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy = 1 \\ x^2 - 4y^2 = 3 \end{cases}$ и в) $\begin{cases} 2xy = 1 \\ x^2 - 3y^2 = 1 \end{cases}$

58. Најди квадратен корен од комплексните броеви:

а) $5 + i$, б) $7 - i$ и в) $5 - 3i$.

59. Во множеството комплексни броеви реши ги квадратните равенки:

а) $z^2 - zi + i + 1 = 0$:, б) $\sqrt{2}z^2 - 1 - i = 0$ и в) $z^2 + (1 - 2i)z - i = 0$.

60. Реши ги биквадратните равенки:

а) $x^4 - x^2 + 1 = 0$, б) $x^4 + 6x^2 + 25 = 0$ и в) $5x^4 + 6x^2 + 5 = 0$.

10. ПРИМЕНА НА КВАДРАТНИТЕ РАВЕНКИ

Во различни области на науката, техниката и практиката, решавањето на многу проблеми се сведува на решавање на равенки или системи равенки. Постојат низа проблеми чие решавање се сведува на решавање на квадратна равенка. Решавањето на квадратните равенки го изучивме претходно, а овде ќе се осврнеме на примената на истите. Притоа ќе се обидеме преку примери да укажеме на начинот како решавањето на даден проблем се сведува на решавање на квадратна равенка.

Пример 50. Да се најде двоцифрен број таков, што цифрата на единиците е за 2 поголема од цифрата на десетките, а производот на бараниот број и збирот на неговите цифри е 144.

Решение. Ако со x ја означиме цифрата на десетките, тогаш цифрата на единиците е $x+2$, па затоа бараниот број е $10x+(x+2)=11x+2$, а збирот на неговите цифри е $x+(x+2)=2x+2$. Бидејќи производот на бараниот број и збирот на неговите цифри е 144 ја добиваме равенката $(11x+2)(2x+2)=144$ која е еквивалентна на равенката

$$11x^2+13x-70=0\,.$$

Решенијата на последната равенка се $x_1=-\frac{35}{11}$ и $x_2=2$. Но, x е цифра, па затоа решение то $x_1=-\frac{35}{11}$ не ги задоволува условите на задачата. Според тоа, $x=2$, т.е. цифрата на десетките е 2, па затоа цифрата на единиците е $x+2=2+2=4$, т.е. бараниот број е 24. ♦

Пример 51. Збирот на квадратите на три последователни парни броеви е 200. Кои се тие броеви?

Решение. Ако со n го означиме првиот од бараните броеви, тогаш другите два се $n+2$ и $n+4$. Збирот на квадратите на овие броеви е

$$n^2+(n+2)^2+(n+4)^2=n^2+n^2+4n+4+n^2+8n+16=3n^2+12n+20\,.$$

Од условот на задачата ја добиваме квадратната равенка $3n^2+12n+20=200$ која е еквивалентна на равенката $n^2+4n-60=0$. Решенија на последната равенка се

$$n_1=-10 \text{ и } n_2=6\,.$$

Задачата има две решенија и тоа $-10,-8$ и -6 или $6,8$ и 10. ♦

Пример 52. Два планинари тргнале истовремено на кота која е оддалечена $30km$ од нив. Брзината на првиот планинар е за $1km/h$ поголема од брзината на вториот планинар, па затоа тој на котата стигнал $1h$ порано од вториот планинар. Најди ја брзината на секој од планинарите.

Решение. Со v да ја означиме брзината на вториот планинар. Тогаш брзината на првиот планинар ќе биде $v+1$. Од условот на задачата имаме дека вториот планинар на предвидената кота стигнал за време $\frac{30}{v}$ часа. Тоа значи дека првиот планинар, кој стигнал

$1h$ порано од вториот планинар, тоа го направил за $\frac{30}{v}-1$ часови. Според тоа, првиот планинар патот $30km$ го поминал за $\frac{30}{v}-1$ часови, движејќи се со брзина од $v+1$ километри на час, од што ја добиваме равенката $(\frac{30}{v}-1)(v+1)=30$, која е еквивалентна на равенката $v^2+v-30=0$ чии решенија се $v_1=-6$ и $v_2=5$. Но, брзината не може да биде негативна, па затоа решението $v_1=-6$ го отфрламе.

Конечно, брзината на вториот планинар е $5km/h$, а брзината на првиот планинар е $6km/h$. ♦

Пример 53. Еден работник сам работи 7 дена на една работа, а потоа доаѓа втор работник и заедно ја завршуваат работата уште за 8 дена. За колку дена, секој од нив, може сам да ја заврши работата, ако вториот работник ја завршува работата за 5 дена помалку, отколку првиот?

Решение. Нека првиот работник ја завршува работата за x денови. Тогаш вториот работник ќе ја заврши работата за 5 дена помалку, т.е. за $x-5$ денови. За еден ден првиот работник завршува $\frac{1}{x}-$ти дел од работата, а вториот завршува $\frac{1}{x-5}$-ти дел. Првиот работник работи 15 дена и ќе заврши $\frac{15}{x}-$ти дел од работата, а вториот работи само 8 дена иќе заврши $\frac{8}{x-5}-$ти дел од работата, со што ќе биде завршена целата работа. Од досега изнесеното следува равенката $\frac{15}{x}+\frac{8}{x-5}=1$ која е еквивалентна на равенката

$$x^2-28x+75=0.$$

Корените на последната равенка се $x_1=3$ и $x_2=25$. Јасно, првиот корен не ги задоволува условите на задачата, бидејќи во спротивно вториот работник треба да ја заврши работата за $3-5=-2$ што е невозможно.

Конечно, првиот работник сам би ја завршил работата за 25 дена, а вториот работник тоа ќе го направи за $25-5=20$ дена. ♦

Пример 54. Дадена е кружница со радиус $K(O,R)$ и точка A на кружницата. Ако l е дадена должина, да се најде положбата на променливата тетива BC која е нормална на радиусот OA и таква, што да е исполнето равенството

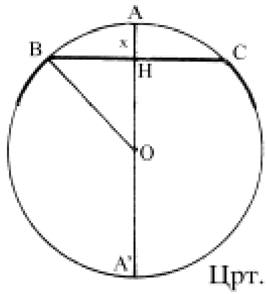
$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=4l^2. \qquad (1)$$

Решение. Нека $\overline{AH}=x$. Од правоаголниот триаголник ABH имаме $\overline{BH}^2=R^2-\overline{OH}^2$. Понатаму, бидејќи $\overline{OH}=|x-R|$, ако $H\in OA'$ тогаш $\overline{OH}=x-R$ и ако $H\in OA$, тогаш $\overline{OH}=R-x$, добиваме дека

$$\overline{BH}^2=R^2-(x-R)^2=2Rx-x^2,$$

односно

$$\overline{BC}^2=4(2Rx-x^2).$$



Црт. 1

Од друга страна, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{A'A} = 2Rx$ и ако замениме во равенството (1) ја добиваме равенката $4Rx + 4(2Rx - x^2) = 4l^2$ која е еквивалентна на равенката

$$x^2 - 3Rx - l^2 = 0$$

чии решенија се $x_{1/2} = \frac{3R \pm \sqrt{9R^2 - 4l^2}}{2}$. Јасно, решенијата се реални ако и само ако $9R^2 - 4l^2 \leq 0$ т.е. ако и само ако $9R^2 \leq 4l^2$. ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

61. Збирот на цифрите на еден број е 11, а производот на тој број и бројот запишан со истите цифри земени со обратен редослед е 3154. Кој е тој број.
62. Најди три последователни цели броеви чиј збир на квадрати е еднаков на 110.
63. Разликата на кубовите на два последователни цели броеви е еднаква на 91. Кои се тие броеви?
64. Најди двоцифрен број, чија цифра на единици е за 1 поголема од цифрата на десетките, а производот на бараниот број и збирот на неговите цифри е еднаков на 616.
65. Цифрата на десетките на двоцифрениот број е за 2 поголема од цифрата на единиците. Ако тој двоцифрен број го поделиме со збирот на неговите цифри, се добива количник за 40 помал од од бројот напишан со истите цифри земени со обратен редослед и остаток 4. Најди го овој број.
66. Еден воз растојанието од $650km$ го минува за 3 часа побрзо од друг воз, чија брзина е за $15km/h$ помала од брзината на првиот воз. Најди ги брзините на возовите.
67. Патот од $840km$ товарниот воз треба да го измине за одредено време. На половина пат возот бил задржан 30 минути, па затоа возот ја зглоемил брзината за $2km/h$ и повторно стигнал според времето предвидено со возниот ред. Колку време патувал возот?
68. По средбата на два брода еден од нив се упатил на југ, а другиот на запад. По два часа од средбата растојанието меѓу бродовите било $60km$. Најди ги брзините на двата брода, ако се знае дека брзината на едниот од нив е за $6km/h$ поголема од брзината на другиот.
69. Две славини го полнат базенот за $1\frac{7}{8}$ часа. Првата славина одделно може да го наполни истиот базен за 2 часа побрзо отколку втората славина. За кое време секоја славина одделно го полни базенот?
70. Двајца работници треба да завршат една работа. Ако работата заедно, тогаш работата ќе ја завршат за 12 дена. На едниот работник му се потребни 10 дена повеќе за сам да ја заврши работата отколку на другиот работник. За кое време секој од нив самостојно ќе ја заврши работата?
71. Страната на еден квадрат е за $2m$ поголема од страната на друг квадрат. Најди ги страните на овие квадрати, ако нивните плоштини се однесуваат како $9:4$.
72. Дадена е полукружница над дијаметар $\overline{AB} = 2R$. Од точка M на оваа полукружница спуштена е нормала MN на тангентата во точката B. Пресметај ја должината $\overline{AM} = x$ ако $\overline{AM} + \overline{MN} = \frac{9}{4}R$.
73. Дадена е полукружница над дијаметар $\overline{AB} = 2R$. Најди на полукружницата точка M која е поблиску до точката A отколку до точката B така што за тетивата MN која е паралелна со дијаметарот AB важи $\overline{AM}^2 + 3\overline{MN}^2 = 2R^2$.

ПРОВЕРИ ГО СВОЕТО ЗНАЕЊЕ

1. **а)** Кои од броевите $-2, 3, 5$ и 7 се решенија на равенката $x^2-5x-14=0$. Одговорот да се образложи (4 б)

   б) За кои вредности на параметарот k равенката $(2k+3)x^2-(k-1)x+4=0$ е квадратна, а за кои е неполна квадратна. (6 б)

2. **а)** Реши ја равенката $x^2+7x=0$. (6 б)

   б) Реши ја равенката $(x+1)^2-4(x+1)=0$. (8 б)

3. **а)** Реши ја равенката $x^2-(3-2\sqrt{2})x+4-3\sqrt{2}=0$. (10 б)

   б) За кои вредности на параметарот m равенката $x^2-(3m+1)x+4m+3=0$ равенката има двоен корен. (15 б)

4. **а)** Состави квадратна равенка чии корени се $x_1=-\frac{1}{3}$ и $x_2=\frac{4}{5}$. (10 б)

   б) Ако x_1 и x_2 се корените на равенката $kx^2-(2k+1)x+1=0$, пресметај го параметарот k така да $x_1x_2^2+x_1^2x_1=4$. (15 б)

5. **а)** Најди два последователни цели броеви чиј збир на квадрати е еднаков на 685. (15 б)

   б) Брзината на моторен чаме во мирна вода е $15km/h$. Кога се движи во река чамецот растојанието од $72km$ го минува низводно за 2 часа побрзо, отколку узводно. Пресметај ја брзината на реката. (20 б)

6. **а)** Скрати ја дропката $\frac{2x^2+x-3}{6x^2+7x+2}$. (10 б)

   б) Реши ја равенката $1+\frac{2x}{x+4}+\frac{27}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1}$. (15 б)

7. **а)** Реши ја равенката $x^4-2x^2-15=0$. (10 б)

   б) Реши ја равенката $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$. (15 б)

8. **а)** Реши го системот равенки $\begin{cases} y-2x=0 \\ 3xy-y^2=2. \end{cases}$ (10 б)

   б) Реши ги системот равенки $\begin{cases} \frac{x+y}{y}=3 \\ 1+\frac{xy}{5}=11. \end{cases}$ (15 б)

Забелешка. При решавањето треба да избереш само по една подзадача од секоја задача. Доколку сакаш самостојно да се оцениш, можеш да го искористиш следниот критериум:

Бодови:	35-54	55-74	75-92	93-109
Оценка:	2	3	4	5

ГЛАВА IV

КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА И КВАДРАТНА НЕРАВЕНКА

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1. **Линеарна функција (повторување)**
2. **Поим за квадратна функција. График на функцијата** $f(x)=ax^2$
3. **Графици на функциите** $f(x)=ax^2+c$ **и** $f(x)=a(x-x_0)^2$
4. **График на функцијата** $f(x)=ax^2+bx+c$
5. **Својства на квадратната функција** $f(x)=ax^2+bx+c$
6. **Геометриска интерпретација на систем равенки од видот** $\begin{cases} ax^2+bx+c=y \\ ex+f=y. \end{cases}$
7. **Квадратни неравенки**
8. **Систем квадратни неравенки**
9. **Примена на квадратните неравенки и системите квадратни неравенки**

ПОТРЕБНИ ПРЕДЗНАЕЊА

За успешно совладување на содржините кои ќе ги усвојуваш во оваа тема, потребно е да се потсетиш на:

- *поимите функција и график на функција;*
- *квадратните равенки и нивното решавање,*
- *определувањето на знакот на квадратен трином,*
- *решавањето на систем од една линеарна и една квадратна равенка со две непознати и*
- *линеарните неравенки, нивното решавање и графичката интерпретација на решението на линеарна неравенка.*

НОВИ ЗНАЕЊА И УМЕЕЊА

Успешното совладување на содржините кои се разработени во оваа тема има за цел:

- да го усвоиш поимот квадратна функција и да го одредуваш множеството вредности на квадратната функција,
- графички да ги претставуваш функциите од видот $f(x)=ax^2$, $f(x)=ax^2+c$, $f(x)=ax^2+bx$ и $f(x)=ax^2+bx+c$,
- да можеш да утврдиш дали една точка припаѓа на графикот на дадена квадратна функција,
- графички да решаваш систем од една линеарна и една квадратна равенка од видот $ax^2+bx+c+y=0$ со две непознати,
- да го одредуваш бројот на решенијата на систем од една линеарна и една квадратна равенка од видот $ax^2+bx+c+y=0$ според положбата на графиците на линеарната и квадратаната функција,
- да го усвоиш поимот квадратна неравенка со една непозната,
- да утврдуваш дали даден број е решение на квадратна неравенка со една непозната,
- да решаваш квадратни неравенки со една непозната,
- графички да го интерпретираш решението на квадратна неравенка со една непозната,
- да решаваш практични задачи чие решавање се сведува на решавање на квадратна неравенка со една непозната,
- да го усвоиш поимот систем квадратни неравенки со една непозната,
- да сведуваш даден систем квадратни неравенки во нормален вид,
- графички да го интерпретираш решението на систем квадратни неравенки со една непозната и
- да решаваш практични задачи чие решавање се сведува на решавање систем квадратни неравенки со една непозната.

Плоштината на квадратот P ја пресметуваме според формулата $P(a)=a^2$, каде a е должината на страната на квадратот и може да биде произволен позитивен реален број. Со формулата $P(a)=a^2$ е определено множеството $\{(a,a^2)\,|\,a\in\mathbf{R}^+\}$, па ги имаме, на пример, подредените парови $(\frac{1}{2},\frac{1}{4}), (1,1), (\sqrt{2},2), (2,4)$ итн. Исто така, од физиката знаеме дека, ако некое тело слободно паѓа (без почетна брзина), тогаш поминатиот пат $s(t)$ за време t се пресметува по формулата $s(t)=\frac{g}{2}t^2$, каде $g=9{,}81m/s^2$ е забрзувањето на земјината тежа, а t е ознака за времето на паѓање изразено во секунди.

Изнесените примери се доволна причина за проучување на функцијата од видот $f(x)=ax^2+bx+c, a,b,c\in\mathbf{R}, a\neq 0$, која во литературата е позната како квадратна функција.

1. ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА (повторување)

Како што знаеме, ако на секој реален број x му е придружен, по некое правило f, еднозначно определен реален број y, тогаш велиме дека f е функција од $\mathbf{R}$ во $\mathbf{R}$ со и пишуваме $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. За елементот y велиме дека е слика на елементот x и означуваме $y=f(x)$. Во овој случај доменот и кодоменот на функцијата се $\mathbf{R}$.

Такви функции се, на пример, функциите зададени со формулите

$$f(x)=x,\quad g(x)=2x-1 \text{ и } h(x)=-x+\frac{5}{3}$$

и секоја од нив е линеарна функција чиј општ вид е

$$f(x)=ax+b, \tag{1}$$

каде што $a,b\in\mathbf{R}, a\neq 0$, кои ги нарекуваме коефициенти на линеарната функцијата f, а x е зависно променлива или аргумент.

Понатаму, графикот на линеарната функција (1) е права $y=ax+b$. Како што знаеме реалниот број a го нарекуваме коефициент на правец на правата $y=ax+b$. Претходно претпоставивме дека $a\neq 0$, бидејќи ако $a=0$, тогаш линеарната функција е константната функција $f(x)=b$ чие проучување е тривијално и нејзиниот график е права која минува низ точката $B(0,b)$ и е паралелна со $x-$оската. Меѓутоа, ако $a\neq 0$, тогаш графикот на линеарната функција не е паралелен со ниту една од координатните оски.

Да се потсетиме како најлесно можеме да го конструираме графикот на функцијата (1). Ќе разгледаме два случаја и тоа $b=0$ и $b\neq 0$.

Ако $b=0$, тогаш функцијата (1) го прима видот $f(x)=ax$ и за $x=0$ добиваме $f(x)=0$, т.е. графикот на функцијата минува низ координатниот почеток $O(0,0)$. Понатаму, бидејќи секоја права е еднозначно определена со две нејзини точки доволно е да најдеме уште една точка од графикот на функцијата, на пример за $x=1$ имаме $f(x)=a$, т.е. точката $A(1,a)$. Конечно, низ точките $O(0,0)$ и $A(1,a)$ повлекуваме права и тоа е графикот на функцијата $f(x)=ax$.

Понатаму, во зависност од знакот на коефициентот на правецот a функцијата $f(x)=ax$ монотоно расте или монотоно опаѓа. Ќе разгледаме два случаја и тоа $a>0$ и $a<0$.

Нека $a>0$ и $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ се такви, што $x_1<x_2$. Ако двете страни на последното неравенство ги помножиме со позитивниот број a, тогаш знакот за неравенство не се менува, па затоа $ax_1<ax_2$, т.е. $f(x_1)<f(x_2)$, што значи дека при $a>0$ функцијата монотоно расте.

Нека $a<0$ и $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ се такви, што $x_1<x_2$. Ако двете страни на последното неравенство ги помножиме со негативниот број a, тогаш знакот за неравенство се менува, па затоа $ax_1>ax_2$, т.е. $f(x_1)>f(x_2)$, што значи дека при $a<0$ функцијата монотоно опаѓа.

Пример 1. Нацртај ги графиците на функциите

а) $f(x)=x$, $g(x)=2x$ и $h(x)=\frac{1}{2}x$ и

б) $f(x)=-x$, $g(x)=-2x$ и $h(x)=-\frac{1}{2}x$

Решение. Од претходно изнесеното имаме дека графиците на функциите се прави кои минуваат низ координатниот почеток $O(0,0)$. Понатаму, за истите да ги нацртаме наоѓаме $f(1)=1$, $g(1)=2$ и $h(1)=\frac{1}{2}$, па затоа графиците на f,g и h минуваат низ точките

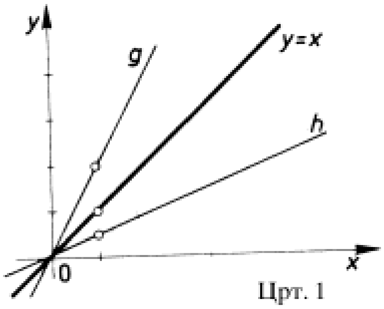
$$A(1,1), B(1,2) \text{ и } C(1,\tfrac{1}{2})$$

соодветно (црт. 1).

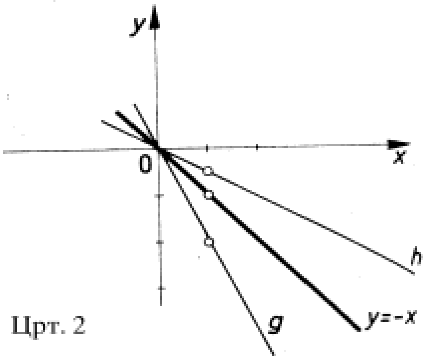
б) И графиците на овие функции минуваат низ координатниот почеток $O(0,0)$. Од $f(1)=-1$, $g(1)=-2$ и $h(1)=-\frac{1}{2}$ следува дека графиците на f,g и h минуваат низ точките

$$A(1,-1), B(1,-2) \text{ и } C(1,-\tfrac{1}{2})$$

соодветно (црт. 2). ♦



Црт. 1

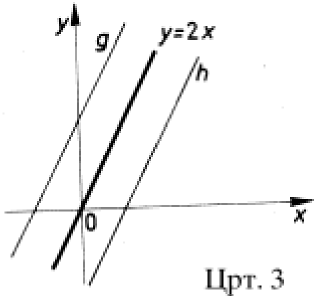


Црт. 2

Нека $b\neq 0$. Тогаш, за $x=0$ од (1) добиваме $f(x)=b$, т.е. графикот на функцијата минува низ точката $B(0,b)$ и тоа е пресекот со y – оската. Понатаму, бидејќи секоја права е еднозначно определена со две нејзини точки доволно е да го најдеме пресекот со x – оската, кој се добива за $f(x)=0$. Значи, $ax+b=0$ т.е. $x_0=-\frac{b}{a}$ и пресекот е точката $A(-\frac{b}{a},0)$. Вредноста на аргументот $x_0=-\frac{b}{a}$ ја нарекуваме нула на функцијата (1).

Нека $a>0$ и $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ се такви, што $x_1<x_2$. Ако двете страни на последното неравенство ги помножиме со позитивниот број a, тогаш знакот за неравенство не се менува, па затоа $ax_1<ax_2$ и ако на двете страни на последното неравенство додадеме b добиваме $ax_1+b<ax_2+b$, т.е. $f(x_1)<f(x_2)$, што значи дека при $a>0$ функцијата монотоно расте.

Нека $a<0$ и $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ се такви, што $x_1<x_2$. Ако двете страни на последното неравенство ги помножиме со негативниот број a, тогаш знакот за неравенство се менува, па затоа $ax_1>ax_2$ и ако на двете страни на последното неравенство додадеме b добиваме $ax_1+b>ax_2+b$, т.е. $f(x_1)>f(x_2)$, што значи дека при $a<0$ функцијата монотоно опаѓа.



Црт. 3

Пример 2. Нацртај ги графиците на функциите

$f(x)=2x$, $g(x)=2x+1$ и $h(x)=2x-1$.

Решение. Графикот на функцијата $f(x)=2x$ го нацртавме во пример 1 а), (црт. 3).

За да го нацртаме графикот на функцијата $g(x)=2x+1$ ставаме $x=0$ и добиваме $g(x)=1$, што значи тој ја содржи точката $A(0,1)$. Понатаму, од $g(x)=0$ следува $x=-\frac{1}{2}$ т.е. графикот ја содржи и точката $B(-\frac{1}{2},0)$. Сега ја повлекуваме правата AB и тоа е графикот на функцијата $g(x)=2x+1$.

За да го нацртаме графикот на функцијата $h(x)=2x-1$ ставаме $x=0$ и добиваме $h(x)=-1$, што значи тој ја содржи точката $C(0,-1)$. Понатаму, од $h(x)=0$ следува $x=\frac{1}{2}$ т.е. графикот ја содржи и точката $D(\frac{1}{2},0)$. Сега ја повлекуваме правата CD и тоа е графикот на функцијата $h(x)=2x-1$. ♦

Забелешка 1. Од црт. 3 забележуваме дека графикот на функцијата $g(x)=2x+1$ може да се добие од графикот на функцијата $f(x)=2x$ со транслација по $y-$оската за $b=1$, а графикот на функцијата $h(x)=2x-1$ може да се добие од графикот на функцијата $f(x)=2x$ со транслација по $y-$оската за $b=-1$.

Претходно изнесенот важи и во општ случај. Имено, графикот на функцијата $f(x)=ax+b$ е правата $y=ax+b$ која се добива со транслација на правата $y=ax$ по $y-$оската за број $|b|$, и тоа во позитивна насока ако $b>0$, односно во негативна насока ако $b<0$.

Забелешка 2. Функцијата (1) е наполно определена ако се знаат нејзините коефициенти a и b, кои можеме да ги определиме ако ги знаеме вредностите на функцијата во две нејзини точки. Навистина, ако ни е познато дека $f(x_1)=y_1$ и $f(x_2)=y_2$, тогаш со замена во (1) го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} ax_1+b=y_1 \\ ax_2+b=y_2 \end{cases}$$

со чие решавање ги наоѓаме коефициентите a и b на функцијата (1).

Пример 3. Одреди ја линеарната функција $f(x)=ax+b$ ако се знае дека $f(1)=2$ и $f(3)=5$.

Решение. Согласно со забелешка 2 го добиваме системот

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 3a+b=5. \end{cases}$$

Ако од втората равенка ја извадиме првата добиваме $2a=3$ т.е. $a=\frac{3}{2}$. Сега од првата равенка на системот наоѓаме $b=2-a=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$. Конечно, бараната функција е $f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$. ♦

Пример 4. Одреди ја линеарната функција $f(x)=ax+b$ ако

$$f(2x+1)=3x-5. \qquad (2)$$

Решение. За да ја определиме функцијата f ставаме $2x+1=t$. Од последното равенство наоѓаме $x=\frac{t-1}{2}$. Понатаму, изразот за x го заменуваме во (2) и наоѓаме

$$f(t)=3\cdot\frac{t-1}{2}-5=\frac{3}{2}t-\frac{3+10}{2}=\frac{3}{2}t-\frac{13}{2}. ♦$$

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Нацртај го графикот на функцијата:
   а) $f(x)=3x$, **б)** $f(x)=-\frac{1}{4}x$ и **в)** $f(x)=\frac{2}{3}x$.
2. Нацртај го графикот на функцијата:
   а) $f(x)=\frac{1}{3}x-2$, **б)** $f(x)=\frac{3}{2}x+3$ и **в)** $f(x)=-3x+4$.
3. Која од следните функции монотоно расте, а која монотоно опаѓа:
   а) $f(x)=4x-\frac{1}{2}$, **б)** $f(x)=-5x-2\sqrt{2}$, **в)** $f(x)=-\sqrt[3]{4}x+1$ и **г)** $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}x-3$
   Одговорот да се образложи.
4. Одреди ја линеарната функција $f(x)=ax+b$ ако:
   а) $f(2)=3,\ f(-1)=2$, **б)** $f(-2)=1,\ f(1)=\frac{2}{3}$, **в)** $f(\frac{1}{3})=1,\ f(\frac{-1}{2})=-1$, **г)** $f(0)=2,\ f(4)=-2$.
5. Одреди ја линеарната функција $f(x)=ax+b$ ако: **а)** $f(x-1)=4-x$, **б)** $f(3x+4)=3x-1$.

2. ПОИМ ЗА КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА. ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА $f(x)=ax^2$

А) ПОИМ ЗА КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА

Како што рековме со формулата $P(a)=a^2$, каде $a\in\mathbf{R}^+$ пресметуваме плоштина на квадрат со страна a, а со формулата $s(t)=\frac{g}{2}t^2$ го пресметуваме поминатиот пат $s(t)$ за време t при слободно паѓање без почетна брзина. Од геометријата и физиката ни се познати и други вакви формули како, на пример, формулата $P(r)=\pi r^2$ за плоштина на круг со радиус r, формулата $s(t)=\frac{a}{2}t^2+v_0t+s_0$ за изминатиот пат при рамномерно забрзано движење со почетна брзина v_0 и забрзување a итн. Во случај на формулата $s(t)=\frac{a}{2}t^2+v_0t+s_0$ велиме дека патот s е изразен како функција од времето t. Овие функции се примери на квадратна функција, која се дефинира на следниот начин.

Дефиниција 1. Ако $a,b,c\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$, тогаш функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ определена со

$$f(x)=ax^2+bx+c\,, \qquad (1)$$

ја нарекуваме *квадратна функција.*

Пример 5. а) Дадена е функцијата $f(x)=2x^2-x-5$. Пресметај $f(0), f(1), f(2)$ и $f(3)$.

б) Кои од функциите $f(x)=x(x-1)$, $f(x)=2x^2+3x^{-1}+1$ и $f(x)=3-2x+4x^2$ се квадратни.

Решение. а) За дадената функција имаме:

$$f(0)=2\cdot 0^2-0-5=-5,\ f(1)=2\cdot 1^2-1-5=-4,$$
$$f(2)=2\cdot 2^2-2-5=1 \text{ и } f(3)=2\cdot 3^2-3-5=10.$$

б) За функцијата $f(x)=x(x-1)$ имаме $f(x)=x^2-x$ и таа е од видот (1), $a=1$, $b=-1$ и $c=0$, што значи дека е квадратна.

Функцијата $f(x)=2x^2+3x^{-1}+1$ не е квадратна, бидејќи истата го содржи собирокот $3x^{-1}$ што според дефиниција 1 не е можно.

Функцијата $f(x)=3-2x+4x^2$ е од видот (1), $a=4, b=-2$ и $c=3$, што значи дека е квадратна. ♦

Пример 6. За кои вредности на параметарот m функцијата

а) $f(x)=(m+2)x^2+2x-5$ и **б)** $f(x)=2x^2+(m-1)x-5$

е квадратна.

Решение. а) Согласно дефиниција 1 функцијата $f(x)=(m+2)x^2+2x-5$ е квадратна ако и само ако $a=m+2\neq 0$, што значи ако и само ако $m\neq -2$. Според тоа, $m\in \mathbf{R}\setminus\{-2\}$.

б) За дадената функција имаме $a=2\neq 0$, што значи дека таа е квадратна за секој реален број m. ♦

Забелешка 3. Бидејќи квадратниот трином ax^2+bx+c има смисла за секој реален број x заклучуваме дека дефиниционата област на квадратната функција е множеството реални броеви, т.е. $D_f=\mathbf{R}$.

Во забелешка 2 видовме дека линеарната функција е наполно определена ако се знаат нејзините вредности за две вредности на аргументот x. Бидејќи кај линеарната функција имаме два коефициенти, а кај квадратна функција имаме три коефициенти логично е да се запрашаме дали квадратната функција е наполно определена ако се знаат нејзините вредности за три вредности на аргументот. Одговорот на ова прашање е позитивен, т.е. квадратната функција $f(x)=ax^2+bx+c$ е наполно определена ако се знаат нејзините вредности во точките x_1, x_2 и x_3. Аналогно, како и кај линеарната функција во овој случај решаваме систем од три равенки со три непознати.

Пример 7. Одреди ја квадратната функција $f(x)=ax^2+bx+c$ ако се знае дека $f(-1)=6$, $f(1)=2$ и $f(2)=3$.

Решение. Од условот на задачата го добиваме системот

$$\begin{cases} a-b+c=6 \\ a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=3, \end{cases}$$

чие решение е $a=1, b=-2$ и $c=3$, па затоа бараната функција е $f(x)=x^2-2x+3$. ♦

Б) ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА $f(x)=ax^2$

Ако $b=c=0$, тогаш квадратната функција $f(x)=ax^2+bx+c$ го добива видот

$$f(x)=ax^2. \tag{2}$$

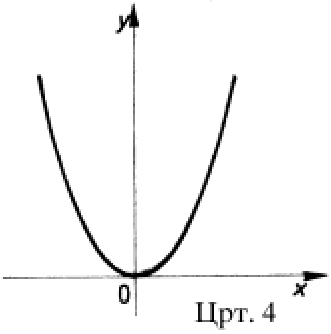
Испитувањето на функцијата од видот (2) ќе го започнеме со основната квадратна функција $f(x)=x^2$, а потоа одделно ќе ги разгледаме случаите $a>0$ и $a<0$.

Пример 8. Нацртај го графикот на функцијата $f(x)=x^2$.

Решение. Прво составуваме таблица на вредности на функцијата f за некои вредности на аргументот x. Имаме:

x	...	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	...
$f(x)$	...	9	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9	...

Добиените точки $(0,0), (\frac{1}{3},\frac{1}{9}), (-\frac{1}{3},\frac{1}{9}), (\frac{1}{2},\frac{1}{4}), (-\frac{1}{2},\frac{1}{4}), (1,1), (-1,1), (2,4), (-2,4), (3,9), (-3,9), \ldots$ ги цртаме во координатна рамнина xOy и ги сврзуваме со непрекината линија со што го добиваме графикот на функцијата $f(x)=x^2$ (црт. 4). Да забележиме дека графикот на функцијата $f(x)=x^2$ е крива, која се вика парабола.



Црт. 4

Од податоците во табелата, а и од скицата на графикот на функцијата $f(x)=x^2$ може да се заклучи дека таа во точката $x_0=0$ ја достигнува својата најмала вредност $f(x_0)=0$ и дека тоа е единствена точка во која функцијата прима вредност 0. За да го докажеме ова доволно е да забележиме дека $x^2 \geq 0$, за секој $x \in \mathbf{R}$ и $x^2=0$ ако и само ако $x=0$. Точката $O(0,0)$ ја нарекуваме *теме на параболата* $f(x)=x^2$.

Нека $x_1 < x_2 < 0$. Тоа значи дека $x_1^2 > x_1x_2$ и $x_1x_2 > x_2^2$ (знакот на неравенството се менува ако тоа се помножи со негативен број). Сега од последните две неравенства следува $x_1^2 > x_2^2$ т.е. $f(x_1) > f(x_2)$, што значи дека функцијата $f(x)=x^2$ монотоно опаѓа на интервалот $(-\infty,0)$.

Нека $0 < x_1 < x_2$. Тоа значи дека $x_1^2 < x_1x_2$ и $x_1x_2 < x_2^2$ (знакот на неравенството не се менува ако тоа се помножи со позитивен број). Сега од последните две неравенства следува $x_1^2 < x_2^2$ т.е. $f(x_1) < f(x_2)$, што значи дека функцијата $f(x)=x^2$ монотоно расте на интервалот $(0,+\infty)$.

На црт. 4 воочуваме дека графикот на функцијата $f(x)=x^2$ е симетричен во однос на $y-$оската (за ваква функција велиме дека е *парна*). Ова се должи на фактот дека на секои два спротивни реални броеви им соодвествуваат еднакви вредности на функцијата $f(x)=x^2$. Навистина, за секој $x \in \mathbf{R}$ важи

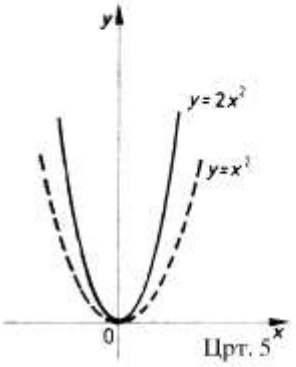
$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x).\ \blacklozenge$$

Пример 9. Нацртај го графикот на функцијата: **а)** $f(x)=2x^2$ и **б)** $f(x)=\frac{1}{2}x^2$.

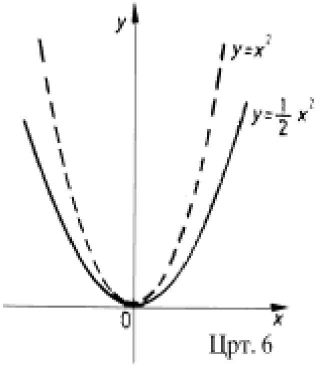
Решение. **а)** Повторно составуваме таблица на вредности на функцијата f за некои вредности на аргументот x. Имаме,

x	...	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	...
$f(x)$	...	18	8	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{2}$	2	8	18	...

и добиените точки ги цртаме во коорднинатна рамнина, а потоа ги поврзуваме со непрекината крива со што го добиваме графикот на функцијата $f(x)=2x^2$.



Црт. 5



Црт. 6

Забележуваме дека функцијата $f(x)=2x^2$ во точката $x_0=0$ ја достигнува својата најмала вредност $f(x_0)=0$, потоа на интервалот $(-\infty,0)$ монотоно опаѓа, а на интервалот $(0,+\infty)$ монотоно расте.

Од претходната табела, а и од црт. 5 може да се забележи дека графикот на функцијата $f(x)=2x^2$ може да се добие од графикот на функцијата $f(x)=x^2$, ако ординатите на точките од графикот на $f(x)=x^2$ се помножат со 2. Понатаму, параболата $y=2x^2$ е потесна од параболата $y=x^2$, и двете се симетрични во однос на $y-$оската и и двете се отворени нагоре. Темето на параболата $y=2x^2$ е точката $O(0,0)$.

б) Аналогно, графикот на функцијата $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ може да се добие од графикот на функцијата $f(x)=x^2$, ако ординатите на точките од графикот на $f(x)=x^2$ се помножат со $\frac{1}{2}$ (црт. 6). Понатаму, параболата $y=\frac{1}{2}x^2$ е поширока од параболата $y=x^2$, симетрична е во однос на $y-$оската и е отворена нагоре. Исто така, во точката $x_0=0$ функцијата $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ ја достигнува својата најмала вредност $f(x_0)=0$ т.е. $O(0,0)$ е нејзино теме, на интервалот $(-\infty,0)$ монотоно опаѓа, а на интервалот $(0,+\infty)$ монотоно расте. ♦

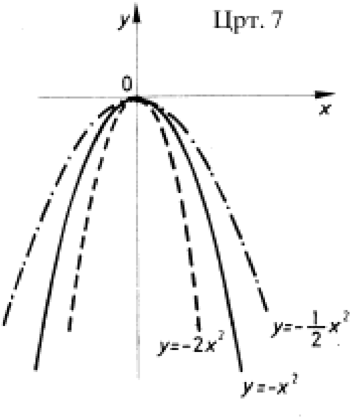
Како што можеме да видиме од претходните два примери гарфиците на функциите $f(x)=x^2$, $f(x)=2x^2$ и $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ се параболи кои се многу слични. Всушност, таков е и графикот на секоја функција $f(x)=ax^2$, $a>0$. Имено, за секој $a>0$ важи:

- графикот на функцијата $f(x)=ax^2$ е параболата $y=ax^2$, која е отворена нагоре, симетричен е во однос на $y-$оската и за $a>1$ е потесен, а за $0<a<1$ е поширок од графикот на функцијата $f(x)=x^2$,
- во точката $x_0=0$ функцијата $f(x)=ax^2$ ја достигнува својата најмала вредност (*минимум*) $f(x_0)=0$, т.е. точката $O(0,0)$ е теме на параболата $y=ax^2$ и
- на интервалот $(-\infty,0)$ функцијата $f(x)=ax^2$ монотоно опаѓа, а на интервалот $(0,+\infty)$ таа монотоно расте.

Пример 10. Нацртај ги графиците на функциите $f(x)=-x^2$, $g(x)=-2x^2$ и $h(x)=-\frac{1}{2}x^2$.

Решение. Вредностите на функцијата $f(x)=-x^2$ се добиваат така што вредностите на функцијата $f_1(x)=x^2$ се помножат со -1. Геометриски тоа значи дека параболата

$y=-x^2$ се добива од параболата $y=x^2$ со осна симетрија во однос на $x-$оската. Аналогно ги добиваме и графиците на функциите g и h. ♦


Црт. 7

Имајќи го предвид пример 9 и својствата на функцијата $f(x)=ax^2$, $a>0$ за функцијата $f(x)=ax^2$, $a<0$ добиваме:

- графикот на функцијата $f(x)=ax^2$ е параболата $y=ax^2$, која е отворена надолу, симетричен е во однос на $y-$оската и за $a<-1$ е потесен, а за $-1<a<0$ е поширок од графикот на функцијата $f(x)=-x^2$,
- во точката $x_0=0$ функцијата $f(x)=ax^2$ ја достигнува својата најголема вредност (*максимум*) $f(x_0)=0$, т.е. точката $O(0,0)$ е теме на параболата $y=ax^2$ и
- на интервалот $(-\infty,0)$ функцијата $f(x)=ax^2$ монотоно расте, а на интервалот $(0,+\infty)$ таа монотоно опаѓа.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

6. Определи го параметарот m така да графикот на функцијата:

а) $f(x)=x^2+(m-1)x+4$, **б)** $f(x)=mx^2+(2m-3)x+4$ и **в)** $f(x)=\frac{2}{3}x^2+mx+\frac{m}{3}+2$

да минува низ точката $(3,5)$.

7. За која вредност на параметарот m фунцкијата:

а) $f(x)=(2m-3)x^2+mx$, **б)** $f(x)=(4m-\frac{3}{5})x^2+x-5$ и **в)** $f(x)=(m^2-5m+6)x^2-3x-1$

е квадратна.

8. Одреди ја функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$ ако:

а) $f(0)=1, f(1)=3, f(2)=0$, **б)** $f(-1)=1, f(1)=2, f(2)=0$ и **в)** $f(2)=1, f(2)=3, f(3)=4$.

9. Нацртај ги графиците на функциите:

а) $f(x)=3x^2$, **б)** $f(x)=-3x^2$, **в)** $f(x)=\frac{3}{2}x^2$, **г)** $f(x)=\frac{2}{3}x^2$ и **д)** $f(x)=-\frac{2}{3}x^2$.

10. Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите $f(x)=x^2, g(x)=x^2+1$ и $h(x)=x^2-1$. Што забележуваш? Дали можеш да ги добиеш графиците на g и h од графикот на f? Како?

3. ГРАФИЦИ НА ФУНКЦИИТЕ $f(x)=ax^2+c$ И $f(x)=a(x-x_0)^2$

Во претходната точка ја разгледавме квадратната функција од видот $f(x)=ax^2$. Во овој дел ќе ги разгледаме функциите $f(x)=ax^2+c$ и $f(x)=a(x-x_0)^2$ чии графици едноставно се конструираат со помош на фунцијата $f(x)=ax^2$.

А) ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА $f(x)=ax^2+c$

Дефиниција 2. За бројот $x_0 \in \mathbf{R}$ ќе велиме дека е нула на функцијата f ако е решение на равенката

$$f(x)=0. \tag{3}$$

Забелешка 4. Ако $x_0 \in \mathbf{R}$ е нула на функцијата f, тогаш точката $A(x_0,0)$ припаѓа на графикот на функцијата f. Но, точката $A(x_0,0)$ припаѓа на $x-$оската. Според тоа, нулите на функцијата f се апцисите на точките во кои графикот на функцијата ја сече $x-$оската.

Пример 11. Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите

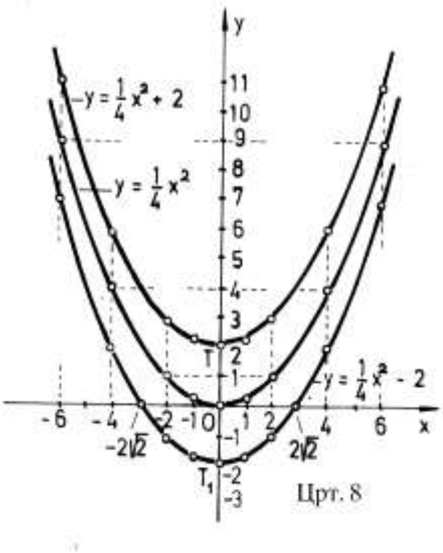
$$f(x)=\tfrac{1}{4}x^2,\ f(x)=\tfrac{1}{4}x^2+2 \text{ и } f(x)=\tfrac{1}{4}x^2-2.$$

Решение. Составуваме таблица на вредности на функциите

$$f(x)=\tfrac{1}{4}x^2,\ f(x)=\tfrac{1}{4}x^2+2 \text{ и } f(x)=\tfrac{1}{4}x^2-2$$

за некои вредности на аргументот x. Имаме,

x	0	±1	±2	±3	±4	...
$\frac{1}{4}x^2$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	...
$\frac{1}{4}x^2+2$	2	$\frac{9}{4}$	3	$\frac{17}{4}$	6	...
$\frac{1}{4}x^2-2$	-2	$-\frac{7}{4}$	-1	$\frac{1}{4}$	2	...



Црт. 8

и добиените точки за секоја функција одделно ги ги цртаме во коорднинатна рамнина, а потоа ги поврзуваме со непрекината крива со што ги добиваме графиците на функциите.

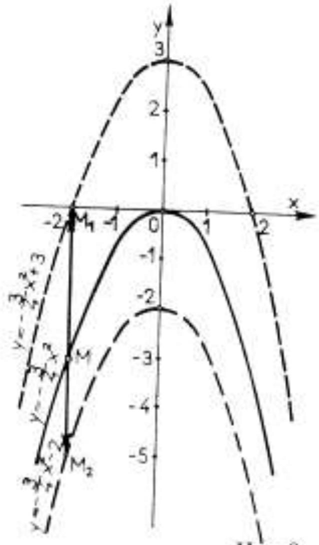
Од формулите на разгледуваните функции забележуваме дека одделните вредности на функцијата $f(x)=\frac{1}{4}x^2+2$, односно на функцијата $f(x)=\frac{1}{4}x^2-2$ ги добиваме така што на соодветните вредности на функцијата $f(x)=\frac{1}{4}x^2$ им го додаваме бројот 2, односно бројот -2, т.е. одземаме 2. Оттука следува дека параболата $y=\frac{1}{4}x^2+2$, односно $y=\frac{1}{4}x^2-2$ ја добиваме со транслација на параболата $y=\frac{1}{4}x^2$ за вектор $\overrightarrow{OT}$ кој е со должина 2 и е во насока на $y-$оската, односно за вектор $\overrightarrow{OT_1}$ кој е со должина 2 и во спротивна насока од насоката на $y-$оската.

Понатаму, забележуваме дека сите три функции се парни, опаѓаат на интервалот $(-\infty,0)$ и растат на интервалот $(0,+\infty)$, (провери!). Темето на параболата $y=\frac{1}{4}x^2$ е точката $O(0,0)$, а додека на параболите $y=\frac{1}{4}x^2+2$ и $y=\frac{1}{4}x^2-2$ се точките $T(0,2)$ и $T_1(0,-2)$, соодветно и овие точки се точки на минимум за разгледуваните функции.

Од црт. 8 можеме да забележиме графиците на сите три функции се отворени нагоре.

Функцијата $f(x)=\frac{1}{4}x^2$ има нула во точката $x_0=0$. Понатаму, равенката $\frac{1}{4}x^2+2=0$ нема реални решенија, па затоа функцијата $f(x)=\frac{1}{4}x^2+2$ нема нули. Меѓутоа равенката $\frac{1}{4}x^2-2=0$ има решение и нејзини корени се $x_{1/2}=\pm 2\sqrt{2}$ и тоа се нули на функцијата $f(x)=\frac{1}{4}x^2-2$. Согласно забелешка 4 графикот на оваа функција, т.е. параболата $y=\frac{1}{4}x^2-2$ ја сече $x-$оската во точките $(-2\sqrt{2},0)$ и $(2\sqrt{2},0)$ (црт. 8). ♦

Пример 12. На црт. 9 се нацртани графиците на функциите $f(x)=-\frac{3}{4}x^2$, $f(x)=-\frac{3}{4}x^2+3$ и $f(x)=-\frac{3}{4}x^2-2$.



Црт. 9

Притоа е користена следната таблица за вредностите на функциите во одделни точки:

x	0	±1	±2	±3	±4	...
$-\frac{3}{4}x^2$	0	$\frac{1}{4}$	-3	$-\frac{27}{4}$	–12	...
$-\frac{3}{4}x^2+3$	3	$\frac{9}{4}$	0	$-\frac{15}{4}$	–9	...
$-\frac{3}{4}x^2-2$	-2	$-\frac{11}{4}$	-5	$-\frac{35}{4}$	–14	...

Од формулите на разгледуваните функции забележуваме дека одделните вредности на функцијата $f(x)=-\frac{3}{4}x^2+3$, односно на функцијата $f(x)=-\frac{3}{4}x^2-2$ ги добиваме така што на соодветните вредности на функцијата $f(x)=-\frac{3}{4}x^2$ им го додаваме бројот 3, односно бројот -2, т.е. одземаме 2. Оттука следува дека параболата $y=-\frac{3}{4}x^2+3$, односно $y=-\frac{3}{4}x^2-2$ ја добиваме со транслација на параболата $y=-\frac{3}{4}x^2$ за 3 и е во насока на $y-$оската, односно за вектор 2 во спротивна насока од насоката на $y-$оската.

Понатаму, забележуваме дека сите три функции се парни, растат на интервалот $(-\infty,0)$ и опаѓаат на интервалот $(0,+\infty)$, (провери!). Темето на параболата $y=-\frac{3}{4}x^2$ е точката $O(0,0)$, а додека на параболите $y=-\frac{3}{4}x^2+3$ и $y=-\frac{3}{4}x^2-2$ се точките $(0,3)$ и $(0,-2)$, соодветно и овие точки се точки на максимум за разгледуваните функции.

Од црт. 9 можеме да забележиме графиците на сите три функции се отворени надолу.

Функцјата $f(x)=-\frac{3}{4}x^2$ има нула во точката $x_0=0$, функцијата $f(x)=-\frac{3}{4}x^2+3$ во точките $(-2,0)$ и $(2,0)$, а додека функцијата $f(x)=-\frac{3}{4}x^2-2$ нема нули (зошто?). ♦

Од досега изнесеното за графикот на функцијата од видот $f(x)=ax^2+c$ можеме да заклучиме:

- графикот на функцијата $f(x)=ax^2+c$ е параболата $y=ax^2+c$ и се добива со транслација на параболата $y=ax^2$ за $|c|$ во насока на $y-$оската ако $c>0$, а во спротивна насока од насоката на $y-$оската ако $c<0$,
- параболата $y=ax^2+c$ е симетрична во однос на $y-$оската, а нејзиното теме е $T(0,c)$,
- ако $a>0$, тогаш параболата е отворена нагоре, функцијата f опаѓа на интервалот $(-\infty,0)$, расте на интервалот $(0,+\infty)$ и за $x_0=0$ има минимум кој изнесува $f(0)=c$,
- ако $a<0$, тогаш параболата е отворена надолу, функцијата f расте на интервалот $(-\infty,0)$, опаѓа на интервалот $(0,+\infty)$ и за $x_0=0$ има максимум кој изнесува $f(0)=c$ и
- ако коефициентите a и c се со исти знаци, тогаш функцијата f нема нули, а ако се со спротивни знаци таа има две нули кои се решение на квадратната равенка $ax^2+c=0$.

Б) ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА $f(x)=a(x-x_0)^2$

Во овој дел ќе покажеме како графикот на функцијата $f(x)=a(x-x_0)^2$ се добива со транслација по $x-$оската од графикот на функцијата $f(x)=ax^2$. За таа цел прво ќе разгледаме еден пример.

Пример 13. Нацртај го графикот на функцијата

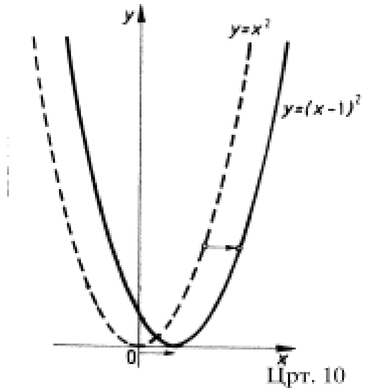
а) $f(x)=(x-1)^2$, **б)** $f(x)=(x+2)^2$ и

в) $f(x)=-2(x+1)^2$.

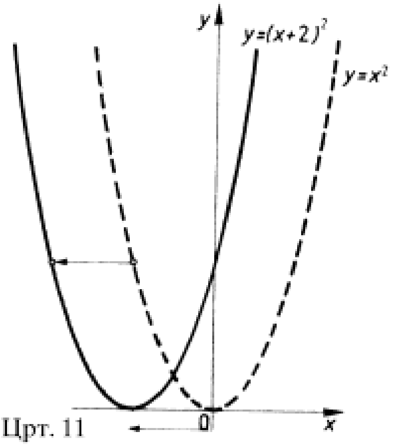
Решение. а) Ја формираме следната таблица за вредностите на функцијата за некои вредности на аргументот x:

x	...	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$(x-1)^2$	...	9	4	1	0	1	4	9	...
x^2	...	4	1	0	1	4	9	16	...

Ако ги нанесеме точките во координатен систем и ги поврземе со непрекината линија ќе забележиме дека графикот на функцијата $f(x)=(x-1)^2$ е парабола отворена нагоре, која се добива од графикот на функцијата $f(x)=x^2$, ако параболата $y=x^2$ ја транслатираме за 1 во насока на $x-$оската (црт. 10). Темето на параболата $y=(x-1)^2$ е точката $(1,0)$, а правата $x=1$ е нејзина оска на симетрија.



Црт. 10



Црт. 11

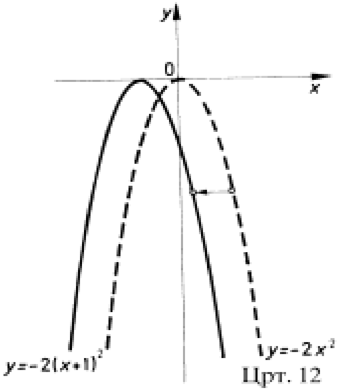
Понатаму, на интервалот $(-\infty,1)$ функцијата монотоно опаѓа, а на интервалот $(1,+\infty)$ таа монотоно расте и во точката $x_0=1$ има минимум $f(1)=0$.

б) Ја составуваме таблицата:

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	...
$(x+2)^2$	...	4	1	0	1	4	9	16	...
x^2	...	16	9	4	1	0	1	4	...

Како и во задачата под а) заклучуваме дека графикот на функцијата $f(x)=(x+2)^2$ е парабола отворена нагоре, која се добива од графикот на функцијата $f(x)=x^2$, ако параболата $y=x^2$ ја транслатираме за 2 спротивно од насоката на $x-$оската (црт. 11). Темето на параболата $y=(x+2)^2$ е точката $(-2,0)$, а правата $x=-2$ е нејзина оска на симетрија. Понатаму, на интервалот $(-\infty,-2)$ функцијата монотоно опаѓа, а на интервалот $(-2,+\infty)$ таа монотоно расте и во точката $x_0=-2$ има минимум $f(-2)=0$.

в) За да го нацртаме графикот на функцијата $f(x)=-2(x+1)^2$ доволно е да го нацртаме графикот на функцијата $f(x)=-2x^2$ и истиот да го транслатираме за 1 спротивно од насоката на $x-$оската (црт. 12). Значи, графикот е парабола отворена надолу и со теме во точката $(-1,0)$. Правата $x=-1$ е нејзина оска на симетрија. Понатаму, на интервалот $(-\infty,-1)$ функцијата монотоно расте, а на интервалот $(-1,+\infty)$ таа монотоно опаѓа и во точката $x_0=-1$ има максимум $f(-1)=0$. ♦



Црт. 12

Од досега изнесеното за графикот на функцијата од видот $f(x)=a(x-x_0)^2$ можеме да заклучиме:

- графикот на функцијата $f(x)=a(x-x_0)^2$ е параболата $y=a(x-x_0)^2$ и се добива со транслација на параболата $y=ax^2$ за x_0 во насока на $x-$оската ако $x_0>0$, а во спротивна насока од насоката на $x-$оската ако $x_0<0$,
- параболата $y=a(x-x_0)^2$ е симетрична во однос на правата $x=x_0$, а нејзиното теме е $T(x_0,0)$,
- ако $a>0$, тогаш параболата е отворена нагоре, функцијата f опаѓа на интервалот $(-\infty,x_0)$, расте на интервалот $(x_0,+\infty)$ и во x_0 има минимум кој изнесува $f(x_0)=0$ и
- ако $a<0$, тогаш параболата е отворена надолу, функцијата f расте на интервалот $(-\infty,x_0)$, опаѓа на интервалот $(x_0,+\infty)$ и за x_0 има максимум кој изнесува $f(x_0)=0$.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

11. Нацртај го графикот на функцијата $f(x)=ax^2+c$, ако:
а) $a=-2, c=\frac{1}{2}$, б) $a=\frac{1}{2}, c=\frac{3}{2}$, в) $a=2, c=\frac{5}{2}$ и г) $a=\frac{1}{2}, c=4$.

12. Која функција се добива ако ординатите на секоја точка од параболата $y=3x^2$ се:
а) зголемат за 4, б) се намалат за 3.

13. Одреди ја квадратната функција $f(x)=ax^2+c$, ако:
а) $f(0)=1, f(1)=2$, б) $f(1)=1, f(2)=-2$ и в) $f(-1)=2, f(-2)=4$

14. Најди квадратна функција за која $f(-3)=f(3)=5, f(0)=4$.

Упатство. Искористи дека од $f(-3)=f(3)$ следува дека функцијата е од видот $f(x)=ax^2+c$.

15. Нацртај го графикот на функцијата $f(x)=a(x-x_0)^2$, ако:
а) $a=\frac{1}{2}, x_0=2$, б) $a=\frac{1}{3}, x_0=-2$ и в) $a=-3, x_0=-1$.

16. Одреди го максимумот (минимумот) и интервалите на монотоност на функцијата f, ако:
а) $f(x)=(x+3)^2$, б) $f(x)=-2(x-3)^2$ и в) $f(x)=2(x-1)^2$.

17. За колку единици и во која насока треба да се транслатира параболата $y=2(x-1)^2$, за да се добие параболата:
а) $y=2x^2$, б) $y=2(x+3)^2$ и в) $y=2(x-4)^2$.

4. ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА $f(x)=ax^2+bx+c$

Во претходните разгледувања научивме да ги конструираме графици на функции од видовите $f(x)=ax^2$, $f(x)=ax^2+c$ и $f(x)=a(x-x_0)^2$. Во овој дел ќе се осврнеме на конструкцијата на графикот на функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$. За таа цел прво ќе разгледаме како се конструира графикот на функција од видот $f(x)=a(x-x_0)^2+y_0$.

Ако функцијата

$$f(x)=a(x-x_0)^2+y_0$$

ја споредиме со функцијата

$$g(x)=a(x-x_0)^2$$

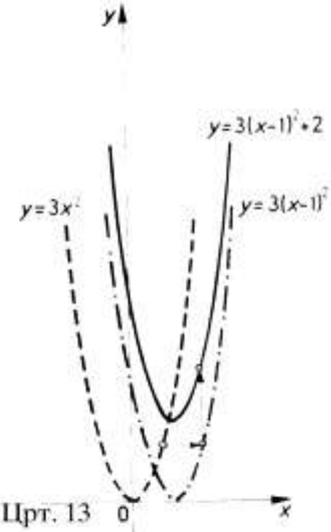
забележуваме дека тие се разликуваат за константа y_0. Тоа, пак, значи дека графикот на функцијата f ќе го добиеме од графикот на функцијата g со транслација по $y-$оската за $|y_0|$ единици и тоа во насока на $y-$оската ако $y_0>0$ и во насока спротивна од насоката на $y-$оската ако $y_0<0$. Да разгледаме два примери.

Пример 14. Нацртај го графикот на функцијата $f(x)=3(x-1)^2+2$.

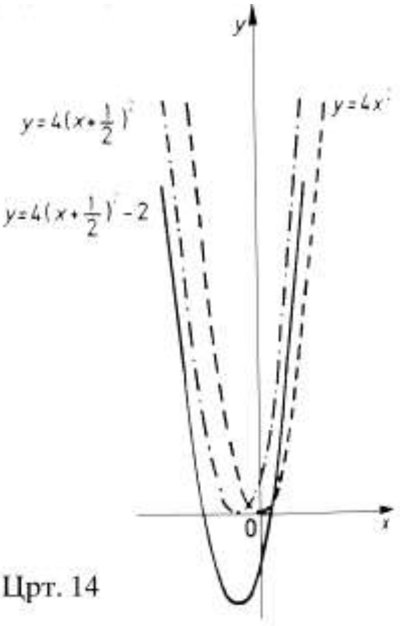
Решение. Прво го цртаме графикот на функцијата $f_0(x)=3x^2$. Со транслација за 1 во насока на $x-$оската го добиваме графикот на функцијата $f_1(x)=3(x-1)^2$ (црт. 13). Сега со уште една транслација за 2 во насока на $y-$оската, но на графикот на функцијата f_1 го добиваме графикот на функцијата f .

Значи, графикот на функцијата f го добиваме од параболата $y=3x^2$, со две нејзини транслации: во насока на $x-$оската за 1 и во насока на $y-$оската за 2.

Темето ма параболата $y=3(x-1)^2+2$ е во точката $(1,2)$, а правата $x=1$ е нејзина оска на симетрија (зошто?). Функцијата има минимум за $x=1$ и тој е $f(1)=2$.♦



Црт. 13



Црт. 14

Пример 15. Нацртај го графикот на функцијата $f(x)=(2x+1)^2-2$.

Решение. Прво дадената функција ќе ја запишеме во видот $f(x)=a(x-x_0)^2+y_0$. Имаме

$$f(x)=(2x+1)^2-2=[2(x+\tfrac{1}{2})]^2-2=4(x+\tfrac{1}{2})^2-2\,.$$

Сега аналогно како во пример 14 графикот на функцијата го добиваме со транслација на параболата $y=4x^2$ за $\frac{1}{2}$ во насока спротивна од насоката на $x-$оската, а потоа со транслација за 2 во насока спротивна од насоката на $y-$оската. Темето на параболата $y=4(x+\frac{1}{2})^2-2$ е во точката $(-\frac{1}{2},-2)$, а правата $x=-\frac{1}{2}$ е нејзина оска на симетрија (зошто?).

Функцијата има нули $x_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$ и тоа се корените на равенката $(2x+1)^2-2=0$. Функцијата има минимум за $x=-\frac{1}{2}$ и тој е $f(-\frac{1}{2})=-2$. ♦

Од досега изнесеното за графикот на функцијата од видот $f(x)=a(x-x_0)^2+y_0$ можеме да заклучиме:

- график на функцијата $f(x)=a(x-x_0)^2+y_0$ е параболата $y=a(x-x_0)^2+y_0$ и тој се добива, прво со транслација на параболата $y=ax^2$ за x_0 во насока на $x-$оската ако $x_0>0$, а во спротивна насока од насоката на $x-$оската ако $x_0<0$, а потоа добиената парабола $y=a(x-x_0)^2$ се транслатира за y_0 во насока на $y-$оската ако $y_0>0$, а во спротивна насока од насоката на $y-$оската ако $y_0<0$,

- параболата $y=a(x-x_0)^2+y_0$ е симетрична во однос на правата $x=x_0$, а нејзиното теме е $T(x_0,y_0)$,
- ако $a>0$, тогаш параболата е отворена нагоре, функцијата f опаѓа на интервалот $(-\infty,x_0)$, расте на интервалот $(x_0,+\infty)$ и во x_0 има минимум кој изнесува $f(x_0)=y_0$,
- ако $a<0$, тогаш параболата е отворена надолу, функцијата f расте на интервалот $(-\infty,x_0)$, опаѓа на интервалот $(x_0,+\infty)$ и за x_0 има максимум кој изнесува $f(x_0)=y_0$ и
- ако a и y_0 се со исти знаци, тогаш функцијата нема нули,
- ако a и y_0 се со спротивни знаци, тогаш таа има нули x_1 и x_2 и тоа се корените на равенката $a(x-x_0)^2+y_0=0$, што значи дека параболата $y=a(x-x_0)^2+y_0$ ја сече $x-$ оската во точките $(x_1,0)$ и $(x_2,0)$.

Претходните разгледувања ни овозможуваат да го нацртаме графикот на квадратната функција $f(x)=ax^2+bx+c$. Ќе разгледаме два примери.

Пример 16. Нацртај го графикот на функцијата $f(x)=3x^2-6x+1$.

Решение. Со дополнување до полн квадрат имаме:

$$f(x)=3x^2-6x+1=3(x^2-2x)+1=3(x^2-2x+1-1)+1$$
$$=3(x-1)^2-3+1=3(x-1)^2-2$$

т.е.

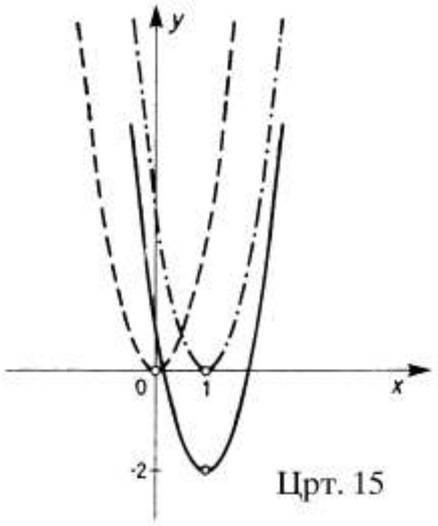
$$f(x)=3(x-1)^2-2 \qquad (1)$$

Според тоа, графикот на функцијата f се добива од параболата $y=3x^2$ со транслација во насока на $x-$оската за 1 и во насока спротивна од насоката на $y-$оската за 2. Параболата

$$y=3x^2-6x+1$$

е отворена нагоре, нејзино теме е точката $(1,2)$, таа е симетрична во однос на правата $x=1$ и f има минимум за $x=1$ и тоа $f(1)=-2$. Бидејќи во (1) коефициентите 3 и -2 се со спротивен знак функцијата f има нули и тоа се корените на равенката

$$3(x-1)^2-2=0.$$



Црт. 15

Според тоа, нули на функцијта се $x_{1/2} = \frac{3\pm\sqrt{6}}{3}$, што значи дека графикот на фунцкијата f ја сече $x-$оската во точките $(\frac{3-\sqrt{6}}{3},0)$ и $(\frac{3+\sqrt{6}}{3},0)$ (црт. 15). ♦

Пример 17. Нацртај го графикот на функцијата $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 5$.

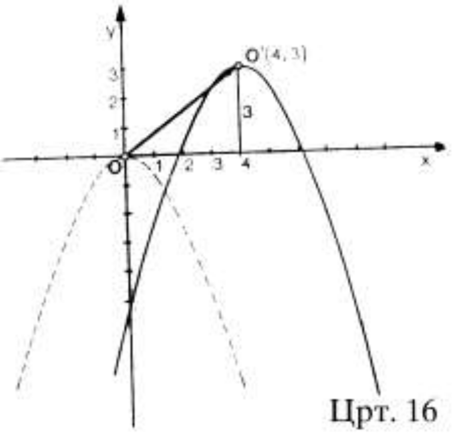
Решение. Со дополнување до полн квадрат имаме:

$$f(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 + 4x - 5 = -\tfrac{1}{2}(x^2 - 8x) + 1$$
$$= -\tfrac{1}{2}(x^2 - 8x + 16) + 3 = -\tfrac{1}{2}(x-4)^2 + 3$$

т.е.

$$f(x) = -\tfrac{1}{2}(x-4)^2 + 3 \qquad (1)$$

Според тоа, графикот на функцијата f се добива од параболата $y = -\frac{1}{2}x^2$ со транслација во насока на $x-$оската за 4 и во насока на $y-$оската за 3. Параболата $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 5$ е отворена надолу, нејзино теме е точката (4,3), таа е симетрична во однос на правата $x = 4$ и f има минимум за $x = 4$ и тоа $f(4) = 3$. Бидејќи во (1) коефициентите $-\frac{1}{2}$ и 3 се со спротивен знак функцијата f има нули и тоа се корените на равенката $-\frac{1}{2}(x-4)^2 + 3 = 0$. Според тоа, нули на функцијта се $x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{6}$, што значи дека графикот на фунцкијата f ја сече $x-$оската во точките $(4-\sqrt{6},0)$ и $(4+\sqrt{6},0)$ (црт. 16). ♦



Црт. 16

Да се вратиме на општиот случај. Ќе го користиме споменатиот метод на дополнување до полн квадрат. При изучувањето на квадратната равенка видовме дека

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}) = a[(x + \tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{b^2-4ac}{4a^2}] = a(x + \tfrac{b}{2a})^2 + \tfrac{4ac-b^2}{4a}.$$

Ако последното равенство го споредиме со равенството $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ од претходните разгледувања заклучуваме дека:

- графикот на квадратната функција е парабола која се добива со транслација на параболата $y = ax^2$,
- теме на параболата е точката $T(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$,
- оска на симетрија е правата $x = -\frac{b}{2a}$ и
- параболата $y = ax^2 + bx + c$ е отворена нагоре ако $a > 0$, односно надолу ако $a < 0$.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

18. Нацртај го графикот на функцијата $f(x)=a(x-x_0)^2+y_0$, ако:

а) $a=-2, x_0=1, y_0=2$, б) $a=-\frac{1}{2}, x_0=2, y_0=-1$ и в) $a=4, x_0=1, y_0=-2$.

19. Нацртај го графикот на функцијата $f(x)=a(x-x_0)^2+y_0$, ако нејзиниот график има тема:

а) $T(4,2)$ и минува низ точката $M(3,-1)$,

б) $T(-3,-2)$ и ја сече $x-$оската во точка со апциса -5,

в) $T(2,-1)$ и ја сече $y-$оската во точка со ордината 7.

20. Нацртај го графикот на функцијата:

а) $f(x)=x^2-4x+5$, б) $f(x)=-x^2+6x-5$ и в) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x-3$.

21. Најди ги темето и оската на соометрија на квадратната функција:

а) $f(x)=x^2+x+1$, б) $f(x)=-x^2+2x-2$ и в) $f(x)=\frac{1}{4}x^2+2x+4$.

5. СВОЈСТВА НА КВАДРАТНАТА ФУНКЦИЈА $f(x)=ax^2+bx+c$

Во претходните разгледувања со помош на графикот на основната квадратна функција $f(x)=x^2$ го конструиравме графикот на функцијата од видот $f(x)=ax^2$, а потоа со помош на транслацијата и елементарни алгебарски трансформации го конструиравме графикот на квадратаната функција $f(x)=ax^2+bx+c$.

Во оваа точка ќе се навратиме на својствата на квадратната функција и истите ќе ги изведеме на начин на кој најчесто се проучуваат и други функции. Притоа ќе покажеме како графикот на квадратаната функција може да се нацрта со помош на нејзините карактеристични точки.

А) ЕКСТРЕМ, ОСКА НА СИМЕТРИЈА И МНОЖЕСТВО ВРЕДНОСТИ НА КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА

Да ја разгледаме квадратаната функција $f(x)=ax^2+bx+c$. Во претходната точка покажавме дека истата може да се запише во видот

$$f(x)=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}, \qquad (1)$$

кој го нарекуваме *каноничен вид* на квадратната функција $f(x)=ax^2+bx+c$.

Во претходно разгледаните примери видовме дека некои квадратни функции имаат најмала вредност (минимум), а некои имаа најголема вредност (максимум). Минимумот и максимумот на една функција со заедничко име ќе ги нарекуваме *екстреми* или *екстремни вредности* на функцијата. Во претходните разгледувања интуитивно прифативме што значат поимите минимум и максимум на функција, но овде истите ќе ги дефинираме. Така ја имаме следната дефиниција.

Дефиниција 3. Нека $f: A \to \mathbf{R}, A \subseteq \mathbf{R}$. За функцијата f ќе велиме дека во точката $x_0 \in A$ има *екстрем* и тоа:

а) *максимум*, еднаков на $f(x_0)$, ако $f(x_0) \geq f(x)$ за секој $x \in A$;

б) *минимум*, еднаков на $f(x_0)$, ако $f(x_0) \leq f(x)$ за секој $x \in A$.

Во врска со екстремните вредности на квадратната функција $f(x) = ax^2 + bx + c$ ќе ја докажеме следната теорема.

Теорема 1. Нека е дадена квадратана функција $f(x) = ax^2 + bx + c$.

а) Ако $a > 0$, тогаш f во точката $x_0 = -\frac{b}{2a}$ има минимум $f(x_0) = \frac{4ac-b^2}{4a}$.

б) Ако $a < 0$, тогаш f во точката $x_0 = -\frac{b}{2a}$ има максимум $f(x_0) = \frac{4ac-b^2}{4a}$.

Доказ. **а)** Нека $a > 0$. Бидејќи квадрат на реален број е ненегативен реален број и знакот на неравенството не се менува ако го помножиме со позитивен број или ако од двете страни додадеме произволен реален број последователно добиваме:

$(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$, за секој $x \in \mathbf{R}$;

$a(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$, за секој $x \in \mathbf{R}$ и

$a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} \geq \frac{4ac-b^2}{4a}$, за секој $x \in \mathbf{R}$.

Понатаму, ако се искористи канонечниот вид на квадратната равенка (2) добиваме дека $f(-\frac{b}{2a}) = \frac{4ac-b^2}{4a}$, па од последното неравенство следува $f(-\frac{b}{2a}) \leq f(x)$, за секој $x \in \mathbf{R}$, што значи дека функцијата f во точката $x_0 = -\frac{b}{2a}$ има минимум еднаков на $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Тврдењето под б) се докажува аналогно. Обиди се самостојно да го докажеш. користејќи дека знакот на неравенството се менува, ако тоа се помножи со негативен број. ♦

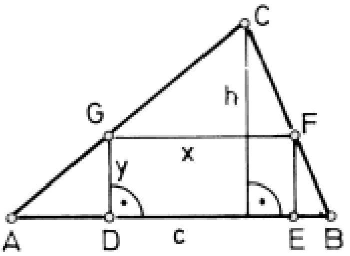
Пример 18. Најди ги екстремните вредности на квадратната функција:

а) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 5$ и **б)** $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 - x - 2$.

Решение. **а)** Бидејќи $a = \frac{1}{2} > 0$ од теорема 1 следува дека за $x_0 = -\frac{b}{2a} = -4$ функцијата има минимум $f(x_0) = f(-4) = \frac{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-5) - 4^2}{4 \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{16}{2} = -8$.

а) Бидејќи $a = -\frac{3}{2} > 0$ од теорема 1 следува дека за $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{3}$ функцијата има минимум $f(x_0) = f(-\frac{1}{3}) = \frac{4 \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-2) - (-1)^2}{4 \cdot (-\frac{3}{2})} = -\frac{11}{6}$. ♦

Пример 19. Од парче лим кое има форма на остроаголен триаголник ABC (црт. 17), треба да се исече правоаголник така, што едната страна да лежи на страната AB на триаголникот и да има најголема можна плоштина. Најди ги должините на страните на правоаголникот.



Црт. 17

Решение. Нека $DEFG$ е правоаголник впишан во триаголникот ABC така што една негова страна лежи на страната AB и нека должините на неговите страни се x и y. Бидејќи $\Delta ABC \sim \Delta GFC$ имаме $c:h = x:(h-y)$, а оттука следува $y = -\frac{h}{c}x + h$. Сега плоштината на правоаголникот е $P = xy$ и ако замениме за y добиваме

$$P(x) = -\frac{h}{c}x^2 + hc,$$

и тоа е квадратна функција по x. Од $-\frac{h}{c} < 0$, според теорема 1, следува дека оваа функција за $x = -\frac{b}{2a} = \frac{c}{2}$ има максимум $P(\frac{c}{2}) = \frac{-h^2}{4\cdot(-\frac{h}{c})} = \frac{hc}{4}$. Втората страна на правоаголникот има должина $y = -\frac{h}{c}\cdot\frac{c}{2} + h = \frac{h}{2}$. ♦

Во претходните разгледувања видовме дека графикот на квадратната функција е парабола и истата има оска на симетрија. Во следната теорема ќе го докажеме ова тврдење, без притоа да ја користиме транслацијата.

Теорема 2. Правата $x = -\frac{b}{2a}$ е оска на симетрија на графикот на квадратната функција $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Доказ. Доволно е да докажеме дека за секој $t \in \mathbf{R}$ е исполнето равенството $f(-\frac{b}{2a} + t) = f(-\frac{b}{2a} - t)$ (зошто?).

Ако го искористиме каноничниот вид на квадратна функција добиваме

$$f(-\frac{b}{2a}+t) = a(-\frac{b}{2a}+t+\frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} = at^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} = a(-\frac{b}{2a}-t+\frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} = f(-\frac{b}{2a}-t),$$

што и требаше да се докаже. ♦

Пример 20. Најди ја оската на симетрија на графикот на квадратната функција:

а) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 5$ и **б)** $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 - x - 2$.

Решение. а) Коефициентите на функцијата се $a = \frac{1}{2}, b = 4$ и $c = -5$, па од теорема 2 следува дека оската на симетрија на нејзиниот график е правата $x = -\frac{b}{2a} = -4$.

б) Аналогно како во задачата под а) наоѓаме дека оската на симетрија е правата $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{3}$. ♦

Теорема 3. За квадратананата функција $f(x)=ax^2+bx+c$ множеството вредности е:

а) $V_f=f(D)=[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty)$, ако $a>0$;

б) $V_f=f(D)=(-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}]$, ако $a<0$.

Доказ **(за оние што сакаат да знаат повеќе)*.*** Ќе го докажеме тврдењето под а). Тврдењето под б) се докажува аналогно.

Нека $t\in[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty)$. Тоа значи дека $t\geq\frac{4ac-b^2}{4a}$. Треба да докажеме дека постои реален број x таков, што $f(x)=t$, т.е дека за секој $t\geq\frac{4ac-b^2}{4a}$ корените на равенката $ax^2+bx+c=t$ која е еквивалентна на равенката

$$ax^2+bx+c-t=0 \tag{2}$$

се реални.

Бидејќи $a>0$ од $t\geq\frac{4ac-b^2}{4a}$ следува дека $4at\geq 4ac-b^2$ (знакот на неравенството не се менува ако го помножиме со позитивен број) односно $b^2-4ac+4at\geq 0$. Според тоа, за дискриминантата на равенката (2) добиваме

$$D=b^2-4a(c-t)=b^2-4ac+4at\geq 0,$$

што значи дека нејзините корени се реални. ♦

Пример 21. Определи го множеството вредности на функцијата:

а) $f(x)=x^2-2x+5$ и **б)** $f(x)=-x^2+4x-3$.

Решение. а) Бидејќи $a=1>0$, од теорема 1 следува дека за $x_0=-\frac{b}{2a}=1$ функцијата има минимум $y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}=4$. Сега, од теорема 3 а) следува дека множеството вредности на функцијата е $V_f=[4,+\infty)$.

б) Бидејќи $a=-1<0$ и $\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{12-16}{-4}=1$, од теорема 3 б) следува дека множеството вредности на функцијата е $V_f=(-\infty,1]$. ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

22. Определи ја екстремната вредност на функцијата:
    а) $f(x)=-\frac{1}{3}x^2-2x+2$, б) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{5}{2}$ и в) $f(x)=-2x^2-12x+15$.
23. За која вредност на параметарот m функцијата $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+m$ има минимум еднаков на 2?
24. За која вредност на параметарот m функцијата $f(x)=(m-1)x^2-2x+m$ има екстрем еднаков на 1?
25. Парче жица долго $40m$ треба да се подели на 4 дела, така што од тие делови да се состави правоаголник со максимална плоштина. Како треба да се подели жицата?
26. Бројот 18 запиши го како збир на два броја така да збирот на нивните квадрати е најмал.
27. Парче жица со должина $56m$ треба да се подели на два дела, од едниот дел да се состави квадрат,а од другиот правоаголник чиј однос на страни е $1:3$. Како да се подели жицата за да збирот на плоштините на квадратот и правоаголникот е минимален?

28. Најди ја страната на најмалиот квадрат, кој може да се впиши во квадрат со страна $6cm$.

29. Во полукруг со дијаметар $10cm$ впиши трапез чија поголема основа е дијаметарот, а неговиот периметар да е максимален.

30. Определи ја оската на симетрија на графикот на функцијата:

а) $f(x)=-\frac{2}{3}x^2-x+2$, б) $f(x)=\frac{5}{2}x^2-7x+1$ и в) $f(x)=-\frac{2}{5}x^2-12x+5$.

31. Определи го множеството вредности на функцијата:

а) $f(x)=-4x^2-2x+\frac{1}{4}$, б) $f(x)=\frac{3}{2}x^2-x+\frac{5}{3}$ и в) $f(x)=-2x^2-x+5$.

Б) РАСТЕЊЕ И ОПАЃАЊЕ, НУЛИ И ЗНАК НА КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА

Во теорема 1 докажавме:

- ако $a>0$, тогаш квадратната функција $f(x)=ax^2+bx+c$ има минимум кој се достигнува во точката $x_0=-\frac{b}{2a}$ и
- ако $a<0$, тогаш квадратната функција $f(x)=ax^2+bx+c$ има максимум кој се достигнува во точката $x_0=-\frac{b}{2a}$.

Логично е да се запрашаме како функцијата се однесува за вредности на аргументот помали, односно поголеми од $x_0=-\frac{b}{2a}$. Во следната теорема ќе докажеме дека во интервалите $(-\infty,-\frac{b}{2a})$ и $(-\frac{b}{2a},+\infty)$ квадратната фунција $f(x)=ax^2+bx+c$ расте или опаѓа, во зависност од знакот на коефициентот a. За таа цел прво попрецизно ќе кажеме што значи функција монотоно да расте, односно монотоно да опаѓа.

Дефиниција 4. Нека $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. За функцијата f ќе велиме дека:

а) моното расте во интервалот (a,b) ако од $x_1<x_2$ следува $f(x_1)<f(x_2)$, за секои $x_1,x_2\in(a,b)$ и

б) моното опаѓа во интервалот (a,b) ако од $x_1<x_2$ следува $f(x_1)>f(x_2)$, за секои $x_1,x_2\in(a,b)$.

Како што знаеме, линеарната функција $f(x)=ax+b$ монотоно расте на целиот интервал ако $a>0$, а опаѓа на овој интервал ако $a<0$.

Теорема 4. а) Ако $a>0$, тогаш квадратната функција $f(x)=ax^2+bx+c$ монотоно опаѓа во интервалот $(-\infty,-\frac{b}{2a})$ и монотоно расте во интервалот $(-\frac{b}{2a},+\infty)$.

б) Ако $a<0$, тогаш квадратната функција $f(x)=ax^2+bx+c$ монотоно расте во интервалот $(-\infty,-\frac{b}{2a})$ и монотоно опаѓа во интервалот $(-\frac{b}{2a},+\infty)$.

Доказ **(за оние што сакаат да знаат повеќе). а)** Нека $x_1<x_2<-\frac{b}{2a}$. Ако кон секоја страна на неравенствата додадеме $\frac{b}{2a}$ добиваме $x_1+\frac{b}{2a}<x_2+\frac{b}{2a}<0$. Неравенството $x_1+\frac{b}{2a}<x_2+\frac{b}{2a}$ прво го множиме со $x_1+\frac{b}{2a}<0$, потоа со $x_2+\frac{b}{2a}<0$ и добиваме $(x_1+\frac{b}{2a})^2>(x_2+\frac{b}{2a})(x_1+\frac{b}{2a})$ и

$(x_2+\frac{b}{2a})(x_1+\frac{b}{2a})>(x_2+\frac{b}{2a})^2$, (знакот на неравенството се менува ако помножиме со негативен број). Од последните две неравенства следува

$$(x_1+\frac{b}{2a})^2>(x_2+\frac{b}{2a})^2. \qquad (3)$$

Понатаму, неравеството (3) го множиме со $a>0$ и го добиваме неравенството

$$a(x_1+\frac{b}{2a})^2>a(x_2+\frac{b}{2a})^2. \qquad (4)$$

Од двете страни на неравенството (4) додаваме $\frac{4ac-b^2}{4a}$ и го добиваме неравенството

$$a(x_1+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}>a(x_2+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

т.е. ако се има предвид каноничниот вид на квадратна функција неравенството $f(x_1)>f(x_2)$, што значи дека f монотоно опаѓа во интервалот $(-\infty,-\frac{b}{2a})$.

Ако $-\frac{b}{2a}<x_1<x_2$, тогаш $0<x_1+\frac{b}{2a}<x_2+\frac{b}{2a}$ и повторно со множење со $0<x_1+\frac{b}{2a}$ и $0<x_2+\frac{b}{2a}$ се добиваат неравенствата $(x_1+\frac{b}{2a})^2<(x_2+\frac{b}{2a})(x_1+\frac{b}{2a})$ и $(x_2+\frac{b}{2a})(x_1+\frac{b}{2a})<(x_2+\frac{b}{2a})^2$ од каде што следува неравенството $(x_1+\frac{b}{2a})^2<(x_2+\frac{b}{2a})^2$. Сега, ако последното неравенство го помножиме со $a>0$, а потоа на двете страни на добиеното неравенство додадеме $\frac{4ac-b^2}{4a}$ го добиваме неравенството $a(x_1+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}<a(x_2+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ т.е. неравенството $f(x_1)<f(x_2)$, што значи дека f монотоно расте во интервалот $(-\frac{b}{2a},+\infty)$.

б) Доказот е аналоген на доказот на тврдењето под а). Обиди се истиот самостојно да го реализираш. ♦

Пример 22. Определи ги интервалите на монотоност на функцијата:

а) $f(x)=7x^2-8x+5$ и **б)** $f(x)=-2x^2+4x-3$.

Решение. а) Бидејќи $a=7>0$ и $-\frac{b}{2a}=-\frac{-8}{2\cdot 7}=\frac{4}{7}$, од теорема 4 а) следува дека на интервалот $(-\infty,\frac{4}{7})$ функцијата монотоно опаѓа, а на интервалот $(\frac{4}{7},+\infty)$ таа монотоно расте.

б) Бидејќи $a=-2<0$ и $-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\cdot(-2)}=1$, од теорема 4 а) следува дека на интервалот $(-\infty,1)$ функцијата монотоно расте, а на интервалот $(1,+\infty)$ таа монотоно опаѓа. ♦

Во дефиниција 2 нулите на функцијата f ги дефинираввме како реални решенија на равенката $f(x)=0$. Според тоа, нули на квадратната функција

$$f(x)=ax^2+bx+c \qquad (5)$$

се реалните корени на квадратната равенка

$$ax^2+bx+c=0. \qquad (6)$$

Со D повторно да ја означиме дискриминантата на равенката (6). Имаме:

- ако $D<0$, тогаш корените на равенката (6) се коњугирано комплексни броеви, што значи графикот на функцијата (5) нема заеднички точки со $x-$оската,
- ако $D=0$, тогаш равенката (6) има реални и еднакви корени, т.е. $x_1=x_2$, што значи графикот на функцијата (5) ја допира $x-$оската и

- ако $D>0$, тогаш равенката (6) има реални и различни корени x_1 и x_2, што значи графикот на функцијата (5) ја сече во две точки $x-$оската.

Пример 23. Определи ги нулите на функцијата:

а) $f(x)=7x^2-8x+5$, **б)** $f(x)=-2x^2+4x+3$ и **в)** $f(x)=7x^2+63x+\frac{63}{4}$.

Решение. а) Бидејќи $D=64-140<0$ функцијата нема нули.

б) Од $D=16+24>0$ следува дека функцијата има две нули и тоа

$$x_{1/2}=\frac{-4\pm\sqrt{40}}{-4}=\frac{-4\pm2\sqrt{10}}{-4}=1\mp\frac{\sqrt{10}}{2}$$

в) Од $D=63^2-63\cdot7>0$ следува дека дека функцијата има две нули и тоа

$$x_{1/2}=\frac{-63\pm\sqrt{63^2-63\cdot7}}{14}=\frac{-63\pm42\sqrt{2}}{14}=\frac{-9\pm6\sqrt{2}}{2}\,.\ \blacklozenge$$

Пример 24. Нека е дадена фамилијата квадратни фунцкии

$$f(x)=kx^2-2x-k-2,\quad k\in\mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

Докажи дека секоја од овие функции има реални нули.

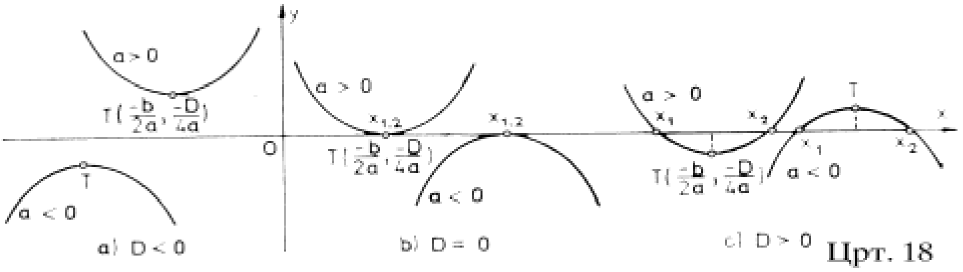
Решение. За дискриминантата D на секоја функција од фамилијата имаме

$$D=(-2)^2-4k(-k-2)=4+8k+4k^2=(2+2k)^2\geq0,$$

што значи дека нејзините нули се реални. Јасно, за $k=-1$ нулите се реални и еднакви, а за $k\neq-1$ тие се реални и различни. ♦

Да се потсетиме, при проучувањето на квадратните равенки го разгледавме прашањето за знакот на квадратниот трином ax^2+bx+c. Притоа покажавме дека:

1. Ако ако $D<0$, т.е. триномот нема реални корени, тогаш
   - а) за $a>0$ важи $P(x)>0$, за секој $x\in\mathbf{R}$ и
   - б) за $a<0$ важи $P(x)<0$, за секој $x\in\mathbf{R}$.
2. Ако $D=0$, т.е. триномот има двоен корен $x_1=x_2$, тогаш
   - а) за $a>0$ важи $P(x)>0$, за секој $x\in\mathbf{R}\setminus\{x_1\}$ и
   - б) за $a<0$ важи $P(x)<0$, за секој $x\in\mathbf{R}\setminus\{x_1\}$.
3. Ако $D>0$, т.е. триномот има два реални и различни корени x_1 и x_2, $x_1<x_2$, кои го разбиваат множеството реални броеви на три дисјунктни интервали: $(-\infty,x_1),[x_1,x_2]$ и $(x_2,+\infty)$, тогаш
   - а) за $a>0$ важи $P(x)>0$, за секој $x\in(-\infty,x_1)$, $P(x)\leq0$, за секој $x\in[x_1,x_2]$ и $P(x)>0$, за секој $x\in(x_2,+\infty)$.



Црт. 18

б) за $a<0$ важи $P(x)<0$, за секој $x\in(-\infty,x_1)$, $P(x)\geq 0$, за секој $x\in[x_1,x_2]$ и $P(x)<0$, за секој $x\in(x_2,+\infty)$.

Бидејќи прашањето за знакот на квадратниот трином ax^2+bx+c е еквивалентно на прашањето за знакот на квадратната функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$, тврдењата 1, 2 и 3 важат за знакот на квадратната функција и истите се илустрирани на црт. 18.

Пример 25. Определи го знакот на функцијата:

а) $f(x)=7x^2-8x+5$, **б)** $f(x)=-2x^2+4x+3$ и **в)** $f(x)=7x^2+21x+\frac{63}{4}$.

Решение. а) Од $D=64-140<0$ и $a=7>0$ следува $f(x)>0$, за секој $x\in\mathbf{R}$.

б) Од $D=16+24>0$ следува дека функцијата има две нули и тоа

$$x_{1/2}=\frac{-4\pm\sqrt{40}}{-4}=\frac{-4\pm2\sqrt{10}}{-4}=1\mp\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Понатаму, $a=-2<0$, па затоа:

- $f(x)<0$, за секој $x\in(-\infty,1-\frac{\sqrt{10}}{2})$,
- $f(x)>0$, за секој $x\in(1-\frac{\sqrt{10}}{2},1+\frac{\sqrt{10}}{2})$ и
- $f(x)<0$, за секој $x\in(1+\frac{\sqrt{10}}{2},+\infty)$.

в) Од $D=21^2-63\cdot7=0$ и $a=7>0$ следува дека $f(x)>0$, за секој $x\in\mathbf{R}\setminus\{\frac{3}{2}\}$. ♦

Пример 26. За која вредност на x дропката $\frac{1}{x^2-2x+2}$ има најголема вредност.

Решение. Броителот на дропката е позитивна константа, а именителот е квадратна функција со $a=1>0$ и $D=(-2)^2-4\cdot1\cdot2=-4<0$, т.е тој е позитивен за секој реален број x. Затоа дропката прима најмала вредност кога именителот е најголем, т.е. кога квадратната функција $f(x)=x^2-2x+2$ достигнува максимум, а тоа е за $x=1$ и притоа вредноста на дропката е 1. ♦

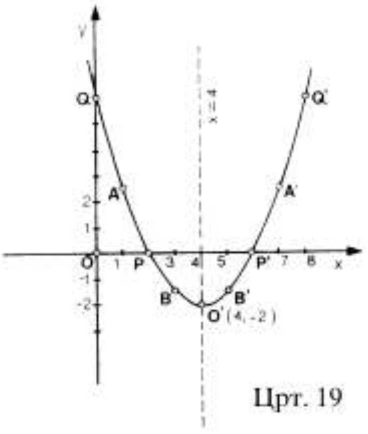
На крајот од овој дел ќе докажеме како со помош на својствата на квадратната функција може да се конструира графикот на квадратната функција.

Пример 27. Конструирај го графикот на функцијата $f(x)=\frac{1}{2}x^2-4x+6$.

Решение. За дадената функција имаме $a=\frac{1}{2}, b=-4$ и $c=6$

а) Оската на симетрија на графикот на функцијата (параболата) е правата $x=-\frac{b}{2a}=4$.

б) Бидејќи $a>0$, функцијата има минимум $x_0=-\frac{b}{2a}=4$ и тоа $f(x_0)=\frac{4ac-b^2}{4a}=-2$, па затоа темето на параболата е $O'(4,-2)$ и параболата е отворена нагоре.



Црт. 19

в) Од $D=b^2-4ac=4$ следува дека функцијата има две нули и тоа $x_{1/2}=\frac{4\pm2}{1}$, што значи параболата ја сече $x-$оската во точките $P(2,0)$ и $P'(6,0)$.

г) За $x=0$ добиваме $y=6$, што значи дека параболата ја сече $y-$оската во точката $Q(0,6)$, а исто така и точката $Q'(8,6)$ е точка од параболата (зошто?).

д) Функцијата монотоно опаѓа на интервалот $(-\infty,4)$, а расте на интервалот $(4,+\infty)$, потоа $f(x)>0$ на интервалите $(-\infty,2)$ и $(6,+\infty)$, а $f(x)<0$ на интервалот $(2,6)$.

Сега, во координатниот систем ги нанесуваме најдените елементи и го конструираме графикот на функцијата, водејќи сметка за д).

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

32. Определи ги интервалите на монотоност на функцијата:

а) $f(x)=-\frac{1}{3}x^2-2x+2$, б) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{5}{2}$ и в) $f(x)=-2x^2-12x+15$.

33. а) Докажи дека апцисата $x_0=-\frac{b}{2a}$ минимумот на функцијата $f(x)=x^2+6x+5$ е аритметичка средина на нулите на функцијата.

б) Ако се x_0, x_1 и x_2 апцисите на екстремот и нулите (доколку ги има) на квадратната функција $f(x)=ax^2+bx+c$, докажи дека $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$.

34. Без да ги пресметуваш нулите, докажи дека интервалот $(-5,-2)$ содржи точно една нула на функцијата $f(x)=x^2+4x+3$

Упатство. Определи ја оската на симетрија и заклучи дека е потребно и доволно броевите $f(-5)$ и $f(-2)$ да имаат спротивни знаци.

35. За кои вредности на x функцијата

а) $f(x)=3x^2-5x-5$, б) $f(x)=16x^2-24x+9$ и в) $f(x)=-x^2+x+6$

прима позитивни вредности.

36. За кои вредности на x функцијата

а) $f(x)=4x^2+11x-3$, б) $f(x)=9x^2-6x+1$ и в) $f(x)=-2x^2+5x+3$

прима негативни вредности.

37. Определи го знакот на квадратаната функција

а) $f(x)=x^2-2x+6$, б) $f(x)=2x^2-5x-3$ и в) $f(x)=3x^2+x-3$

38. За која вредност на параметарот m функцијата $f(x)=mx^2-2(m-1)x+m$ е негативна за секој реален број x.

39. За кои вредности на x дропката

а) $\frac{4}{x^2-6x+11}$ има најголема вредност, б) $\frac{1}{-x^2+6x-11}$ има најмала вредност.

6. ГЕОМЕТРИСКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА НА СИСТЕМ РАВЕНКИ ОВ ВИДОТ $\begin{cases} ax^2+bx+c=y \\ ex+f=y. \end{cases}$

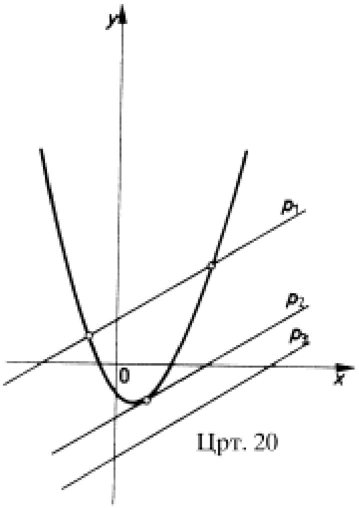
При пручувањето на квадратните равенки ги проучивме и ситемите со две непознати составени од една линеарна и една квадратана равенка, без да навлегуваме во геометриската интерпретација на истите, која овде ќе ја дадеме само за некои од овие системи.

Да го разгледаме системот од видот

$$\begin{cases} ax^2+bx+c=y \\ ex+fy=d. \end{cases} \qquad (1)$$

Како што знаеме $y=ax^2+bx+c$ е равенка на парабола, а $ex+fy=d$ е равенка на права. Ако, $f=0$, тогаш $x=-\frac{d}{e}$ и ако замениме во правата равенка на (1) добиваме дека системот има едно решение. Ако $f\neq 0$, тогаш $y=-\frac{e}{f}x+\frac{d}{f}$ и ако замениме во правата равенка на (1) и ја добиваме квадратната равенка

$$ax^2+(b+\tfrac{e}{f})x+c-\tfrac{d}{f}=0. \qquad (2)$$



Црт. 20

Понатаму, во зависност од знакот на дискриминантата $D=(b+\frac{e}{f})^2-4a(c-\frac{d}{f})$, равенката (2) може да има две, едно или ниедно реално решение.

Од претходната дискусија следува дека системот (1) може да има две, едно или ниедно решение. Последното значи дека парабола и права може да немаат заеднички точки или да имаат една или две заеднички точки (црт. 20, кога $f\neq 0$).

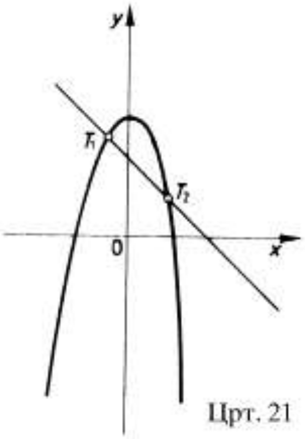
Пример 28. Најди го пресекот на параболата $y=-2x^2+3$ и правата $y+x=2$.

Решение. Како што рековме пресечните точки на правата и параболата ги наоѓаме како решение на системот равенки

$$\begin{cases} y=-2x^2+3 \\ y+x=2. \end{cases}$$

Од втората равенка наоѓаме $y=2-x$ и заменуваме во правата и после средувањето ја добиваме квадратната равенка

$$2x^2-x-1=0,$$

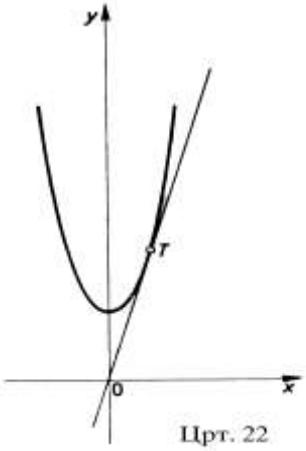


Црт. 21

чии корени се $x_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm3}{4}$ т.е. $x_1=-\frac{1}{2}$ и $x_2=1$. Сега за $x_1=-\frac{1}{2}$ од равенката $y=2-x$ добиваме $y_1=2-(-\frac{1}{2})=\frac{5}{2}$, а за $x_2=1$ имаме $y_2=3$.

Конечно, правата и параболата се сечат во точките $T_1(-\frac{1}{2},\frac{5}{2})$ и $T_1(1{,}3)$ (црт. 21). ♦

Пример 29. Најди го пресекот на параболата $y=2x^2+2$ и правата $y=4x$.



Црт. 22

Решение. Пресечните точки на правата и параболата ги наоѓаме како решение на системот равенки

$$\begin{cases} y=2x^2+2 \\ y=4x. \end{cases}$$

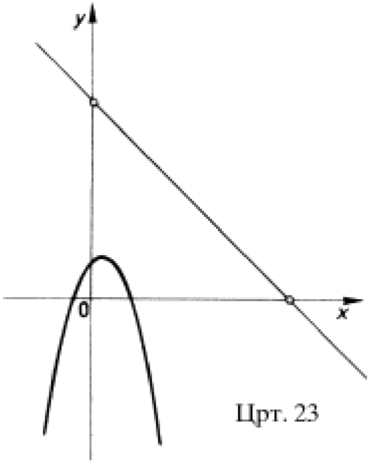
Заменуваме $y=4x$ од втората во правата равенка и после средувањето ја добиваме квадратната равенка

$$2x^2-4x+2=0\,,$$

која има двоен корен $x_{1/2}=1$, па затоа $y_{1/2}=4$.

Конечно, правата и параболата се допираат во точката $T(1{,}4)$ (црт. 22). ♦

Пример 30. Најди го пресекот на параболата $y=-2x^2+x+1$ и правата $y+x=5$.



Црт. 23

Решение. Пресечните точки на правата и параболата ги наоѓаме како решение на системот равенки

$$\begin{cases} y=-2x^2+x+1 \\ x+y=5. \end{cases}$$

Заменуваме $y=5-x$ од втората во првата равенка и после средувањето ја добиваме квадратната равенка

$$-x^2+x-2=0\,.$$

Последната равенка има коњугирано комплексни корени $x_{1/2}=\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{-2}1$, што значи дека параболата и правата немаат заеднички точки. ♦

Претходно изнесената постапка за наоѓање на пресечните точки на права и парабола може да се искористи за графичко решавање на квадратната равенка

$$ax^2+bx+c=0\,. \tag{3}$$

Бидејќи $a\neq0$, равенката (3) можеме да ја запишеме во обликот $x^2=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$. Ги разгледуваме параболата $y=x^2$ и правата $y=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$. Јасно, нивниот пресек е решение на равенката (3). Според тоа, за да графички ја решиме равенката (3) доволно е во ист координатен систем да ги нацртаме параболата и правата и да ги најдеме апцисите на нивните пресечни точки. Јасно, на крајот со замена во равенката треба да провериме дали точно сме работеле, бидејќи станува збор за цртање на графици и мерење на должини при што се можни грешки.

Пример 31. Равенката $x^2-2x-3=0$ реши ја графички.

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во обликот

$$x^2=2x+3,$$

од каде ги наоѓаме параболата $y=x^2$ и правата $y=2x+3$. Понатаму, во ист координатен систем прецизно ги цртаме гарфиците на правата и параболата (црт. 24). Како што гледаме нивните пресечни точки се $(-1,1)$ и $(3,9)$. Според тоа, решенијата на квадратната равенка $x^2-2x-3=0$ се апцисите на пресечните точки $x_1=-1$ и $x_2=3$.

Црт. 24

Проверка. Со замена во дадената равенка за $x_1=-1$ добиваме

$$(-1)^2-2(-1)x-3=1+2-3=0$$

што значи дека најденото решение е точно. За $x_2=3$ има е

$$3^2-2\cdot 3x-3=9-6-3=0$$

што значи дека најденото решение е точно. ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

40. Најди го пресекот на:
    а) параболата $y=x^2+x-7$ и правата $y=x+2$,
    б) параболата $y=x^2-4x-2$ и правата $y=-2x+1$,
    в) параболата $y=2x^2+3x+1$ и правата $y=3x-1$,
    г) параболата $y=3x^2-x+2$ и правата $y=-x+5$,
    д) параболата $y=2x^2-3x+3$ и правата $y=2$,
41. Најди го пресекот на параболите $y=x^2+x-6$ и $y=-x^2+2x-3$.
    Упатство. Апцисите на пресечните точки ги наоѓаме како решенија на равенката $x^2+x-6=-x^2+2x-3$
42. Графички реши ги квадратните равенки:
    а) $x^2-2x+6=0$, б) $2x^2-5x-3=0$ и в) $3x^2+x-2=0$

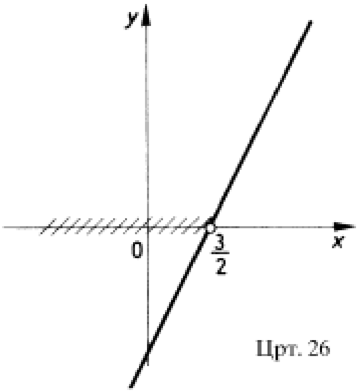
7. КВАДРАТНИ НЕРАВЕНКИ

Минатата учебна година го усвои решавањето на линеарните неравенки со една непозната. Да разгледаме еден пример.

Пример 32. Реши ја неравенката $2x-3<0$.

Решение. Од $2x-3<0$ следува $2x<3$, па затоа $x<\frac{3}{2}$. Според тоа, решението на неравенката е множеството $(-\infty,\frac{3}{2})$. Ова множество е прикажано на црт. 25.

Црт. 25



Црт. 26

Оваа неравенка можеме да ја решиме и графички. Ја разгледуваме функцијата $g(x)=2x-3$. Нејзиниот график е правата $y=2x-3$ (црт. 26) која ја сече $x-$оската во точката $(\frac{3}{2},0)$.

Од црт. 26 гледаме дека функцијата прима негативни вредности, односно дека правата $y=2x-3$ е под $x-$оската за точки чии апциси x се лево од $\frac{3}{2}$, т.е. $g(x)<0$ ако и само ако $x<\frac{3}{2}$, што значи дека множеството решенија на неравенката $2x-3<0$ е $(-\infty,\frac{3}{2})$. ♦

Во пример 32 на левата страна од знакот за неравенство имаме полином од прва степен, а на десната страна константа. Сличен облик има и квадратната неравенка. Поточно ја имаме следната дефиниција.

Дефиниција 5. Неравенката од видот $ax^2+bx+c>0$ или $ax^2+bx+c<0$, односно $ax^2+bx+c\geq 0$ или $ax^2+bx+c\leq 0$ каде што $a,b,c\in\mathbf{R}, a\neq 0$ ја нарекуваме квадратна неравенка со една непозната.

Забелешка 5. Ако ставиме $f(x)=ax^2+bx+c$, тогаш соодветните неравенки од дефиниција 5 можеме да ги запишеме во обликот $f(x)<0$ или $f(x)>0$, односно $f(x)\leq 0$ или $f(x)\geq 0$.

Слично како во пример 32 решавањето на квадратните неравенки од видот $f(x)<0$ односно $f(x)>0$ се сведува на наоѓање на вредностите на x, за кои функцијата $f(x)$ е негативна, односно позитивна. Множеството решенија, пак, на неравенките $f(x)\leq 0$ односно $f(x)\geq 0$ ги содржи уште и нулите на функцијата $f(x)$.

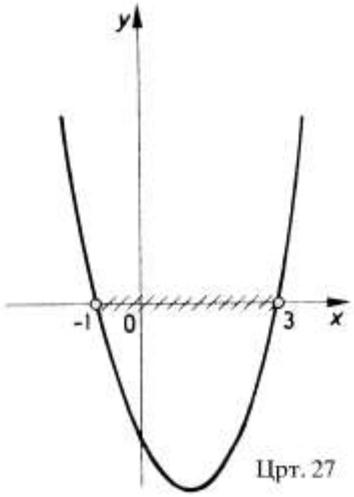
Пред да преминеме на разгледување на примери да забележиме дека ако $f(x)$ и $g(x)$ се квадратни триноми со различни коефициенти пред квадратниот член, тогаш неравенката од облик $f(x)<g(x)$ е квадратна неравенка. Последната неравенка е еквивалентна на неравенката $f(x)-g(x)<0$, т.е. на неравенката $g(x)-f(x)>0$, за кои ќе велиме дека се запишани во *нормален вид*.

Во нашите разгледувања квадратните неравенки ќе ги решаваме со помош на знакот на квадратната функција, но важно е да се знае дека истите можеме да ги решаваме и со разложување на квадратниот трином $f(x)=ax^2+bx+c$, при што треба да ги користиме тврдењата:

а) $f(x)g(x)>0$ ако и само ако $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$ и

б) $f(x)g(x)<0$ ако и само ако $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)<0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)<0 \end{cases}$

при што во случај кога во неравенките фигурира еден од знаците $\leq$ или $\geq$, тогаш истите знаци соодветно се појавуваат и во системите во тврдењата а) и б).



Црт. 27

Пример 33. Реши ја квадратната неравенка

$$x^2-2x-3<0.$$

Решение. Ја разгледуваме функцијата

$$f(x)=x^2-2x-3.$$

Нулите на функцијата се решенија на квадратната равенка $x^2-2x-3=0$ и тоа се $x_1=-1$ и $x_2=3$. Графикот на функцијата е парабола отворена нагоре која ја сече $x-$оската во точките $(-1,0)$ и $(3,0)$. Ова ни е доволно да ја скицираме параболата $y=x^2-2x-3$ (црт. 27) и од графикот да заклучиме за кои реални броеви x функцијата f прима негативни вредности, односно за кои вредности на x параболата е под $x-$оската. Тоа се точките чии апциси се меѓу -1 и 3. Според тоа, $f(x)<0$ ако и само ако $x\in(-1,3)$, па затоа $x\in(-1,3)$ е решение на равенката $x^2-2x-3<0$. ♦

Пример 34. Реши ја квадратната неравенка

$$x^2+2x-15>0.$$

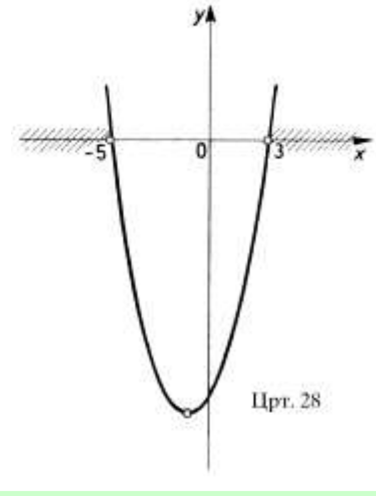
Решение. Графикот на функцијата

$$f(x)=x^2+2x-15$$

е парабола отворена нагоре која ја сече $x-$оската во точките $(-5,0)$ и $(3,0)$. На црт. 28 е даден графикот на оваа функција од кој се гледа дека $f(x)>0$ ако и само ако $x\in(-\infty,-5)$ и $x\in(3,+\infty)$. Според тоа, решение на неравенката $x^2+2x-15>0$ е множеството

$$(-\infty,-5)\cup(3,+\infty),$$

т.е. множеството $\mathbf{R}\setminus[-5,3]$.



Црт. 28

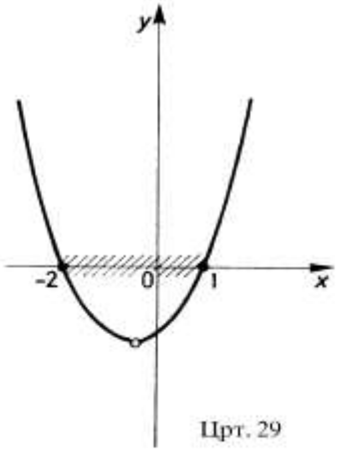
Ќе покажеме како дадената равенка може да се реши и без користење на графикот на функцијата $f(x)=x^2+2x-15$. Го разгледуваме квадратниот трином $x^2+2x-15$ чии нули се $x_1=-5$ и $x_2=3$. Според тоа, $x^2+2x-15=(x+5)(x-3)$, па дадената равенка го добива обликот

$$(x+5)(x-3)>0.$$

Ако се искористи тврдењето под а) ги добиваме дека неравенката е еквивалентна на севкупноста системи неравенки

$$\begin{cases} x+5>0 \\ x-3>0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+5<0 \\ x-3<0 \end{cases}.$$

Според тоа, $\begin{cases} x>-5 \\ x>3 \end{cases} \Rightarrow x>3$ (зошто?) или $\begin{cases} x<-5 \\ x<3 \end{cases} \Rightarrow x<-5$. Конечно, решението на дадената дадената неравенка е $x<-5$ или $x>3$ т.е. множеството $(-\infty,-5)\cup(3,+\infty)=\mathbf{R}\setminus[-5,3]$. ♦



Црт. 29

Пример 35. Реши ја квадратната неравенка

$$x^2+x+3\leq 5.$$

Решение. По средувањето на неравенката го добиваме видот $x^2+x-2\leq 0$. Графикот на функцијата

$$f(x)=x^2+x-2.$$

ја сече $x-$оската во точки со апсциси $x_1=-2$ и $x_2=1$. Гледаме дека $f(x)\leq 0$ за $x\in[-2,1]$. Според тоа, решение на неравенката $x^2+x+3\leq 5$ е множеството $[-2,1]$ (црт. 29). ♦

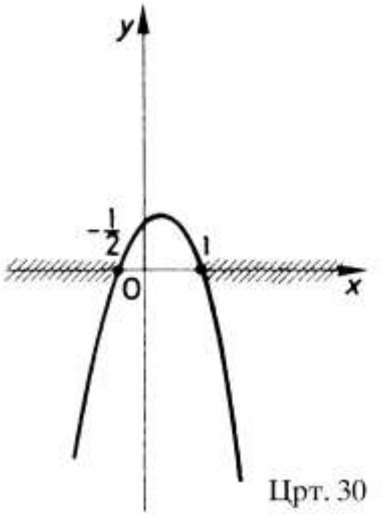
Пример 36. Реши ја квадратната неравенка

$$-2x^2+2x\leq x-1.$$

Решение. По средувањето на неравенката го добиваме видот $-2x^2+x+1\leq 0$. Графикот на функцијата

$$f(x)=-x^2+x+1.$$

ја сече $x-$оската во точки со апсциси $x_1=-\frac{1}{2}$ и $x_2=1$. Гледаме дека $f(x)\leq 0$ за $x\in(-\infty,-\frac{1}{2}]\cup[1,+\infty)$. Според тоа, решение на неравенката $x^2+x+3\leq 5$ е множеството $x\in(-\infty,-\frac{1}{2}]\cup[1,+\infty)$, т.е. множеството $\mathbf{R}\setminus(-\frac{1}{2},1)$ (црт. 30). ♦



Црт. 30

Пример 37. Реши ги квадратните неравенки

а) $x^2+2x+1<0$, **б)** $4x^2-4x+1\leq 0$ и **в)** $9x^2-6x+1>0$

Решение. а) Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката $(x+1)^2<0$ која нема решение бидејќи квадрат на реален број не може да биде негативен број.

б) Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката $(2x-1)^2\leq 0$ чие решение е $x=\frac{1}{2}$ (зошто?).

в) неравенката е еквивалентна на неравенката $(3x-1)^2>0$ чие решение е множеството $\mathbf{R}\setminus\{\frac{1}{3}\}$ (зошто?). ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

43. Реши ја линеарната неравенка:
    а) $5-4x+8+2x>-17$, б) $-4<-5-4x$ и в) $-x+4-3x\geq 24$
44. Реши ја квадратната неравенка:
    а) $x^2+2x-15<0$, б) $\frac{(x-1)^2}{4}\leq 1-\frac{x-1}{2}$, в) $4x^2-9>0$, г) $x^2-2x+2\geq 0$,
    д) $x^2-2x-24>0$, ѓ) $x^2+3x+1\geq 0$, е) $-x^2+3x+1\leq 0$ и ж) $4x^2+3x-12\geq 0$

8. СИСТЕМ КВАДРАТНИ НЕРАВЕНКИ

Минатата учебна година се запозна со решавањето на системи линеарни неравенки со една непозната. Во пример 30 видовме како системите линеарни неравенки можат да се искористат за решавање на квадратна неравенка со една непозната. Во овој дел ќе покажеме како се решаваат системите квадратни неравенки со една непозната, на кои се сведува решавањето на некои проблеми во математиката и практиката.

Дефиниција 6. Системот од видот

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1x+c_1>0 & (\text{или } <0,\ \text{или} \geq 0,\ \text{или} \leq 0) \\ a_2x^2+b_2x+c_2>0 & (\text{или } <0,\ \text{или} \geq 0,\ \text{или} \leq 0) \end{cases} \qquad (1)$$

го нарекуваме *систем од две квадратни неравенки со една непозната.*

Нека M_1 и M_2 се множествата решенија на првата и втората неравенка на системот (1), соодветно. Реалниот број x е решение на системот (1) ако и само ако тој е решение и на двете негови неравенки, т.е. ако и само ако $x\in M_1\cap M_2$. Според тоа, множеството решенија на системот (1) е $M=M_1\cap M_2$.

Пример 38. Реши го системот квадратни неравенки

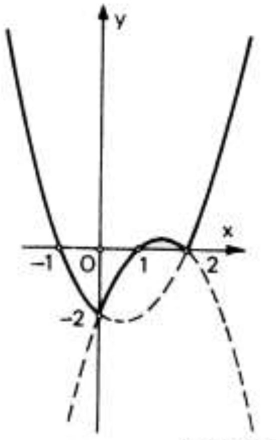
$$\begin{cases} -x^2+3x-2\geq 0 \\ x^2-x-2<0 \end{cases}.$$

Решение. Прво да ја решиме неравенката $-x^2+3x-2\geq 0$. Нулите на функцијата

$$f(x)=-x^2+3x-2$$

се $x_1=1$ и $x_2=2$ и нејзиниот график е парабола отворена надолу (црт. 31). Според тоа, нејзиното решение е множеството $M_1=[1,2]$. Аналогно, нулите на функцијата

$$g(x)=x^2-x-2$$



Црт. 31

се $x_1=-1$ и $x_2=2$ и нејзиниот график е парабола отворена нагоре (црт. 31). Според тоа, нејзиното решение е множеството $M_2=(-1,2)$ (црт. 30).

Конечно, решение на дадениот систем е множеството

$$M=M_1\cap M_2=[1,2]\cap(-1,2)=[1,2).\ \blacklozenge$$

При решавањето на многу задачи често пати се користат следните тврдења:

а) $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ ако и само ако $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$ и

б) $\frac{f(x)}{g(x)}<0$ ако и само ако $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)<0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)<0 \end{cases}$

при што во случај кога во неравенките фигурира еден од знаците $\leq$ или $\geq$, тогаш истите знаци соодветно се појавуваат и во неравенките за броителот во системите во тврдењата а) и б).

Пример 39. Реши ја неравенката

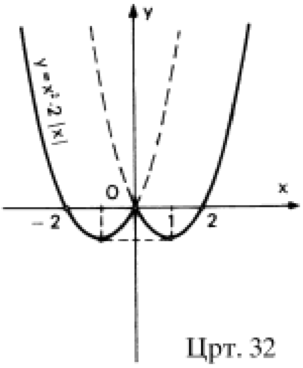
$$\frac{x^2-2x}{x^2+2x}\geq 0.$$

Решение. Согласно тврдењето а) дадената неравенка е еквивалентна на вкупноста од системите неравенки

$$\begin{cases} x^2-2x\geq 0 \\ x^2+2x>0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x^2-2x\leq 0 \\ x^2+2x<0. \end{cases}$$

Ги разгледуваме функциите

$$f(x)=x^2-2x \text{ и } g(x)=x^2+2x,$$



Црт. 32

чии графици се параболи отворени нагоре. Нулите на f и g се $x_1=0$, $x_2=2$ и $x_1=-2$ и $x_2=0$ (црт. 32). Решение на неравенката $x^2-2x\geq 0$ е множеството $M_1=\mathbf{R}\setminus(0,2)$, а на неравенката $x^2+2x>0$ е множеството $M_2=\mathbf{R}\setminus[-2,0]$. Според тоа, решение на системот

$$\begin{cases} x^2-2x\geq 0 \\ x^2+2x>0 \end{cases}$$

е множеството $M=M_1\cap M_2=\mathbf{R}\setminus[-2,2)$.

Понатаму, решение на неравенката $x^2-2x\leq 0$ е множеството $N_1=[0,2]$, а на неравенката $x^2+2x<0$ е множеството $N_2=(-2,0)$. Според тоа, решение на системот

$$\begin{cases} x^2-2x\leq 0 \\ x^2+2x<0 \end{cases}$$

е множеството $N=N_1\cap N_2=(-2,0)\cap[0.2]=\varnothing$, што значи дека тој нема решенија.

Конечно, решение на неравенката $\frac{x^2-2x}{x^2+2x}\geq 0$ е множеството

$$A=M\cup N=\mathbf{R}\setminus[-2,2).\ ♦$$

Пример 40. Реши ја квадратната неравенка

$$\frac{-x^2+2x-5}{2x^2-x-1}<-1.$$

Решение. Имаме

$$\frac{-x^2+2x-5}{2x^2-x-1}<-1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-x^2+2x-5}{2x^2-x-1}+1<0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-x^2+2x-5+2x^2-x-1}{2x^2-x-1}<0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2+x-6}{2x^2-x-1}<0.$$

Согласно тврдењето б) дадената неравенка е еквивалентна на вкупноста од системите неравенки

$$\begin{cases} x^2+x-6<0 \\ 2x^2-x-1>0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x^2+x-6>0 \\ 2x^2-x-1<0. \end{cases}$$

Решение на неравенката $x^2+x-6<0$ е множеството $M_1=(-3,2)$, а на неравенката $2x^2-x-1>0$ е множеството $M_2=(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(1,+\infty)$. Според тоа, решение на системот

$$\begin{cases} x^2+x-6<0 \\ 2x^2-x-1>0 \end{cases}$$

е множеството $M=M_1\cap M_2=(-3,-\frac{1}{2})\cup(1,2)$.

Понатаму, решение на неравенката $x^2+x-6>0$ е $N_1=(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$, а на неравенката $2x^2-x-1<0$ е множеството $N_2=(-\frac{1}{2},1)$. Според тоа, решение на системот

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 > 0 \\ 2x^2 - x - 1 < 0 \end{cases}$$

е множеството $N = N_1 \cap N_2 = \varnothing$.

Конечно, решение на неравенката $\frac{-x^2+2x-5}{2x^2-x-1} < -1$ е множеството

$$A = M \cup N = (-3, -\tfrac{1}{2}) \cup (1,2)\,.\ \blacklozenge$$

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

45. Реши ги системите неравенки:

а) $\begin{cases} x^2 - x - 6 > 0 \\ 2x + 15 \geq x^2, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 7x + 10 \geq 0 \\ \frac{x^2+7}{2} < 4x, \end{cases}$ в) $\begin{cases} (x+2)(x-3) \geq 3(x-2) \\ \frac{x-3}{2} - \frac{x(x+2)}{3} < x - 1. \end{cases}$

46. Реши ја неравенката: а) $\frac{5x^2+2x+1}{2x^2-7x+3} < 0$ и б) $\frac{x^2+5x+1}{2x^2-4x+3} \geq 0$

Упатство. а) Квадратниот трином во броителот има дискриминанта $D = -16 < 0$ и како $a > 0$, овој трином е позитивен за секој $x \in \mathbf{R}$. Затоа дадената неравенка е еквивалентна на неравенката $2x^2 - 7x + 3 < 0$.

47. Реши ги неравенките:

а) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1} > 0$, б) $\frac{x^2-x-6}{x^2+2x+5} \geq 0$ и в) $\frac{x^2+2x-6}{x^2-4x+1} \geq 0$

48. Реши ги неравенките:

а) $\frac{1-2x-3x^2}{3x-x^2-5} > 0$, б) $\frac{x^2-x-6}{x^2+6x} \geq 0$, в) $\frac{x^2-8x+7}{x^2-4x+1} < 0$

49. Реши ги неравенките:

а) $\frac{4x+19}{x+5} < \frac{4x-17}{x-3}$, б) $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}$, в) $\frac{x-1}{x+5} < x$

Упатство. а) Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката $\frac{4x+19}{x+5} - \frac{4x-17}{x-3} < 0$ т.е. на неравенката $\frac{(4x+19)(x-3)-(4x-17)(x+5)}{(x+5)(x-3)} < 0$.

9. ПРИМЕНА НА КВАДРАТНИТЕ НЕРАВЕНКИ И СИСТЕМИТЕ КВАДРАТНИ НЕРАВЕНКИ

На крајот од оваа тема ќе се осврнеме на примената на квадратните неравенки. За таа цел ќе разгледаме неколку примери.

Пример 41. Определи ја дифиниционата област на функцијата

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}\,.$$

Решение. Како што знаеме квадратниот корен има смисла, т.е. е реален број, ако и само ако поткореновиот израз е ненегативен, добиваме дека дефиниционата област на функцијата f ја наоѓаме од условот

$$x^2-2x-3\geq 0. \tag{1}$$

Корените на равенката $x^2-2x-3=0$ се $x_1=-1$ и $x_2=3$, што значи дека решение на неравенката (1) е множеството $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

Следствено, доменот на функцијата f е множеството $D_f=\mathbf{R}\setminus(-1,3)$. ♦

Пример 42. Определи го параметарот m така да корените на равенката

$$(k-1)x^2+(k-5)x+k+2=0$$

се реални и различни.

Решение. Корените на квадратна равенка се реални и различни ако и само ако нејзината дискриминанта е позитивна. За дадената равенка ја добиваме неравенката

$$D=(k-5)^2-4(k-1)(k+2)>0$$

која е еквивалентна на неравенката

$$3k^2+14k-33<0. \tag{2}$$

Корените на равенката $3k^2+14k-33=0$ се $k_{1/2}=\frac{-7\pm2\sqrt{37}}{3}$, што значи дека решение на неравенката (2) е множеството $(\frac{-7-2\sqrt{37}}{3},\frac{-7+2\sqrt{37}}{3})$.

Конечно, дадената равенка има реални и различни решени за секој

$$m\in(\frac{-7-2\sqrt{37}}{3},\frac{-7+2\sqrt{37}}{3}).\ ♦$$

Пример 43. Во равенката

$$(k-1)x^2+(k-5)x-k-2=0$$

определи го параметарот k така да $x_1x_2^2+x_2x_1^2<2$, каде x_1 и x_2 се корените на равенката.

Решение. Од Виетовите формули добиваме $x_1+x_2=-\frac{k-5}{k-1}$ и $x_1x_2=\frac{-k-2}{k-1}$. Понатаму, $x_1x_2^2+x_2x_1^2=x_1x_2(x_1+x_2)=-\frac{k-5}{k-1}\cdot\frac{-k-2}{k-1}=\frac{k^2-3k-10}{k^2-2k+1}$, па од условот на задачата ја добиваме неравенката

$$\frac{k^2-3k-10}{k^2-2k+1}<2 \iff \frac{k^2-3k-10}{k^2-2k+1}-2<0 \iff \frac{-k^2+k-12}{k^2-2k+1}<0 \iff \frac{k^2-k+12}{k^2-2k+1}>0.$$

Дискриминантата на броителот на дропката на левата страна на неравенката е $D=-47<0$ и како коефициентот пред квадратниот член е позитивен добиваме дека $k^2-k+12>0$ за секој $k\in\mathbf{R}$. Од друга страна, именителот на дропката е полн квадрат, т.е. $k^2-2k+1=(k-1)^2$ и тој е позитивен ако и само ако $k\neq1$.

Конечно, $x_1x_2^2+x_2x_1^2<2$ ако и само ако $k\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$. ♦

Пример 44. За кои вредности на параметарот k функцијата

$$f(x)=(k-2)x^2-(k+1)x+4$$

е позитивна за секој $x\in\mathbf{R}$.

Решение. Квадратната функција $f(x)=ax^2+bx+c$ е позитивна за секој $x\in\mathbf{R}$ ако и само ако $a>0$ и $D<0$. За дадената функција го добиваме системот неравенки

$$\begin{cases} k-2>0 \\ (k+1)^2-16(k-2)<0 \end{cases}$$

кој е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} k>2 \\ k^2-14k+33<0. \end{cases}$$

Решение на првата неравенка на системот е множеството $M_1=(2,+\infty)$, а на втората е множеството $M_2=(3,11)$, па затоа решение на последниот систем е множеството $M=M_1\cap M_2=(3,11)$.

Конечно, функцијата f е позитивна за секој $x\in\mathbf{R}$ ако и само ако $k\in(3,11)$. ♦

Пример 45. Во равенката

$$(k-2)x^2-2kx+2k+3=0$$

определи го параметарот k така да нејзините решенија се со спротивни знаци.

Решение. За да корените x_1 и x_2 на дадената равенка се со спротивни знаци потребно е нејзината дискриминанта да е позитивна и $x_1x_2<0$. Според тоа, бараните вредности за параметарот k е множеството решенија на системот неравенки

$$\begin{cases} (-2k)^2-4(k-2)(2k+3)>0 \\ \frac{2k+3}{k-2}<0 \end{cases}$$

кој е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} k^2-k-6<0 \\ \frac{2k+3}{k-2}<0. \end{cases} \qquad (3)$$

Решение на првата неравенка од системот е множеството $M_1=(-2,3)$, а на втората неравенка е множеството $M_2=(-\frac{3}{2},2)$, па затоа решение на системот (2) е множеството $M=M_1\cap M_2=(-\frac{3}{2},2)$.

Конечно, решенијата на дадената равенка се со спротивни знаци ако и само ако $k\in(-\frac{3}{2},2)$. ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

50. Определи ја дефиниционата област на функциите:

а) $f(x)=\sqrt{3x^2-8x-3}$, б) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-14x-15}$ и в) $f(x)=\sqrt{-3x^2+7x-4}$

51. За кои вредности на праметарот k корените на равенката

а) $kx^2+(k-3)x+k-1=0$ се коњугирано комплексни броеви,

б) $x^2+(k-3)x+k+1=0$ се реални и различни.

52. За кои вредности на параметарот k функцијата f е негативна за секој $x\in\mathbf{R}$:

а) $f(x)=kx^2-(k+1)x+3$, б) $f(x)=2kx^2-(k+1)x+k-1$ и в) $f(x)=x^2-(k+1)x+3k+2$

53. Најди го параметарот k така да решенијата на равенката

а) $(k-4)x^2+(k+2)x-k=0$, б) $kx^2-2(k+6)x+4k=0$ и в) $kx^2-4x+3k+1=0$

се со исти знаци.

ПРОВЕРИ ГО СВОЕТО ЗНАЕЊЕ

1. **а)** Одреди ја функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$ ако $f(0)=1,\ f(1)=3$ и $f(2)=7$. (5 б)

б) Одреди ја функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$ ако $f(-1)=1,\ f(2)=4$ и $f(3)=11$. (7 б)

2. **а)** Нацртај го графикот на функцијата $f(x)=3x^2+2$. (6 б)

б) Нацртај го графикот на функцијата $f(x)=-2(x-1)^2$. (8 б)

3. **а)** Нацртај го графикот на функцијата $f(x)=2(x-2)^2+1$. (10 б)

б) Нацртај го графикот на функцијата $f(x)=3x^2-7x+2$ (15 б)

4. **а)** За која вредност на параметарот m функцијата $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+m$ има минимум еднаков на 2? (10 б)

б) Бројот 36 запиши го како збир на два броја така да збирот на нивните квадрати е најмал. (15 б)

5. **а)** За кои вредности на x функцијата $f(x)=3x^2-5x-5$ прима негативни вредности? (10 б)

б) За која вредност на x изразот $\frac{1}{x^2-6x+11}$ прима најголема вредност. (15 б)

6. **а)** Најди пресек на параболата $y=x^2+2x-7$ и правата $y=2x+2$, (6 б)

б) Графички реши ја квадратната равенка $2x^2+3x-2=0$. (10 б)

7. **а)** Реши ја неравенката $-x^2+3x+1<0$. (10 б)

б) Реши ја неравенката $\frac{4x+19}{x+5}<\frac{4x-17}{x-3}$. (15 б)

8. **а)** Определи ја дефиниционата област на функцијата $f(x)=\sqrt{3x^2-8x-3}$. (10 б)

б) Најди го параметарот k така да решенијата на равенката $(k-4)x^2+(k+2)x-k=0$ се со различни знаци. (15 б)

Забелешка. При решавањето треба да избереш само по една подзадача од секоја задача. Доколку сакаш самостојно да се оцениш, можеш да го искористиш следниот критериум:

Бодови:	33-50	51-67	68-84	85-100
Оценка:	2	3	4	5

ГЛАВА V

КОНСТРУКЦИЈА НА ТРИАГОЛНИК И ЧЕТИРИАГОЛНИК

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

ПОТРЕБНИ ПРЕДЗНАЕЊА

За успешно совладување на содржините кои ќе ги усвојуваш во оваа тема, потребно е да се потсетиш на:

- *дефинициите на основните геомертиски фигури,*
- *пропорционални отсечки и признаците за сличност на триаголници,*
- *признаците за складност на триаголници,*
- *видовите четириагоници и нивните својства и*
- *транслацијата, ротацијата, осната и централната симетрија и нивните својства*

НОВИ ЗНАЕЊА И УМЕЕЊА

Успешното совладување на содржините кои се разработени во оваа тема има за цел да ***научиш како се решава конструктивна задача***, при што треба да совладаш повеќе основни конструкции, како што се конструкција на:

- симетрала на отсечка,
- симетрала на агол,
- агол еднаков на даден агол,
- права која минува низ дадена точка и е нормална на дадена права,
- права која минува низ дадена точка и е паралелна на дадена права,
- збир и разлика на две отсечки,
- поделба на отсечка во даден однос,
- триаголник со зададени основни елементи, со посебен осврт на рамностран, рамнокрак и правоаголен триаголник,
- тангента на кружница повлечена во точка која се наоѓа на кружницата
- тангента на кружница повлечена од точка која се наоѓа надвор од кружницата ,
- тангента на кружница паралелна на дадена права,
- четврта геометриска пропорционала,
- геометриска средина на две отсечки,
- отсечка од видот $\sqrt{a^2+b^2}$, каде a и b се дадени отсечки и
- отсечка која што се гледа под даден агол.

Исто така треба да се оспособиш да:

- решаваш елементарни конструктивни задачи за триаголник,
- решаваш елементарни конструктивни задачи за четириаголник,
- конструираш правилен многуаголник впишан во кружница и да ја објаснуваш конструкцијата,
- го применуваш и објаснуваш методот на геометриско место на точки и
- го применуваш методот на геометриски трансформации при решавање на конструктивни задачи за триаголник и четириаголник.

Изградбата на секој градежен објект, меѓу другото, подразбира изработка план за истиот. Слично, ако сакаме да конструираме некоја машина, прво правиме нацрт на истата т.е. на нејзините делови, а потоа пристапуваме кон изработка на одделните делови и машината во целина. Можеме да наброиме уште многу вакви примери, но важно е да забележиме дека за сите овие случаи заедничко е барањето да се нацрта некоја геометриска фигура и токму тоа ќе биде предмет на нашето интересирање во оваа тема.

1. ПОИМ ЗА КОНСТРУКТИВНА ЗАДАЧА

Во секојдневниот живот често пати се судруваме со проблемот да се нацрта некоја геометриска фигура, при што цртањето на истата треба да се реализира со помош на дадени инструменти, најчесто линијар и шестар. Претходните барања всушност го даваат одговорот на прашањето: "Што е конструктивна задача?". Така, ја имаме следната дефиниција.

Дефиниција 1. Барањето да се нацрта некоја геометриска фигура со помош на дадени инструменти за цртање го нарекуваме *конструктивна задача.*

Во претходните теми, при пручувањето на комплексните броеви, квадратните равенки итн., како примери, разгледавме низа задачи поврзани со овие поими. Притоа за секоја од овие задачи ја дадовме и постапката за нивно решавање. Логично е да се запрашаме во што се состои решавањето на една конструктивна задача, т.е. дали е доволно само да се конструира бараната фигура или се поставуваат и дополнителни барања. Одговорот на ова прашање опфаќа неколку наизглед независни делови, кои во суштина претставуваат една целина и тие се:

- опишување на постапката за конструирање на бараната фигура,
- доказ дека конструкцијата е можна при дадените услови во задачата и
- дискусија за можните решенија на задачата.

Како што рековме, решавањето на конструктивна задача треба да заврши со дискусија за можните решенија на задачата. Секако, за да можеме да дискутираме за можните решенија на една конструктивна задача, потребно е да знаеме што е решение на таква задача. Во оваа смисла ја имаме следната дефиниција.

Дефиниција 2. *Решение* на една конструктивна задача е секоја фигура што ги задоволува условите на задачата.

Претходно рековме дека инструментите со кои се реализира конструкцијата на дадена фигура се најчесто линијар и шестар. Во нашите разгледувања ќе се задржиме само на користењето на овие два инструменти. Тоа значи, дека ќе разгледуваме конструктивни задачи кои може да се реализираат само со *линијар и шестар*, па затоа од интерес е да ги знаеме можностите на овие инструменти. Најчесто, за линијарот и шестарот, следните конструкции се земаат за основни и тие укажуваат на можностите на овие инструменти:

- конструкција на отсечка, ако се дадени нејзините крајни точки,
- конструкција на права што минува низ две дадени точки,
- конструкција на кружница, ако се зададени нејзиниот центар и радиус,
- конструкција на пресечна точка меѓу две прави (ако постои),
- конструкција на пресечни точки меѓу права и кружница (ако постојат) и
- конструкција на пресечни точки меѓу две кружници (ако постојат).

Ако се има предвид дека со линијар и шестар се можни само наведените основни конструкции, заклучуваме дека цртањето на бараната геометриска фигура се состои во последователно изведување на *конечна низа* основни конструкции (можно е нивно повеќекратно повторување), по чие извршување ќе можеме да сметаме дека бараната фигура е конструирана.

Веќе споменавме дека решавањето на една конструктивна задача најчесто опфаќа три етапи. Меѓутоа, ова се однесува на полесните конструктивни задачи, кај кои е воочлива конечната низа основни конструкции со чија помош ја цртаме бараната фигура. Ако станува збор за послжена конструктивна задача и патот за нејзиното решавање не е очигледен, тогаш ја реализираме следната постапка за решавање на задачата, која се состои од четири дела, и тоа: *анализа, конструкција, доказ и дискусија.* Ќе се осврнеме на секој од нив.

Анализа. Анализата на задачата е првата (подготвителна) етапа во решавањето на конструктивните задачи, но, исто така, таа е и најважана, бидејќи ја подготвува конструкцијата, односно овозможува да се согледа решението на задачата.

Целта на оваа етапа е да се откријат врските меѓу дадените и бараните елементи на фигурата која треба да ја нацртаме. Истовремено таа овозможува да се согледа по која постапка или метод најцелисходно може да се реши задачата. Обично анализата почнува со скицирање на цртеж, и тоа, речиси секогаш, со зборовите: *"Да претпоставиме дека задачата е решена".* Потоа на направената скица се воочуваат познатите елементи, се одделуваат попрости фигури (или се формираат со дополнување на цртежот) и меѓу нив се бара таква помошна фигура која ќе ги задоволува следните два услова:

- *таа фигура може да се конструира од дадените елементи на основната задача и*
- *тргнувајќи од неа може да се конструира бараната фигура.*

Конструкција. Оваа етапа се реализира врз основа на извршената анализа. Имено, користејќи ги елементите дадени во условот на задачата, согласно извршената анализа последователно се реализираат помошните конструкции со чија помош ја конструираме бараната фигура.

Доказ. Со доказот всушност потврдуваме дека конструираната фигура навистина ги задоволува условите на задачата.

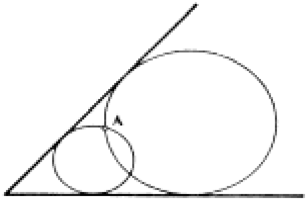
Дискусија. Како што рековме, самата анализа скоро да го определува методот со кој ќе ја конструираме бараната фигура. Како резултат на конструкцијата најчесто добиваме едно решение на задачата, но за целосно нејзино решавање треба да одговориме на следните прашања:

- *дали при различен избор на дадените елементи, односно дали секогаш може да биде конструирана бараната фигура и*
- *колку решенија има задачата при различен избор на елементите дадени во условот на задачата, т.е. дали со дадените елементи може да се конструира само една или повеќе нескладни фигури кои се решенија на задачата?*

Као што можеме да забележиме, дискусијата има за цел да ги определи условите кога задачата е решлива и да го определи бројот на решенијата на истата. Затоа, е пожелно дискусијата да се спроведува така, што се анализира секој чекор на конструкцијата водејќи сметка дали и при кои услови чекорот е можен, на колку различни начини тој може да се направи и дали различните начини доведуваат до различни решенија.

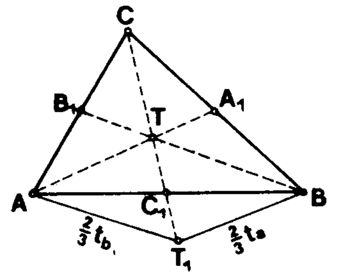
Пример 1. При конструкција на кружница која минува низ зададена точка A и ги допира краците на зададен агол, тогаш задачата има најмногу две решенија. Тоа е случајот кога кружницата лежи во внатрешноста на аголот (црт. 1).

Дали оваа задача може да има само едно решение или да нема решенија?



Црт. 1

Покасно ќе се навратиме на прашањето за конструирање на триаголник, но овде ќе наведеме еден пример со кој ќе ги илустрираме наведените етапи за решавање на конструктивна задача. Притоа, со оглед на тоа дека ги имаш потребните предзнаења за решавање на разгледуваната задача, детално ќе се осврнеме на секоја од четирите етапи.



Црт. 2

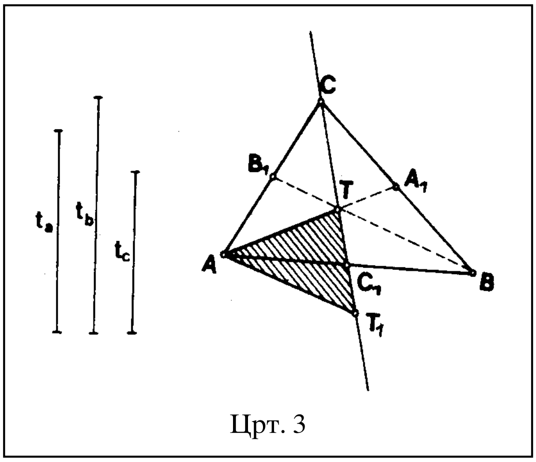
Пример 2. Конструирај триаголник со зададени тежишни линии t_a, t_b и t_c.

Решение. ***Анализа.*** Нека бараниот триаголник ABC со тежишни линии t_a, t_b и t_c е конструиран и нека T е неговото тежиште (црт. 2).

Познато е дека тежиштето T ги дели тежишните линии во однос $2:1$ (тргнувајќи од темето). Да ја продолжиме тежишната линија t_c преку точката C_1 за $\frac{1}{3}t_c$. Ако добиената точка T_1 ја поврземе со темињата A и B, ќе добиеме паралелограм AT_1BT, за кој страните се $\frac{2}{3}t_a$ и $\frac{2}{3}t_b$, а дијагоналите се $\frac{2}{3}t_c$ и $\overline{AB}=c$. Според тоа, должините на страните на ΔAT_1T се $\overline{AT}=\frac{2}{3}t_a$, $\overline{AT1}=\frac{2}{3}t_b$ и $\overline{TT1}=\frac{2}{3}t_c$ и C_1 е средина на страната TT_1.

Конструкција. Го конструираме ΔAT_1T со страни $\overline{AT}=\frac{2}{3}t_a$, $\overline{AT1}=\frac{2}{3}t_b$ и $\overline{TT1}=\frac{2}{3}t_c$ и повлекува тежишна линија AC_1, која е половина од страна AB. Понатаму, ја продолжуваме страната AC_1 преку точката C_1 за должина $\overline{AC1}$ и го наоѓаме темето B. Темето C ќе се добие ако страната TT_1 ја продолжиме преку темето T за должина $\overline{TT_1}=\frac{2}{3}t_c$ (црт. 3).

Доказ. Доволно е да докажеме дека добиениот триаголник има тежишни линии t_a, t_b и t_c. Бидејќи C_1 е средина на страната AB добиваме дека CC_1 е тежишната линија на ΔABC повлечена од темето C. Понатаму, од $\overline{TT_1} = \frac{2}{3}t_c$ и C_1 е средина на TT_1 следува дека точката T ја дели тежишната линија на ΔABC повлечена од темето C во однос $2:1$, што значи T е тежиште на ΔABC. Конечно, од



Црт. 3

$$\overline{BT} = \overline{AT_1} = \frac{2}{3}t_b$$

и

$$\overline{AT} = \overline{BT_1} = \frac{2}{3}t_a$$

следува дека ΔABC има тежишни линии t_a, t_b и t_c.

Дискусија. Од неравенствата за страните на триаголник следува дека триаголникот ΔAT_1T со страни $\overline{AT} = \frac{2}{3}t_a$, $\overline{AT}1 = \frac{2}{3}t_b$ и $\overline{TT}1 = \frac{2}{3}t_c$ може еднозначно да се конструира ако и само ако

$$\frac{2}{3}t_a < \frac{2}{3}t_b + \frac{2}{3}t_c \text{ и } \frac{2}{3}t_a > \left| \frac{2}{3}t_b - \frac{2}{3}t_c \right|$$

т.е. ако и само ако

$$t_a < t_b + t_c \text{ и } t_a > | t_b - t_c |, \tag{1}$$

а останатите елементарни конструкции се секогаш изводливи. Според тоа, задачата ќе има единствено решение ако и само ако отсечките t_a, t_b и t_c го задоволуваат условот (1). ♦

ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1. Што е решение на конструктивна задача?
2. Наброј ги основните конструкции кои може да се изведат со линијар и шестар.
3. Која е улогата на анализата при решавањето на конструктивна задача?
4. На што посебно треба да обрнеме внимание при дискусијата на решението на конструктивна задача?

2. ЕЛЕМЕНТАРНИ КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

Во претходните разгледувања ги наведовме основните конструкции кои можат да се реализираат со линијар и шестар. Во овој дел ќе разгледаме неколку елементарни конструктивни задачи, кои имаат широка примена при решавање на посложени конструктивни задачи. При разгледувањето на овие задачи, заради нивната елементарност, кај повеќето од нив ќе ја презентираме само конструкцијата, без да даваме доказ и дискусија.

Пример 3. а) На полуправата OX нанеси отсечка со должина a.

б) Конструирај отсечка чија должина е еднаква на збирот на должините на две дадени отсечки.

в) Конструирај отсечка чија должина е еднаква на разликата на должините на две дадени отсечки.

Решение. а) Ја цртаме полуправата OX и потоа $k(O,a)$, $k \cap OX = A$. Јасно, отсечката OA лежи на полуправата OX и има должина a (направи цртеж).

б) Нека се дадени две отсечки со должини a и b. Цртаме полуправа OX и на неа нанесуваме отсечка OA таква, што $\overline{OA}=a$. Потоа, на полуправата AX нанесуваме отсечка AB таква, што $\overline{AB}=b$. Јасно, должината на отсечката OB е $a+b$ (направи цртеж).

в) Нека се дадени две отсечки со должини a и b, $a>b$. Цртаме полуправа OX и на неа нанесуваме отсечка OA таква, што $\overline{OA}=a$. Потоа, на полуправата AO нанесуваме отсечка AB таква, што $\overline{AB}=b$. Јасно, должината на отсечката OB е $a-b$ (направи цртеж). ♦

Пример 4. Дадена е отсечката AB. Конструирај ја нејзината симетрала.

Решение. Конструираме кружници $k(A,\overline{AB})$ и $k_1(B,\overline{AB})$ и нека $k \cap k_1 = \{C,D\}$. Правата CD е бараната симетрала на отсечката AB (направи цртеж). ♦

Пример 5. Даден е $\angle XOY$. Конструирај ја неговата симетрала.

Решение. Земаме отсечка со произволна должина a. На полуправите OX и OY нанесуваме отсечки $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ такви, што $\overline{OA}=\overline{OB}=a$. Понатаму, конструираме кружници $k(A,\overline{AB})$ и $k_1(B,\overline{AB})$ и нека $k \cap k_1 = \{C,D\}$. Правата CD е бараната симетрала на $\angle XOY$ (направи цртеж). ♦

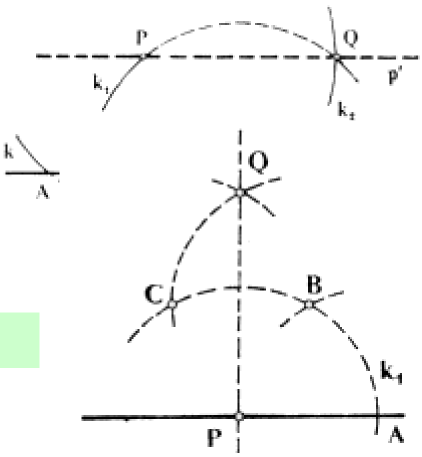
Пример 6. Даден е $\angle XOY$ и точка A. Конструирај $\angle BAC$ таков, што $\angle XOY = \angle BAC$.

Решение. Повлекуваме произволна полуправа AB и конструираме кружници $k(O,r)$ и $k_1(A,r)$. Нека $k \cap OX = M, k \cap OY = N$ и $k_1 \cap AB = P$. Конструираме кружници $k_2(P,\overline{MN})$ и нека $k_1 \cap k_2 = \{C, C_1\}$. Јасно, аглите BAC и BAC_1 ги задоволуваат условите на задачата. ♦

Пример 7. Дадени се права p и точка P, $P \notin p$. Конструирај права која минува низ точката P и е паралелна на правата p.

Решение. Конструираме кружница $k(P,r)$, каде r е доволно големо, и $k \cap p = \{A,B\}$. Конструираме кружници $k_1(B,\overline{BP})$, $k_2(P,\overline{AB})$ и наоѓаме $Q = k_1 \cap k_2$.

Конечно, правата PQ минува низ точката P и е паралелна на правата p. ♦

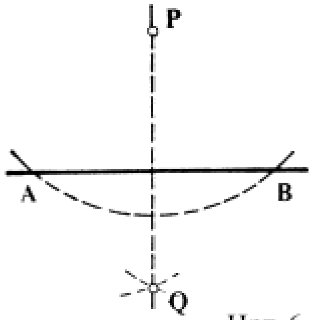


Црт. 5

Пример 8. Дадени се права p и точка P. Конструирај права која минува низ точката P и е нормална на правата p.

Решение. Ќе разгледаме два случаи: $P \in p$ и $P \notin p$.

а) Нека $p \in P$. Конструираме кружница $k_1(P,r)$ и наоѓаме $k_1 \cap p = A$ (црт. 5). Потоа конструираме кружница $k_2(A,r)$ и наоѓаме $k_1 \cap k_2 = B$, па конструираме кружница $k_3(B,r)$ и наоѓаме $k_2 \cap k_3 = C$. На крајот, конструираме кружница $k_4(C,r)$ и ја добиваме точката $Q = k_3 \cap k_4$.



Црт. 6

Конечно, правата PQ е бараната права која минува низ точката P и е нормална на правата p.

б) Нека $p \notin P$. Конструираме кружница $k(P,r)$ и наоѓаме $k \cap p = \{A,B\}$ (црт. 6). Сега ги конструираме кружниците $k_1(A,r)$ и $k_2(B,r)$ и нека $Q = k_1 \cap k_2$.

Конечно, правата PQ е бараната права која минува низ точката P и е нормална на правата p. ♦

Следните елементарни конструкции се базираат на поимот за пропорционални отсечки, односно на признаците за слични триаголници, кои овде заради потсетување ќе ги наведеме.

I признак. Ако за триаголниците ABC и $A'B'C'$ важи $\angle A = \angle A'$ и $\angle B = \angle B'$, тогаш $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

II признак. Ако за триаголниците ABC и $A'B'C'$ важи $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ и $\angle A = \angle A'$, тогаш $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

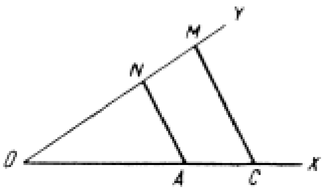
III признак. Ако за триаголниците ABC и $A'B'C'$ важи $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ тогаш $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Пример 9. Да се подели дадена отсечка со должина a на две отсечки, кои се пропорционални на две дадени отсечки со должини m и n.

Решение. Конструираме произволен $\angle XOY$ и на полуправата OX наоѓаме точка C таква, што $\overline{OC} = a$ (црт. 7). Понатаму на полуправата OY наоѓаме точка N таква, што $\overline{ON} = n$ и на полуправата NY наоѓаме точка M таква, што $\overline{NM} = m$. Ја повлекуваме правата MC и низ точката N повлекуваме права која е паралелна на правата MC и нека A е пресечната точка на оваа права и полуправата OX.

Јасно, $\Delta OAN \sim \Delta OCM$, па затоа $\overline{OA} : \overline{OC} = \overline{ON} : \overline{OM}$, од што следува дека

$$\overline{OA} : \overline{AC} = \overline{ON} : \overline{NM} = n : m. \ ♦$$

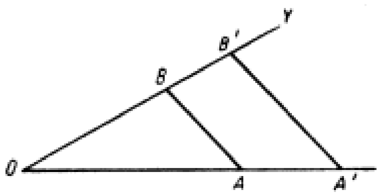


Црт. 7

Пример 10. Да се конструира отсечка, која е четврта геометриска пропорционала на три дадени отсечки.

Решение. Нека се дадени три отсечки со должини a, b и a' и нека треба да се конструира отсечка за чија должина b' важи $a:a'=b:b'$.

Конструираме произволен $\angle XOY$ и на полуправата OX наоѓаме точки A и A' такви, што $\overline{OA}=a$ и $\overline{OA'}=a'$, а на полуправата OY наоѓаме точка B таква, што $\overline{OB}=b$. Повлекуваме права низ точката A' паралелна на правата AB и нека B' е пресекот на оваа права со полуправата OY. Јасно, $\Delta OAB \sim OA'B'$, па затоа $\overline{OA}:\overline{OA'}=\overline{OB}:\overline{OB'}$, од што следува дека $a:a'=b:\overline{OB'}$, т.е. $\overline{OB'}$ е бараната отсечка. ♦



Црт. 8

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

5. Дадени се три отсечки со должини a, b и c, $a+b>c$. Конструирај отсечка со должина $a+b-c$.
6. Дадени се $\angle XOY$ и $\angle AO'B$. Конструирај агол кој еднаков на збирот на дадените агли.
7. Даден е агол $\angle XOY$. На кракот OY најди точка A која е на растојание d од кракот OX.
Упатство. Во произволна точка P на кракот OX конструирај права нормална на OX и потоа на оваа права најди точка Q таква, што $\overline{PQ}=d$.
8. Подели ја отсечката AB на n еднакви отсечки.
9. Дадени се отсечки со должини a и b. Да се конструира отсечка со должина c таква, што $a:b=b:c$.
10. Дадени се отсечки со должини a и b. Конструирај отсечка со должина $x=ab$.
Упатство. Од $x=ab$ можеме да ја составиме пропорцијата $e:a=b:x$, каде што e е единечната должина.
11. Дадена е отсечка со должина a. Конструирај отсечка со должина $x=a^2$.
Упатство. Искористи ја задача 9, при услов $a=b$.

3. ЕЛЕМЕНТАРНИ КОНСТРУКЦИИ НА ТРИАГОЛНИК

Во овој дел ќе се осврнеме на основните конструкции на триаголник. Потребата од нивното посебно разгледување лежи во значењето на триаголникот при проучувањето и конструирањето на посложените геометриски фигури.

Во претходните разгледувања рековме дека од посебен интерес е да се знае дали со дадените елементи може да се конструира само една или повеќе нескладни фигури кои се решенија на разгледуваната конструктивна задача. Затоа, пред да преминеме на разгледување на основните конструкции на триаголник, ќе се потсетиме на признаците за складност на два триаголника.

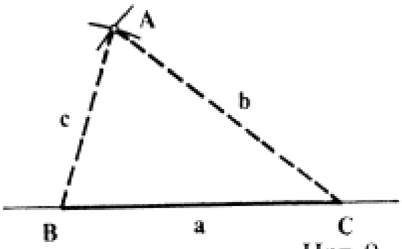
Признак ССС. Ако страните на еден триаголник се еднакви со страните на друг триаголник, тогаш тие триаголници се складни.

Признак САС. Ако на два триаголника им се еднакви по две страни и аглите зафатени од нив, тогаш тие триаголници се складни.

Признак АСА. Ако на два триаголника им се еднакви по една страна и аглите што лежат на тие страни, тогаш триаголниците се складни.

Пример 11. Конструирај триаголник ако се дадени должините на неговите страни a, b и c

Решение. На произволна права конструираме отсечка $\overline{BC}=a$ (црт. 9). Потоа конструираме кружници $k_1(B,c)$ и $k_2(C,b)$. Ако овие кружници имаат заедничка точка A која што не лежи на правата BC, тогаш триаголникот ABC ги исполнува условите на задачата и е единствено нејзино решение (признак ССС). Ако, пак, кружниците не се сечат, тогаш задачата нема решение.

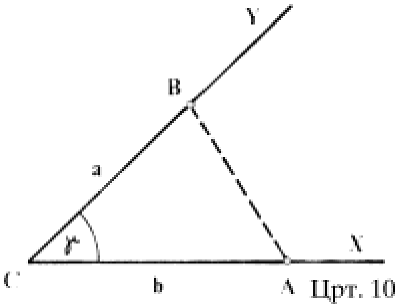


Црт. 9

Лесно се гледа дека кружниците k_1 и k_2 се сечат ако и само ако $|b-c|<a<b+c$. ♦

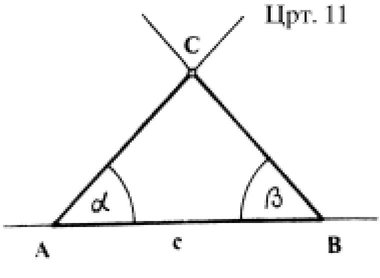
Пример 12. Конструирај триаголник ако се дадени должините на неговите страни a и b и аголот γ што го зафаќаат.

Решение. Прво конструираме $\angle XCY=\gamma$ (црт. 10). Потоа, на краците CX и CY на $\angle XCY$ конструираме отсечки CA и CB со должини $\overline{CA}=b$ и $\overline{CB}=a$. Триаголникот ABC има две страни со должини a и b и агол γ што го зафаќаат, па значи тој е решение на задачата.



Црт. 10

Бидејќи конструкциите на аголот γ и отсечките на неговите краци, чии должини се a и b се единствени, заклучуваме дека овој триаголник е единствено решение на задачата. Според тоа, секој друг триаголник кој што ќе ги исполнува условите на задачата, ќе биде складен со триаголникот ABC (признак САС). ♦



Црт. 11

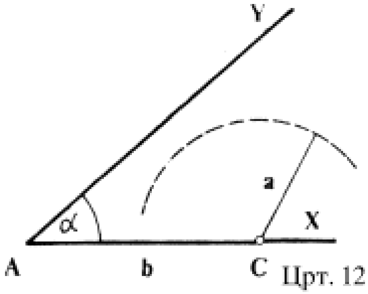
Пример 13. Конструирај триаголник ако е дадена должината на една негова страна c и аглите α и β што лежат на таа страна.

Решение. Прво ќе ја нацртаме отсечката AB, $\overline{AB}=c$, а потоа во точката A ќе го нанесеме аголот α така што полуправата AB е еден негов крак, а во точката B ќе го нанесеме аголот β така што полуправата BA е еден негов крак. Во пресек на другите краци на аглите ја наоѓаме точката C, Овој триаголник ги исполнува условите на задачата и бидејќи конструкцијата на отсечка со должина c и на аглите α и β се единствени, ако $\alpha+\beta<180^\circ$, заклучуваме дека решението е единствено (АСА). ♦

Во пример 12 конструиравме триаголник за кој се дадени должините на две негови страни и аголот што го зафаќаат. Во следниот пример ќе разгледаме конструкција на триаголник за кој се дадени две негови страни и аголот спроти едната од нив.

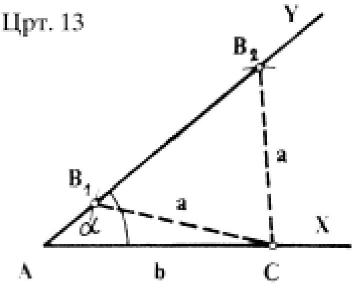
Пример 14. Конструирај триаголник ако се дадени должините на неговите страни a и b и аголот α спроти страната a.

Решение. Прво конструираме $\angle XAY=\alpha$ и на кракот AX конструираме отсечка AC, $\overline{AC}=b$. Сега конструираме кружница $k(C,a)$. Можни се два случаи.



Црт. 12

а) Ако $a>b$, тогаш полуправата AY и кружницата $k(C,a)$ имаат една пресечна точка B и во овој случај триаголникот ABC ги исполнува условите на задачата, што значи тој е нејзино решение.

Црт. 13


б) Ако $a<b$, тогаш полуправата AY и кружницата $k(C,a)$ можат да немаат заеднички точки и во тој случај задачата нема решение (црт. 12), или да имаат две заеднички точки и B_1 и B_2 (црт. 13). Јасно, триаголниците AB_1C и AB_2C ги задоволуваат условите на задачата и тие се нејзини решенија. ♦

Во претходните четири примери ги разгледавме основните конструкции на триаголник, кои се разбира можат да се искористат за конструкција на правоаголен, рамнокрак и рамностран триаголник. Да разгледаме неколку примери кои се специфични за овие триаголници.

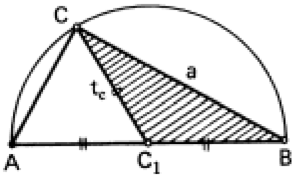
Пример 15. Дадени се отсечки со должини a и b. Конструирај отсечка со должина $\sqrt{a^2+b^2}$.

Решение. Од Питагоравата теорема знаеме дека должината на хипотенузата на правоаголен триаголник со катети a и b е $c=\sqrt{a^2+b^2}$, па затоа треба да конструираме правоаголен триаголник со катети a и b.

Конструираме отсечка BC, $\overline{BC}=a$ и во точката C нормала на правата BC. Од точката C на нормалата нанесуваме отсечка CA, $\overline{CA}=b$ (направи цртеж). Триаголникот ABC е правоаглоен со хипотенуза AB, $\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$. ♦

Пример 16. Конструирај правоаголен триаголник ABC, со прав агол во темето C, зададен со a и t_c.

Решение. Конструираме отсечка BC, $\overline{BC}=a$. Потоа ги конструираме кружниците $k_1(B,t_c)$ и $k_2(C,t_c)$ и во нивниот пресек ја наоѓаме точката C_1, која е теме на рамнокракиот триаголник BCC_1. Темето A лежи во продолжението на страната BC_1, на растојание од C_1 за t_c (црт. 14).



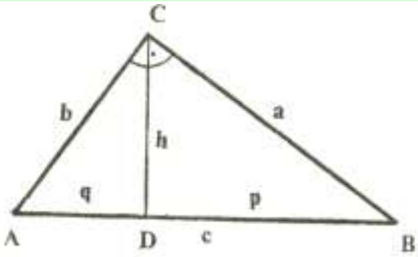
Црт. 14

Јасно, ако може да се конструира ΔBCC_1, т.е. ако $2t_c > a$, тогаш ΔABC ги задоволува условите на задачата и како сите конструкции се единствени задачата има единствено решение. ♦

Пример 17. Нека се дадени отсечките p и q. Конструирај ја нивната геометриска средина $\sqrt{pq}$.

Решение. Од Евклидовите теореми знаеме дека во правоаголен триаголник висината h спуштена кон хипотенузата c е геометриска средина на проекциите p и q од катетите a и b врз хипотенузата (црт. 15). Според тоа, за да ја конструираме геометриската средина на отсечките p и q треба да конструираме правоаголен триаголник ако се познати проекциите на катетите врз хипотенузата.

Конструираме отсечка $AD, \overline{AD}=q$ и во продолжение преку точката D конструираме отсечка $DB, \overline{DB}=p$. Конструираме симетрала на отсечката AB и во пресек со AB добиваме точка O. Понатаму, конструираме кружница $k(O,\overline{OA})$ и нормала на правата AB во точката D, во чиј пресек ја наоѓаме точката C. Отсечката CD е висина на ΔABC, па затоа $\overline{CD}=\sqrt{pq}$. ♦



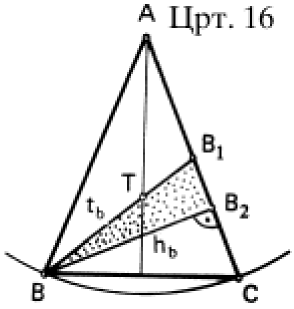
Црт. 15

Пример 18. Конструирај рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AB}=\overline{AC}$), зададен со h_b и t_b.

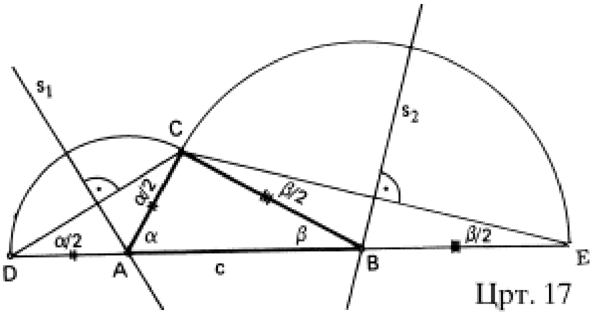
Решение. Конструираме отсечка $BB_2, \overline{BB}_2=h_b$ и во точката B_2 повлекуваме права нормална на правата BB_2 (црт. 16). Потоа конструираме кружница $k(B,t_b)$ и нека точката B_1 е пресек на кружницата k со нормалата во точката B_2. Понатаму ја наоѓаме точката T која ја дели отсечката BB_1 во однос $2:1$ и конструираме кружница $k_1(T,\frac{2t_b}{3})$. Наоѓаме $k_1 \cap B_1B_2 = C$. Конечно, конструираме кружница $k_2(B_1,\overline{CB}_1)$ и го определуваме темето, т.е. $k_2 \cap B_1B_2 = A$.

Јасно, ако може да се конструира BB_1B_2, т.е. ако $t_b > h_b$, тогаш ΔABC ги задоволува условите на задачата и како сите конструкции се единствени задачата има единствено решение. ♦

Црт. 16



Пример 19. Конструирај триаголник ABC, ако се дадени $a+b+c, \alpha$ и β.



Црт. 17

Решение. Ако ја продолжиме страната AB на двете страни за $\overline{AD}=\overline{AC}=b$ $\overline{BE}=\overline{BC}=a$ ги добиваме рамнокраките триаголници CDA и ECB, чии агли при основата се $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$ соодветно, црт. 17 (зошто?). Според тоа, за ΔDEC познати се една страна $a+b+c$ и двата прилегнати агли $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$, па затоа истиот може да се конструира (АСА). Понатаму, наоѓаме симетрала s_1 на страната DC и $A=s_1 \cap DE$, а потоа наоѓаме симетрала s_2 на страната EC и $B=s_2 \cap DE$.

Конечно, ΔABC ги задоволува условите на задачата и тој е нејзино единствено решение ако $\alpha+\beta<180^\circ$, а задачата нема решение ако $\alpha+\beta \geq 180^\circ$. ♦

Забелешка 1. Решенијата на примерите во овој дел се дадени во скратена форма. Пожелно е истите детално да ги разработите, правејќи посебно анализа, конструкција, доказ и дискусија.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

12. Дадена е отсечка со должина a. Конструирај отсечки со должина $a\sqrt{2}, a\sqrt{3}, a\sqrt{5}$ и $a\sqrt{7}$.

13. Конструирај рамностран триаголник со дадена висина h.

14. Конструирај рамнокрак правоаголен триаголник со дадена: а) основа a; б) крак b.

15. Конструирај правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C, зададен со:
а) c, h_c, б) a, h_c, в) a, t_a и г) a, t_b.

16. Конструирај рамнокрак триаголник ABC, зададен со:
а) a, h_a, б) b, h_a, в) b, h_b и г) b, t_b.

17. Конструирај триаголник ABC зададен со:
а) α, h_c, β, б) α, h_c, c, в) a, b, h_c и г) α, h_c, a.

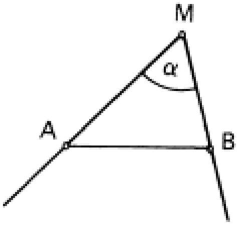
18. Конструирај триаголник ABC зададен со:
а) c, h_c, h_a и б) α, h_c, h_b.

19. Конструирај триаголник ABC зададен со:
а) c, a, t_c, б) c, t_a, t_c, в) c, t_a, t_b, г) α, t_c, β и д) h_c, t_a, t_c

20. Конструирај триаголник ABC зададен со:
а) c, h_c, t_c, б) a, h_c, t_c, в) a, h_c, t_a, г) α, h_c, s_c и д) a, h_c, s_c

4. МЕТОД НА ГЕОМЕТРИСКИ МЕСТА

Како што знаеме геометриските фигури се дефинираат како множество точки. Меѓутоа, секое множество точки можеме да го наречеме и *геометриско место на точки.* Според тоа, определувањето на едно геометриско место на точки (геометриска фигура), е една задача во која треба да се образува множество точки според некој признак.



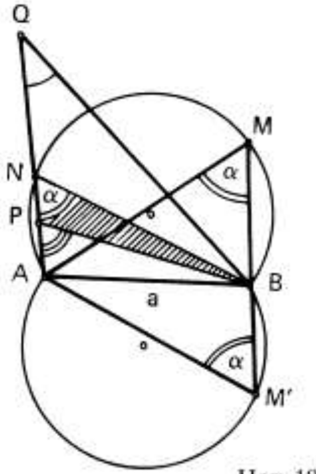
Црт. 18

Така, на пример, геометриското место на точки на центрите на кружниците кои минуваат низ точките A и B е симетралата на отсечката AB, додека, пак, геометриското место на точки што е еднакво оддалечено од краците на еден агол е симетралата на тој агол.

Дефиниција 3. Ако точката M е теме на агол α, а неговите краци минуваат низ крајните точки A и B на отсечката AB (црт. 18), тогаш велиме дека отсечката *AB се гледа под агол α од точката M* .

Пример 20. Најди геометриско место на точки од кои отсечката AB се гледа под даден агол α .

Решение. *Анализа.* Ќе го користиме својството дека сите периферириски агли во една кружница што се над ист лак, или тетива, меѓусебно се еднакви.



Црт. 19

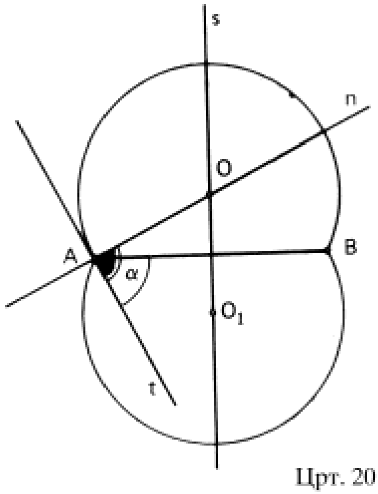
Нека зададената отсечка AB и аголот α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) се нацртани така, што аголот $\angle AMB = \alpha$ (црт. 19), т.е. M е произволна точка од бараното геометриско место на точки. Опишуваме кружница околу ΔABM . Според споменатото својство на периферириските агли, следува дека секоја точка од лакот AMB, различна од A и B, може да биде теме на периферискиот агол α . Значи, од секоја точка на лакот AMB, без неговите краеви A и B, отсечката AB се гледа под агол α . Освен тоа отсечка AB се гледа под агол α и од точките на лакот $AM'B$, симетричен на лакот AMB во однос на правата AB (црт. 19).

Доказ. Од анализата заклучивме дека секоја точка од лаците AMB и $AM'B$, различна од A и B, припаѓа на бараното геометриско место на точки. Ќе докажеме дека од секоја друга точка, отсечката AB се гледа под агол различен од α . Нека P е внатрешна точка за лакот AMB, а N пресечната точка на AP со лакот AMB (црт. 19). За ΔBPN аголот APB е надворешен, па следува дека е поголем од секој внатрешен агол кој не му е соседен. Значи, $\angle APB > \angle ANB = \alpha$. Слично, за точката Q , надворешна за лакот AMB, се докажува дека $\angle AQB < \alpha$.

Значи, геометриското место на точки од кои отсечката AB се гледа под агол α , е фигурата образована од два лака на кружниците што минуваат низ точките A и B и се симетрични во однос на правата AB, без точките A и B .

Конструкција. За конструкцијата на еден од лаците AMB или $AM'B$ ќе го користиме својството дека аголот меѓу тетивата и тангентата (повлечена од крајните точки на тетивата) е еднаков со периферниот агол над таа тетива.

На произволна полуправа ја нанесуваме дадената отсечка AB и во точката A го нанесуваме аголот α (црт. 20), чиј втор крак е тангента на кружницата на која припаѓа лакот AMB. Ја повлекуваме нормалата n на тангентата t во точката A и симетралата s на отсечката AB. Нивниот пресек е центар на кружницата на која припаѓа лакот AMB. Ако α е остар агол тогаш бараното геометриско место е поголемиот од кружните лаци, а ако α е тап агол тогаш тоа е помалиот кружен лак.



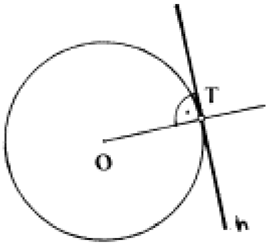
Црт. 20

Дискусија. Ако $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, тогаш бараното геометриско место се два кружни лаци. Ако $\alpha = 0^\circ$, тогаш бараното геометриско место се состои од сите точки на правата AB, надворешни за отсечката AB. Ако $\alpha = 180^\circ$, тогаш бараното геометриско место се состои од внатрешните точки на отсечката AB. Ако $\alpha > 180^\circ$, тогаш задачата нема решение. Во случајот кога $\alpha = 90^\circ$, бараното геометриско место на точки е кружница со дијаметар AB, без точките A и B. ♦

Пример 21. Конструирај тангента на кружница $k(O,r)$ што минува низ дадена точка T.

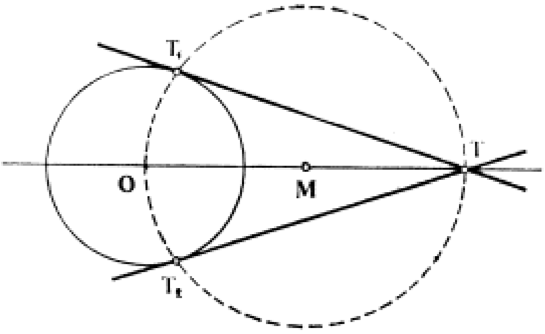
Решение. а) Јасно, ако точката T е во внатрешноста на кружницата, т.е. $\overline{OT} < r$, тогаш задачата нема решение.

б) Ако точката T лежи на кружницата k, т.е. $\overline{OT} = r$, тогаш ја повлекуваме правата OT и во точката T конструираме нормала n на OT и тоа е бараната тангента (црт. 21).



Црт. 21

в) *Анализа.* Ако точката T е во надворешноста на кружницата, т.е. $\overline{OT} > r$, тогаш на кружницата треба да се определи таква точка T_1, што $\angle TT_1O$ да е прав агол. Тоа значи дека треба да се определи точка T_1 од која отсечката OT се гледа под прав агол. Ако точката M е средина на отсечката OT, од пример 20 следува дека точката T_1 лежи на кружницата $k_1(M, \frac{\overline{OT}}{2})$.



Црт. 22

Конструкција. Наоѓаме симетрала s на отсечката OT и во пресек со правата OT ја наоѓаме точка M. Потоа конструираме кружница $k_1(M, \frac{\overline{OT}}{2})$ и наоѓаме $k \cap k_1 = \{T_1, T_2\}$. Ги повлекуваме правите TT_1 и TT_2 и тоа се бараните тангенти. ♦

Забелешка 2. Покрај конструкцијата на тангента на кружница $k(O, r)$ што минува низ зададена точка T, при решавањето на конструктивни задачи често пати е потребно да се конструира тангента на кружница k паралелна на дадена права p. Оваа конструкција спаѓа меѓу елементарните конструкции и истата се изведува на следниот начин:

- од центарот O на кружницата k повлекуваме права n нормална на правата p,
- наоѓаме $k \cap p = \{T_1, T_2\}$ и
- во точките T_1 и T_2 конструираме тангенти на кружницата k (направи цртеж).

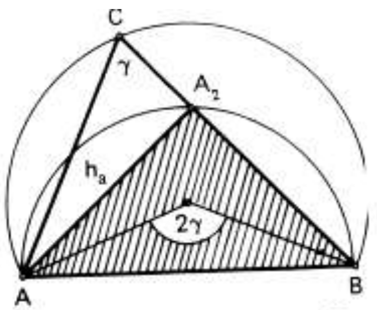
А) МЕТОД НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО

Скоро во сите претходно разгледани примери, ние всушност го користевме методот на геометриско место, кој е еден од најчесто користените методи за решавање на конструктивни задачи. Суштината на овој метод се состои во следното:

- Ако при една конструкција треба да се определи точка која задоволува два или повеќе услови, тогаш ги наоѓаме геометриските места на точки за секој услов одделно.
- Бидејќи секое од геометриските места ќе биде претставено со фигура, заедничките точки на овие фигури (ако истите постојат) се точките кои треба да ги определиме.

Пример 22. Конструирај триаголник зададен со R, γ, h_a.

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена (црт. 23). Бидејќи страната AB се гледа под агол γ, добиваме дека централниот агол е 2γ, па затоа должината на страната AB можеме да ја најдеме ако во кружница $k(O, R)$ конструираме произволен централен агол на 2γ и ги определиме пресечните точки A и B на неговите краци со кружницата k. Понатаму, од точката A_2 страната AB се гледа под прав агол и растојанието од точката A до точката A_2 е еднакво на h_a. Значи, A_2 е пресек на две геометриски места кои се кружницата k_1 конструирана над дијаметар AB и кружницата $k_2(A, h_a)$. Јасно, третото теме C е пресек на две геометриски места на точки и тоа, кружницата k и правата BA_2.



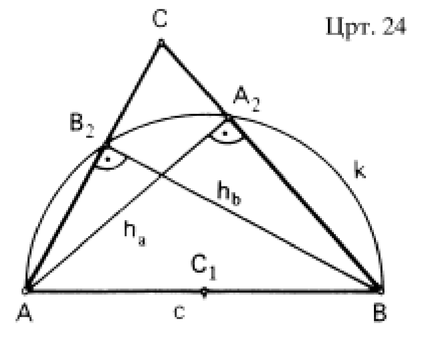
Црт. 23

Конструкција. Конструираме кружница $k(O, R)$ и во неа централен агол со големина 2γ и ги наоѓаме точките A и B (направи цртеж). Над AB, како над дијаметар, конструираме кружница k_1 и конструираме кружница $k_2(A, h_a)$. Наоѓаме $A_2 = k_1 \cap k_2$. Ја повлекуваме правата BA_2 и во пресек со кружницата k ја определуваме точката C. Триаголникот ABC ги задоволува условите на задача, т.е. тој е решение на задачата.

Обиди се самостојно да ги реализираш доказот и дискусијата. ♦

Пример 23. Конструирај триаголник зададен со c, h_a, h_b.

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена (црт. 24) и C_1 е средина на страната AB. Подножната точка A_2 на висината повлечена од темето A е пресек на две геометриски места на точки и тоа $k(A, h_a)$ и $k_1(C_1, \frac{c}{2})$, а подножната точка B_2 на висината повлечена од темето B е пресек на две геометриски места на точки и тоа $k_2(B, h_b)$ и $k_1(C_1, \frac{c}{2})$. Понатаму, точката C е пресек на правите BA_2 и AB_2.



Црт. 24

Конструкција. Конструираме отсечка AB, $\overline{AB} = c$ и ја определуваме нејзината средина C_1. Потоа конструираме кружници $k(A, h_a)$ и $k_1(C_1, \frac{c}{2})$ и во нивниот пресек наоѓаме точка A_2 и конструираме кружница $k_2(B, h_b)$ која кружницата $k_1(C_1, \frac{c}{2})$ ја сече во точка B_2. Ги повлекуваме правите BA_2 и AB_2 и во нивниот пресек ја наоѓаме точката C. Триаголникот ABC ги задоволува условите на задачата.

Обиди се самостојно да ги реализираш доказот и дискусијата. ♦

Забелешка 3. Во пример 8 видовме како се конструира нормала на права p од точка C. Претходниот пример може да се искористи за оваа конструкција кога $C \notin p$. Навистина, нека земеме произволна точка C_1 од p и да опишеме кружница $k(C_1, r)$, $r > 0$ произволно, која ја сече правата во точки A и B. Ги повлекуваме правите AC и BC и нека тие ја сечат кружницата во точки B_2 и A_2, соодветно. Потоа ги повлекуваме правите AA_2 и BB_2 и тие се сечат во точка H. Правата CH е бараната нормала p (зошто?). Обиди се да ја реализираш оваа конструкција и истата самостојно да ја докажеш.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

21. Да се конструираат заедничките тангенти на две дадени кружници.

22. Да се најде геометриското место на Γ од средините на тетивите што ги отсекува дадена кружница $k(O, r)$ од правите што минуваат низ дадена точка A.

23. Да се определи внатрешна точка на ΔABC од која неговите страни се гледаат под ист агол.

24. Конструирај ΔABC, ако се дадени:

а) c, γ, h_c, б) c, γ, t_c, в) c, R, t_c,

г) c, R, h_c, д) R, γ, t_c и ѓ) R, γ, h_c.

5. ЕЛЕМЕНТАРНИ КОНСТРУКЦИИ НА ЧЕТИРИАГОЛНИК

Во досегашните разгледувања претежно се задржавме на елементарните конструкции на триаголник. Меѓутоа во секојдневниот живот четириаголникот е исто толу важна геометриска фигура како и триаголникот, па затоа во овој дел ќе разгледаме неколку елементарни конструкции на четириаголник.

Како што знаеме произволен четириаголник е наполно определен ако ни се познати пет негови елементи, на пример, четирите страни и еден негов агол и слично. Затоа за да можеме да конструираме даден четириаголник треба да ни се познати пет негови елементи.

Пред да преминеме на конкретни примери, да забележиме дека при конструирањето на даден четириаголник најчесто конструираме помошен триаголник што ни овозможува да ја решиме задачата. Да разгледаме неколку примери.

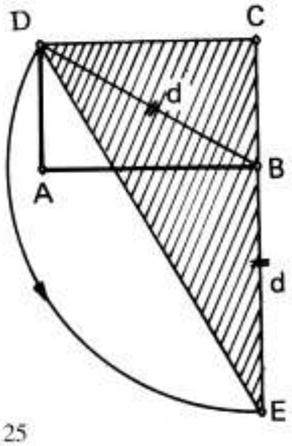
Пример 24. Конструирај квадрат зададен со збирот $a+d$ од страната a и дијагоналата d

Решение. *Анализа.* Нека е даден квадрат со страна a. Тогаш, неговата дијагонала е $d=a\sqrt{2}$, па затоа за да ја најдеме страната на квадратот доволно е збирот $a+d$ да го поделиме во однос $1:\sqrt{2}$.

Конструкција. Земаме отсечка со произволна должина m и конструираме отсечка со должина $m\sqrt{2}=\sqrt{m^2+m^2}$ (пример 15). Потоа ја делиме отсечката $a+d$ во однос $m:m\sqrt{2}=1:\sqrt{2}$. Помалата отсечка од оваа поделба е страната на квадратот, а поголемата е неговата дијагонала. Конечно, конструираме квадрат со дадени страна и дијагонала (направи цртеж). ♦

Пример 25. Конструирај правоаголник зададен со збирот $a, b+d$.

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека правоаголникот $ABCD$ е конструиран. Ако преку темето ја продолжиме страната BC за должина d, го добиваме правоаголниот триаголник ECD со катети a и $b+d$ (црт. 25). Според тоа, ΔECD можеме да го конструираме. Понатаму, ΔDEB е рамнокрак, па затоа темето B лежи на симетралата на страната DE.

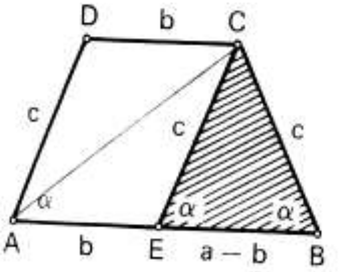


Црт. 25

Конструкција. Конструираме правоаголен триаголник ECD со катети a и $b+d$. Потоа ја конструираме симетралата на хипотенузата DE на ΔECD и во пресекот на симетралата и страната CE го определуваме темето B на правоаголникот. Темето A го наоѓаме во пресекот на кружниците $k_1(D,\overline{BC})$ и $k_2(B,\overline{CD})$.

Обиди се самостојно да ги изведеш конструкцијата, доказот и дискусијата. ♦

Пример 26. Конструирај рамнокрак трапез зададен со a, b, c.



Црт. 26

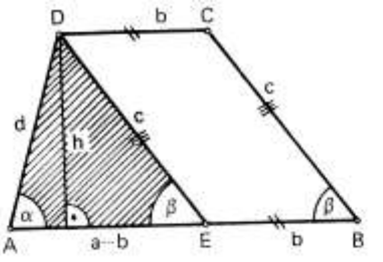
Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека трапезот $ABCD$ е конструиран. Ако низ темето C повлечеме права паралелна на страната AD и во пресек со основата AB ја најдеме точката E, го добиваме рамнокрак ΔEBC со основа $a-b$ и крак c.

Конструкција. Ја конструираме разликата на основите $a-b$. Потоа конструираме рамнокрак ΔEBC со основа $\overline{EB}=a-b$ и краци $\overline{EC}=\overline{BC}=c$. Преку темето E за должина b ја продолжуваме страната EB и ја добиваме точката A. Сега во точката C повлекуваме права паралелна на правата EB и во точката A повлекуваме права паралелна на правата EC. Во пресекот на овие прави ја наоѓаме точката D, со што е конструиран четириаголникот $ABCD$ кој е бараниот трапез.

Обиди се самостојно да ги изведеш конструкцијата, доказот и дискусијата. ♦

Пример 27. Конструирај трапез зададен со a, b, c и h.

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека трапезот $ABCD$ е конструиран. Ако во темето D повлечеме права паралелна на страната BC во пресекот со основата AB добиваме точка E (црт. 27). За ΔAED познати се страните $\overline{AE}=a-b$, $\overline{DE}=c$ и висината h, па затоа може да се конструира.



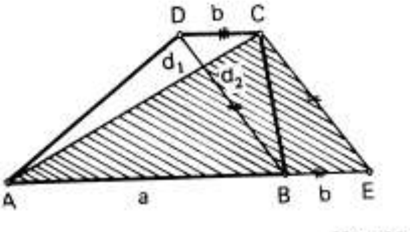
Црт. 27

Конструкција. Ја наоѓаме разликата на основите $a-b$ и конструираме отсечка $\overline{AE}=a-b$. Потоа на растојание h од правата AE конструираме права $p \parallel AE$. Понатаму, конструираме кружница $k(E,c)$ и наоѓаме $k \cap p = D$. Преку точката E ја продолжуваме отсечката AE за должина b и ја наоѓаме точката B. Низ точката B повлекуваме права паралелна на ED, а низ точката D права паралелна со правата AE и во нивниот пресек ја наоѓаме точката C, со што е конструиран четириаголникот $ABCD$ кој е бараниот трапез.

Обиди се самостојно да ги изведеш конструкцијата и доказот.

Дискусија. Триаголникот AED може да се конструира ако и само ако $h<c$ и како останатите делови од конструкцијата се секогаш изводлив заклучуваме дека трапезот може да се конструира ако и само ако $h<c$. ♦

Пример 28. Конструирај трапез зададен со основите a, b и дијагоналите d_1, d_2.



Црт. 28

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека трапезот $ABCD$ е конструиран (црт. 28). Ако во темето C повлечеме права паралелна со правата BD, во пресек со правата AB ја наоѓаме точката E. Четириаголникот $BECD$ е паралелограм со страни b и d_2. Според тоа,

ΔAEC имаме $\overline{AE}=a+b, \overline{EC}=d_1$ и $\overline{AC}=d_2$, па затоа истиот може да се конструира (ССС).

Конструкција. Конструираме ΔAEC со должини на страни $\overline{AE}=a+b, \overline{EC}=d_1$ и $\overline{AC}=d_2$. На страната AE наоѓаме точка B таква, што $\overline{AB}=a$. Низ точката B повлекуваме права паралелна со правата EC, а низ точката C повлекуваме права паралелна со правата AE и во пресек на овие прави ја наоѓаме точката D, со што е конструиран четириаголникот $ABCD$ кој е бараниот трапез.

Обиди се самостојно да ги изведеш конструкцијата и доказот.

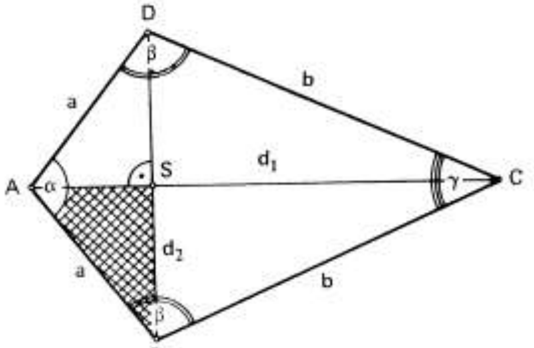
Дискусија. Триаголникот AEC може да се конструира ако и само ако

$$|d_1-d_2|<a+b<d_1+d_2, \qquad (1)$$

и како останатите делови од конструкцијата се секогаш изводливи заклучуваме дека трапезот може да се конструира ако и само ако е исполнет условот (1). ♦

Пример 29. Конструирај делтоид ако се дадени несговите дијагонали и една страна.

Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека делтоидот $ABCD$ е конструиран (црт. 29). Правоаголниот ΔBSA за кој се познати $\overline{AB}=a, \overline{BC}=\frac{d_2}{2}$ и $\angle BSA=90^\circ$ може да се конструира. Потоа темињата C и D лежат на продолженијата на страните AS и BS преку темето на правиот агол и $\overline{BD}=d_2$, $\overline{AC}=d_1$. Сега лесно можеш да ги реализираш конструкцијата и доказот. Јасно, задачата има решение, ако и само ако $\frac{d_2}{2}<a$. ♦



Црт. 29

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

25. Конструирај квадрат ако е дадена разликата на станата и дијагоналата $d-a$.

26. Конструира правоаголник ако се дадени:
  а) страната a и разликата на дијагоналата и другата страна $d-b$ и
  б) дијагоналата d и разликата на страните $a-b$.

27. Конструирај ромб зададен со:
  а) страната a и дијагоналата d_1 и   б) страната a и висина h.

28. Конструирај паралелограм зададен со страна, дијагонала и агол меѓу дијагоналите.

При формулацијата на следните задачи користени се цртежите од решените примери.

29. Конструирај рамнокрак трапез зададен со:
  а) a, b, α и   б) a, b, h.

30. Конструирај правоаголен трапез $ABCD$, $AD \perp AB$ зададен со:
  а) a, β, c и   б) $a, c, d_1=\overline{AC}$.

31. Конструирај трапез $ABCD$, зададен со:
  а) a,b,α,β,   б) a,b,α,h,   в) c,d,h,b и   г) c,d,h,a.

32. Конструирај делтоид ако се дадени:
а) d_1, d_2, α и   б) d_1, d_2, β.

33. Конструирај четириаголник $ABCD$ ако се дадени:
а) страните $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ и дијагоналата $\overline{AC}$.
б) страните $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ и аголот при темето A.

6. ПРИМЕНА НА ТРАНСЛАЦИЈАТА И РОТАЦИЈАТА ВО РЕШАВАЊЕ НА КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

А) ПРИМЕНА НА ТРАНСЛАЦИЈАТА ВО РЕШАВАЊЕ НА КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

Едно од наједноставните пресликувања во рамнината е транслацијата која како што знаеме се дефинира на следниот начин.

Дефиниција 4. Нека е даден ненултиот вектор $\vec{a}$ во рамнината Π. Пресликувањето $\tau_{\vec{a}} : \Pi \to \Pi$ определено со $\tau_{\vec{a}}(A) = A'$ ако и само ако $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ го нарекуваме *транслација за вектор* $\vec{a}$.

За транслацијата ни се познати следните својства:

а) При секоја транслација отсечка се пресликува во отсечка еднаква со неа.

б) Слика на права p при транслација $\tau_{\vec{a}}$ е права p' која се добива ако во произволна точка $A \in p$ го нанесеме векторот $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ и потоа во точката A' конструираме права p' паралелна на p.

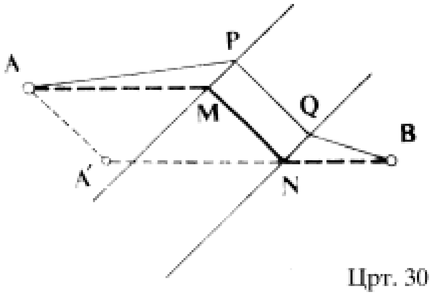
в) Слика на кружница $k(O,r)$ при транслација $\tau_{\vec{a}}$ е кружница $k'(O',r)$ при што $\tau_{\vec{a}}(O) = O'$ т.е. $\overrightarrow{OO'} = \vec{a}$.

г) Секој агол при транслација се пресликува во нему еднаков агол со паралелни краци.

Ќе разгледаме две конструктивни задачи во кои ќе ја примениме транслацијата.

Пример 30. Местата A и B се наоѓаат на различни страни од канал со паралелни брегови p и q. Каде треба да се изгради мост на каналот (нормално поставен на бреговите), така што патот меѓу A и B да биде најкус.

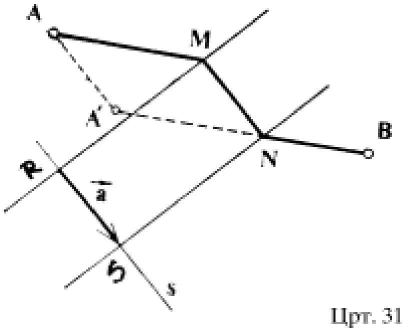
Решение. *Анализа.* Нека претпоставиме дека задачата е решена и нека мостот е PQ (црт. 30). Ако $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$, тогаш $\tau_{\vec{a}}(P) = Q$. Да земеме $\tau_{\vec{a}}(A) = A'$. Тогаш



Црт. 30

четириаголникот $APQA'$ е паралелограм, па $\overline{A'Q}=\overline{AP}$, Јасно, за да патот од A до B е најкраток треба искршената линија $A'QB$ да е најкратка, а тоа е можно ако и само ако точките A', Q и B се колинеарни. Според тоа, $Q=A'B\cap q$.

Конструкција. Повлекуваме произволна права s нормална на правата p и нека $R=p\cap s$ и $S=q\cap s$. Наоѓаме $\tau_{\overrightarrow{RS}}(A)=A'$, ја повлекуваме правата $A'B$ и наоѓаме $N=A'B\cap q$. Во точката N конструираме права нормална на правата q и во пресекот на оваа права со правата p ја наоѓаме точката M.



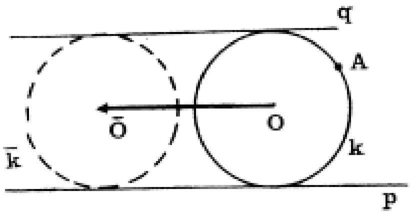
Црт. 31

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

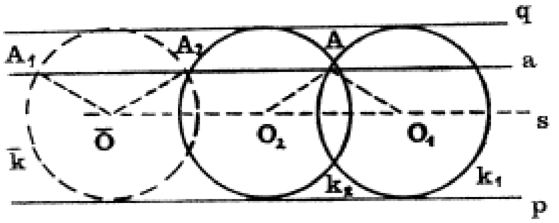
Дискусија. Бидејќи точката N е еднозначно определена, следува дека задачата секогаш има единствено решение. ♦

Пример 31. Да се конструира кружница која минува низ дадена точка и допира две паралелни прави.

Решение. *Анализа.* Да претпоставиме дека задачата е решена (црт. 32). Ако $\vec{a}$ е вектор паралелен со правата p, тогаш $\tau_{\vec{a}}(k)=\overline{k}$ е кружница, којашто пак ги допира правите p и q. Бидејќи една произволна кружница $\overline{k}$ што ги допира правите p и q можеме лесно да конструираме, со помош на една транслација неа можеме да ја пресликаме во бараната кружница.



Црт. 32



Црт. 33

Конструкција. Повлекуваме произволна права нормална на правите p и q која ги сече овие прави во дијаметрално спротивни точки на кружница $\overline{k}$ што ги допира правите p и q. Нејзиниот центар O лежи на правата s, што е паралелна со p и q и е еднакво оддалечена од нив. Низ точката A повлекуваме права a паралелна со p и q и ги наоѓаме пресечните точки A_1 и A_2 на a и $\overline{k}$ (ако такви постојат). Ако τ_1 е транслација на векторот $\overrightarrow{A_1A}$, а τ_2 е транслација на векторот $\overrightarrow{A_2A}$, тогаш $k_1=\tau_1(\overline{k})$ и $k_2=\tau_2(\overline{k})$ се кружници што ги задоволуваат условите на задачата (црт. 33).

Дискусија. Можни се три случаи:

а) ако точката A е меѓу правите p и q, задачата има две решенија;

б) ако точката A лежи на некоја од правите, тогаш задачата има само едно решение и

в) во друг случај задачата нема решение. ♦

Б) ПРИМЕНА НА РОТАЦИЈАТА ВО РЕШАВАЊЕ НА КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

При изучување на аглите рековме дека агол кај кој едниот крак го земаме за почетен, а другиот за краен го нарекуваме *насочен агол*. Притоа, ако за $\angle AOB$ кракот OA е почетен, а OB краен, тогаш насочениот агол го означуваме со $\angle\overrightarrow{AOB}$. Ако одејќи од почетниот крак OA кон крајниот крак OB се движиме обратно од стрелката на часовникот, тогаш ќе велиме дека $\angle AOB$ е позитивно насочен, а во спротивно ќе велиме дека е негативно насочен. Јасно, аглите $\angle\overrightarrow{AOB}$ и $\angle\overrightarrow{BOA}$ се еднакви по големина и се спротивно насочени и притоа пишуваме $\angle\overrightarrow{AOB}=-\angle\overrightarrow{BOA}$.

Да се потсетиме на дефиницијата на ротацијата и нејзините својства.

Дефиниција 5. Нека O е точка во рамнината Π и α насочен агол. Пресликувањето $\rho_{O,\alpha}:\Pi\to\Pi$ определено со $\rho_{O,\alpha}(O)=O$ и $\rho_{O,\alpha}(A)=A'$ ако и само ако $\angle\overrightarrow{AOA'}=\alpha$ и $\overline{OA}=\overline{OA'}$ го нарекуваме *ротација за агол* α *со центар во точката* O.

За ротацијата се исполнети следните својства:

а) При секоја ротација отсечка се пресликува во отсечка еднаква со неа.

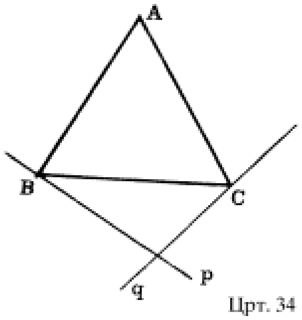
б) Слика на права p при ротација е права p' и притоа аголот меѓу правите p и p' е еднаков на аголот на ротација.

у) Сликата на агол при ротација е агол, еднаков со него.

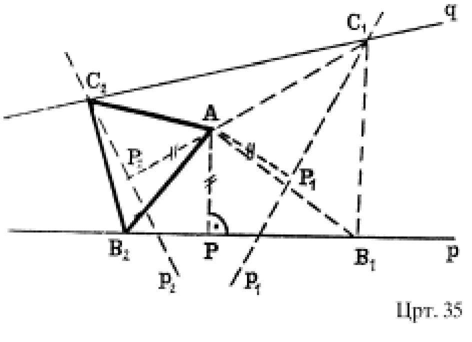
г) Слика на кружница $k(S,r)$ при ротација $\rho_{O,\alpha}$ е кружница $k'(S',r)$ таква, што $\rho_{O,\alpha}(S)=S'$. Притоа, ако $S\equiv O$, тогаш $\rho_{O,\alpha}(k)=k$.

Ќе разгледаме две конструктивни задачи во кои ќе ја примениме ротацијата за нивно решавање.

Пример 32. Дадени се прави p и q и точка A. Конструирај рамностран триаголник ABC таков, што $B\in p$ и $C\in q$.



Црт. 34



Црт. 35

Решение. *Анализа.* Да претпоставиме дека задачата е решена и нека ABC е бараниот триаголник (црт. 34). Триаголникот ABC е рамностран, па затоа $\overline{AB}=\overline{AC}$ и $\angle BAC=60^\circ$. Значи, ако ρ е ротација со центар A и агол 60° или агол -60°, тогаш $\rho(B)=C$. Точката B лежи на правата p, па точката $C=\rho(B)$ ќе лежи на правата $\rho(p)$. Од другата страна C лежи и на правата q, па значи, $C=\rho(p)\cap q$.

Конструкција. Земаме ротација ρ_1 е ротација со центар A и агол 60°, а ρ_2 ротација со центар A и агол -60° и нека $p_1=\rho_1(p)$, $p_2=\rho_2(p)$. Наоѓаме

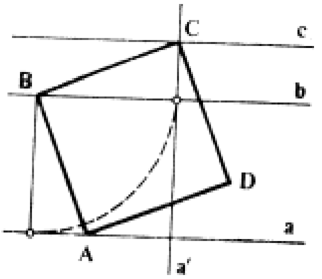
$$C_1 = p_1 \cap q, C_2 = p_2 \cap q, B_1 = \rho_2(C_1) \text{ и } B_2 = \rho_1(C_2),$$

и добиваме дека AB_1C_1 и AB_2C_2 се бараните триаголници.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Бидејќи барем една од правите p_1 и p_2 ја сече правата q, задачата има барем едно решение. Во случај кога и двете прави p_1 и p_2 ја сечат правата q задачата има две решенија. ♦

Пример 33. Да се конструира квадрат $ABCD$ таков, што три негови темиња да лежат на три дадени паралелни прави.



Црт. 36

Решение. *Анализа.* Да претпоставиме дека задачата е решена и $ABCD$ е бараниот квадрат (црт. 36). Од $\overline{BA} = \overline{BC}$ и $\angle ABC = 90^\circ$ следува ρ е ротација со центар B и агол $\alpha = 90^\circ$ или $\alpha = -90^\circ$, тогаш $\rho(A) = C$. Нека, на пример, $\angle ABC = 90^\circ$. Од $A \in a$, следува дека $\rho_{B,90^\circ}(A) = C \in \rho_{B,90^\circ}(a) = a'$, па затоа $C = a' \cap c$. Во случај кога $\alpha = -90^\circ$, добиваме дека $C = a'' \cap c$, каде што $a'' = \rho_{B,-90^\circ}(a)$,.

Конструкција. Нека B и произволна точка од правата b. Ги конструираме правите $a' = \rho_{B,90^\circ}(a)$ и $a'' = \rho_{B,-90^\circ}(a)$. Понатаму, ги определуваме точките $C_1 = a' \cap c$ и $C_2 = a'' \cap c$, и потоа ги конструираме квадратите $C_1BA_1D_1$ и $C_2BA_2D_2$ чии страни се C_1B и C_2B соодветно.

Доказ. Темињата C_1 и B од квадратот $C_1BA_1D_1$ лежат на правите c и b по конструкцијата. Бидејќи $C = a' \cap c$, добиваме дека $A_1 = \rho_{B,-90^\circ}(C_1)$, т.е. $A_1 \in a$. Значи, квадратот $C_1BA_1D_1$ ги задоволува условите на задачата. Аналогно се докажува дека и квадратот $C_2BA_2D_2$ ги задоволува условите на задачата.

Дискусија. Правата a' е нормална на a, па значи, е нормална и на c. Значи, точката C_1 секогаш постои, па, според тоа, и квадратот $C_1BA_1D_1$ постои. Според тоа, за произволна точка $B \in b$, задачата има секогаш две решенија. ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

34. Местата A и B се разделени со два канали со паралелни брегови. Каде треба да се изградат мостови на овие канали, за патот од A и B биде најкус?
35. Конструирај четириаголник, ако се дадени три негови агли и две спротивни страни.
36. Дадени се кружници $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ и права p. Конструирај права q паралелна со p, така што кружниците k_1 и k_2 отсекуваат на q еднакви отсечки.
37. Дадени се точка A, права p и кружница k. Конструирај рамностран триаголник ABC, така што $B \in p$ и $C \in k$.

38. Дадени се точка A и кружници k_1 и k_2. Конструирај рамностран триаголник ABC, така што $B \in k_1$ и $C \in k_2$.

39. Дадени се три паралелни прави. Конструирај рамностран триаголник, така што на секој права да лежи по едно негово теме.

7. ПРИМЕНА НА ОСНАТА И ЦЕНТРАЛНАТА СИМЕТРИЈА ВО РЕШАВАЊЕ НА КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

А) ПРИМЕНА НА ОСНАТА СИМЕТРИЈА ВО РЕШАВАЊЕ НА КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

Пред да ја разгледаме примената на осната симетрија во примената на конструктивни задачи да се потсетиме на дефиницијата на истата и некои нејзини својства.

Дефиниција 6. Нека a е права во рамнината Π, а B е произволна точка од Π. За точката B' ќе велиме дека е *симетрична* на B во однос на правата a ако правата a е симетрала на отсечката BB'.

Пресликувањето $\sigma_a : \Pi \to \Pi$ определено со $\sigma_a(A) = A'$ ако и само ако точката A' е симетрична на точката A во однос на правата a го нарекуваме *осна симетрија во однос на правата* a.

За осната симетрија се исполнети следните својства:

а) При секоја осна симетрија отсечка се пресликува во отсечка еднаква со неа.

б) Слика на права p при осна симетрија σ_a е права p'. Притоа,

  1) $\sigma_a(a) = a$;
  2) ако $p \perp a$, тогаш $p' \equiv p$;
  3) ако $p \parallel a$, тогаш $p' \parallel a$ и
  4) ако $p \nparallel a$, тогаш a е симетрала на еден од аглите определени со p и p'.

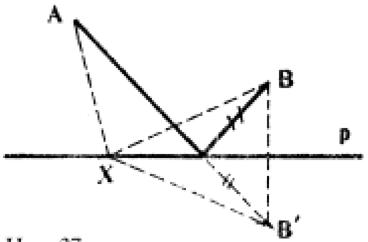
в) Сликата на агол при осна симетрија е агол, еднаков со него.

г) Слика на кружница $k(S,r)$ при осна симетрија σ_a е кружница $k'(S',r)$ таква, што $\sigma_a(S) = S'$. Притоа, ако $S \in a$, тогаш $\sigma_a(k) = k$.

Ќе разгледаме две конструктивни задачи во кои ќе ја примениме осната симетрија за нивно решавање.

Пример 34. Дадена е права p и точки A и B кои не припаѓаат на p и лежат во иста полурамнина определена со p. На правата p определи точка C таква, што збирот $\overline{AC} + \overline{BC}$ да биде најмал.

Решение. *Анализа.* Нека X е произволна точка од правата p и $\sigma_p(B) = B'$ (црт. 37). Точката X лежи на правата p имаме, па затоа $\overline{BX} = \overline{B'X}$, што значи $\overline{AX} + \overline{XB} = \overline{AX} + \overline{XB'}$. Од досега изнесеното следува дека збирот $\overline{AX} + \overline{XB}$ е најмал,



Црт. 37

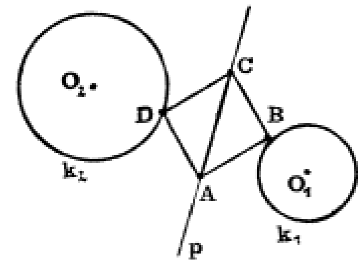
ако збирот $\overline{AX}+\overline{XB'}$ е најмал, т.е. ако должината на искршената линија AXB' е најмала, а тоа е можно кога точките A, X и B' се колинеарни.

Конструкција. Наоѓаме $\sigma_p(B)=B'$ и ја повлекуваме правата AB'. Сега, бараната точка е $C=AB'\cap p$.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата секогаш има единцтвено решение. ♦

Пример 35. Да се конструира квадрат, така што две негови спротивни темиња да лежат на дадена права p, а другите соодветно на две дадени кружници k_1 и k_2.

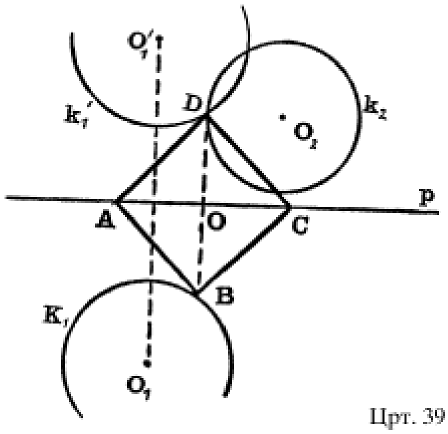


Црт. 38

Решение. *Анализа.* Нека $ABCD$ е бараниот кадрат (црт. 38). Правата p е оска на симетрија на квадратот, па затоа

$$\sigma_p(A)=A,\ \sigma_p(C)=C,\ \sigma_p(B)=D.$$

Бидејќи $B\in k_1$ имаме $D=\sigma_p(B)\in\sigma_p(k_1)=k_1'$ и како $D\in k_2$ добиваме дека $D\in k_1'\cap k_2$.



Црт. 39

Конструкција. Прво конструираме кружница $k_1'=\sigma_p(k_1)$ и наоѓаме точка $D\in k_1'\cap k_2$. Потоа определуваме $B=\sigma_p(D)$ и на таков начин добиваме две спротивни темиња B и D на бараниот квадрат (црт. 39). Сега ја определуваме точката $O=BD\cap p$ и на правата p наоѓаме точки A и C такви, што

$$\overline{OA}=\overline{OC}=\overline{OB}=\overline{OD}.$$

Конечно, четириаголникот $ABCD$ е бараниот квадрат.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата може да има две, едно или ниедно решение, во зависност од бројот на пресечните точки на кружниците k_1' и k_2. ♦

Б) ПРИМЕНА НА ЦЕНТРАЛНАТА СИМЕТРИЈА ВО РЕШАВАЊЕ НА КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

На крајот од овој дел ќе ја разгледаме примената на централната симетрија во решавање на конструктивни задачи. За таа цел прво ќе се потсетиме на дефиницијата на истата и нејзините основни својства.

Дефиниција 7. Нека O е точка во рамнината Π, а A е произволна точка од Π. За точката A' ќе велиме дека е *симетрична* на A во однос на точката O ако точките A,O и A' се колинеарни и точката O е средина на отсечката AA'.

Пресликувањето $\sigma_O:\Pi\to\Pi$ определено со $\sigma_O(A)=A'$ ако и само ако точката A' е симетрична на точката A во однос на точката O го нарекуваме *централна симетрија во однос на точката* O.

За централната симетрија се исполнети следните својства:

а) При секоја централна симетрија отсечка се пресликува во отсечка еднаква со неа.

б) Слика на права p при централна симетрија σ_O е права p', која е паралелна на p. Притоа, ако $O \in p$, тогаш $\sigma_O(p) = p$.

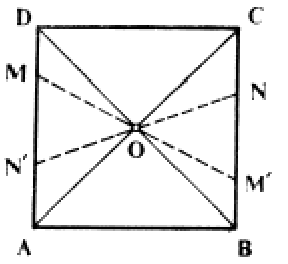
в) Сликата на агол при централна симетрија е агол, еднаков со него.

г) Слика на кружница $k(S,r)$ при централна симетрија σ_O е кружница $k'(S',r)$ таква, што $\sigma_O(S) = S'$. Притоа, ако $S \equiv O$, тогаш $\sigma_O(k) = k$.

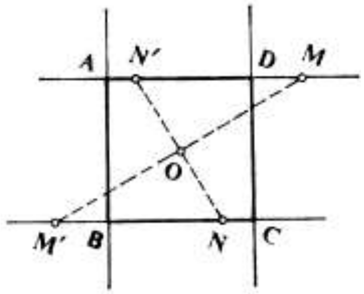
Ќе разгледаме две конструктивни задачи во кои ќе ја примениме осната симетрија.

Пример 36. Дадени се точките M, N и O. Конструирај квадрат, така што точката O е пресек на неговите дијагонали, а точките M и N лежат на две негови спротивни страни.

Решение. *Анализа.* Нека $ABCD$ е бараниот квадрат (црт. 40). Квадратот е централно симетрична фигура, со центар на симетрија во пресекот на неговите дијагонали. Значи, ако M лежи на страната AD, тогаш $\sigma_O(M) = M'$ лежи на страната BC. Слично, точката $\sigma_O(N) = N'$ лежи на страната AD. Значи, при централна симетрија σ_O ги определуваме правите на кои лежат спротивните страни. Сега, растојанието меѓу овие прави е еднакво на страната на квадратот.



Црт. 40



Црт. 41

Конструкција. Наоѓаме $\sigma_O(M) = M'$ и $\sigma_O(N) = N'$ и ги повлекуваме правите MN' и $M'N$, на кои лежат страните AD и BC, соодветно (црт. 41). Во точката O конструираме нормала на правата MN', која ги сече правите MN' и $M'N$ во точките P и Q, соодветно. Од точката P на правата MN' лево и десно нанесуваме растојание $\overline{OP}$, со што ги добиваме темињата A и D. Аналогно, ан правата $M'N$ ги наоѓаме темињата B и C.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

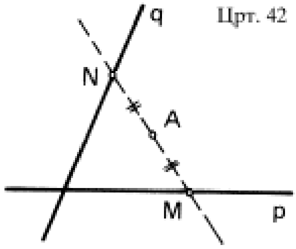
Дискусија. а) Ако точките M, N и O не се колинеарни, тогаш задачата има едно решение.

б) Ако точките M, N и O се колинеарни и O е средина на отсечката MN, тогаш на секој пар паралелни прави кои минуваат низ точките M и N ќе му соодветствува по еден квадрат, па значи задачата има бесконечно многу решенија.

в) Ако точките M, N и O се колинеарни и O не е средина на отсечката MN, тогаш M и N не се пресликуваат една во друга при централната симетријата σ_O, па значи задачата нема решение. ♦

Пример 37. Дадени се прави p и q и точка A која не лежи на правите. Низ точката A повлечи права a, така што A да биде средина на отсечката MN, каде што $M = a \cap p$ и $N = a \cap q$

Решение. *Анализа.* Да претпоставиме дека задачата е решена и нека MN е бараната права (црт. 42). Точката A е средина на отсечката MN, па затоа $N=\sigma_A(M)$. Притоа точката M лежи на правата p, а точката $N=\sigma_A(M)$ лежи на правата $p'=\sigma_A(p)$, па затоа $N=q\cap p'$.

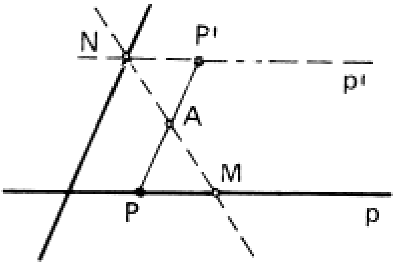


Црт. 42

Конструкција. Земаме произволна точка $P\in p$ и наоѓаме $\sigma_A(P)=P'$ (црт. 43). Низ точката P' повлекуваме права паралелна на p и ја наоѓаме правата $p'=\sigma_A(p)$. Сега $N=q\cap p'$ и ја повлекуваме правата AN, која е бараната права a.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. а) Ако правите p и q не се паралелни, тогаш задачата има едно решение.



Црт. 43

б) Ако правите p и q се паралелни и точката A е на еднакво растојание од нив, тогаш задачата има бесконечно многу решенија, т.е. решение е секоја права која минува низ A и не е паралелна со правите p и q.

в) Ако правите p и q се паралелни и точката A не е на еднакво растојание од нив, тогаш задачата нема решение. ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

40. Нека A и B се две точки во внатрешноста на остриот $\angle MON$. На краците OM и ON најди точки C и D соодветно такви, што збирот $\overline{AC}+\overline{CD}+\overline{BD}$ да биде најмал.
41. Во внатрешноста на остриот $\angle XOY$ се наоѓа точка A. Најди точки $B\in OX$ и $C\in OY$ такви, што збирот $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$ да биде најмал.
42. Конструирај ΔABC ако се познати: а) $c, h_c, \alpha-\beta$; б) $b, c-a, \alpha$.
43. Конструирај квадрат, така што две негови спротивни темиња да лежат на дадена права, а другите две на две дадени кружници.
44. Конструирај ΔABC ако се познати: страните a и b и тежишната линија t_c.
45. Конструирај ΔABC ако се познати: темето A, тежиштето T и правите p и q на кои лежат страните AB и AC.
46. Дадени се права p, кружница $k(S,r)$ и точка A. Низ точката A повлечи права a, така што A да биде средина на отсечката MN, каде $M=p\cap a$ и $N=k\cap a$.

8. КОНСТРУКЦИЈА НА НЕКОИ ПРАВИЛНИ МНОГУАГОЛНИЦИ

Во претходните години од твоето школување се запозна со транслацијата, ротацијата, централната и осната симетрија. Нивната примена во практиката е огромна, а како што ќе видиме тие се од исклучителна важност и при проучувањето на таканаречените правилни многуаголници.

Дефиниција 8. За фигурата F ќе велиме дека има *симетрија од ред* n, $n \in \mathbf{N}$ ако се пресликува само во себе при ротација за агол $\frac{360^\circ}{n}$. Центарот на ротацијата O го нарекуваме *центар на симетријата од ред* n.

Пример 38. а) Бидејќи секоја централна симетрија е ротација за агол од $180^\circ = \frac{360^\circ}{2}$ заклучуваме дека централната симетрија е симетрија од ред 2.

б) Ако квадратот го ротираме околу пресекот на неговите дијагонали за агол $90^\circ = \frac{360^\circ}{4}$, тогаш тој се пресликува во самиот себе, што значи дека квадратот има симетрија од ред 4, при што пресекот на дијагоналите е центар на симетрија од ред 4.

в) Нека $k(O,r)$ е произволна кружница и n е произволен природен број. Слика на кружницата k при ротацијата за агол $\frac{360^\circ}{n}$ е самата кружница k, што значи дека k има симетрија од произволен ред n и притоа центарот на кружницата е центар на овие симетрии. ♦

Теорема 1. Ако фигурата F има симетрија од ред n и ако $m|n$, тогаш фигурата има симетрија од ред m.

Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе). Нека F има симетрија од ред n и ако $m|n$, т.е. $n = mk$. Според тоа, $\frac{360^\circ}{m} = k\frac{360^\circ}{n}$, па затоа ротацијата за агол $\frac{360^\circ}{m}$ се добива со k последователни ротации за агол $\frac{360^\circ}{n}$, после кои фигурата F се пресликува во самата себе, што значи дека таа има симетрија од ред m и притоа центарот на симетријата од ред m е истиот со оној од ред n. ♦

Како што знаеме, околу секој триаголник може да се опише кружница, но тоа не важи за секој четириаголник. Меѓутоа, постојат четираголници околу кои може да се опише кружница, како на пример квадратот, правоаголникот и други. Овие четириаголници ги нарекуваме *тетивни четириаголници*, но на нивното проучување овде нема посебно да се задржиме. Слично, можеме да разгледуваме произволни многуаголници околу кои може да се опише кружница. Во нашите разгледувања ќе се осврнеме само на правилните многуаголници и ќе покажеме некои својства на истите.

Дефиниција 9. За $n-$аголникот $A_1A_2...A_n$ ќе велиме дека е *тетивен* ако неговите темиња лежат на една кружница.

Пример 39. а) Бидејќи околу секој триаголник може да се опише кружница, заклучуваме дека секој триаголник е тетивен.

б) Квадратот и правоаголникот се тетивни четириаголници. Може да се докаже дека четириаголник е тетивен ако и само ако збирот на спротивните агли е еднаквов на 180°. Притоа доволно е да се разгледаат двата агли под кои се гледа дијагоналата на четириаголникот. ♦

Дефиниција 6. За тетивниот $n-$аголник $A_1A_2...A_n$ ќе велиме дека е *правилен* ако неговите страни се еднакви меѓу себе. Центарот на кружницата опишана околу правилниот $n-$аголник го нарекуваме *центар* на $n-$аголникот.

Забелешка 4. Бидејќи правилниот $n-$аголник е тетивен $n-$аголник со еднакви страни, а на еднакви тетиви соодветствуваат еднакви централни агли, и обратно, заклучуваме дека правилен $n-$аголник е зададен ако го знаеме радиусот на кружницата опишана околу него и бројот на неговите страни. Притоа, за да го коснтруираме $n-$аголникот доволно е кружницата да ја поделиме на n еднакви делови, што е исто ако полниот агол го поделиме на n еднакви агли.

Теорема 2. $n-$аголникот $A_1A_2...A_n$ е правилен ако и само ако има симетрија од ред n.

Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе). Нека $A_1A_2..A_n$ е правилен $n-$аголникот и O е неговиот центар. Бидејќи над еднакви лаци во една кружница соодветствуваат еднакви централни агли заклучуваме дека $\angle A_1OA_2=\angle A_2OA_3=...=\angle A_nOA_1=\frac{360^\circ}{n}$. Според тоа, ако извршиме ротација ρ со центар O и агол $\frac{360^\circ}{n}$ добиваме $\rho(A_1)=A_2,\rho(A_2)=A_3,...,\rho(A_n)=A_1$, што значи дека $n-$аголникот се пресликува во самиот себе, т.е. има симетрија од ред n.

Нека $n-$аголникот има симетрија од ред n со центар O и нека A е произволно негово теме. Бидејќи $n-$аголникот при ротација ρ со центар O и агол $\frac{360^\circ}{n}$ се пресликува во самиот себе заклучуваме дека сликата на темето A ќе биде теме B различно од A и притоа $\angle AOB=\frac{360^\circ}{n}$. Ако последователно извршиме $n-1$ ротација, тогаш темето A постојано ќе се пресликува во ново теме од $n-$аголникот, различно од претходните и притоа секогаш централниот агол меѓу две последователни слики ќе биде $\frac{360^\circ}{n}$. Бидејќи над исти централни агли лежат исти лаци, односно исти тетиви, заклучуваме дека $n-$аголникот е тетивен и има еднакви страни, т.е. тој е правилен. ♦

Нека е даден правилен $n-$аголник. Ако $n=2k$, тогаш $2\,|\,n$, па од теорема 1 следува дека $n-$аголник има симетрија од ред 2, што значи дека тој е централно симетричен. Обратно, ако правилниот $n-$аголник е централно симетричен, тоа значи дека на секое теме од $n-$аголникот при централната симетрија му соодветствува едно и само едно теме од $n-$аголникот, што значи дека бројот на темињата е парен. Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема 3. Правилниот $n-$аголник е централно симетричен ако и само ако n е парен број. ♦

Во теорема 2 видовме дека секој правилен $n-$аголник има симетрија од ред n, што значи дека при ротација за агол $\frac{360^\circ}{n}$ се пресликува во самиот себе. Но, при ротација агол се пресликува во еднаков агол, што значи точна е следната теорема.

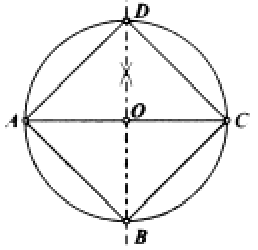
Теорема 4. Аглите на кој било правилен $n-$аголник се еднакви меѓу себе. ♦

Што се однесува до карактеризацијата на правилните многуаголници, може да се докаже дека, ако во еден $n-$аголник аглите и страните се еднакви, тогаш тој е правилен.

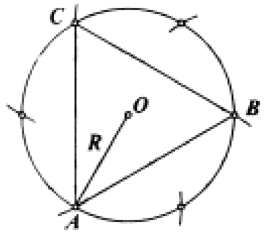
На крајот од овој дел ќе се осврнеме на конструкциите на некои правилни многуаголници, кога е зададен радиусот на опишаната кружница. За таа цел ќе разгледаме неколку примери.

Пример 40. а) За да конструираме квадрат вписан во кружница $k(O,R)$ постапуваме на следниот начин:

- ја конструираме кружницата k и повлекуваме произволен дијаметар AC на кружницата,
- во точката O конструираме права p нормална на правата AC и наоѓаме $k \cap p = \{B, D\}$,
- четириаголникот $ABCD$ е бараниот квадрат.



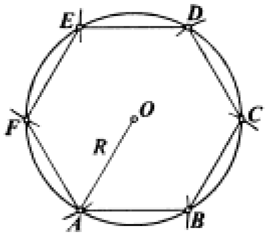
Црт. 44



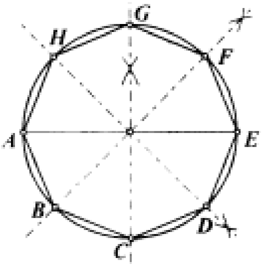
Црт. 45

б) За да конструираме рамностран триаголник вписан во кружница $k(O,R)$ постапуваме на следниот начин: ја конструираме кружницата k, земаме произволна точка A на k и од A со радиус R во иста насока последователно отсекуваме четири кружни лаци на k при што ги добиваме точките M, B, N и C. Конечно, ΔABC е бараниот рамностран триаголник вписан во k (црт. 45).

в) За да конструираме правилен шестаголник вписан во кружница $k(O,R)$ постапуваме на следниот начин: ја конструираме кружницата k, земаме произволна точка A на k и од A со радиус R во иста насока последователно отсекуваме пет кружни лаци на k при што ги добиваме точките B, C, D, E и F. Конечно, шестаголникот $ABCDEF$ е бараниот правилен шестаголник (црт. 46).



Црт. 46



Црт. 47

г) Правилен осумаголник вписан во кружница $k(O,R)$ конструираме на следниот начин:

- конструираме квадрат $ACEG$ вписан во k (црт. 47),
- конструираме симетрали на страните CE и EG кои ја сечат кружницата k во точките D и H, односно F и B, соодветно.

Конечно, многуаголникот $ABCDEFGH$ е бараниот правилен осумаголник. ♦

Забелешка 5. Постапката за конструкција на правилен $2n-$аголник, ако веќе имаме конструирано правилен $n-$аголник е аналогна на опишаната постапка за конструкција на правилен осумаголник со помош на веќе конструираниот квадрат.

ЗА ОНИЕ ШТО САКААТ ДА ЗНААТ ПОВЕЌЕ

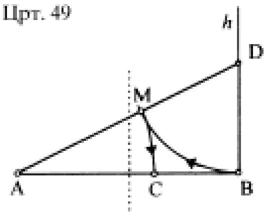
На крајот од овој дел ќе се осврнеме на конструкцијата на правилен петаголник впишан во кружница со радиус R. За таа цел прво ќе ја разгледаме поделбата на дадена отсечка по таканаречениот златен пресек.

За точката C ќе велиме дека ја дели отсечката AB по *златен пресек* ако $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{CB}$ (црт. 48). Ако ставиме $\overline{AB}=a, \overline{AC}=x$, тогаш имаме $a:x=x:(a-x)$ т.е

$$x=\sqrt{a(a-x)} \qquad (3)$$

што значи дека при поделбата по златен пресек поголемиот дел е геометриска средина од целата отсечка и нејзиниот помал дел.

Црт. 48



Црт. 49

Пример 41. Конструирај го златниот пресек на отсечката AB.

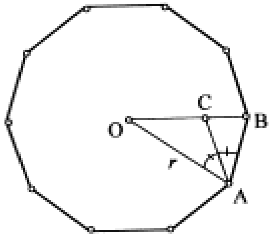
Решение. *Конструкција.* Ја нанесуваме отсечката $\overline{AB}=a$ и во точката B конструираме права h нормална на AB (црт. 49). На правата h наоѓаме точка D таква, што $\overline{BD}=\frac{\overline{AB}}{2}$. Потоа ја повлекуваме отсечката AD и на неа наоѓаме внатрешна точка M таква, што $\overline{DB}=\overline{DM}$. Конечно, на отсечката AB наоѓаме внатрешна точка C таква, што $\overline{AM}=\overline{AC}$. Точката C ја дели отсечката AB по златен пресек.

Доказ. Од Питагоровата теорема имаме $(\overline{AM}+\overline{MD})^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2$. Понатаму, по конструкција, $\overline{AM}=\overline{AC}$, $\overline{MD}=\overline{BD}=\frac{\overline{AB}}{2}$, па затоа $(\overline{AC}+\frac{\overline{AB}}{2})^2=\overline{AB}^2+(\frac{\overline{AB}}{2})^2$, т.е.

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2-\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\overline{AB}(\overline{AB}-\overline{AC}),$$

што и требаше да се докаже.

Дискусија. Јасно, постојат две поделби на AB по златен пресек, во зависност од тоа во која крајна точка на AB ја конструираме нормалата h. ♦



Црт. 50

Пример 42. Конструирај правилен десетаголник впишан во кружница со радиус r.

Решение. Прво ќе го докажеме следното помошно тврдење: за радиусот на кружницата r и страната a на правилниот десетаголник впишан во кружницата важи пропорцијата $r:a=a:(r-a)$.

Да го разгледаме ΔABO (црт. 50). Нека AC е симетралата на $\angle OAB$, каде C е пресечната точка на таа симетрала и страната OB. Бидејќи $\angle AOB=36^\circ, \angle OAB=\angle OBA=72^\circ$ добиваме дека $\angle OAC=\angle CAB=36^\circ, \angle ACB=\angle ABC=72^\circ$ т.е. $\Delta AOB\sim\Delta BAC$, па затоа

$$\overline{OA}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{BC} \text{ т.е. } \overline{OA}:\overline{AB}=\overline{AB}:(\overline{OB}-\overline{OC}) \text{ односно } r:a=a:(r-a).$$

Според тоа, за да ја определиме должината на страната на правилен десетаголник, впишан во кружница со радиус r, треба радиусот на кружницата да го поделиме по златен пресек и за страна на десетаголникот да ја земеме поголемата отсечка од оваа поделба.

Конструкција. Цртаме кружница $k(O,r)$ и повлекуваме произволен радиус OA_1. Отсечката OA_1 ја делиме по златен пресек со што ја добиваме страната a на десетаголникот. Сега почнувајќи од точката A_1 со отвор на шестарот еднаков на a последователно на кружницата отсекуваме кружни лаци со што ги добиваме темињата $A_2, A_3,\dots,A_{10}$. ♦

Забелешка 6. Претходно ја дадовме конструкцијата на правилен десетагоилник $A_1A_2..A_{10}$ впишан во кружница со радиус r. Точките A_1, A_3, A_5, A_7, A_9 се темиња на правилен петаголник.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

47. Докажи дека секој правилен $n-$аголник е оскосиметрична фигура.
48. Колку оски на симетрија има правилен $n-$аголник?
49. Дали мора еден: а) оскосиметричен, б) централносиметричен $n-$аголник да биде правилен?
50. Над страните на еден паралелограм, надвор од него, како над хипотенузи конструирани се рамнокраки правоаголни триаголници. Докажи дека нивните темиња кои не лежат на паралелограмот се темиња на квадрати.
51. Над страните на правилен шестаголник, како над хипотенузи, во:
    а) внатрешноста б) надворешноста
    на шестаголникот се конструирани рамнокраки правоаголни триаголници. Докажи дека нивните темиња кои не лежат на шестаголникот се темиња на друг правилен шестаголник.
52. *Конструирај рамнокрак триаголник со основа b и крак a, ако е даден збирот на кракот и основата $a+b$ и ако се знае дека $a:b=(a+b):a$.*
53. *Ако во правоаголен триаголник катетите се еднакви на страната на правилен десетаголник и радиусот на кружницата опишана околу него, тогаш хипотенузата е еднаква на страната на вписаниот правилен петаголник во истата кружница. Докажи?*

ПРОВЕРИ ГО СВОЕТО ЗНАЕЊЕ

1. **а)** Подели ја отсечката AB во однос 2:3. (4 б)
   б) Дадени се отсечки со должини a и b. Конструирај отсечка со должина c таква, што $a:b=b:c$. (6 б)
2. **а)** Конструирај рамнокрак триаголник зададен со b, h_a. (6 б)
   б) Конструирај триаголник зададен со α, h_c, a. (8 б)
3. **а)** Конструирај триаголник зададен со c, a, t_c. (10 б)
   б) Конструирај триаголник зададен со a, h_c, t_c. (15 б)
4. **а)** Конструирај рамнокрак трапез зададен со a, b, α. (15 б)
   б) Конструирај делтоид зададен со d_1, d_2, β. (20 б)
5. **а)** Над страните на еден паралелограм, надвор од него, како над хипотенузи конструирани се рамнокраки правоаголни триаголници. Докажи дека нивните темиња кои не лежат на паралелограмот се темиња на квадрати. (15 б)
   б) Над страните на правилен шестаголник, како над хипотенузи, во внатрешноста на шестаголникот се конструирани рамнокраки правоаголни триаголници. Докажи дека нивните темиња кои не лежат на шестаголникот се темиња на друг правилен шестаголник. (18 б)
6. **а)** Конструирај ΔABC ако се познати: страните a и b и тежишната линија t_c. (10 б)
   б) Дадени се кружници $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ и права p. Конструирај права q паралелна со p, така што кружниците k_1 и k_2 отсекуваат на q еднакви отсечки. (15 б)

Забелешка. При решавањето треба да избереш само по една подзадача од секоја задача. Доколку сакаш самостојно да се оцениш, можеш да го искористиш следниот критериум:

Бодови:	29-44	45-58	59-71	72-82
Оценка:	2	3	4	5

ГЛАВА VI

ПЛОШТИНА НА РАМНИНСКА ФИГУРА

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1. **Поим за плоштина. Плоштина на паралелограм**
2. **Плоштина на триаголник**
3. **Херонова формула за плоштина на триаголник. Плоштини на слични триаголници**
4. **Плоштина на трапез**
5. **Плоштина на трапезоид**
6. **Периметар и плоштина на правилен многуаголник**
7. **Периметар на кружница. Плоштина на круг**
8. **Должина на кружен лак. Плоштина на делови на круг**

ПОТРЕБНИ ПРЕДЗНАЕЊА

За успешно совладување на содржините кои ќе ги усвојуваш во оваа тема, потребно е да се потсетиш на:

- *на поимот должина на отсечка,*
- *паралелограмот, видовите паралелограми и нивните својства,*
- *Питагоровата теорема,*
- *тргонометриските функции од остар агол,*
- *триаголникот, видовите триаголници и нивните својства,*
- *признаците за сличност на триаголници,*
- *трапезод, трапезоидот, делтоидот и нивните својства и*
- *дефиницијата на правилен многуаголник и неговите својства.*

НОВИ ЗНАЕЊА И УМЕЕЊА

Успешното совладување на содржините кои се разработени во оваа тема има за цел:

- да го усвоиш поимот за плоштина на рамнинаска фигура,
- да се оспособиш на различни начини да решаваш задачи за плоштина на триаголник
- да се оспособиш да ги споредуваш плоштините на сличните триаголници,
- да можеш да решаваш задачи за плоштина на квадрат, правоаголник, ромб и ромбоид,
- да ја усвоиш и применуваш во решавање задачи формулата за плоштина натрапез,
- да ја усвоиш и применуваш во решавање на задачи формулата за плоштина на трапезоид со нормални дијагонали,
- да користиш поделба на трапезоид на триаголници за да ја пресметаш неговата плоштина,
- да го усвоиш поимот за карактеристичен триаголник на правилен многуаголник,
- да можеш да ја проценуваш промената на периметарот и плоштината на правилен многуаголник во зависност од промената на висината на карактеристичниот триаголник,
- да можеш да пресметуваш периметар и плоштина на правилен многуаголник,
- да ги усвоиш формулите за периметар и плоштина на круг и истите да ги применуваш при решавање на задачи,
- да ја усвоиш и применуваш во решавање задачи формулата за должина на кружен лак и
- да ги усвоиш и применуваш во решавање задачи формулите за плоштина на делови на кругот (кружен исечок, кружен отсечок и кружен прстен).

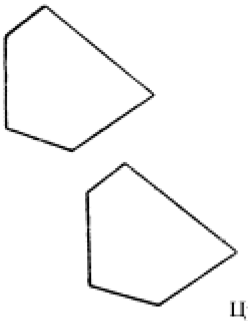
Во еден запис на античкиот историчар Херодот (V век п.н.е.) пишува: "*Египетскиот фараон Сезоострис ја разделил обработливата земја на Египќаните и, според големината на земјата на соодветен начин им земал данок. Се случувало реката Нил да се излее од коритото и да уништи дел од дадените парцели. По барање на сопствениците на оштетените парцели фараонот испраќал земјомери за да утврдат каков дел од парцелите се уништени.*". Овој древен запис укажува на тогашната потреба од мерење на плоштините на рамнинските фигури. Се разбира, оваа потреба низ вековите не се намалувала, туку напротив се повеќе се зголемувала. Токму затоа, во оваа тема подетално ќе се запознаеме со пресметувањето на плоштините на најчесто користените рамнински геометриски фигури.

1. ПОИМ ЗА ПЛОШТИНА. ПЛОШТИНА НА ПАРАЛЕЛОГРАМ

Да се потсетиме на формулацијата на задачата за мерење на отсечки во најопшта форма. Да се востанови систем за мерење на отсечки значи на секоја отсечка AB да и се придружи позитивен реален број, наречен *должина* на отсечката AB, при што се исполнети следните својства:

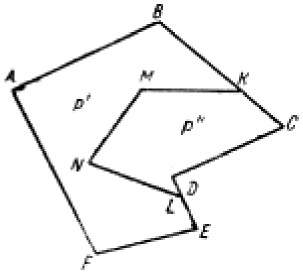
а) На складни (еднакви) отсечки им соодветствува една иста должина.

б) Ако точката B лежи меѓу точките A и C, тогаш должината на отсечката AC е еднаква на збирот на должините на отсечките AB и BC.



Црт. 1

Поимот плоштина на рамнинска фигура се воведува аналогно на поимот должина на отсечка, на следниот начин. Да се востанови систем на мерење на површините на многуаголниците значи на секој многуаголник да му се придружи позитивен реален број, наречен негова *плоштина*, при што се исполнети следните својства:



Црт. 2

а) Складни многуаголници имаат еднакви плоштини (црт. 1).

б) Ако многуаголникот е составен од два или повеќе многуаголници што не се преклопуваат, тогаш неговата плоштина е збир од плоштините на многуаголниците кои се негови делови (на црт. 2 плоштината на многуаголникот $ABCDEF$ е еднаква на збирот на плоштините на многуаголниците $ABKMNLEF$ и $DCKMNL$).

в) Плоштината на квадрат со страна a е еднаква на a^2.

Својството в) ни овозможува да се утврди *единица мерка за плоштина.* За таква единица може да се земе било кој квадрат со должина на страна a, но заради усогласување на мерните единици со меѓународниот SI систем е прифатено единица мерка за плоштина да биде квадрат со страна $1m$, за кој велиме дека има плоштина од еден метар квадратен и истата ја означуваме со $1m^2$.

Забелешка 1. Во практиката често пати плоштините се изразуваат и со други единици, од кои овде ќе ги спомeнеме $1dm^2, 1cm^2, 1ar$ и $1ha$. Притоа важи: $1m^2 = 100dm^2$, $1m^2 = 10000cm^2, 1ar = 100m^2$ и $1ha = 10000m^2$ (зошто?).

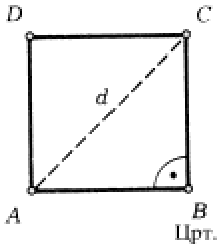
А) ПЛОШТИНА НА ПРАВОАГОЛНИК

При воведување на поимот плоштина на рамнинска фигура со својството в) прифативме дека плоштината на квадрат со страна a се пресметува со формулата $P = a^2$.

Пример 1. Квадрат со страна $a = 0{,}3m$ има плоштина $P = 0{,}09m^2$. Меѓутоа, ако се има предвид забелешка 1 добиваме дека плоштината на овој квадрат може да се запише на еден од следните начини $P = 9dm^2, P = 900cm^2, P = 0{,}0009ar$ и $P = 0{,}000009ha$.

Слично, квадрат со страна $a = 1{,}2m$ има плоштина $P = 1{,}44m^2$. Запиши ја истата со помош на единиците наведени во забелешка 1. ♦

Забелешка 2. Од Питагоровата теорема следува дека за дијагоналата d и страната a на квадратот $ABCD$ (црт. 3) важи формулата $d = a\sqrt{2}$, односно формулата $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$. Според тоа, ако замениме во формулата $P = a^2$, тогаш за плоштината на квадратот изразена преку неговата дијагонала ја добиваме формулата $P = \frac{d^2}{2}$. Така, на пример, квадрат со дијагонала $d = 6cm$ има плоштина $P = \frac{36}{2}cm^2 = 18cm^2$.

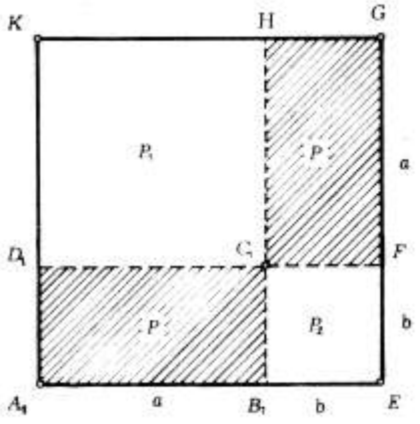


Црт. 3

Во натамошните разгледувања ќе покажеме како со помош на својствата а)-в) може да се изведат формули за пресметување на плоштини на други рамнински фигури. За таа цел прво ќе ја изведеме формулата за пресметување плоштина на правоаголник.

Теорема 1. Плоштината на правоаголник со должини на страни a и b е еднаква на ab, т.е. $P = ab$.

Доказ. Нека е даден правоаголник $A_1B_1C_1D_1$ чии должини на страни се a и b (црт. 4). Над страната D_1C_1 конструираме квадрат D_1C_1HK со страна a, а над страната B_1C_1 конструираме квадрат B_1EFC_1 со страна b и ги продолжуваме страните KH и EF кои се сечат во точката G. Јасно, четириаголникот C_1FGH е правоаголник со страни a и b, а четириаголникот A_1EGK е квадрат со страна $a+b$.



Црт. 4

Од својството а) имаме дека секој правоаголниците $A_1B_1C_1D_1$ и C_1FGH има плоштина P. Понатаму, ако плоштините на квадратите D_1C_1HK, B_1EFC_1 и A_1EGK се еднакви на P_1, P_2 и P', тогаш од својството б) следува дека

$$P' = 2P + P_1 + P_2. \qquad (1)$$

Понатаму, од својството в) добиваме дека $P' = (a+b)^2, P_1 = a^2, P_2 = b^2$ и ако замениме во (1) наоѓаме

$$(a+b)^2 = 2P + a^2 + b^2,$$

од каде што следува дека $P = ab$. ♦

Забелешка 3. Ако должините на страните a и b на правоаголникот се зададени во различни мерни единици, тогаш прво треба да ги изразизиш во иста мерна единица, а потоа да ја пресметаш плоштината на правоаголникот.

Пример 2. Пресметај ја плоштината на правоаголник зададен со:

а) страни $a = 0{,}3m$ и $b = 12dm$, **б)** страна $b = 0{,}05m$ и дијагонала $d = 13cm$.

Решение. а) Согласно забелешка 3 за страната a имаме $a = 0{,}3m = 3dm$, па затоа плоштината на правоаголникот е $P = 3 \cdot 12dm^2 = 36dm^2 = 0{,}36m^2$.

б) Согласно забелешка 3 за страната b на правоаголникот имаме $b = 5cm$. Понатаму, од Питагоровата теорема следува $a = \sqrt{d^2 - b^2} = \sqrt{13^2 - 5^2}cm = 12cm$, па затоа неговата плоштина е $P = 5 \cdot 12cm^2 = 60cm^2$. ♦

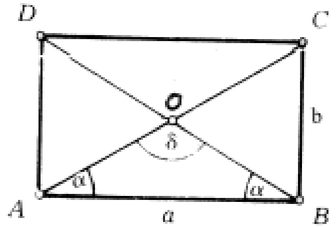
Пример 3. Пресметај ја плоштината на правоаголник зададен со дијагонала $d = 12cm$ и агол меѓу дијагоналите $\delta = 120^\circ$.

Решение. Страните a и b можеме да ги определиме од правоаголниот ΔABC (црт. 5), за кој е позната хипотенузата $\overline{AC} = d$. Од ΔABO имаме $2\alpha + \delta = 180^\circ$ и како $\delta = 120^\circ$ добиваме $\alpha = 30^\circ$. Сега, од ΔABC следува

$$a = d\cos 30^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}cm = 6\sqrt{3}cm \text{ и } b = d\sin 30^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2}cm = 6cm$$

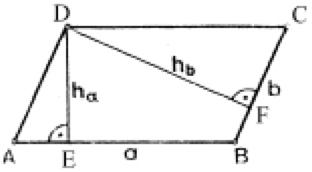
па затоа

$$P = 6\sqrt{3} \cdot 6cm^2 = 36\sqrt{3}cm^2. \text{ ♦}$$



Црт. 5

Б) ПЛОШТИНА НА РОМБОИД

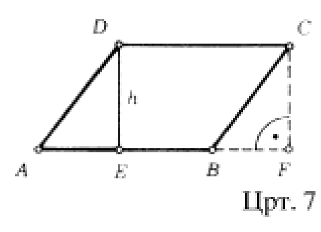


Црт. 6

Да го разгледаме ромбоидот $ABCD$ за кој имаме основа $\overline{AB} = a$ и висина $\overline{DE} = h_a$, односно основа $\overline{BC} = b$ и висина $\overline{DF} = h_b$ (црт. 6). Формулата за пресметување на плоштината на ромбоидот ќе ја најдеме користејќи ги својствата а) и б).

Теорема 2. Плоштината на ромбоид со должина на основа a и и висина h е еднаква на ah, т.е.

$$P = ah. \qquad (2)$$



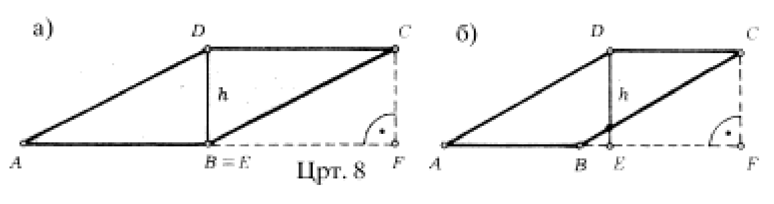
Црт. 7

Доказ. Нека е даден правоаголник $ABCD$ со основа a и висина h (црт. 7). Ги повлекуваме висините DE и CF кон основата AB и го добиваме правоаголникот $EFCD$ чии должини на страни се a и h. Триаголниците AED и BFC се складни, па затоа

$$P_{AED} = P_{BFC}$$

(својство а). Сега од својството б) и теорема 1 следува

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{AED} + P_{EBCD} \\ &= P_{BFC} + P_{EBCD}\,. \\ &= P_{EFCD} = ah \end{aligned}$$



Црт. 8

Обиди се самостојно да ги докажеш случаите кога висините DE и CF се во положба претставена на црт. 8 а) и б). ♦

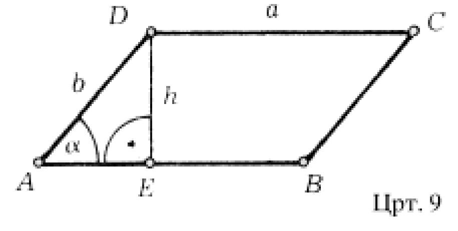
Пример 4. Пресметај ја плоштината на ромбоидот зададен со страни $a = 10cm$, $b = 5cm$ и агол меѓу страните $\alpha = 45^\circ$.

Решение. Од правоаголниот ΔAED добиваме $\sin\alpha = \frac{\overline{ED}}{\overline{AD}} = \frac{h}{b}$ т.е. $h = b\sin\alpha$ (црт. 9). Од условот на задачата наоѓаме

$$h = 5\sin 45^\circ = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Конечно, за плоштината на ромбоидот добиваме

$$P = ah = 10 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} cm^2 = 25\sqrt{2}cm^2. \text{ ♦}$$



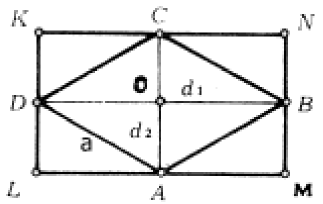
Црт. 9

Забелешка 4. Во пример 4 видовме дека за ромбоид со страни a и b и остар агол меѓу страните α важи $h = b\sin\alpha$. Ако замениме во формулата (2) добиваме дека плоштината на ромбоидот може да се пресмета со формулата

$$P = ab\sin\alpha. \qquad (3)$$

В) ПЛОШТИНА НА РОМБ

Бидејќи ромбод всушност е ромбоид со еднакви страни добиваме дека неговата плоштина, во случај кога се дадени должината на страната a и висината h, може да се пресмета според формулата (2), а во случај кога е дадена должината на страната a и остриот агол меѓу страните α, формулата (3) го добива видот $P = a^2 \sin\alpha$.



Црт. 10

На крајот од овој дел ќе дадеме уште една формула за пресметување на плоштина на ромб кај кој се дадени должините на неговите дијагонали d_1 и d_2 (црт. 10). Дијагоналите на ромбот AC и BD се заемно нормални, па затоа ако во темињата A и C повлечеме прави паралелни на дијагоналата BD, а во темињата на B и D повлечеме прави паралелни на дијагоналата AC, тогаш во пресекот на овие прави ги добиваме точките K, L, M и N кои се темиња на правоаголник. Плоштината на правоаголникот $KLMN$ е двапати поголем од плоштината на ромбот $ABCD$ (зошто?), т.е.

$$2P_{ABCD} = P_{KLMN} = d_1 d_2$$

од што следува

$$P_{ABCD} = \frac{d_1 d_2}{2}. \tag{4}$$

Пример 5. Пресметај ја плоштината на ромбоот зададен со страни $a = 13cm$ и дијагонала $d_2 = 10cm$.

Решение. Од правоаголниот ΔAOD (црт. 10), добиваме

$$\frac{d_1}{2} = \sqrt{a^2 - (\frac{d_2}{2})^2} = \sqrt{13^2 - (\frac{10}{2})^2}\,cm = 12cm \text{ т.е. } d_1 = 24cm.$$

Сега, ако ја примениме формулата (4) за плоштината на ромбот наоѓаме

$$P = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{10 \cdot 24}{2} cm^2 = 120cm^2. \ \blacklozenge$$

Коментар 1. Во претходните разгледувања изведовме повеќе формули за пресметување на плоштините на различните видови паралелограми. Меѓутоа, како што видовме формулите (2) и (3) се заеднички за ромбоидот и ромбот. Но, ако се има предвид дека $\sin 90^\circ = 1$, а кај правоаголникот и квадратот висината е еднаква на другата страна добиваме дека овие формули важат за секој паралелограм. Според тоа, плоштината на секој паралелограм може да се пресмета според формулите (2) и (3).

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Пресметај ја плоштината на квадратот, ако:
   а) $a = 2,5cm$, б) $a = 1,7dm$, в) $a = 0,6m$.
2. Одреди ја страната на квадратот чија плоштина е еднаква на збирот на плоштините на два квадрати со страни $54cm$ и $72cm$.
3. Пресметај ја плоштината на квадратот, ако збирот на должините на неговите страна и дијагонала е $12cm$.
4. Пресметај ја плоштината на правоаголникот со страни:
   а) $a = 4cm$ и $b = 0,3dm$, б) $a = (7+\sqrt{3})cm$ и $b = (7-\sqrt{3})cm$.
5. Колку ари има нива, во форма на правоаголник, со должнина $72,5m$ и ширина $48m$.
6. Пресметај го периметарот на правоаголникот чии страни се однесуваат како $3:5$, ако неговата плоштина е $240cm^2$.
7. Пресметај ја плоштината на правоаголникот $ABCD$ со страна $\overline{AB} = 14,3cm$ и аголот меѓу дијагоналите спроти страната AB, $\delta = 120^\circ 46'$.

8. Пресметај ја плоштината на правоаголник вписан во кружница со радиус $12{,}5cm$, ако едната страна му е $7cm$.

9. Плоштината на еден паралелграм е $336cm^2$, а неговиот периметар е $104cm$. Пресметај го растојанието меѓу помалите страни, ако растојанието меѓу поголемите страни е $12cm$.

10. Пресметај ја страната на ромбот, ако една негова дијагонала е $24cm$, а плоштината е $1{,}2dm^2$.

11. Пресметај ја страната на ромбот, ако неговата плоштина е $96cm^2$, а дијагоналите се однесуваат како $3:4$.

12. Висината на ромбот е $48cm$, а поголемата дијагонала $8dm$. Пресметај ја страната на ромбот.

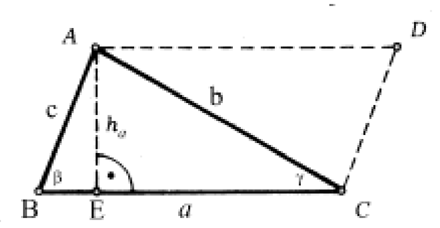
13. Пресметај ја плоштината на ромб со помала дијагонала $6cm$ и радиус на впишаната кружница $24mm$.

2. ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

Да го разгледаме ΔABC (црт. 11). Низ точката A повлекуваме права паралелна на страната BC, а низ точката C права паралелна на страната AB во чиј пресек ја добиваме точката D. Четириаголникот $ABCD$ е парелеограм, што значи $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (зошто?). Плоштината на паралелограмот $ABCD$ е еднаква на ah_a, и таа е двапати поголема од плоштината на ΔABC. Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема 3. Плоштината P на ΔABC со страна a и соодветна висина h_a се пресметува со формулата

$$P = \frac{ah_a}{2}. \blacklozenge \qquad (1)$$



Црт. 11

Коментар 2. Секоја страна на ΔABC може да се земе за негова основа, па затоа точно е дека

$$P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}. \qquad (2)$$

Понатаму, ако се има предвид дека во случај кога аглите β и γ се остри, тогаш важи $h_a = b\sin\gamma = c\sin\beta$ (црт. 11), со замена во формулите (2) добиваме

$$P = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{ac\sin\beta}{2}. \qquad (3)$$

На сличен начин се добива и формулата

$$P = \frac{bc\sin\alpha}{2}. \qquad (4)$$

Формулите (3) и (4) важат и кога триаголникот е тапоаголен. Притоа, на пример, ако $\gamma > 90^\circ$, тогаш се користи равенството $\sin\gamma = \sin(180^\circ - \gamma)$, со кое ќе се запознаеш при сеопфатното проучување на тригонометриските функции.

Пример 6. Пресметај ја плоштината на триаголник со страни $a = 13cm$, $b = 10cm$ и агол меѓу нив $\gamma = 30^\circ$.

Решение. Ако ја искористиме формулата (3), тогаш за плоштината на триаголникот добиваме $P=\frac{ab\sin\gamma}{2}=\frac{13\cdot10\cdot\sin30^\circ}{2}cm^2=\frac{130\cdot\frac{1}{2}}{2}cm^2=32{,}5cm^2$. ♦

Забелешка 5. а) Да се потсетиме, висинатана рамностран триаголник со страна a е еднаква на $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Според тоа, со замена во (1) за неговата плоштина добиваме:

$$P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \tag{5}$$

б) Од друга страна, кај правоаголен триаголник со катети a и b важи $h_a=b$, па затоа плоштината на правоаголниот триаголник се пресметува споед формулата

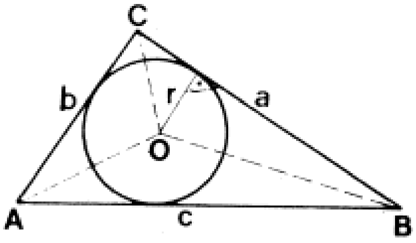
$$P=\frac{ab}{2}. \tag{6}$$

Пример 7. а) Плоштината на рамностран триаголник е еднаква на $\frac{9\sqrt{3}}{2}cm^2$. Најди ја неговата страна.

б) Плоштината на правоаголен триаголник со катета $a=8cm$ е еднаква на $0{,}52dm^2$. Најди ја другата катета.

Решение. а) Ако со a ја означеме должината на страната на рамностраниот триаголник, тогаш со замена во формулата (5) наоѓаме $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$, од каде наоѓаме $a^2=18$ т.е. $a=3\sqrt{2}cm$.

б) Ако со b ја означеме должината другата катета, тогаш со замена во формулата (6) наоѓаме $\frac{ab}{2}=0{,}52dm^2=52cm^2$, од каде наоѓаме $b=\frac{2\cdot52}{13}cm=13cm$. ♦



Црт. 12

Познато ни е дека во секој триаголник може да се впише кружница со радиус r. Ќе покажеме дека плоштината на триаголникот може да се пресмета ако ни е познат радиусот на впишаната кружница и полупериметарот. Да го разгледаме ΔABC во кој е впишана кружница со радиус r (црт. 12). Центарот O на впишаната кружница го поврзуваме со темињата на триаголникот и ги добиваме триаголниците ABO, BCO и CAO чии плоштини се $P_1=\frac{cr}{2}, P_2=\frac{ar}{2}$ и $P_3=\frac{br}{2}$, соодветно. Според тоа, за плоштината на ΔABC добиваме

$$P=P_1+P_2+P_3=\frac{cr}{2}+\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}=\frac{a+b+c}{2}r=rs,$$

каде $s=\frac{a+b+c}{2}$ е полупериметарот на ΔABC. Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема 4. Плоштината P на ΔABC со полупериметар s и радиус на впишана кружница r се пресметува со формулата

$$P=rs. \text{ ♦} \tag{7}$$

Пример 8. Пресметај го радиусот на впишаната кружница во правоаголен триаголник со плоштина $480cm^2$ чии катети се однесуваат како $5:12$.

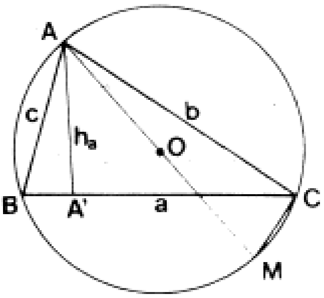
Решение. Нека a и b се катетите на правоаголниот триаголник. Од условот на задачата имаме $a:b=5:12$ и $ab=2\cdot 480$. Од правата равенка $a=\frac{5}{12}b$ и ако замениме во втората добиваме $\frac{5}{12}b^2=960$, т.е. $b=48cm$. Според тоа, $a=\frac{5}{12}b=20cm$. Од Питагоровата теорема за хипотенузата c добиваме $c=\sqrt{a^2+b^2}=52cm$, па затоа неговиот полупериметар е $s=\frac{a+b+c}{2}=60cm$.

Конечно, ако замениме во формулата (7) за радиусот на впишаната кружница наоѓаме $480=60r$, т.е. $r=8cm$. ♦

Во претходните разгледувања видовме дека со помош на радиусот на впишаната кружница и полупериметарот, т.е. должините на страните може да се пресемета плоштината на триаголникот. Како што знаеме, околу секој триаголник може да се опише кружница со радиус R. Природно е да се запрашаме, дали со помош на радиусот R и страните може да се пресмета плоштината на триаголникот. Одговорот на ова прашање е потврден, што може да се види од следнта теорема.

Теорема 5. Плоштината P на ΔABC со страни a,b,c и радиус на опишан кружница R се пресметува со формулата

$$P=\frac{abc}{4R}. \qquad (8)$$



Црт. 13

Доказ. Нека околу ΔABC е опишана кружница со радиус $k(O,R)$ (црт. 13). Повлекуваме права AO која кружницата k ја сече и во точката $M,(\overline{MA}=2R)$. Имаме $\angle ABC=\angle AMC$, како агли над ист лак во кружница, и како ΔAMC е правоаголен (зошто?), добиваме дека $\Delta AMC \sim \Delta ACA_1$ од што следува $h_a:c=b:2R$ односно $h_a=\frac{bc}{2R}$. Конечно, ако замениме во формулата $P=\frac{ah_a}{2}$ добиваме $P=\frac{a\frac{bc}{2R}}{2}=\frac{abc}{4R}$, што и требаше да се докаже. ♦

Пример 9. Даден е рамнокрак триаголник со основа $a=8cm$ и крак $b=5cm$. Пресметај го радиусот на опишаната кружница околу триаголникот.

Решение. За висината на триаголникот соодветна на основата a наоѓаме

$$h_a=\sqrt{b^2-(\tfrac{a}{2})^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3cm.$$

Според тоа, плоштината на триаголникот е $P=\frac{ah_a}{2}=12cm^2$. Понатаму, ако се има предвид дека $c=b$, од (8) за радиусот R на опишаната кружница имаме

$R=\frac{ab^2}{4P}=\frac{25}{6}cm$. ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

14. Пресметај ја плоштината на рамностран триаголник со страна:
а) $a = 2{,}5cm$, б) $a = 1{,}7dm$, в) $a = 0{,}6m$.

15. Одреди ја страната на рамностран триаголник со плоштина $49\sqrt{3}cm^2$.

16. Пресметај ја плоштината на рамнокрак триаголник со основа $12cm$ и раб $10cm$.

17. Пресметај ја плоштината на ΔABC зададен со страните $b = 8cm,\ c = 12cm$ и аголот $\alpha = 36^\circ 40'$.

18. Пресметај ја плоштината на рамнокрак триаголник со крак $b = 12cm$ и агол при основата $\alpha = 68^\circ 23'$.

19. Пресметај ја плоштината на правоаголен триаголник, ако висината на хипотенузата ја дели истата на отсечки од $9cm$ и $16cm$.
Упатство. Искористи ги Евклидовите теореми.

20. Пресметај го радиусот на впишаната кружница во правоаголен триаголник со плоштина е $80cm^2$, а катетите му се однесуваат како $8:5$.

21. Најди го радиусот на опишаната кружница околу рамнокракиот ΔABC со основа $a = 10cm$ и крак $b = 13cm$.

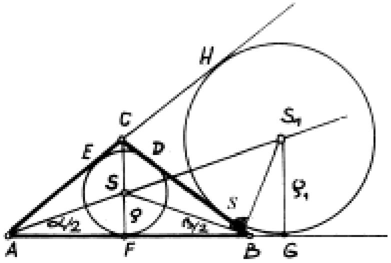
3. ХЕРОНОВА ФОРМУЛА ЗА ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК. ПЛОШТИНИ НА СЛИЧНИ ТРИАГОЛНИЦИ

А) ХЕРОНОВА ФОРМУЛА ЗА ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

Како што знаеме секој триаголник е наполно определен со неговите страни. Меѓутоа во формулите $P = \frac{abc}{4R}$ и $P = rs$, за да ја определиме плоштината на триаголникот, покрај страните ги користиме и радиусите на опишаната и впишаната кружница. Логично е да се запрашаме дали плоштината на триаголникот може да се пресмета користејќи ги само неговите страни a, b и c. Одговорот на ова прашање е потврден, што може да се види од следната теорема.

Теорема 6. Нека a, b, c се должините на страните ΔABC и s е неговиот полупериметар. Тогаш плоштината P се пресметува со формулата

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,. \qquad (1)$$



Црт. 14

Доказ (за оние што сакаат да знаат повеќе). Преку темињата C и B ги продолжуваме страните AC и AB на ΔABC (црт. 14). Со $k(S,\rho)$ да ја означиме кружницата впишана во ΔABC, а со $k_1(S_1,\rho_1)$ кружницата која ја допира страната BC и продолженијата на страните AC и AB во точките J, G и H, соодветно. Од $\overline{CJ} = \overline{CH}$ и $\overline{BG} = \overline{BJ}$ добиваме

$$\overline{AH} + \overline{AG} = \overline{AC} + \overline{CH} + \overline{AB} + \overline{BG} = b + \overline{CJ} + c + \overline{BJ} = a + b + c = 2s\,,$$

и како $\overline{AH}=\overline{AG}$ од последното равенство добиваме $\overline{AH}=\overline{AG}=s$, па затоа $\overline{BG}=s-c$ и $\overline{CH}=s-b$.

Кружницата $k(S,p)$ ги допира страните на ΔABC во точките D,E и F, па затоа $\overline{AE}=\overline{AF}$, $\overline{BF}=\overline{BD}$ и $\overline{CE}=\overline{CD}$, односно $\overline{AF}=s-a$, $\overline{BF}=s-b$ и $\overline{CE}=s-c$. Бидејќи $\Delta AFS\sim\Delta AGS_1$ имаме

$$\frac{\rho}{\rho_1}=\frac{\overline{AF}}{\overline{AG}}=\frac{s-a}{a} \tag{2}$$

Од $\angle FBS=\angle BS_1G$ добиваме $\Delta BFS\sim\Delta S_1GB$, па затоа $\rho:\overline{BF}=\overline{BG}:\rho_1$, т.е.

$$\rho_1\rho=(s-b)(s-c) \tag{3}$$

Понатаму, ако ги помножиме равенствата (2) и (3) добиваме $\rho^2=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$, т.е.

$$\rho=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\,. \tag{4}$$

Од друга страна имаме $P_{\Delta ABC}=s\rho$ и ако ρ замениме од (4) добиваме

$$P=s\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,,$$

што и требаше да се докаже. ♦

Формулата (1) во литературата е позната како Херонова формулаво чест на античкиот математичар Херон.

Пример 10. Пресметај ја плоштината на триаголникот зададен со страните $a=25cm$, $b=39cm$ и $c=56cm$.

Решение. Полупериметарот на триаголникот е $s=\frac{a+b+c}{2}=60cm$. Ако ја искористиме Хероновата формула за плоштината на триаголникот добиваме

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b(s-c)}=\sqrt{60(60-25)(60-39)(60-56)}=\sqrt{60\cdot 35\cdot 21\cdot 4}=420cm^2\,.\ ♦$$

Пример 11. Пресметај ги радиусите на впишаната и опишаната кружница за ΔABC зададен со страните $a=12cm$, $b=35cm$ и $c=37cm$.

Решение. Полупериметарот на триаголникот е $s=\frac{a+b+c}{2}=42cm$. Ако ја искористиме Хероновата формула за плоштината на триаголникот добиваме

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b(s-c)}=\sqrt{42(42-12)(42-35)(42-37)}=210cm^2\,.$$

Сега, со замена во $P=sr$ за радиусот на впишаната кружница добиваме $r=\frac{P}{s}=5cm$, а со замена во $P=\frac{abc}{4R}$ за радиусот на опишаната кружница добиваме $R=\frac{abc}{4P}=\frac{37}{2}cm$. ♦

Б) ПЛОШТИНИ НА СЛИЧНИ ТРИАГОЛНИЦИ

На крајот од оваа точка ќе се осврнеме на плоштините на сличните триаголници, т.е ќе ја докажеме следната теорема.

Теорема 7. Плоштините на слични триаголници се однесуваат како квадратите на нивните соодветни страни.

Доказ. Ако $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, тогаш $a:a_1 = b:b_1 = c:c_1 = k$, каде a, b, c се страните на ΔABC, а a_1, b_1, c_1 се страните на $\Delta A_1B_1C_1$. Според тоа,

$$s = a+b+c = ka_1 + kb_1 + kc_1 = ks_1,\ s-a = k(s_1 - a_1),\ s-b = k(s_1-b_1),\ s-c = k(s_1-c_1),$$

па затоа

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = k^2\sqrt{s_1(s_1-a_1)(s_1-b_1)(s_1-c_1)} = k^2P_1,$$

т.е. $\frac{P}{P_1} = k^2 = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{b^2}{b_1^2} = \frac{c^2}{c_1^2}$, што и требаше да се докаже. ♦

Пример 12. Нива во форма на триаголник е нацртана во размер $1:500$. Плоштината на триаголникот на цртежот е $1{,}2dm^2$. Определи ја плоштината на нивата.

Решение. Ако со P ја означиме плоштината на нивата, а со P_1 плоштината на цртежот, тогаш, според условот на задачата $a:a_1 = 500:1$. Сега, од претхосната теорема следува дека

$$P:P_1 = 500^2 \text{ т.е. } P:P_1 = 250000:1.$$

Но, $P_1 = 1{,}2dm^2$ и ако замениме во последното равенство напѓаме

$$P:1{,}2 = 250000$$

од каде $P = 300000dm^2 = 3000m^2 = 30ar$. ♦

Пример 13. Плоштините на два слични триаголници ABC и $A_1B_1C_1$ се $144cm^2$ и $289cm^2$. Ако страната на триаголникот ABC е $a = 4cm$, најди ја соодветната страна a_1 на триаголникот $A_1B_1C_1$.

Решение. Ако со P и P_1 ги означиме плоштините на триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$, тогаш од претходната теорема имаме $\frac{P}{P_1} = \frac{a^2}{a_1^2}$, што значи

$$a_1^2 = \frac{P_1a^2}{P} = \frac{2894^2}{144} = \frac{289}{9} \text{ т.е. } a_1 = \frac{17}{3}cm. ♦$$

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

22. Пресметај ја плоштината на триаголникот, ако се зададени неговите страни:
    а) $13cm, 14cm, 15cm$, б) $13cm, 15cm, 4cm$, в) $13cm, 21cm, 20cm$.
23. Дадени се страните во триаголникот $50cm, 58cm$ и $72cm$. Одреди ја најмалата висина во триаголникот.
24. Пресметај ги радиусите на впишаната и опишаната кружница на триаголникот со страни $10cm, 17cm, 21cm$.
25. Најди ги страните на триаголникот, ако тие се однесуваат како $9:10:17$, а неговата плоштина е $144cm^2$.

26. Плоштините на два слични триаголника се $49cm^2$ и $64cm^2$, а една страна на помалиот триаголник е $7cm$. Одреди ја соодветната страна на поголемиот триаголник.
27. Страните на триаголникот се однесуваат како $2:3:4$, а радиусот на впишаната кружница е $\frac{\sqrt{15}}{2}cm$. Најди ги страните на тиаголникот.
28. Пресметај ја плоштината на еден паралелограм, ако една негова страна е $51cm$, а дијагоналите се $40cm$ и $74cm$.
29. Низ произволна точка M во триаголникот ABC се повлечени прави паралелни на неговите страни, кои го делат триаголникот на шест делови, од кои три се триаголници со плоштини P_1, P_2, P_3. Изрази ја плоштината на ΔABC со помош на плоштините плоштините P_1, P_2, P_3.
30. Докажи дека за секој триаголник важи реалцијата $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$.

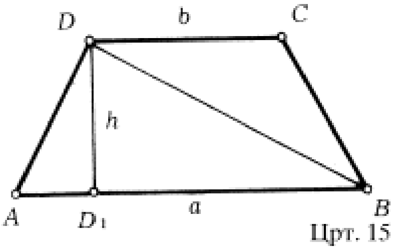
4. ПЛОШТИНА НА ТРАПЕЗ

Претходно во целост го разгледавме прашањето за пресметување на плоштина на паралелограм и триаголник. Меѓутоа, во практиката често пати имаме потреба да пресемтаме плоштина и на други геометриски фигури, најчесто четириаголници кои не се паралелограми. Секако, ова е посложена задача, но сепак во некои случаи истата може едноставно да се реши, при што најчесто се користи идејата за *разделување на фигури чија плоштина можеме да ја пресметаме со помош на дадените елементи на четириаголникот.*

Да го разгледаме трапезот $ABCD$ (црт 15), за кој ни се дадени основите $\overline{AB}=a, \overline{CD}=b$ и висината $\overline{DD_1}=h$. Со помош на дијагоналата BD трапезот $ABCD$ го делиме на два триаголника ABD и BCD чии плоштини се

$$P_{ABD}=\frac{a\cdot h}{2} \text{ и } P_{BCD}=\frac{b\cdot h}{2},$$

соодветно. Ако се искористи својството в) на плоштините, за плоштината на трапезот $ABCD$ имаме



Црт. 15

$$P_{ABCD}=P_{ABD}+P_{BCD}=\frac{a\cdot h}{2}+\frac{b\cdot h}{2}=\frac{a+b}{2}h.$$

Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема 8. Плоштината на трапезот е еднаква на производот на полузбирот од неговите основи и висината, т.е.

$$P=\frac{a+b}{2}h. \blacklozenge \tag{1}$$

Пример 14. а) Пресметај ја плоштината на трапез со основи $7cm$ и $5cm$ и висина $4cm$.

б) Основите на трапезот се $23dm$ и $170cm$, а плоштината е $2m^2$. Најди ја висината на трапезот.

Решение. а) Имаме, $a=7cm, b=5cm$ и $h=4cm$. Ако замениме во формулата (1) за плоштината на трапезот добиваме $P=\frac{a+b}{2}h=\frac{7+5}{2}\cdot 4cm^2=24cm^2$.

б) Од условот на задачата имаме $a=23dm, b=170cm=17dm$ и $P=2m^2=200dm^2$. Ако замениме во (1) добиваме $\frac{23+17}{2}h=200$, т.е. $20h=200$, односно $h=10dm$. ♦

Пример 15. Пресметај ја плоштината на трапез со средна линија $12cm$ и висина $7cm$.

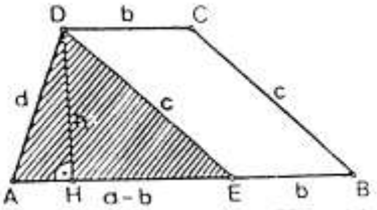
Решение. Знаеме дека должината на средната линија на трапезот е еднаква на $\frac{a+b}{2}$, каде a и b се должините на основите на трапезот. Според тоа, $\frac{a+b}{2}=12cm$ и ако замениме во (1) за плоштината на трапезот добиваме $P=12\cdot 7cm^2=84cm^2$.

Пример 16. Пресметај ја плоштината на трапез со основи $20cm$ и $11cm$ и краци $17cm$ и $10cm$.

Решение. Повлекуваме права $DE \| BC$ и го добиваме триаголникот AED чии страни имаат должини $a-b=9cm$, $17cm$ и $10cm$ (црт. 16). Ја применуваме Хероновата формула и за плоштината на триаголникот добиваме

$$P_{AED}=\sqrt{18\cdot(18-9)\cdot(18-10)\cdot(18-17)}=36cm^2.$$

Според тоа, висината на триаголникот AED, која е еднаква на висината на трапезот е $h=\frac{2P_{AED}}{a-b}=8cm$.



Црт. 16

Конечно, плоштината на трапезот е

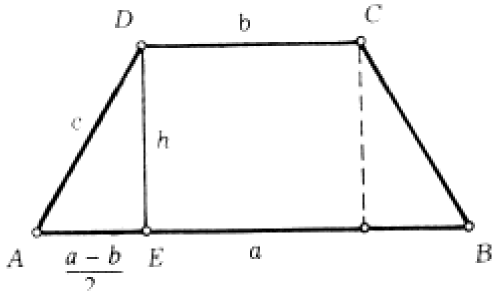
$$P=\frac{a+b}{2}h=\frac{20+11}{2}\cdot 8cm^2=124cm^2. ♦$$

Пример 17. Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со основи $9cm$ и $3cm$ и крак $5cm$.

Решение. За да ја пресметаме плоштината, прво треба да ја определиме висината на трапезот. За правоаголниот триаголник AED (црт. 17), имаме $\overline{AE}=\frac{a-b}{2}=3cm$ (зошто?). Сега од Питагоровата теорема следува

$$h=\sqrt{c^2-(\frac{a-b}{2})^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4cm.$$

Според тоа, плоштината на рамнокракиот трапез е $P=\frac{a+b}{2}h=\frac{9+3}{2}\cdot 4cm^2=24cm^2$. ♦



Црт. 17

Пример 18. Пресметај ја плоштината на правоаголен трапез зададен со основи $12cm$ и $7cm$ и агол $\alpha=30^\circ$ меѓу поголемата основа и кракот.

Решение. Ако со a и b ги означиме основите на трапезот, тогаш за висината h имаме

$$h=(a-b)\,\mathrm{tg}\alpha=(12-7)\,\mathrm{tg}30^\circ=\frac{5\sqrt{3}}{3}cm$$

(направи цртеж). Според тоа, плоштината на трапезот е

$$P=\frac{a+b}{2}h=\frac{12+7}{2}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{3}cm^2=\frac{95\sqrt{3}}{6}cm^2 .\ \blacklozenge$$

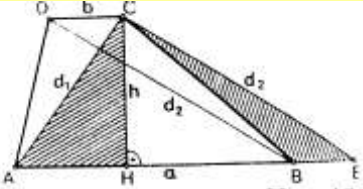
Пример 19. Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со дијагонала $12cm$ и ако се знае дека аголот меѓу дијагоналата и поголемата основа е еднакво на 45°.

Решение. Низ темето C повлекуваме права паралелна на дијагоналата BD и во пресекот со основата AB ја определуваме точката E (види црт. 18). Триаголникот AEC е рамнокрак правоаголен триаголник со катета $d=12cm$ и неговата плоштина е еднаква на плоштината на трапезот (докажи!). Според тоа, за плоштината на трапезот добиваме

$$P=\frac{d^2}{2}=72cm^2 .\ \blacklozenge$$

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

31. Пресметај ја плоштината на трапез со основи $10cm$ и $8cm$ и висина $7dm$.
32. Пресметај ја плоштината на трапез со основи $30cm$ и $19cm$ и краци $13cm$ и $20cm$.
33. Пресметај ја плоштината на трапез со основи $19cm$ и $2cm$ и дијагонали $17cm$ и $10cm$.
    Упатство. Повлечи $CE\,||\,BD$, со што ќе добиеш триаголник AEC (црт. 18) за кој ги знаеш сите страни. Пресметај ја неговата плоштина и докажи дека таа е еднаква на плоштината на трапезот.
34. Пресметај ја плоштината на трапез со дијагонали $13cm$ и $15cm$, ако неговата висина е $12cm$.
    Упатство. Искористи ја претходната задача и определи ги должините на отсечките AH и HE.



Црт. 18

35. Плоштината на трапезот е $96cm^2$, а висината $8cm$. Одреди ги основите на трапезот ако тие:
    а) однесуваат како $5:3$, б) разликуваат за $8cm$.
36. Пресметај ја плоштината на правоаголен трапез со краци $12dm$ и $13dm$ и периметар $46dm$.
37. Пресметај ја плоштината на правоаголен трапез со основи $12cm$ и $7cm$ и агол $\alpha=48^\circ 40'$ меѓу поголемата основа и кракот.
38. Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со основи $15cm$ и $7cm$ и крак $5cm$.
39. Најди го периметарот на рамнокрак трапез, ако основите и висината се однесуваат како $4:1:2$, а плоштината е $5dm^2$.
40. Во рамнокрак трапез со основи $18cm$ и $8cm$ е впишана кружница. Пресметај ја плоштината на трапезот.
    Упатство. Трапезот е тангентен, па затоа $a+b=2c$.
41. Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со поголема основа $63cm$, крак $25cm$ и дијагонала $52cm$.

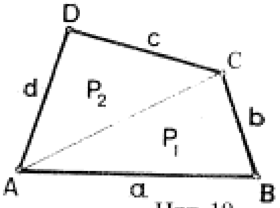
42. Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со основи $39cm$ и $15cm$, ако дијагоналите се нормални на краците.

43. Дијагоналите на трапезот $ABCD$ се сечат во точката O. Изрази ја плоштината на трапезот со помош на плоштините P_1 и P_2 на триаголниците ABO и CDO.

5. ПЛОШТИНА НА ТРАПЕЗОИД

Плоштината на произволен трапезоид најчесто ја пресметуваме како збир на плоштини на два триаголника, добиени со повлекување на една од дијагоналите на трапезоидот (црт. 19). Имено, ако се искористи својството б) на плоштините, за плоштината на трапезот $ABCD$ имаме

$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD}.$$



Црт. 19

Пример 20. Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ABCD$, ако: $\overline{AB} = 20cm$, $\overline{BC} = 7cm$, $\overline{CD} = 13cm$, $\overline{DA} = 4cm$ и $\overline{AC} = 15cm$.

Решение. Полупериметарот на триаголникот ABC е $s = 21cm$, па затоа неговата плоштина е

$$P_{ABC} = \sqrt{21 \cdot (21-20) \cdot (21-7) \cdot (21-15)}cm^2 = 42cm^2.$$

Слично, за ΔACD имаме $s_1 = 16cm$, па затоа

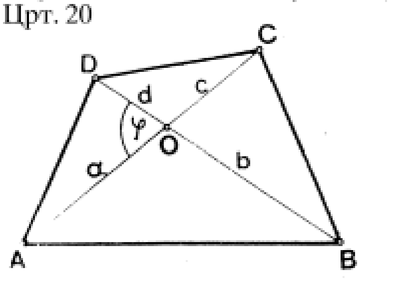
$$P_{ACD} = \sqrt{16 \cdot (16-13) \cdot (16-4) \cdot (16-15)}cm^2 = 24cm^2.$$

Конечно,

$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD} = (42+24)cm^2 = 66cm^2. \ \blacklozenge$$

Идејата плоштината на четириаголникот да ја пресемтуваме како збир на плоштините на триаголниците од кои е формиран ни овозможува при определени услови да најдеме едноставни формули за пресемтување на плоштина на даден четириаголник. Во следната теорема ќе разгледаме еден таков случај.

Црт. 20



Теорема 9. Ако d_1 и d_2 се дијагоналите на четириаголникот, а φ е аголот меѓу дијагоналите, тогаш неговата плоштина се пресметува со формулата

$$P = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi. \quad (1)$$

Доказ. Нека O е пресечната точка на дијагоналите на четириаголникот $ABCD$, а φ е аголот меѓу дијагоналите (црт. 20).

Ако ставиме $\overline{OA}=a, \overline{OB}=b, \overline{OC}=c, \overline{OD}=d$ и земеме во предвид дека

$$\sin\alpha=\sin(180^\circ-\alpha)$$

добиваме

$$P_{ABO}=\tfrac{1}{2}ab\sin(180^\circ-\varphi)=\tfrac{1}{2}ab\sin\varphi,\ P_{BCO}=\tfrac{1}{2}bc\sin\varphi,$$

$$P_{CDO}=\tfrac{1}{2}cd\sin\varphi \text{ и } P_{DAO}=\tfrac{1}{2}ad\sin\varphi.$$

Конечно, ако го искористиме својството б) на плоштините добиваме

$$P_{ABCD}=P_{ABO}+P_{BCO}+P_{CDO}+P_{DAO}=\tfrac{1}{2}(ab+bc+cd+da)\sin\varphi$$

$$=\tfrac{1}{2}(a+c)(b+d)\sin\varphi=\tfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BD}\sin\varphi=\tfrac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi,$$

што и требаше да се докаже. ♦

Пример 21. Пресметај ја плоштината на четириаголник со дијагонали $d_1=6cm$ и $d_2=10cm$, и агол меѓу нив $\varphi=150^\circ$.

Решение. Согласно со формулата (1) за плоштината на четириаголникот добиваме

$P=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi=\frac{1}{2}\cdot6\cdot10\cdot\sin150^\circ cm^2=30\cdot\sin(180^\circ-150^\circ)cm^2=30\cdot\sin30^\circ cm^2=30\cdot\frac{1}{2}=15cm^2$. ♦

Забелешка 6. Ако дијагоналите на четириаголникот се заемно нормални, т.е. ако аголот меѓу нив е $\varphi=90^\circ$, тогаш за плоштината на четириаголникот добиваме

$$P=\tfrac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi=\tfrac{1}{2}d_1d_2\sin90^\circ=\tfrac{1}{2}d_1d_2\cdot1=\tfrac{1}{2}d_1d_2.$$

Според тоа, *плоштината на четириаголник со заемно нормални дијагонали е еднаква на половината од производот на дијагоналите.*

Пример 22. Пресметај ја плоштината на четириаголник со заемно нормални дијагонали $d_1=6dm$ и $d_2=10cm$.

Решение. Имаме, $d_1=6dm=60cm$ и $d_2=10cm$, па како дијагоналите се заемно нормални од забелешка 6 следува дека неговата плоштина е

$$P=\tfrac{1}{2}d_1d_2=\tfrac{1}{2}\cdot60\cdot10cm^2=300cm^2=3dm^2. \ ♦$$

Пример 23. Пресметај ја плоштината на делтоидот со страни $17cm$ и $113cm$ една дијагонала $30cm$.

Решение. Да ги означиме страните на делтоидот како на црт. 21. Имаме,

$$\overline{AD}=\overline{CD}=b=17cm,$$

$$\overline{AB}=\overline{BC}=a=113cm.$$

За страните на триаголникот ABD важи неравенството

$$\overline{AD}+\overline{DB}>\overline{AB},$$

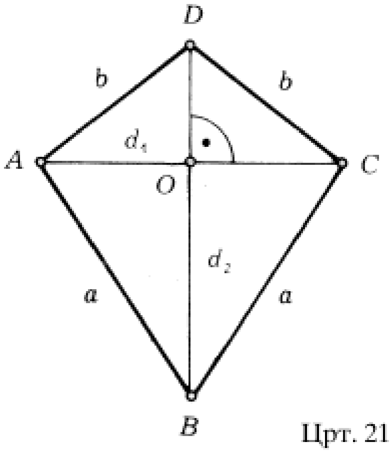
од што добиваме $17+\overline{DB}>113$, односно $\overline{DB}>96$. Бидејќи едната дијагонала на делтоидот е $30cm$, од последното неравенство следува дека тоа не може да биде дијагоналата DB, што значи $\overline{AC}=d_1=30cm$. Сега, од рамнокраките триаголници ACD и ADC добиваме

$$\overline{OD}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AO}^2}=\sqrt{17^2-15^2}=8cm,$$

$$\overline{OB}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AO}^2}=\sqrt{113^2-15^2}=112cm$$

па затоа $\overline{BD}=\overline{DO}+\overline{OB}=120cm$. Конечно, бидејќи дијагоналите на делтоидот $ABCD$ од забелешка 6 следува

$$P=\tfrac{1}{2}d_1d_2=\tfrac{1}{2}\cdot120\cdot30cm^2=1800cm^2=18dm^2=0{,}18m^2.$$ ♦



Црт. 21

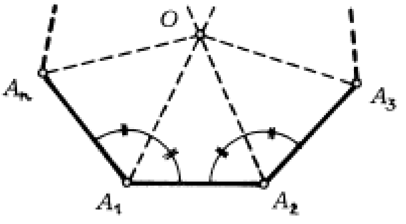
ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

44. Пресметај ја плоштината на четриаголник со страни $\overline{AB}=3cm, \overline{BC}=6cm, \overline{CD}=12cm$ и $\overline{DA}=9cm$, и дијагонала $\overline{AC}=7cm$.
45. Пресметај ја плоштината на делтоидот, чии дијагонали се $20dm$ и $30dm$.
46. Пресметај ја плоштината на делтоидот со страни:
    а) $10cm$ и $17cm$, и дијагоналата (што не е оска) $16cm$;
    б) $13cm$ и $20cm$, и дијагоналата (што не е оска) $21cm$;
47. Во делтоид со страни $4cm$ и $5cm$ е впишана кружница со радиус $2cm$. Пресметај ја плоштината на делтоидот.
48. Одреди го периметарот на делтоидот со страна $13cm$, една дијагонала $24cm$, ако неговата плоштина е $480cm^2$.
49. Пресметај ја плоштината на четириаголникот со дијагонали $12cm$ и $10cm$, ако аголот меѓу нив е 30°.

6. ПЕРИМЕТАР И ПЛОШТИНА НА ПРАВИЛЕН МНОГУАГОЛНИК

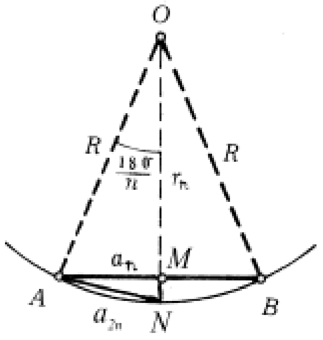
Во последната точка од претходната тема видовме како може да се конструираат некои правилни многуаголници и ги разгледавме основните својства на правилните многуаголници. Како што рековме, секој правилен $n-$аголник е тетивен $n-$аголник со еднакви страни, а на еднакви тетиви соодветствуваат еднакви централни агли, и обратно, па затоа правилниот $n-$аголник е зададен ако го знаеме радиусот на кружницата опишана околу него и бројот на неговите страни. Притоа, за да го коструираме $n-$аголникот доволно е кружницата да ја поделиме на n еднакви делови, што е исто ако полниот агол го поделиме на n еднакви агли.

Нека го поврземе центарот на правилниот $n-$аголник со неговите темиња (црт. 22). Притоа добиваме n рамнокраки триаголници со краци еднакви на радиусот R на кружницата опишана околу $n-$аголникот $A_1A_2A_3...A_n$ и агли при врвовите еднакви на $\frac{360^\circ}{n}$. Последното значи дека овие триаголници се складни, па затоа нивните висини спуштени кон основите (страните на $n-$аголникот) се еднакви. Според тоа, секоја страна на $n-$аголникот е тангента на кружница со радиус r_n еднаков на висината на секој од триаголниците $A_1A_2O, A_2A_3O, ..., A_nA_1O$. Со тоа ја докажавме следната теорема.



Црт. 22

Теорема 10. Во секој правилен $n-$аголник може да се впише кружница. ♦



Црт. 23

Од претходните разгледувања непосредно следува дека правилниот $n-$аголник е наполно определен ако ги знаеме радиусот R на опишаната кружница и должината на страната a_n. Со други зборови тој е наполно определен ако знаеме еден од триаголниците $A_1A_2O, A_2A_3O, ..., A_nA_1O$. Понатаму, страната a_n, радиусот R на опишаната кружница и радиусот r_n на впишаната кружница на правилниот $n-$аголник $AB...$ се елементи на рамнокракиот триаголник ABO (црт. 23), кој го нарекуваме карактеристичен триаголник на правилниот $n-$аголник $AB...$.

Како што можеме да заклучиме од ΔABO (црт. 23), аголот меѓу радиусот на впишаната и опишаната кружница околу правилниот $n-$аголник е еднаков на $\frac{360^\circ}{2n}=\frac{180^\circ}{n}$. Но, ΔAMO е правоаголен , па затоа $\frac{r_n}{R}=\cos\frac{180^\circ}{n}$, $\frac{\frac{a_n}{2}}{R}=\sin\frac{180^\circ}{n}$, $\frac{\frac{a_n}{2}}{r_n}=\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$, од што следува

$$r_n=R\cos\frac{180^\circ}{n}\ ,\ a_n=2R\sin\frac{180^\circ}{n},\ a_n=2r_n\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}. \tag{1}$$

Теорема 11. Периметарот L_n на правилен $n-$аголник впишан во кружница со радиус R се пресметува според формулата

$$L_n=2nR\sin\frac{180^\circ}{n}. \tag{2}$$

Доказ. Јасно, периметарот на правилниот $n-$аголник е $L_n=na_n$ и ако замениме $a_n=2R\sin\frac{180^\circ}{n}$ ја добиваме формулата (3). ♦

Забелешка 7. Од (1) имаме $R=\frac{r_n}{\cos\frac{180^\circ}{n}}$ и ако замениме во (2) за периметарот на правилниот $n-$аголник опишан околу кружница со радиус r_n добиваме

$$L_n=2n\frac{r_n}{\cos\frac{180^\circ}{n}}\sin\frac{180^\circ}{n}=2nr_n\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}.$$

Теорема 12. Плоштината P_n на правилен $n-$аголник впишан во кружница со радиус R се пресметува според формулата

$$P_n=nR^2\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}. \tag{3}$$

Доказ. Јасно, плоштината на правилниот $n-$аголник е $P_n=nP$, каде P е плоштината на карактеристичниот триаголник за правилниот $n-$аголник. Од (1) наоѓаме $P=\frac{a_nr_n}{2}=R^2\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}$ и ако замениме во $P_n=nP$ ја добиваме формулата (3). ♦

Забелешка 8. Од $a_n=2r_n\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$, следува дека плоштината P_n на правилниот $n-$аголник опишан околу кружница со радиус r_n е $P_n=n\frac{a_nr_n}{2}=nr_n^2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$. Слично, ако е дадена страната на a_n на правилниот $n-$аголник, тогаш од $r_n=\frac{a_n}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$ добиваме $P_n=n\frac{a_nr_n}{2}=\frac{na_n^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$.

Пример 24. а) Пресметај ја плоштината на правилен осумаголник со страна $a_8=10cm$.

б) Пресметај ја плоштината на правилен петнаесетаголник впишан во кружница со радиус $R=5cm$.

Решение. а) Ако ја искористиме формулата $P_n=\frac{na_n^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$, за бараната плоштина добиваме

$$P=\frac{8\cdot10^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{8}=200\operatorname{ctg}22^\circ30'\approx200\cdot2{,}4142 \text{ т.е. } P\approx482{,}84cm^2.$$

б) Ако ја искористиме формулата $P_n=nR^2\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}$, за бараната плоштина добиваме

$$P_n=15\cdot5^2\sin\frac{180^\circ}{15}\cos\frac{180^\circ}{15}=375\sin12^\circ\cos12^\circ. \; ♦$$

На крајот од овој дел ќе ја оцениме разликата на периметрите на опишан и впишан правилен $n-$аголник во иста кружница. Пред тоа ќе покажеме едно својство за конвексните искршени линии и една теорема за вложените консвексни многуаголници.

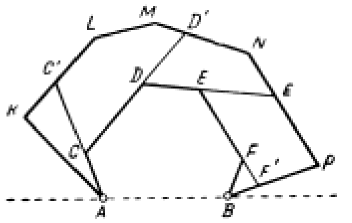
Теорема 13. Од две непресекувачки конвексни искршени линии со заеднички крајни точки, кои се наоѓаат од иста страна на правата која ги содинува крајните точки, внатрешната линија има помала должина.

Доказ. Нека $ACDEFB$ е внатрешната, а $AKLMNPB$ е надворешната конвексна искршена линија (црт. 24).

Со C', D', E', F' да ги означиме пресечните точки на продолженијата на страните AC, CD, DE, EF преку точките C, D, E, F соодветно, со искршената линија $AKLMNPB$. Притоа, со примена на неравенството на триаголник добиваме

$$\overline{FB} < \overline{FF'} + \overline{F'B};\ \overline{EF'} < L_{EE'PF'};\ \overline{DE'} < L_{DD'NE'};$$

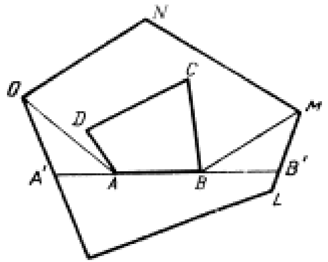
$$\overline{CD'} < L_{CC'LMD'};\ \overline{AC'} < L_{AKC'}$$



Црт. 24

па затоа $L_{ACDEFB} < L_{ACDEFB} < L_{ACDE'PB} < L_{ACD'NPB} < L_{AC'LMNPB} < L_{AKLMNPB}$. ♦

Теорема 14. Ако секое теме на едниот од двата конвексни многуаголници лежи внатре во другиот конвексен многуаголник, тогаш периметарот на првиот многуаголник е помал од периматерот на вториот многуаголник.



Црт. 25

Доказ. Нека конвексниот многуаголник $ABCD$ лежи внатре во конвексниот многуаголник $KLMNO$ (црт. 25). Да ги означиме пресечните точки на правата AB со надворешниот многуаголник. Од неравенството теорема 13 следува $L_{ADCB} < L_{AA'ONMBB}$ од што следува

$$\overline{AB} + L_{ADCB} < \overline{A'B'} + L_{A'ONMB}$$

и како $\overline{A'B'} < L_{A'KLB'}$ добиваме

$$\overline{AB} + L_{ADCB} < L_{A'KLB'} + L_{A'ONMB},$$

со што теоремата е докажана. ♦

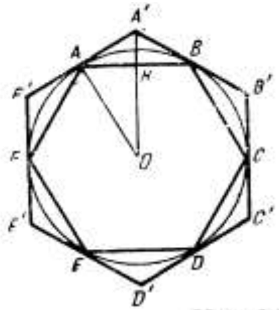
Теорема 15. Разликата меѓу периметрите на опишаниот и впишаниот правилен многуаголник во иста кружница е помала од осумкратната вредност на страната на впишаниот многуаголник.

Доказ. Нека $ABC...$ е правилен впишан со периметар l, а $A'B'C'...$ е соодветниот опишан со периметар L правилен многуаголник (црт. 25). Отсечката OA' е нормална на страната AB на впишаниот многуаголник и ја полови во точката H. Бидејќи $OAA' \sim OHA$ имаме $\overline{AA'} : \overline{AH} = \overline{OA} : \overline{OH}$ т.е.

$$2n\overline{AA'} : 2n\overline{AH} = \overline{OA} : \overline{OH}$$

што значи $L : l = \overline{OA} : \overline{OH}$ односно $L = \frac{l}{\overline{OH}}\overline{OA}$, па затоа

$$L - l = \frac{l}{\overline{OH}}(\overline{OA} - \overline{OH}). \tag{4}$$



Црт. 26

Според теорема 14 периметарот l на впишаниот многуаголник е помал од периметарот на опишаниот квадрат, па затоа $l < 8\overline{OA}$, а од ΔOAH имаме $\overline{OA} - \overline{OH} < \overline{AH}$. Конечно, ако $n \geq 3$, тогаш $\frac{180^\circ}{n} \leq 60^\circ$, па затоа $\cos\frac{180^\circ}{n} \geq \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ односно $\overline{OH} = \overline{OA}\cos\frac{180^\circ}{n} \geq \frac{1}{2}\overline{OA}$, т.е. $2\overline{OH} \geq \overline{OA}$. Конечно, од неравенството (4) имаме

$$L - l = \frac{l}{\overline{OH}}(\overline{OA} - \overline{OH}) < \frac{8\overline{OA}}{\overline{OH}}(\overline{OA} - \overline{OH}) < \frac{8\overline{OA}}{\overline{OH}}\overline{AH} \leq \frac{8 \cdot 2\overline{OH}}{\overline{OH}}\overline{AH} = 16\overline{AH} = 8\overline{AB},$$

што и требаше да се докаже. ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

50. Пресматај ја плоштината на правилниот деветаголник со страна 12.

51. Пресматај ја плоштината и периметарот на правилниот дванаесетаголник што е впишан во кружница со радиус $6cm$.

52. Пресматај ја плоштината на правилниот триесетаголник што е опишан околу кружница со радиус 20.

53. Во дворот на едно училиште, на парцела со форма на правилен шестаголник се засадени цвеќиња. Таа треба да се загради со 3 реда жици. Колку метри жица ќе биде потребно ако плоштината на целата парцела е $692cm^2$.

54. Изрази ја плоштината на правилен:
    а) петаголник б) шестаголник в) осумаголник
    преку неговата страна a.

55. Изрази ја плоштината на правилен:
    а) осумаголник б) деветаголник в) дванаесетаголник
    преку радиусот R на опишаната кружница.

56. Дадена е плоштината Q на правилниот:
    а) дванаесетаголник. Пресметај ја плоштината на правилен шестаголник, впишан во истата кружница како и дванаесетаголникот;
    б) осумаголник. Пресметај ја плоштината на квадратот, впишан во истата кружница со осумаголникот.

57. Пресметај ја разликата на периметрите на опишаниот и впишаниот правилен $n-$аголник во кружнива со радиус $r=5$, ако:
    а) $n=6$, б) $n=12$, в) $n=24$ и г) $n=48$.

58. Пресметај ја разликата на плоштините на опишаниот и впишаниот правилен $n-$аголник во кружнива со радиус $r=5$, ако:
    а) $n=6$, б) $n=12$, в) $n=24$ и г) $n=48$.

7. ПЕРИМЕТАР НА КРУЖНИЦА. ПЛОШТИНА НА КРУГ

При разгледувањето на правилните многуаголници видовме дека должината на страната на правилниот $n-$аголник впишан во кружница со радиус R е $a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$. Во теорема 15 докажавме дека разликата меѓу периметрите на опишаниот и впишаниот правилен многуаголник во иста кружница е помала од осумкратната вредност на страната на впишаниот многуаголник, што значи дека

$$L_n - l_n < 16R\sin\frac{180^\circ}{n}. \qquad (1)$$

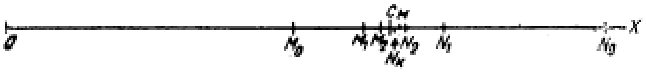
Бидејќи со зголемувањето на бројот n аголот $\frac{180^\circ}{n}$ се намалува и при големи вредности на n прима вредности блиски до 0, добиваме дека и $\sin\frac{180^\circ}{n}$ прима вредности кои се блиски до 0, од (1) следува точноста на следната теорема.

Теорема 16. Разликата меѓу периметрите на опишаниот и впишаниот правилен многуаголник можеме да ја направиме произволно мала, со зголемувањето на страните на многуаголниците. ♦

Теорема 17. Нека е дадена кружница со радиус R. Постои точно една отсечка, чија должина е поголема од периметрите на сите правилни многуаголници, впишани во кружница со даден радиус, и во исто време е помала од периметрите на сите правилни многуаголници опишани околу неа.

Доказ. Нека l_0 е периметарот на правилен впишан многуаголник (на пример квадрат или правилен шестоаголник) во дадена кружница, а L_0 е периметарот на соодветниот опишан многуаголник. Со $l_1, l_2, l_3, ..., l_k, ...$ да ги означиме периметрите на впишаните многуаголници, добиени од дадениот со удвојување на страните, а со $L_1, L_2, L_3, ..., L_k, ...$ периметрите на опишаните многуаголници добиени на истиот начин. Од теорема 14 следува дека $l_0 < l_1 < l_2 < l_3 < ... < l_k < ...$ и $L_0 > L_1 > L_2 > L_3 > ... > L_k > ...$, а од теорема 15 дека $L_k - l_k$ се приближува кон нула, кога се зголемува бројот на страните k.

На полуправа OX ги нанесуваме отсечките $\overline{OM}_0 = l_0, \overline{ON}_0 = L_0, \overline{OM}_1 = l_1, \overline{ON}_1 = L_1, \overline{OM}_2 = l_2, \overline{ON}_2 = L_2, \overline{OM}_3 = l_3, \overline{ON}_3 = L_3, ..., \overline{OM}_k = l_k, \overline{ON}_k = L_k, ...$ (црт. 27) . На тој начин добиваме низа од вложени отсечки $N_0M_0, N_1M_1, ..., N_kM_k, ...$ чија должина $\overline{N_kM}_k = L_k - l_k$ се приближува кон нула, кога се зголемува бројот на страните k. Јасно, овие отсечки имаат барем една заедничка точка C. Јасно, не постојат две точки C и C' кои припаѓаат на сите отсечки $N_0M_0, N_1M_1, ..., N_kM_k, ...$ бидејќи тогаш отсечката CC' припаѓа на сите овие отсечки, а таа има фиксна должина, додека должината на $\overline{N_kM}_k$ можеме да ја направиме произволно мала.



Црт. 27

Бидејќи точката C припаѓа на сите отсечки N_iM_i, $i = 0,1,2,...$ добиваме таа е десно од секој точка $M_i, i = 0,1,2,...$ па затоа $\overline{OC} > \overline{OM}_i, i = 0,1,2,...$. Слично, C е лево од секоја точка $N_i, i = 0,1,2,...$ па затоа $\overline{OC} < \overline{ON}_i, i = 0,1,2,...$.

Конечно, отсечката OC ги задоволува условите на теоремата. ♦

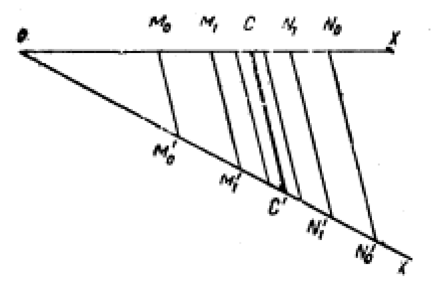
Дефиниција 1. Должината на отсечката од теорема 17 ја нарекуваме *периметар* (*должина*) на кружницата со радиус R.

Во следната теорема ќе докажеме едно важно својство за кружниците со различни радиуси, кое ќе ни овозможи да го воведеме бројот π .

Теорема 18. Должините на кружниците се однесуваат како нивните радиуси.

Доказ. Нека r и r' се радиусите на две кружници. Со l_k и L_k да ги означиме периметрите на оние многуаголници од првата кружница, кои ги искористивме при доказот на теорема 17. Понатаму, со $l_k^{'}$ и $L_k^{'}$ да ги означиме периметрите на аналогните многуаголници (со ист број на страни) за втората кружница. При воведените ознаки имаме $l_k = 2kr\sin\frac{180^\circ}{n}$, $l'_k = 2kr'\sin\frac{180^\circ}{n}$, $L_k = 2kr\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$ и $L'_k = 2kr'\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$, па затоа

$$l_k : l'_k = L_k : L'_k = r : r', \text{ за } k = 0,1,2,\dots \qquad (2)$$



Црт. 28

Земаме агол XOX' и на кракот OX, како и во доказот на теорема 17 со почеток во точката O ги нанесуваме отсечките $\overline{OM}_k = l_k, \overline{ON}_k = L_k$, $k = 0,1,2,\dots$, а на кракот OX' ги нанесуваме отсечките $\overline{OM}'_k = l'_k, \overline{ON}'_k = L'_k$, $k = 0,1,2,\dots$. Од равенствата (2) следува дека правите $M_kM'_k$ и $N_kN'_k$ се паралелни меѓу себе (зошто?). Со C и C' ги означиме заедничките точки на отсечките M_kN_k и $M'_kN'_k$, соодветно. Јасно правата CC' е паралелна на правите $M_kM'_k$ и $N_kN'_k$ (зошто?), па затоа $\overline{OC} : \overline{OC'} = L_k : L'_k = r : r'$. ♦

Забелешка 9. Во претходната теорема за должините L и L' на кружните линии со радиуси r и r', соодветно докажавме дека важи равенството $L : L' = r : r'$, од што добиваме $L : 2r = L' : 2r'$. Според тоа, односот на должината на кружната линија спрема нејзиниот дијаметар за секој кружница има една иста бројна вредност, да ја означиме со π. Според тоа, периметарот на кружница со радиус r се пресметува според формулата

$$L = 2\pi r. \qquad (3)$$

Со непосредни пресметувања е добиено дека оваа бројна вредност е бројот

$$\pi = 3{,}14159265358979323846\dots,$$

кој е ирационален број. Интересно за овој број е тоа што тој не може да биде решение на ниту една алгебарска равенка со целобројни коефициенти. Ваквите броеви во литературата се познати како *трансцедентни броеви.*

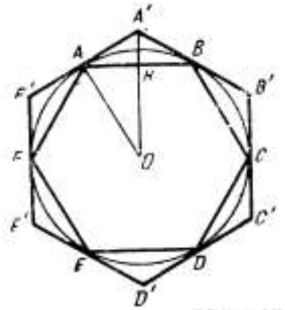
Пример 24. Пресметај го радиусот на кружница со периметар $125cm$.

Решение. Од формулата (3) наоѓаме $125 = 2\pi r$, т.е. $r = \frac{125}{2\pi} \approx \frac{125}{2 \cdot 3{,}141592} \approx 19{,}894cm$. ♦

Да се вратиме на впишаните и опишаните правилни многуаголници во кружница со радиус R. Прво ќе ја докажеме следната теорема.

Теорема 19. Раликата меѓу плоштината на правилниот опишан $n-$аголник и плоштината на правилниот впишан $n-$аголник е помала од производот на периметарот на опишаниот многуаголник со половива од страната на впишаниот многуаголник.

Доказ. Со P и p да ги означиме плоштините на правилниот опишан и впишан $n-$аголник (црт. 29). Имаме, $P - p = nP_{ABA'} = \frac{1}{2}n\overline{AB} \cdot \overline{HA'}$. Но, $n\overline{AB} = l < L$ и како HA' е висина на рамнокракиот $\Delta ABA'$ со агол при основата помал или еднаков



Црт. 29

на 60° (зошто?), добиваме дека $\overline{HA'} < \overline{AB}$. Конечно,

$$P - p = \tfrac{1}{2} n \overline{AB} \cdot \overline{HA'} < \tfrac{1}{2} L \cdot \overline{AB},$$

што и требаше да се докаже. ♦

Бидејќи при удвојување на бројот на страните периметрите на сите опишани правилни многуаголници се помали од L_0, а должината на страната на впишаниот многуаголник можеме да ја направиме произволно мала (зошто?), од претходната теорема следува:

Со удвојување на бројот на страните на многуаголниците, разликата меѓу плоштината на правилниот опишан многуаголник и плоштината на соодветниот впишан многуаголник може да се направи произволно мала.

Претходно изнесеното укажува на фактот дека, при удвојување на бројот на страните, плоштините на опишаните и впишаните правилни многуаголници се приближуваат кон плоштината на соодветниот круг. Да ја најдеме формулата за пресметување на плоштината на кругот.

Како што знаеме, за периметарот L_n на опишаниот правилен $n-$аголник важи $L_n > 2\pi r$, па затоа за неговата плоштина добиваме

$$P_n = \tfrac{1}{2} n \overline{A'B'} \cdot \overline{OB} = \tfrac{1}{2} L_n r > \tfrac{1}{2} 2\pi r^2 = \pi r^2 .$$

Аналогно, за периметарот l_n на впишаниот правилен $n-$аголник важи $l_n < 2\pi r$ и како $\overline{OH} < r$ па затоа за неговата плоштина добиваме

$$p_n = \tfrac{1}{2} n \overline{AB} \cdot \overline{OH} = \tfrac{1}{2} l_n \overline{OH} < \tfrac{1}{2} 2\pi r^2 = \pi r^2 .$$

Според тоа, за секој n важи $p_n < \pi r^2 < P_n$ и како со удвојување на страните плоштините на опишаните и впишаните правилни многуаголници се приближуваат кон плоштината на соодветниот круг заклучуваме дека плоштината на кругот со радиус r се пресметува според формулата

$$P = \pi r^2 . \tag{4}$$

Пример 25. Пресметај го периметар на кружницата, ако плоштината на круг е $78{,}54 cm^2$.

Решение. Од формулата (4) наоѓаме $78{,}54 = \pi r^2$, т.е. $r = \sqrt{\frac{78{,}54}{\pi}} \approx \sqrt{\frac{78{,}54}{3{,}141592}} \approx 5cm$. Според тоа, за периметарот на кругот добиваме

$$L = 2\pi r \approx 10 \cdot 3{,}141592..cm \approx 31{,}42cm .$$ ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

59. Пресметај го периметарот на кружница, ако:

а) $r = 10cm$, б) $d = 24dm$, в) $r = \frac{n}{\pi}$.

60. Определи го радиусот на кружница, ако нејзиниот периметар е:

а) $18cm$, б) $15{,}7dm$, в) $32\pi cm$.

61. Околу земјиниот екватор е поставен “обрач”, кој е за $1m$ подолг од екваторот. Може ли под овој “обрач” да помине глушец?

62. Еден патник околу светот решил да ја обиколи Земјината топка по екваторот. Но, кога требало да пресмета колкав пат ќе измине, се збунил. Дали да го смета патот што ќе го минат нозете или патот што ќе го мине главата? Кружницата која ќе ја опише главата при тоа патување ќе биде концентрична со екваторот, по кој ќе одат нозете, е очигледно поголема. За колку е поголем периметарот на оваа кружница, ако висината на човекот е hcm ? Колкава би била оваа разлика, ако патникот би ја обиколил Месечината?

63. Пресметај ја плоштината на круг со радиус:
а) $20cm$ б) $14dm$ в) $1m$

64. Пресметај го радиусот на кругот, ако неговата плоштина е:
а) $1cm^2$ б) $49dm^2$ в) $100\pi cm^2$

65. Колкава е плоштината на кругот, ако неговиот периметар е $32\pi cm$.

66. Пресматај го периметарот на кругот, ако неговата плоштина е $196\pi cm^2$.

67. Две цевки го дијаметри $10cm$ и $24cm$ треба да се заменат со трета цевка со ист капацитет на пропустливост. Одреди го радиусот на таа цевка.

68. Колкав е радиусот на кругот на кој мерните броеви на неговата плоштина и на неговиот периметар се еднакви?

69. Пресметај ја плоштината на кругот, впишан во квадрат чија плоштина е $64cm^2$.

70. Пресметај ја плоштината на квадратот впишан во круг чија плоштина е $256\pi cm^2$.

71. Пресметај ги периметарот на впишаната и опишаната кружница на правилен шестаголник со плоштина $150\sqrt{3}cm^2$.

8. ДОЛЖИНА НА КРУЖЕН ЛАК. ПЛОШТИНА НА ДЕЛОВИ НА КРУГ

А) ДОЛЖИНА НА КРУЖЕН ЛАК

Во претходните разгледувања видовме дека должината на кружницата со радиус r е дадена со формулата $L = 2\pi r$. Меѓутоа, ако кружницата ја поделиме на 360 еднакви делови, тогаш должината на кружниот лак кој соодветствува на централен агол со големина од 1° е еднаква на $\frac{2\pi r}{360} = \frac{\pi r}{180}$. Според тоа, ако имаме кружен лак на кој соодветствува централен агол α (изразен во степени), тогаш неговата должина се пресметува според формулата

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180}. \qquad (1)$$

Пример 26. а) Да се најде должината на кружниот лак во кружница со радиус $r = 2cm$, соодветен на периферниот агол $\beta = 75^\circ$.

б) Да се најде централниот агол во кружница со радиус $r = 3cm$, соодветен на кружен лак со должина $l = 2\pi cm$.

Решение. а) Забележуваме дека даден ни е периферниот агол соодветен на кружниот лак, па затоа соодветниот централен агол е $\alpha = 2\beta = 150^\circ$. Сега, со замена во формулата (1) за должината на кружниот лак наоѓаме

$$l = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 150}{180} cm = \frac{5\pi}{3} cm .$$

б) Од условот на задачата имаме $l = 2\pi cm$ и $r = 3cm$ па ако замениме во формулата (1) наоѓаме $2\pi = \frac{3\pi\alpha}{180}$, т.е. $\alpha = 120^\circ$. ♦

Забелешка 10 (за иние што сакаат да знаат повеќе). Формулата (1) може да се изведе со наполно аналогни размислувања, како и при изведувањето на формулата за должина на кружница. Притоа наместо впишани и опишани многуаголници треба да се разгледуваат впишани и опишани искршени линии во кружниот лак. Имено, може да се докаже дека должината l на кружниот лак, при избрани единица за должина и единица за агол, од радиусот r на кружницата и централниот агол α. Притоа односот $l:r$ не зависи од радиусот, па затоа истиот зависи само од аголот α и важи $l : r = k\alpha$, т.е. $l = kr\alpha$, каде k е коефициент на пропорционалност. Што се однесува до бројната вредност на овој коефициент, таа не зависи од изборот на единицата за должина, бидејќи вредностите на s и r при промената на единицата за должина се менуваат во ист однос. Затоа останува бројната вредност на k да зависи од изборот на единицта за мерење на агли. Како што видовме, ако единицата мерка за агол е степен, тогаш $k = \frac{\pi}{180^\circ}$.

Претходно коефициентот k го определивме однапред знаејќи ја единицита за мерење на аглите. Меѓутоа, прашањето може да се постави и на поинаков начин. Имено, да се избере единица за мерење на аглите така, што $k = 1$, т.е. да имаме

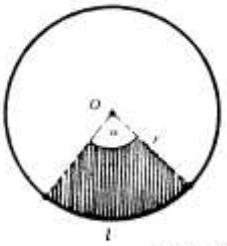
$$l = r\alpha .$$

Притоа $\alpha = 1$, ако $s = r$. Затоа во овој случај единица за мерење на аглите е централниот агол на кој му соодветствува кружен лак со должина еднаква на должината на радиусот и како што знаеме тоа е агол од 1 радијан. Се разбира, бидејќи должината на кружницата е $L = 2\pi r$ полниот агол има 2π радијани.

Б) ПЛОШТИНА НА КРУЖЕН ИСЕЧОК

Делот од кругот што е зафатен со централен агол го нарекуваме *кружен исечок* или *кружен сектор* (шрафираниот дел на црт. 30).

Да ја пресметаме плоштината на кружниот исечок во круг со радиус r на кој му соодветствува централен агол α . Нека претпоставиме дека кругот е поделен на 360 складни исечоци, при што секој исечок има централен агол од 1° . Бидејќи плоштината на целиот круг е еднаква на πr^2 и исечоците со централен агол од 1° се складни меѓу себе, добиваме дека плоштината на секој исечок со централен агол од 1° е $P_0 = \frac{\pi r^2}{360}$.



Црт. 30

Според тоа, ако имаме кружен исечок на кој мо соодветствува централен агол α (изразен во степени), тогаш неговата плоштина се пресметува според формулата

$$P=\frac{\pi r^2\alpha}{360}. \qquad (2)$$

Ако во (2) замениме од (1) за должината на лакот во кружница со радиус r соодветен на централен агол α за плоштината на кружниот исечок ја добиваме формулата

$$P=\frac{lr}{2}. \qquad (3)$$

Пример 27. а) Да се најде плоштината на кружниот исечок во кружница со радиус $r=6cm$, соодветен на централниот агол $\alpha=75^\circ$.

б) Да се најде централниот агол во кружница со радиус $r=3cm$, соодветен на кружен исечок со плоштина $P=2\pi\, cm^2$.

Решение. а) Имаме $r=6cm$ и $\alpha=75^\circ$ и ако замениме во (2) за плоштината на исечокот добиваме

$$P=\frac{\pi r^2\alpha}{360}=\frac{\pi\cdot 6^2\cdot 75}{360}cm^2=7{,}5\pi\, cm^2$$

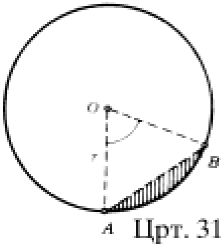
б) Од условот на задачата имаме $P=2\pi\, cm^2$ и $r=3cm$, па ако замениме во формулата (2) наоѓаме $2\pi=\frac{3^2\pi\alpha}{360}$, т.е. $\alpha=80^\circ$. ♦

В) ПЛОШТИНА НА КРУЖЕН ОТСЕЧОК

Делот од кругот што е зафатен со еден негов лак и соодветната тетива го нарекуваме *кружен отсечок* или *кружен сегмент*.

На црт. 31, со шрафираниот дел е претставен еден кружен отсечок. Да ја определиме формулата за пресметување на плоштина на кружен отсечок. Ќе разгледаме два случаја.

а) Ако $\alpha<180^\circ$ (црт. 31), тогаш плоштината на кружниот отсечок се добива како разлика на плоштините на кружниот исечок соодветен на аголот α и ΔABO. Притоа имаме $P_{\Delta ABO}=r^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ и ако ја искористиме формулата (2) за плоштина на кружен исечок добиваме дека плоштината на кружниот отсечок е дадена со формулата



Црт. 31

$$P=\frac{\pi r^2\alpha}{360}-r^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}. \qquad (4)$$

б) Ако $\alpha>180^\circ$, тогаш го определуваме аголот $\beta=360^\circ-\alpha$ и според формулата (4) ја определуваме плоштината P_1 на кружниот отсечок соодветен определен со истата тетива и помалиот припаден централен агол. Сега плоштината на дадениот кружен отсечок ја добиваме ако од плоштината на кругот ја извадиме најдената плоштина P_1, т.е. $P=\pi r^2-P_1$.

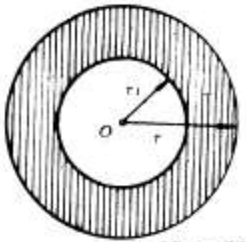
Пример 28. Да се најде плоштината на кружниот отсечок во кружница со радиус $r=6cm$, соодветен на централниот агол $\alpha=120^\circ$.

Решение. Имаме $r=6cm$ и $\alpha=120^\circ$ и ако замениме во (4) за плоштината на исечокот добиваме

$$P=\frac{\pi r^2\alpha}{360}-r^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=(\frac{\pi\cdot 6^2\cdot 120}{360}-6^2\sin\frac{120^\circ}{2}\cos\frac{120^\circ}{2})cm^2=(12\pi-6\sqrt{3})\,cm^2=6(2\pi-\sqrt{3})\,cm^2 .$$ ♦

Г) ПЛОШТИНА НА КРУЖЕН ПРСТЕН

Нека се дадени кружниците $k(O,r)$ и $k_1(O,r_1)$, $r_1<r$. Рамнинската геометриска фигура F определена со $A\in F$ ако и само ако $r_1\le\overline{OA}\le r$ ја нарекуваме *кружен прстен* (црт. 32).



Црт. 32

Јасно, плоштината P на кружниот прстен определен со кружниците $k(O,r)$ и $k_1(O,r_1)$, $r_1<r$ е еднаква на разликата од плоштините на концентричните кругови со радиуси r и r_1. Според тоа,

$$P=\pi r^2-\pi r_1^2=\pi(r^2-r_1^2). \qquad (5)$$

Пример 29. Да се најде плоштината на кружниот прстен што го формираат опишаната и впишаната кружница на правилен шестаголник со страна $a=12cm$

Решение. Радиусот на опишаната кружница околу правилен шестаголник е еднаков на страната на шестаголникот, а радиусот на впишаната кружница е еднаков на висината на карактеристичниот триаголник. Според тоа, $r=a=12cm$ и $r_1=\frac{a\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}cm$, па затоа плоштината на кружниот прстен е

$$P=\pi(r^2-r_1^2)=\pi[12^2-(6\sqrt{3})^2]cm^2=36\pi\, cm^2 .$$ ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

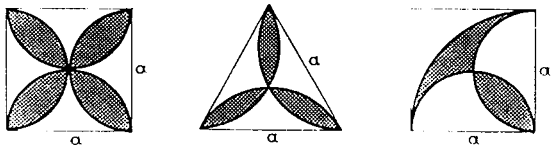
72. Пресметај ја должината на кружен лак со радиус $25cm$ и периферен агол: а) 20°, б) 15°.
73. Периметарот на една кружница е $27cm$. Најди го централниот агол, чиј лак е долг $10cm$.
74. Кружница со радиус $5cm$ е растегната во лак со радиус $9cm$. Најди го централниот агол на соодветен на лакот.
75. Кружница со радиус $12cm$ е растегната во кружен лак со соодветен централен агол 120°. Најди го радиусот на лакот.
76. Пресметај ја плоштината на кружен исечок, ако: а) $r=10cm, \alpha=50^\circ$, б) $r=10cm, l=12cm$.
77. Најди го централниот агол на кружен исечок, ако неговата плоштина е $2\pi cm^2$, а радиусот $8cm$.
78. Пресметај ја плоштината на кружен отсечок со тетива $a=10cm$ и централен агол:
    а) 120°, б) 60°, в) 240°.
79. Во кружен прстен тетивата на поголемата кружница ја допира помалата и е еднаква на $6cm$. Најди ја плоштината на прстенот.

80. Пресметај ја плоштината на пресекот на една цевка, ако дијаметарот на надворешниот круг е $5cm$, а дебелината е $3mm$.

81. Пресметај ја плоштината на кружен прстен што го формираа опишаната и впишаната кружница на:
а) рамностран триаголник со страна $a = 4cm$;
б) квадрат со страна $a = 12cm$;
в) правилен десетаголник со страна $a = 12cm$.

82. Пресметај ја плоштината на дел од кружен прстен со радиуси $r = 20cm$ и $r_1 = 1{,}2dm$, што соодветствува на централен агол од 60°.

83. Пресметај ја плоштината на шрафираниот дел на на секоја од фигурите на црт. 33.



Црт. 33

ПРОВЕРИ ГО СВОЕТО ЗНАЕЊЕ

1. **а)** Одреди ја страната на квадратот чија плоштина е еднаква на збирот на плоштините на два квадрати со страни $54cm$ и $72cm$. (4 б)
б) Пресметај ја плоштината на квадратот, ако збирот на должините на неговите страна и дијагонала е $10cm$. (6 б)

2. **а)** Пресметај ја плоштината на рамнокрак триаголник со основа $12cm$ и раб $10cm$. (6 б)
б) Најди го радиусот на опишаната кружница околу рамнокракиот ΔABC со основа $a = 12cm$ и крак $b = 15cm$. (8 б)

3. **а)** Дадени се страните во триаголникот $50cm, 58cm$ и $72cm$. Одреди ја најмалата висина во триаголникот. (10 б)
б) Најди ги страните на триаголникот, ако тие се однесуваат како $9:10:17$, а неговата плоштина е $576cm^2$. (15 б)

4. **а)** Пресметај ја плоштината на четириаголникот со дијагонали $8cm$ и $10cm$, ако аголот меѓу нив е 30°. (8 б)
б) Најди го периметарот на рамнокрак трапез, ако основите и висината се однесуваат како $4:1:2$, а плоштината е $20dm^2$. (12 б)

5. **а)** Во дворот на едно училиште, на парцела со форма на правилен шестаголник се засадени цвеќиња. Таа треба да се загради со 4 реда жици. Колку метри жица ќе биде потребно ако плоштината на целата парцела е $692cm^2$. (12 б)
б) Колкав е радиусот на кругот на кој мерните броеви на неговата плоштина и на неговиот периметар се еднакви? (15 б)

6. **а)** Периметарот на една кружница е $30cm$. Најди го централниот агол, чиј лак е долг $10cm$. (6 б)
б) Пресметај ја плоштината на пресекот на една цевка, ако дијаметарот на надворешниот круг е $4cm$, а дебелината е $4mm$. (8 б)

Забелешка. При решавањето треба да избереш само по една подзадача од секоја задача. Доколку сакаш самостојно да се оцениш, можеш да го искористиш следниот критериум:

Бодови:	19-31	32-43	44-54	55-64
Оценка:	2	3	4	5

ГЛАВА VII

ЕЛЕМЕНТИ ОД СТЕРЕОМЕТРИЈА

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

ПОТРЕБНИ ПРЕДЗНАЕЊА

За успешно совладување на содржините кои ќе ги усвојуваш во оваа тема, потребно е да се потсетиш на:

- *Питагоровата теорема,*
- *реалциите меѓу елементите на триаголникот ичетириаголникот, ,*
- *правилните многуаголници и реалациите меѓу страната, радиусот на впишаната и опишаната кружница,*
- *пресметувањето на плоштина на триаголник, пралелограм, трапез, трапезоид, правилен многуаголник, круг и делови на кругот и*
- *пресметувањето на периметар на триаголник, пралелограм, трапез, трапезоид, кружница и кружен лак,*

НОВИ ЗНАЕЊА И УМЕЕЊА

Успешното совладување на содржините кои се разработени во оваа тема има за цел:

- да го усвоиш поимот геометриско тело, а посебно поимите: полиедар, сфера, цилиндер, конус и потсечен конус,
- да се оспособиш да скицираш разни видови призми, пирамиди и потсечени пирамиди,
- да се оспособиш да скицираш цилиндер, конус и потсечен конус,
- да се оспособиш да скицираш некои пресеци на рамнина со призма, пирамида, цилиндер, конус и топка и да ги пресметуваш нивните елементи и плоштината,
- да го усвоиш поимот волумен на геометриско тело и да се оспособиш да ги користиш својствата на волуменот,
- да ги усвоиш формулите за плоштина и волумен на призма,
- да се оспособиш да решаваш проблеми во врска со плоштина и волумен на призма,
- да ги усвоиш формулите за плоштина и волумен на пирамида и потсечена пирамида,
- да се оспособиш да решаваш проблеми во врска со плоштина и волумен на пирамида и потсечена пирамида,
- да ги усвоиш формулите за плоштина и волумен на цилиндер,
- да се оспособиш да решаваш проблеми во врска со плоштина и волумен на цилиндер,
- да ги усвоиш формулите за плоштина и волумен на конус и потсечен конус,
- да се оспособиш да решаваш проблеми во врска со плоштина и волумен на конус и потсечен конус,
- да ги усвоиш формулите за плоштина и волумен на топка и делови на топка и
- да се оспособиш да решаваш проблеми во врска со плоштина и волумен на топка и нејзини делови.

Во претходната тема го воведовме поимот плоштина на рамнинска фигура и се осврнавме на пресметувањето на плоштините на рамнинските фигури кои најчесто ги среќаваме во секојдневниот живот. Во оваа тема предмет на проучување се геометриските тела. Притоа посебно внимание ќе обрнеме на пресметувањето на плоштина и волумен на некои геометриски тела, т.е. на проблемот на мерење во просторот $\mathbf{P}$, во кој ќе бидата сите наши разгледувања во оваа тема.

1. ПОИМ ЗА ГЕОМЕТРИСКО ТЕЛО

Во досегашното школување се запозна со коцката, квадарот, конусот, топката, тетраедарот и други геометриски фигури во просторот. Тоа се примери на геометриско тело, поим кој овде прецизно ќе го објасниме. За таа цел ќе воведеме неколку помошни поими, кои се од исклучителна важност во математиката воопшто.

Дефиниција 1. Нека O е точка од просторот $\mathbf{P}$ е $r \in \mathbf{R}$. Геометриската фигура составена од точките, чиешто растојание од дадената точка O е помало или еднакво на r, ја нарекуваме *топка* и ја означуваме со $T[O,r]$.

Фигурата составена од точките во просторот, растојание од дадената точка O е r, ја нарекуваме *сфера* и ја означува $S(O,r)$.

Точката O ја нарекуваме *центар* на топката (сферата), а r *радиус* на топката (сферата). Секоја отсечка што сврзува две точки од сверата S и мунива низ нејзиниот центар ја нарекуваме *дијаметар* на сферата S (топката T).

Јасно, секоја точка A таква, што $\overline{OA} < r$ припаѓа на топката T, а не припаѓа на сферата S, што значи S е вистинско подмножество од T. Според тоа, ако ги исфрлиме точките од топката T кои припаѓаат на сферата добиваме непразно множество, кое е од посебна важност за нашите натамошни разгледувања. Така ја имаме следната дефиниција.

Дефиниција 2. Нека O е точка од просторот $\mathbf{P}$ е $r \in \mathbf{R}$. Геометриската фигура составена од точките, чиешто растојание од дадената точка O е помало од r, ја нарекуваме *отворена топка* и ја означуваме со $T(O,r)$. Секоја отворена топка со центар во точката O ја нарекуваме *околина* на точката O.

Точката O ја нарекуваме *центар* на отворената топка, а r *радиус* на отворената топка.

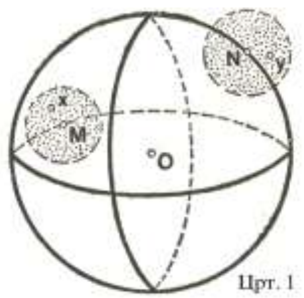
Забелешка 1. Нека се дадени точките A и B и нека $r = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Отворените топки $T_1(A,r)$ и $T_2(B,r)$ немаат заеднички точки. Навистина, ако $M \in T_1 \cap T_2$, тогаш $\overline{AM} < r$ и $\overline{BM} < r$, па затоа

$$2r = \overline{AB} \leq \overline{AM} + \overline{MB} < r + r = 2r,$$

што не е можно. Според тоа, за секои две точки постојат околини кои не се сечат.

Дефиниција 3. Нека F е фигура во просторот $\mathbf{P}$. За точката A ќе велиме дека е *внатрешна точка* на F ако постои околина на A која се содржи во F. За точката M ќе велиме дека е *гранична точка* на фигурата F, ако секоја околина на M содржи точки од F и точки што не и припаѓаат на F.

Пример 1. а) Да ја разгледаме топката $T[O,r]$ и нека M е точка од $T[O,r]$ таква, што $\overline{OM} < r$ (црт. 1). Земаме $a = \frac{1}{2}(r - \overline{OM})$ и да ја разгледаме отворената топка $T(M,a)$.



Црт. 1

Нека $X \in T(M,a)$. Тогаш,

$$\overline{OX} \leq \overline{MX} + \overline{MO} < \tfrac{1}{2}(r - \overline{MO}) + \overline{MO} = \tfrac{1}{2}r + \tfrac{1}{2}\overline{MO} < \tfrac{1}{2}r + \tfrac{1}{2}r = r,$$

што значи дека $T(M,a) \subset T[O,r]$. Според тоа, секоја точка од отворената топка $T(O,r)$ е внатрешна за затворената топка $T[O,r]$ и за отворената топка $T(O,r)$.

б) Нека N е точка од сверата $S(O,r)$ (црт. 1). Тогаш, секоја отворена топка $T(N,a)$ содржи точка од топката $T[O,r]$, на пример, точката K од отсечката ON за која $\overline{OK} = r - \frac{1}{2}a$ и точка која не припаѓа на топката $T[O,r]$, на пример, точката Y на полуправата ON за која $\overline{OY} = r + \frac{1}{2}a$ (црт. 1). Според тоа, секоја точка од сферата $S(O,r)$ е гранична точка за топката $T[O,r]$. ♦

Дефиниција 4. За фигурата F ќе велиме дека е *сврзлива*, ако кои било две точки од F можат да се сврзат со линија која целосно лежи во F, т.е. секоја точка од линијата и припаѓа на фигурата F.

Пример 2. а) Топките $T[O,r]$ и $T(O,r)$ и сферата $S(O,r)$ се сврзливи фигури (зошто ?). Исто така, секоја рамнина е сврзлива фигура.

б) Фигурата составена од две топки кои не се сечат не е сврзлива фигура. Исто така, секоја фигура F составена од конечен број точки не е сврзлива фигура (зошто?). ♦

Забелешка 2. Може да се докаже дека унија на секои две сврзливи фигури со заедничка точка е сврзлива фигура.

Дефиниција 5. За фигурата F ќе велиме дека е *област*, ако F е сврзлива и секоја нејзина точка е внатрешна.

Пример 3. а) За отворената топка е $T(O,r)$ секоја нејзина точка е внатрешна (пример 1 а)) и бидејќи таа е сврзлива заклучуваме дека $T(O,r)$ е област.

б) Топката $T[O,r]$ е сврзлива фигура (пример 2 а), но точките на сферата $S(O,r)$ не се внатрешни за топката $T[O,r]$ (зошто?). Според тоа, топката $T[O,r]$ не е област.

Понатаму, сферата $S(O,r)$ не е област, а исто така и рамнината не е област.

в) Секоја фигура F составена од конечен број на точки не е област. Имено, ваква фугура како прво не е сврзлива (зошто?), а како второ ниедна нејзина точка не е внатрешна (зошто?). ♦

Примерот 1 покажува дека граничната точка може да припаѓа и на фигурата F, но не мора. Исто така, една гранична точка на F не може да биде внатрешна, ниту пак, една внатрешна точка може да биде гранична. Понатаму, бидејќи сите точки од една област G се нејзини внатрешни точки, заклучуваме дека ниедна точка од областа G не е нејзина гранична точка, т.е. областа G не ги содржи своите гранични точки. Ако на областа G и ги додадеме нејзините гранични точки доаѓаме до нов поим, а тоа е затворена област. Така ја имаме следната дефиниција.

Дефиниција 6. Нека е дадена областа G. Фигурата составена од областа G и нејзините гранични точки ја нарекуваме *затворена област* и ја означуваме со $\overline{G}$.

Множеството гранични точки на областа G го нарекуваме *граница* на G, т.е. на $\overline{G}$.

Јасно, топката $T[O,r]$ е затворена област. Од дефиниција 6 непосредно заклучуваме дека сферата $S(O,r)$ е граница на топките $T(O,r)$ и $T[O,r]$.

Дефиниција 7. За фигурата F ќе велиме дека е *ограничена* ако постои топка $T[O,r]$ таква, што $F \subseteq T[O,r]$.

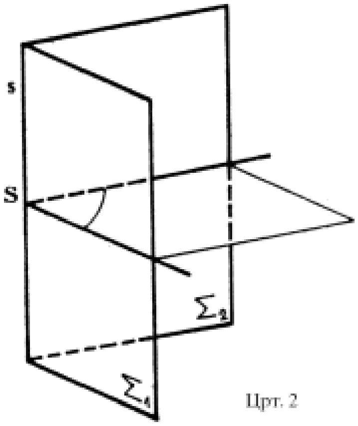
Затворената и ограничена област ја нарекуваме *геометриско тело.*

Пример 4. а) Затворената топка $T[O,r]$ е геометриско тело, но отворената топка $T(O,r)$ не е геометриско тело.

б) Рамнината и сферата $S(O,r)$ не се геометриски тела (зошто?). ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Нека $r < R$. Докажи дека $T[O,r], T(O,r)$ и $S(O,r)$ се подмножества од $T[O,R]$ и $T(O,R)$.
2. Нека A и B се две различни точки и $r = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Најди го множеството $F = T[A,r] \cap T[B,r]$. Дали ова множество е сврзливо? Најди го множеството G составено од внатрешните точки на F. Дали G е област?
3. Фигурата образувана од две полурамнини со заеднички раб и една точка M што не лежи на полурамнините ја нарекуваме *диедар.* Полурамнините ги нарекуваме *ѕидови*, а нивниот заеднички раб го нарекуваме *раб на диедарот.* Делот од просторот $\mathbf{P}$, определен со ѕидовите на диедарот, во кој се наоѓа точката M го нарекуваме *внатрешност на диедарот.*
   а) Докажи дека фигурата F образувана од диедарот и неговата внатрешност е затворена област, но не е тело.
   б) Што е граница на F.



Црт. 2

2. ПОИМ ЗА ПОЛИЕДАР. ВИДОВИ ПОЛИЕДРИ

Во претходната точка дефиниравме геометриско тело како ограничена и затворена област. Од фигурите што ги разгледавме досега, тело е, на пример, секоја топка. Овде ќе се задржиме на еден посебен вид тела, наречени полиедри.

Дефиниција 8. За геометриското тело F ќе велиме дека е *полиедар* ако неговата граница е составена од конечен број многуаголници.

Многуаголниците што ја образуваат границата на полиедарот ги нарекуваме негови *ѕидови*. Страните и темињата на многуаголниците ги нарекуваме соодветно *страни* и *темиња* на полиедарот.

Отсечката која сврзува кои било две темиња на полиедарот што не лежат на ист ѕид ја нарекуваме *просторна дијагонала* или само *дијагонала на полиедарот*.

Од дефиниција 8 непосредно следува дека:

а) во секое теме на полиедарот се сретнуваа барем три негови раба, и

б) секој раб на полиедарот е страна на два и само два многуаголници од неговата граница.

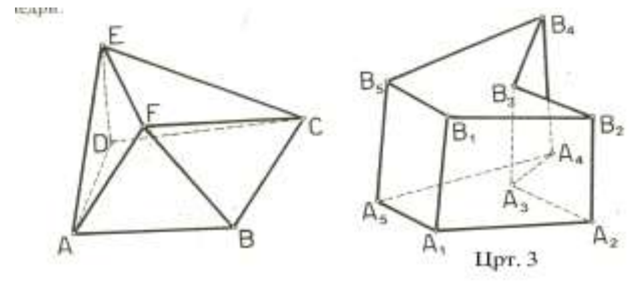
За оние што сакаат да знаат повеќе

Бројот s на ѕидовите на еден полиедар може да различен (црт. 3). Истото важи и за бројот r на рабовите и бројот t на темињата. На пример, за полиедарот $ABCDEF$ од црт. 3 имаме

$$t=6, r=11 \text{ и } s=7,$$

а за полиедарот $A_1A_2A_3A_4A_5B_1B_2B_3B_4B_5$ (црт. 3) имаме

$$t=10, r=15 \text{ и } s=7.$$



Црт. 3

Забележуваме дека овие два полиедри имаат ист број ѕидови, но броевите на рабовите и темињата се различни. Важи и поопшто, т.е. кои било два од броевите s, t и r не се одделно поврзани со релација која е точна за сите полиедри. Меѓутоа, точна е следната теорема.

Теорема 1 (Ојлер). Ако еден полиедар има s ѕидовите, r рабовите и t темињата, тогаш

$$s+t=r+2. \ \blacklozenge$$

Провери ја точноста на Ојлеровата теорема за полиедрите од црт. 3.

Да се вратиме на полиедрите $ABCDEF$ и $A_1A_2A_3A_4A_5B_1B_2B_3B_4B_5$ (црт. 3). Забележуваме дека полиеадарот $ABCDEF$ секогаш се наоѓа на една страна од рамнината на секој негов ѕид, а додека тоа не е случај со вториот полиедар. На пример, тој се наоѓа на двете страни од рамнините на ѕидовите $A_2B_2B_3A_3$ и $A_3A_4B_4B_3$. Токму ова својство на полиедрите од црт. 3 е непосреден повод за следната поделба на полиедрите.

Дефиниција 9. За еден полиедар ќе велиме дека е *конвексен* ако тој е расположен на една страна од рамнината на кој било негов ѕид.

За еден полиедар ќе целиме дека е *конкавен*, ако тој не е конвексен.

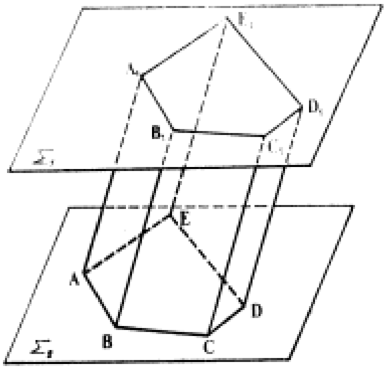
Во натамошните разгледувања ќе се задржиме на изучување на два вида конвексни полиедри, па затоа под терминот полиедар ќе подразбираме конвексен полиедар.

А) ПРИЗМА

Дефиниција 10. За еден полиедар ќе велиме дека е *призма* ако два негови ѕида се складни многуаголници што леат на две паралелни рамнини и ако останатите ѕидови се такви паралелограми што секој од нив има заедничка страна со споменатите два ѕида (црт. 4).

Складните ѕидови што лежат на паралелните страни ги нарекуваме *основи* или *бази*, а за паралелограмите ќе велиме дека се *бочни* или *околни ѕидови* и дека ја образуваат *бочната површина* на призмата.

Страните на основите ги нарекуваме *основни рабови*, а останатите рабови на призмата ги нарекуваме *бочни рабови*.



Црт. 4

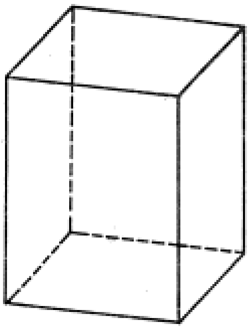
Нека Σ_1 и Σ_2 се рамнините на основите на призмата и $M \in \Sigma_1$. Ако правата p минува низ точката M, $p \perp \Sigma_1$ и $N = p \cap \Sigma_2$, тогаш за отсечката MN ќе велиме дека е *висина* на призмата.

Пример 5. За призмата $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (црт. 5) петаголниците $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ се нејзини основи; паралелограмите $ABB_1A_1, ..., EAA_1E_1$ се бочни ѕидови, отсечките $AB, BC, ..., EA, A_1B_1, B_1C_1, ..., E_1A_1$ се основни рабови, а отсечките $AA_1, BB_1, ..., EE_1$ се бочни рабови оваа призма. ♦

Дефиниција 11. За една призма ќе велиме дека е *права* ако нејзините бочни рабови се нормални на нејзините основи, а во спротивно ќе велиме дека призмата е *коса*.

Ако основите на призмата се правилни многуаголници, тогаш за неа ќе велиме дека е *правилна призма*. Правата која минува низ центрите на основите на правилната призма ја нарекуваме *оска* на правилната призма.

Забелешка 3. Од тоа што бочните ѕидови на призмата се паралелограми, непосредно следува дека бочните рабови се еднакви меѓу себе. Понатаму, од дефиниција 11 следува дека кај права призма бочните ѕидови на призмата се правоаголници и дека должината на висината на права призма е еднаква на должината на бочните рабови.


Црт. 5

Според тоа колку страни има едната основа на призмата, т.е. дали основата е триаголник, четириаголник, петаголник итн., призмата ја нарекуваме *тристрана, четиристрана, петстрана* итн. Посебно, ако основата на призмата е паралелограм, тогаш неа ја нарекуваме *паралелопипед*; ако, пак, тие паралелограми се правоаголници и ако паралелопипедот е прав, тогаш за него велиме дека е *правоаголен паралелопипед* или *квадар* (црт. 5). Конечно, квадарот кај кој сите рабови се еднакви го нарекуваме *коцка*.

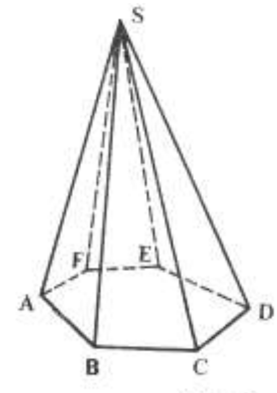
Б) ПИРАМИДА

Дефиниција 12. За еден полиедар ќе велиме дека е *пирамида* ако еден негов ѕид е некој многуаголник, а останатите ѕидови се триаголници што имаат едно заедничко теме (црт. 6).

Ѕидовите на пирамидата што имаат заедничко теме ги нарекуваме *бочни ѕидови* и велиме дека ја образуваат *бочната површина.*

Многуаголникот со кој бочните ѕидови имаат заедничка страна го нарекуваме *основа* на пирамидата.

Заедничкото теме на триаголниците го нарекуваме *врв* на пирамидата. Страните на основата ги нарекуваме основни рабови, а рабовите кои минуваат низ врвот на пирамидата ги нарекуваме бочни рабови.



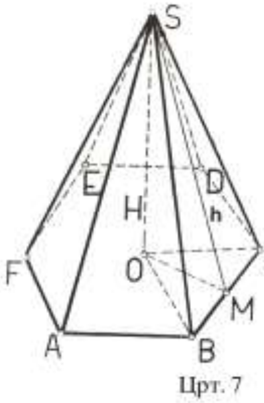
Црт. 6

Нека Σ е рамнината на основата на пирамидата и S е нејзиниот врв. Ако правата p минува низ точката S, $p \perp \Sigma$ и $N = p \cap \Sigma$, тогаш за отсечката SN ќе велиме дека е *висина* на пирамидата.

Пример 6. За призмата $ABCDEFS$ (црт. 6) шестаголникот $ABCDEF$ е нејзина основа; триаголниците $ABS, BCS, CDS, DES, EFS, FAS$ се бочни ѕидови, отсечките AB, BC, CD, DE, EF, FA се основни рабови; отсечките AS, BS, CS, DS, ES, FS се бочни рабови оваа призма, а темето S е нејзин врв. ♦

Според тоа колку страни има основата на пирамидата, т.е. дали основата е триаголник, четириаголник, петаголник итн., пирамидата ја нарекуваме *тристрана, четиристрана, петстрана* итн. Тристраната пирамида уште ја нарекуваме *тетраедар.* Да забележиме дека само кај тетраедарот кој било ѕид може да биде нејзина основа, а додека кај останатите пирамиди основа е многуаголникот кој не е триаголник.

Понатаму, ако основата на пирамидата е правилен многуаголник и бочните рабови се меѓусебно еднакви, тогаш за неа ќе велиме дека е *правилна пирамида.* (црт. 6). Јасно, бочните ѕидови кај правилните пирамиди се складни рамнокраки триаголници, што значи дека нивните висини повлечени кон основите се еднакви меѓу себе. Оваа висина има посебна улога кај правилните пирамиди и истата ја нарекуваме *апотема.* Да забележиме дека кај правилните пирамиди нормалата кон основата спуштена од врвот минува низ центарот на многуаголникот (црт. 6). Понатаму, висината на пирамидата H и радиусот на впишаната кружница на основата r се катети на правоаголен триаголник, а апотемата на правилната пирамида h е негова хипотенуза, што значи



Црт. 7

$$h^2 = r^2 + H^2.$$

Слично, висината на пирамидата H и радиусот на опишаната кружница на основата R се катети на правоаголен триаголник, а бочниот раб s е негова хипотенуза, што значи

$$s^2 = R^2 + H^2 .$$

Пример 7. Основниот раб шестстрана пирамида е $a = 8cm$, а висината и е $H = 11cm$. Пресметај ги апотемата и бочниот раб на пирамидата.

Решение. Основата на пирамидата е правилен шестаголник, па затоа радиусот на вписаната кружница е

$$r = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{8^2 - \frac{8^2}{4}} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} ,$$

а радиусот на опишаната кружница е $R = a = 8cm$. Според тоа, апотемата на пирамидата е

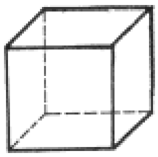
$$h = \sqrt{H^2 + r^2} = \sqrt{11^2 + (4\sqrt{3})^2} = 13cm ,$$

а бочниот раб е

$$s = \sqrt{R^2 + H^2} = \sqrt{8^2 + 11^2} = \sqrt{185}cm . \blacklozenge$$

В) ПРАВИЛНИ ПОЛИЕДРИ (за оние што сакаат да знаат повеќе)

Да ја разгледаме коцката (црт. 8). Забележуваме дека сите нејзини страни се квадрати со иста страна, т.е. сите страни се складни многуаголници и во секое теме се среќаваат по 3 раба. Природно е да се запрашаме: дали постојат и други вакви полиедри и ако постојат, како истите да се најдат?

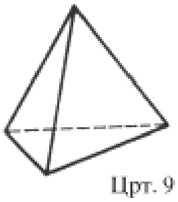


Црт. 8

На поставеното прашање нема детално да се осврнеме, бидејќи за тоа ни се потребни и други тврдења кои овде не ги разгледуваме. Во овој дел ќе дадеме само преглед на таканаречените правилни полиедри, кои наоѓаат огромна примена во повеќе применети научни области, како кристалографијата и слично.

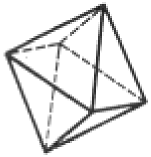
Дефиниција 13. За еден полиедар ќе велиме дека е *правилен полиедар* ако неговите ѕидови се правилни складни многуаголници и во секое теме се среќаваат ист број рабови.

Претходната дефиниција за правилен полиедар ни овозможува определување на сите правилни полиедри, со тоа што треба да одговориме на прашањето: дали може да биде формиран правилен полиедар од произволен број складни правилни n-аголници?



Црт. 9

Со примена на Ојлеровата теорема за полиедри и користејќи го фактот дека во во произволно теме на правилниот полиедар има најмалку три рабни агли, секој од кои има најмалку 60° (зошто?), како и тоа дека збирот на рабните агли во секое теме е помал од 360° може да се докаже дека:



Црт. 10

Црт. 11

а) Правилни полиедри чии бочни ѕидови се рамнострани триаголници има само три, и тоа:
   1) *правилен тетраедар* (црт. 9), кај кој во секое теме се среќаваат по три раба, а има: четири ѕида, четири темиња и шест рабови,
   2) *правилен октаедар* (црт. 10), кај кој во секое теме се среќаваат по четири раба, а има: осум ѕида, шест темиња и дванаесет рабови и
   3) *правилен икосоедар* (црт. 11), кај кој во секое теме се

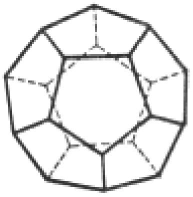
среќаваат по пет раба, а има: дваесет ѕидови, дванесет темиња и триесет рабови,

б) Постои само еден правилен полиедар чии страни се квадрати и тоа е *коцката* (*правилен хексаедар*), која има шест ѕида, осум темиња и дванаесет рабови (црт. 8).

в) Постои само еден правилен полиедар чии ѕидови се правилни петаголници и тоа е правилниот додекаедар, а има 12 ѕидови, 30 рабови и 20 темиња (црт. 12).

г) Не постои правилен полиедар чии ѕидови се правилни $n-$аголници, за $n \geq 6$.

Според тоа, правилни полиедри се споменатите пет, и само тие.



Црт. 12

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

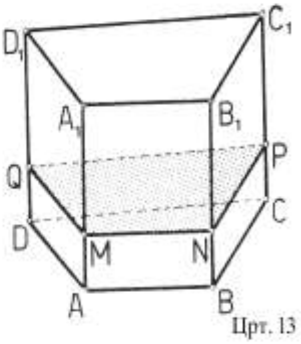
4. Докажи дека дијагоналите на паралелопипедот се сечат во една точка и се преполовуваат.
5. Докажи дека дијагоналите на правоаголниот паралелопипед се еднакви.
6. Докажи дека една призма е права ако два нејзини бочни ѕида се правоаголници.
7. Основата на една пирамида е: а) триаголник, б) трапез, в) ромб. Дали може бочните рабови на таа призма да се еднакви?
8. Дали може бочните рабови на една правилна
а) четиристрана, б) шестстрана
пирамида да се
1) правоаголни, 2) рамнострани триаголници.
9. Еден шатор има форма на правилна четиристрана пирамида чија висина е $3m$, а апотема $5m$. Колкава слободна површина е потребна за поставување на шаторот?
10. Еден споменик има форма на правилна шестстрана пирамида со основен раб $0{,}6m$. Колку треба да биде висок столбот, ако неговиот бочен раб има должина $1m$?

3. ПРЕСЕЦИ НА ПРИЗМА СО РАМНИНА

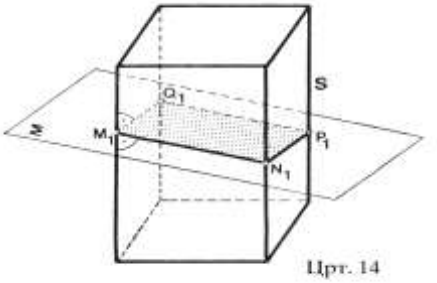
Во зависност од заемната положба на дадени призма и рамнина можно е тие да имаат или да немаат заеднички точки. Од практична гледна точка од посебен интерес се случаите кога пресекот на призмата и рамнината е многуаголник и кој се добива ако:

а) рамнината е паралелна со основите на призмата (*паралелен пресек*) и притоа пресекот е многуаголник складен со основите на призмата (црт. 13),

б) рамнината е нормална на бочните рабови на призмата и овој пресек го нарекуваме *нормален пресек*



Црт. 13



Црт. 14

на призмата (црт.14),

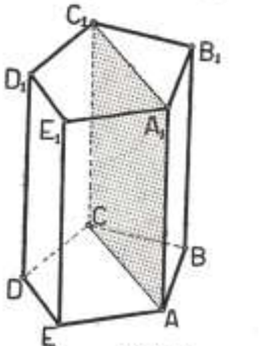
в) рамнината минува низ два несоседни бочни рабови на призмата и во овој случај велиме дека имаме *дијагонален пресек* (црт. 15),

г) рамнината ги содржи центрите на основите кај правилна призма и во овој случај велиме дека имаме *оскин пресек* на призмта,

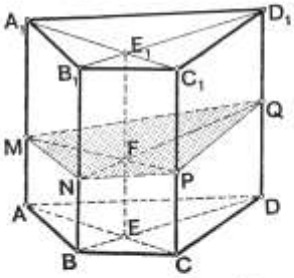
д) рамнината не е паралелна со основите и не е нормална на бочните рабови на призмата, но ги сече бочните рабови на призмата и овој пресек го нарекуваме *кос пресек* и

ѓ) рамнината сече барем една од основите на призмата и во овој случај велиме дека имаме пресек во општа положба.

Кога станува збор за пресекот на рамнина и призма, едно од основните прашања е како правилно да се направи скица на пресекот. Во следниот пример ќе укажеме на една постапка, која може да се применува во различни случаи.



Црт. 15



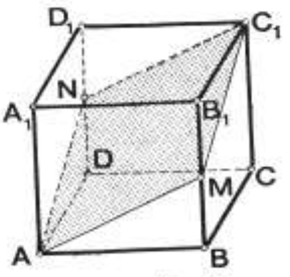
Црт. 16

Пример 8. Да се конструира пресекот на четиристрана призма со рамнина, ако се знаат пресечните точки N, P и Q на три раба со рамнината.

Решение. Нека точките N, P и Q припаѓаат на бочните рабовите BB_1, CC_1 и DD_1, соодветно (црт. 16). Јасно, отсечките NP и PQ се страни набараниот пресек. Ги конструираме дијагоналите на основите $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ и ги наоѓаме нивните пресечни точки $E = AC \cap BD$ и $E_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$. Понатаму, ако четвртото теме на пресекот е точката M, тогаш пресекот на дијагоналите на четириаголникот $NPQM$ е колинеарен со точките E и E_1 и тој лежи на правата NQ (зошто?). Затоа ги повлекуваме правите EE_1 и NQ и го наоѓаме пресекот на дијагоналите F на четириаголникот $NPQM$. Конечно, наоѓаме $M = AA_1 \cap FP$. ♦

Пример 9. Дадена е коцката $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со раб $a = 8cm$ (црт. 17). Да се конструира пресекот со рамнината која минува низ средината M на работ BB_1 и дијагоналата AC_1 на коцката и потоа да се пресмета неговата плоштина.

Решение. Бочните страни ABB_1A_1 и CDD_1C_1 се паралелни, па затоа пресечните прави со рамнината се паралелни. Аналогно и пресечните прави на бочните страни ADD_1A_1 и BCC_1D_1 со рамнината се паралелни. Но,



Црт. 17

$\overline{AM}=\overline{MC_1}$ (зошто?), од што заклучуваме дека пресекот на рамнината и коцката е ромб, кој лесно се конструира. Дијагоналите на ромбот се

$$\overline{AC_1}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CC_1}^2}=\sqrt{(a\sqrt{2})^2+a_1^2}=a\sqrt{3}=8\sqrt{3}cm$$

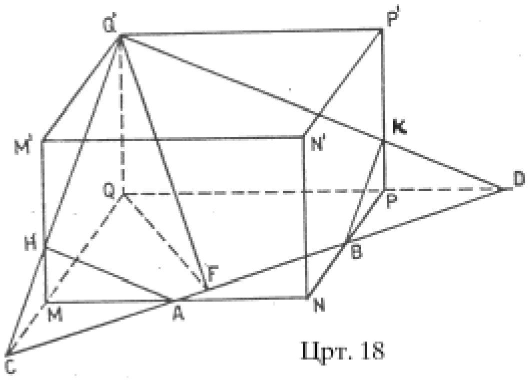
и

$$\overline{MN}=\overline{BD}=a\sqrt{2}=8\sqrt{2}cm,$$

па затоа неговата плоштина е

$$P=\frac{\overline{MN}\cdot\overline{AC_1}}{2}=\frac{a^2\sqrt{6}}{2}=\frac{8^2\sqrt{6}}{2}cm^2=32\sqrt{6}cm^2.\ \blacklozenge$$

Пример 10. Даден е правоаголен паралелопипед $MNPQM'N'P'Q'$. Должините на рабовите MN, MQ и MM' се $20cm$, $15cm$ и $24cm$ соодветно. Да се најде плоштината на пресекот на рамнината која минува низ средините на рабовите MN, NP и темето Q'.



Црт. 18

Решение. Прво ќе го конструираме пресекот на рамнината е паралелопипедот. Бидејќи рамнината минува низ точките A и B (црт. 18), добиваме дека правата AB ги сече продолженијата на рабовите QM и QP во точките C и D. Значи, рамнината минува низ точките Q', C и D, па затоа таа ги сече рабовите MM' и PP' во нивните пресечни точки H и K со правите $Q'C$ и $Q'D$, соодветно. Според тоа, пресекот на паралелопипедот и рамнината е петаголникот $ABKQ'H$.

Бидејќи пресечната рамнина минува низ точките A, B и Q' таа ги сече спротивните страни по правите HQ', BK, AH и KQ' и притоа $HQ' \| BK$ и $AH \| KQ'$. Според тоа, $\Delta AHC \sim \Delta DQ'C$ и $\Delta BKD \sim \Delta DQ'C$. Од $\overline{CA}=\overline{BD}=\frac{1}{3}\overline{CD}$ следува дека $P_{AHC}=P_{BKD}=\frac{1}{9}P_{CQ'D}$ т.е. $P_{AHC}=P_{BKD}=\frac{1}{9}P_{CQ'D}$, па затоа $P_{ABKQH}=\frac{7}{9}P_{CQ'D}$.

За CD на страната на $\Delta DQ'C$ имаме:

$$\overline{CD}=3\overline{AB}=\frac{3}{2}\overline{MP}=\frac{3}{2}\sqrt{\overline{QM}^2+\overline{QP}^2}=\frac{3}{2}\sqrt{20^2+15^2}=\frac{75}{2}cm.$$

Понатаму, $\overline{CQ}=3\overline{CM}=\frac{45}{2}cm$ и $\overline{DQ}=3\overline{PD}=30cm$, па затоа $\overline{QF}=\frac{\overline{QC}\cdot\overline{QD}}{\overline{CD}}=18cm$. Според тоа,

$$\overline{Q'F}=\sqrt{\overline{QF}^2+\overline{QQ'}^2}=\sqrt{18^2+24^2}cm=30cm,$$

и како $Q'F \perp CD$ добиваме

$$P_{ABKQH}=\frac{7}{9}P_{CQ'D}=\frac{7}{9}\cdot\frac{\overline{CD}\cdot\overline{Q'F}}{2}=\frac{7}{9}\cdot\frac{\frac{75}{2}\cdot 30}{2}cm^2=437{,}5cm^2.\ \blacklozenge$$

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

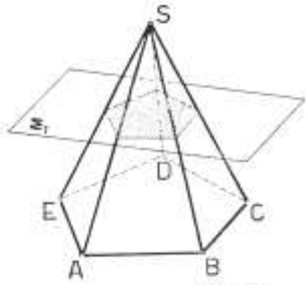
11. Конструирај го пресекот на правилна тристрана призма и рамнина која минува низ еден раб на основата на призмата и низ средината на нејзината оска.
12. Растојанијата меѓу бочните рабови на тристрана призма се $13cm, 14cm$ и $15cm$. Пресметај ја плоштината на нормалниот пресек на оваа призма.
13. Основата на права призма е ромб. Определи ги аглите на ромбот ако се знае дека плоштините на дијагоналните пресеци на призмата се однесуваат како $1:\sqrt{3}$.
14. Дадена е тристрана еднакворабна призма со раб $a = 4cm$. Пресметај ја плоштината на пресекот што минува низ оската и еден бочен раб на призмата.
15. Дадена е коцка $MNPQM'N'P'Q'$ со раб $20cm$. Низ средините на рабовите MN, NP и центарот C на страната $MQQ'M'$ е повлечена рамнина. Конструирај го пресекот на коцката и рамнината и определи ја неговата плоштина.
16. Дадена е коцка $MNPQM'N'P'Q'$ со раб $20cm$. Низ средините на рабовите NN', $N'P'$ и MQ е повлечена рамнина. Конструирај го пресекот на коцката и рамнината и најди ја неговата плоштина.

4. ПРЕСЕЦИ НА ПИРАМИДА СО РАМНИНА

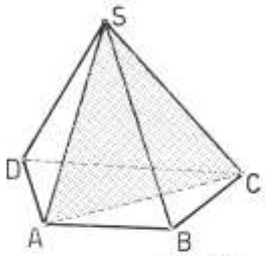
Во зависност од заемната положба на дадени пирамида и рамнина можно е тие да имаат или да немаат заеднички точки. Од практична гледна точка од посебен интерес се случаите кога пресекот на пирамидата и рамнината е многуаголник и кој се добива ако:

а) рамнината ги сече сите бочни рабови на призмата, а не минува низ нејзиниот врв (*бочен пресек*), а специјален случај е кога рамнината е паралелна на основата на призмата (*паралелен пресек*) (црт. 19) и

б) рамнината минува низ два несоседни бочни рабови на пирамидата (*дијагонален пресек*) (црт.20).



Црт. 19



Црт. 20

Што се однесува до дијагоналниот пресек на пирамида со рамнина скицирањето е едноставно, а определувањето на елементите се сведува на наоѓање на елементите на триаголник, па затоа истото нема посебно да го разгледуваме. Меѓутоа, работата со бочните пресеци не е толку едноставна, дури и во случај на паралелен пресек. За паралелните пресеци на пирамида со рамнина ќе ја докажеме следната теорема.

Теорема 2. Ако пресечеме пирамида со рамнина, паралелна на основата на пирамидата, тогаш:

а) рамнината ги дели бочните рабови и висината во ист однос,

б) добиениот пресек е многуаголник сличен, на основата и

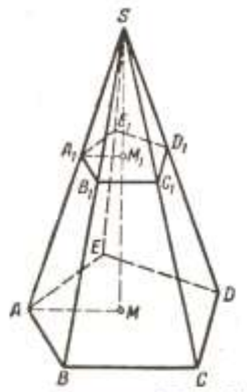
в) плоштината на основата и плоштината на пресекот се однесуваат како квадратите од нивните растојанија до врвот на пирамидата.

Доказ. а) Бидејќи пресечната рамнина е паралелна со рамнината на основата, добиваме дека страните на пресекот се паралелни со соодветните страни на основата (црт. 21), т.е. $A_1B_1 \parallel AB, B_1C_1 \parallel BC, ..., A_1M_1 \parallel AM$. Според тоа,

$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{A_1A}}=\frac{\overline{SB_1}}{\overline{B_1B}},\ \frac{\overline{SB_1}}{\overline{B_1B}}=\frac{\overline{SC_1}}{\overline{C_1C}},\ \frac{\overline{SC_1}}{\overline{C_1C}}=\frac{\overline{SD_1}}{\overline{D_1D}},...,\ \frac{\overline{SM_1}}{\overline{M_1M}}=\frac{\overline{SA_1}}{\overline{A_1A}},$$

од што следува

$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{A_1A}}=\frac{\overline{SB_1}}{\overline{B_1B}}=\frac{\overline{SC_1}}{\overline{C_1C}}=\frac{\overline{SD_1}}{\overline{D_1D}}=...=\frac{\overline{SM_1}}{\overline{M_1M}}.$$



Црт. 21

б) Од $A_1B_1 \parallel AB, B_1C_1 \parallel BC, C_1D_1 \parallel CD,...$ следува

$$\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC,\ \angle B_1C_1D_1 = \angle BCD,\ \angle C_1D_1E_1 = \angle CDE, ...$$

Освен тоа, од признаците за сличност имаме

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{SB_1}}{\overline{SB}},\ \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{SB_1}}{\overline{SB}}=\frac{\overline{SC_1}}{\overline{SC}},\ \frac{\overline{C_1D_1}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{SC_1}}{\overline{SC}}=\frac{\overline{SD_1}}{\overline{SD}}, ...$$

од што добиваме дека

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{C_1D_1}}{\overline{CD}}=....$$

Според тоа, за многуаголниците $A_1B_1C_1D_1E_1$ и $ABCDE$ страните се пропорционални и соодветните агли се еднакви, па затоа $A_1B_1C_1D_1E_1 \sim` ABCDE$.

в) Од $A_1B_1C_1D_1E_1 \sim` ABCDE$ следува $\frac{P_{A_1B_1C_1D_1E_1}}{P_{ABCDE}}=\frac{\overline{A_1B_1}^2}{\overline{AB}^2}$ и како $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA}}=\frac{\overline{SM_1}}{\overline{SM}}$ добиваме $\frac{P_{A_1B_1C_1D_1E_1}}{P_{ABCDE}}=\frac{\overline{SM_1}^2}{\overline{SM}^2}$. ♦

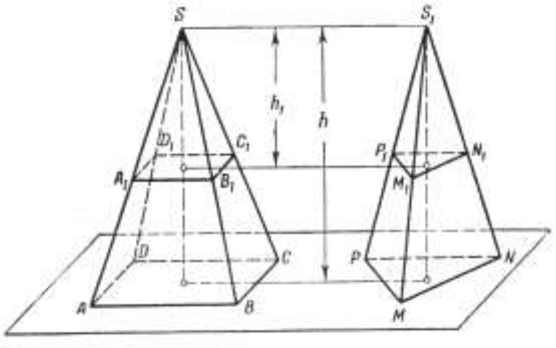
Теорема 3. Ако две пирамиди со еднакви висини се пресечат со рамнина, паралелна на основите, на еднакво растојание од темињата, тогаш плоштините на пресеците ќе бидат пропорционални со плоштините на основите.

Доказ. Од теорема 2 следува

$$\frac{P_{A_1B_1C_1D_1}}{P_{ABCD}}=\frac{h_1^2}{h^2} \text{ и } \frac{P_{M_1N_1P_1}}{P_{MNP}}=\frac{h_1^2}{h^2}$$

(црт. 22). Левите страни на последните две равенства се еднакви, па затоа се еднакви и десните, односно

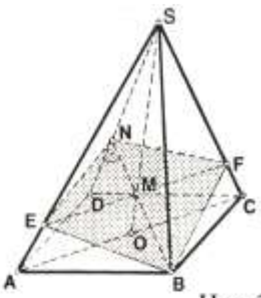
$$\frac{P_{A_1B_1C_1D_1}}{P_{ABCD}}=\frac{P_{M_1N_1P_1}}{P_{MNP}}.\ ♦$$



Црт. 22

Забелешка 4. Од претходната теорема непосредно следува дека, ако за две пирамиди со еднакви висини основите имаат еднакви плоштини, тогаш и нивните пресеци кои се на еднакво растојание од врвовите имаат еднакви плоштини.

Пример 11. Конструирај го пресекот на правилна четиристрана пирамида со рамнина што минува низ едно теме на пирамидата и е нормална на спротивниот бочен раб на тоа теме.



Црт. 23

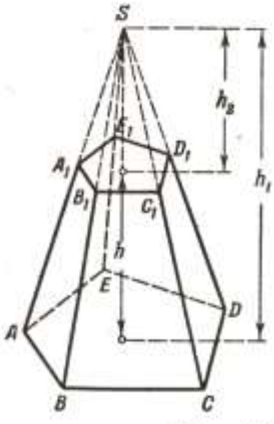
Решение. Нека е дадена правилната четиристрана пирамида $ABCDS$ и нека пресечната рамнина минува низ темето B и е нормална на бочниот раб SD (црт. 23). Од темето B спуштаме нормала на бочниот раб SD и го наоѓаме темето N на пресекот. Јасно, дијагоналата на пресекот лежи на дијагоналниот пресек на пирамидата, па затоа ја повлекуваме висината SO на пирамидата (O е пресек на дијагоналите на основата на пирамидата) и во пресек со BN ја наоѓаме точката M. Конечно, низ точката M повлекуваме права паралелна со дијагоналата на основата AC и во пресеците со бочните рабови SA и SA ги наоѓаме точките E и F, соодветно. Четириаголникот $BFNE$ е бараниот пресек. ♦

Пример 12. Пресметај ја плоштината на паралелниот пресек на пирамида со плоштина на основата $144cm^2$, ако пресечната рамнина ја дели висината на пирамидата во однос $1:3$ сметајќи од врвот на пирамидата.

Решение. Од условот на задачата имаме $\frac{h_1}{h-h_1}=\frac{1}{3}$ (црт. 22), па затоа $h=4h_1$, т.е. $\frac{h_1}{h}=\frac{1}{4}$. Ако плоштината на основата е $B=144cm^2$ и со B_1 ја означиме плоштината на пресекот, тохаш од теорема 2 следува $\frac{B_1}{B}=\frac{h_1^2}{h^2}=\frac{1}{16}$, па затоа $B_1=\frac{1}{16}B=9cm^2$. ♦

На крајот од овој дел повторно ќе се навратиме на парелелниот пресек на пирамида. Така ја имаме следната дефиниција.

Дефиниција 14. *Потсечена пирамида* ($ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$) го нарекуваме делот од пирамидата ($SABCDE$), зафатен со нејзината основа и пресечна рамнина паралелна на нејзнината основа (црт. 24). Пирамидата $SA_1B_1C_1D_1E_1$ ја нарекуваме дополнителна пирамида за потсечената пирамида $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$.



Црт.24

Паралелните многуаголници ($ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ ги нарекуваме *основи* на потсечената пирамида, а другите ѕидови ги нарекуваме *бочни ѕидови* и тие ја формираа *бочната површина* на потсечената пирамида. Основата на почетната пирамида ($ABCDE$) ја нарекуваме *долна основа,* а основата која лежи во потсечната рамнина ($A_1B_1C_1D_1E_1$) ја нарекуваме *горна основа* на потсечената пирамида.

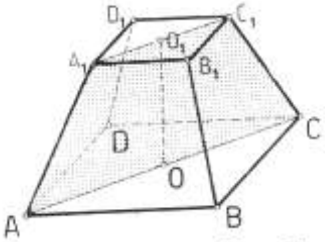
Страните на основите ги нарекуваме *основни рабови*, а останатите рабови ги нарекуваме *бочни рабови* на потсечената пирамида.

Нека Σ_1 и Σ_2 се рамнините на основите на потсечената пирамида и $M\in\Sigma_1$. Ако правата p минува низ точката M, $p\perp\Sigma_1$ и $N=p\cap\Sigma_2$, тогаш за отсечката MN ќе велиме дека е *висина* на пирамидата.

Потсечената пирамида која се добива од правилна пирамида ја нарекуваме *правилна потсечена пирамида.*

Забелешка 5. Од теорема 2 следува дека основите на потсечена пирамида се слични многуаголници и дека нејзините бочни ѕидови се трапези. Јасно, во случај на правилна потсечена пирамида основите се правилни многуаголници, а бочните ѕидови се рамнокраки трапези.

Што се однесува до пресеците на потсечена пирамида со рамнина, тие се дефинираат аналогно ако и кај пирамида, па затоа истите нема детално да ги разгледуваме.



Црт. 25

Пример 13. Најди ја плоштината на дијагоналниот пресек на правилна четиристрана потсечена пирамида со должини на основите $40cm$ и $24cm$ и висина $16cm$.

Решение. Нека пирамидата е $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (црт. 25). Тогаш дијагоналниот пресек рамнокракиот трапез ACC_1A_1 со основи $\overline{AC}=40\sqrt{2}cm$ и $\overline{A_1C_1}=24\sqrt{2}cm$, а неговата висина е $\overline{OO_1}=16cm$. Според тоа, плоштината на дијагоналниот пресек е

$$P=\frac{\overline{AC}+\overline{A_1C_1}}{2}\cdot\overline{OO_1}=\frac{40\sqrt{2}+24\sqrt{2}}{2}\cdot 16cm^2=512\sqrt{2}cm^2 .$$ ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

17. Правилна четиристрана пирамида $SABCD$ со висина $8cm$ и бочен раб $10cm$ е пресечена со рамнина која минува низ темето A и е нормална на бочниот раб SC. Конструирај го пресекот и определи ја неговата плоштина.
18. Најди ја висината на правилна четиристрана пирамида со основен раб $5cm$ и бочен раб $5cm$, а потоа најди ја плоштината на паралелниот пресек кој висината ја дели во однос $1:2$.
19. На кое растојание од врвот на една пирамида треба да се конструира паралелен пресек, ако висината на пирамидата е $15cm$, плоштината на основата е $18dm^2$, а плоштината на пресекот да биде $9dm^2$.
20. Со паралелни пресеци висината на пирамидата е поделена на 5 еднакви делови. Најди ги плоштините на пресеците ако плоштината на основата на пирамидата е $400cm^2$.
21. Долната основа на потсечена пирамида е правоаголник со страни $20cm$ и $15cm$. Најди ги страните на горната основа ако нејзиниот периметар е $14cm$.
22. Најди ја висината на правилна потсечена пирамида со основни рабови $4dm$ и $10cm$, ако нејзиниот бочен раб е $0{,}2m$.
23. Правилна шестстрана потсечена пирамида со висина $1{,}5dm$ и основи $0{,}17m$ и $1cm$ пресечена е со рамнина која содржи две нејзини спротивни апотеми. Пресметај ја плоштината и периметарот на пресекот.
24. Најди ја должината на бочниот раб на правилна потсечена тристрана пирамида со основни рабови $8cm$ и $2cm$ и висина $10cm$.

5. ПЛОШТИНА НА ПОЛИЕДАР

При изработката на предмети кои имаат форма на полиедар е неопходно да се знае колку материјал ќе се потроши за изработка на полиедарот. Ова прашање е непосредно сврзано со прашањето за плоштина на полиедар.

Дефиниција 15. Збирот на плоштините на ѕидовите од кои е составена границата на полиедарот го нарекуваме *плоштина на полиедарот.*

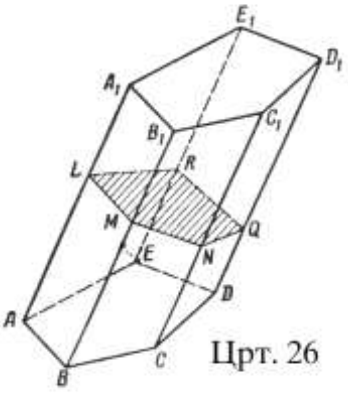
Според тоа, за да ја определиме плоштината на еден полиедар треба одделно да ги определиме плоштините на неговите ѕидови и истите да ги собереме. Во нашите разгледувања ќе се осврнеме на пресметувањето на плоштина на призма, пирамида и пресечена пирамида.

А) ПЛОШТИНА НА ПРИЗМА

Бидејќи призмата има две складни основи и бочна површина, за да ја пресметаме нејзината плоштина доволно е да ја пресметаме плоштината B на едната основа и плоштината M на бочната површина, која ја нарекуваме *бочна плоштина,* а потоа плоштината на призмата да ја пресметаме според формулата

$$P = 2B + M\,. \qquad (1)$$

Пред да преминеме на разгледување на конкретни примери ќе ја докажеме следната теорема.



Црт. 26

Теорема 4. Бочната плоштина на призма е еднаква на производот на бочниот раб и периметарот на еден нејзин нормален пресек.

Доказ. Секој бочен ѕид на призмата е паралелограм. Ако за основа на овој паралелограм ја земеме бочната страна, тогаш висината на овој паралелограм ќе биде соодветната страна на нормалниот пресек на призмата. Плоштината на секој бочен ѕид е еднаква на производот на основата s и висината, па затоа плоштината на паралелограмот AA_1B_1B е еднаква на $s\cdot\overline{LM}$ (црт. 26), плоштината на паралелограмот BB_1C_1C е еднаква на $s\cdot\overline{MN}$ итн. Бочната плоштина е еднаква на збирот на плоштините на паралелограмите, па затоа

$$M = s\cdot\overline{LM} + l\cdot\overline{MN} + l\cdot\overline{NQ} + \ldots = s\cdot(\overline{LM} + \overline{MN} + \overline{NQ} + \ldots) = sL$$

каде L е периметарот на нормалниот пресек. ♦

Забелешка 6. Бидејќи кај права призма бочниот раб и висината се еднакви од теорема 4 следува дека бочната плоштина е $M = hL$, каде h е висината и L е периметарот на основата на пирамидата.

Пример 14. Пресметај ја плоштината на правилна шестстрана призма со основен раб $a = 5cm$ и висина $h = 12cm$.

Решение. Според условот на задачата основите на призмата се правилни шестаголници, па затоа секоја од нив има плоштина $B=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{75\sqrt{3}}{2}cm^2$. Согласно со забелешка 6 бочната плоштина на оваа призма е $M=6ah=360cm^2$, па затоа плоштината на призмата е

$$P=2B+M=(2\cdot\frac{75\sqrt{3}}{2}+360)cm^2=15(5\sqrt{3}+24)cm^2 .\blacklozenge$$

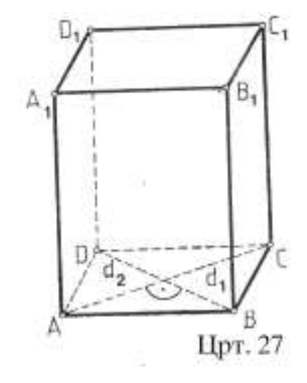
Пример 15. Пресметај ја плоштината на права четиристрана призма чија основа е ромб со дијагонали $16cm$ и $1{,}2dm$ и висина $2dm$.

Решение. Од условот на задачата имаме $d_1=16cm$, $d_2=12cm$ и $h=20cm$ (црт. 27). Од Питагоровата теорема за страната на основата наоѓаме

$$a=\sqrt{(\frac{d_1}{2})^2+(\frac{d_2}{2})^2}=\sqrt{(\frac{18}{2})^2+(\frac{12}{2})^2}=10cm .$$

Според тоа, плоштината на основата е $B=\frac{d_1d_2}{2}=96cm^2$, а бочната плоштина е $M=4ah=800cm^2$. Конечно,за плоштината на призмата наоѓаме

$$P=2B+M=(2\cdot 96+800)cm^2=992cm^2 .\ \blacklozenge$$



Црт. 27

Пример 16. Основата на една права призма е ромб со плоштина $6cm^2$, плоштините на дијагоналните пресеци се $Q_1=21cm^2$ и $Q_2=28cm^2$. Пресметај ја плоштината P на призмата.

Решение. Основниот раб да го означиме со a, а висината со h. Плоштината на призмата е $P=2B+M=d_1d_2+4ah$, каде d_1 и d_2 се дијагоналите на ромбот. Од условот на задачата имаме $d_1h=21, d_2h=28, \frac{d_1d_2}{2}=6$ (зошто?). Ако ги помножиме првите две равенки и ги поделиме со третата равенка добиваме $h^2=49$, од што следува $h=7$. Сега, со замена во првите две равенки на системот наоѓаме $d_1=3$ и $d_2=4$. Понатаму, дијагоналите на ромбот се сечат под прав агол, па од Питагоровата теорема следува $a^2=(\frac{d_1}{2})^2+(\frac{d_2}{2})^2=\frac{25}{4}$, што значи $a=\frac{5}{2}$. Конечно, со замена во формулата за плоштината на призмата наоѓаме $P=d_1d_2+4ah=82cm^2$. ♦

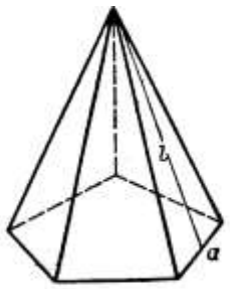
Б) ПЛОШТИНА НА ПИРАМИДА

Бидејќи пирамидата има една основа и бочна површина, за да ја пресметаме нејзината плоштина доволно е да ја пресметаме плоштината B на основата и плоштината M на бочната површина, која ја нарекуваме *бочна плоштина,* а потоа плоштината на пирамидата да ја пресметаме според формулата

$$P=B+M . \qquad (2)$$

Теорема 5. Бочната плоштина на правилна пирамида е еднаква на половина од производот на периметарот на основата и апотемата.

Доказ. Со a да го означиме основниот раб на пирамидата, а со l нејзината апотема. Бочните ѕидови на пирамидата се складни рамнокраки триаголници со основа a и висина l, па затоа плоштината на секој од нив е $\frac{al}{2}$. Бидејќи бочната плоштина е збир на n такви триаголници, а периметарот на основата е $L = na$ за бочната плоштина на пирамидата добиваме $M = \frac{al}{2} \cdot n = \frac{(na)l}{2} = \frac{Ll}{2}$, што и требаше да се докаже. ♦



Црт. 28

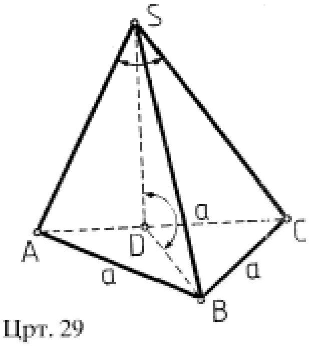
Пример 16. Колу ќерамиди се потребни за покривање на една куќа чиј покрив има форма на правилна читиристрана пирамида со основен раб $8m$ и висина $3m$, ако за покривање на $1m^2$ се потребни 20 ќерамиди.

Решение. Со a да го означиме основниот раб, а со h висината на пирамидата. Треба да ја определиме бочната плоштината на дадената пирамида (направи цртеж). Притоа за апотемата имаме $l = \sqrt{h^2 + (\frac{a}{2})^2} = 5m$, па затоа $M = 4\frac{al}{2} = 80m^2$.

Бидејќи за $1m^2$ се потребни 20 ќерамиди, а треба да покриеме $80m^2$, за покривање на куќата ни се потребни $20 \cdot 80 = 1600$ ќерамиди. ♦

Пример 17. Основата на една пирамида е рамностран триаголник со страна a, а еден од бочните ѕидови е рамнокрак правоаголен триаголник чија рамнина е нормална на рамнината на основата. Пресметај ја бочната плоштина.

Решение. Нека е дадена пирамидата $SABC$ (црт. 26) и нека $\overline{SA} = \overline{SC} = x$. Од триаголникот ASC имаме $2x^2 = a^2$, па затоа $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ и $\overline{SD} = \frac{a}{2}$. Од триаголникот ABC имаме $\overline{BD} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, како висина на рамностран триаголник. Од условот на задачата имаме $SD \perp BD$, т.е. триаголник BSD е правоаголен, што значи $\overline{SB} = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{a\sqrt{3}}{3})^2} = a$.



Црт. 29

Триаголниците ABS и SBC се складни рамнокраки триаголници со основа $\overline{SA} = \overline{SC} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ и крак $\overline{AB} = \overline{BS} = \overline{BC} = a$, па затоа висината на овие триаголници е

$$h = \sqrt{a^2 - (\frac{a\sqrt{2}}{4})^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}.$$

Конечно, плоштината на обвивката е

$$M = \frac{x^2}{2} + 2\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{14}}{4}}{2} = \frac{2a^2}{8} + \frac{2a^2\sqrt{7}}{8} = \frac{a^2}{4}(1 + \sqrt{7}).$$ ♦

В) ПЛОШТИНА НА ПОТСЕЧЕНА ПИРАМИДА

Бидејќи потсечената пирамидата има две основи и бочна површина, за да ја пресметаме нејзината плоштина доволно е да ги пресметаме плоштините B и B_1 на основите и плоштината M на бочната површина, која ја нарекуваме *бочна плоштина,* а потоа плоштината на потсечената пирамида да ја пресметаме според формулата

$$P = B + B_1 + M\,. \tag{3}$$

Теорема 6. Бочната плоштина на правилна потсечена пирамида е еднаква на половина од производот на апотемата и збирот на периметрите на основите.

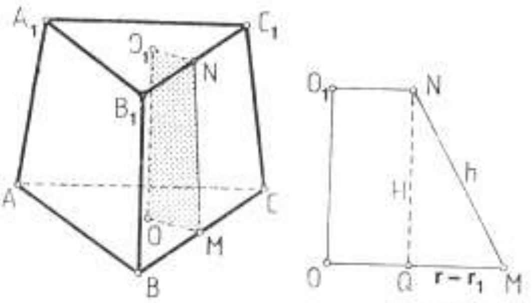
Доказ. Со a и b да ги означиме основните рабови на потсечената пирамида, а со l нејзината апотема. Бочните ѕидови на потсечената пирамидата се складни рамнокраки трапези со основи a и b и висина l, па затоа плоштината на секој од нив е $\frac{a+b}{2}l$. Бидејќи бочната плоштина е збир на n такви трапези, а збирот на периметрите на основите е $L + L_1 = na + nb$ за бочната плоштина на пирамидата добиваме

$$M = \frac{a+b}{2} l \cdot n = \frac{(na+nb)l}{2} = \frac{L+L_1}{2} l\,,$$

што и требаше да се докаже. ♦

Пример 18. Да се пресмета плоштината на правилна тристрана потсечена пирамида со висина $h = 5cm$ и радиуси на опишаните кружници околу основите $R = 12cm$ и $R_1 = 6cm$.

Решение. Со a и a_1 да ги означиме основите на потсечената пирамида (црт. 30). Користејќи ги формулите за радиусите на опишаните кружници околу рамностраните триаголници $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ и $R_1 = \frac{a_1\sqrt{3}}{3}$ добиваме $a = R\sqrt{3}$ и $a_1 = R_1\sqrt{3}$, т.е. $a = 12\sqrt{3}cm$ и $a_1 = 6\sqrt{3}cm$. Понатаму, кај рамностран триаголник радиусот на впишаната кружница е половина од радиусот на опишаната кружница (зошто?, па затоа $r = 6cm$ и $r_1 = 3cm$.



Црт. 30

Од правоаголниот ΔMNQ за апотемата на потсечената пирамида добиваме

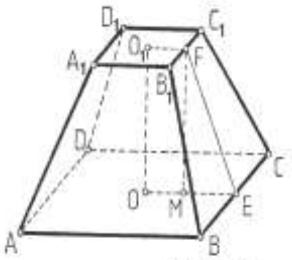
$$l = \sqrt{h^2 + (r - r_1)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2}\,cm = 5cm\,.$$

Конечно,

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 108\sqrt{3}cm^2\,,\; B_1 = \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}cm^2 \text{ и } M = \frac{3a+3a_1}{2} l = 135\sqrt{3}cm^2\,,$$

и ако замениме во (3) добиваме $P = B + B_1 + M = 270\sqrt{3}cm^2$. ♦

Пример 19. Основните рабови на правилна четиристрана потсечена пирамида се $40cm$ и $10cm$. Пресметај ја висината на потсечената пирамида ако нејзината плоштина е $3400cm^2$.



Црт. 31

Решение. Плоштината на правилна четиристрана потсечена пирамида (црт. 31) со основни рабови a и a_1 и апотема l ја пресметуваме според формулата $P=a^2+a_1^2+4\frac{a+a_1}{2}l$.

Од условот на задачата имаме $3400=40^2+10^2+4\frac{40+10}{2}l$ па затоа $l=17cm$. Сега, од ΔEFM наоѓаме

$$h=\sqrt{l^2-(\frac{a-a_1}{2})^2}=8cm.$$ ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

25. Пресметај ја плоштината на коцка ако нејзината дијагонала е $18cm$.
26. Во една лимарска работилница со 5 вработени треба да се направат 2000 канти за сирење во форма на правилна четиристрана призма со основен раб $25cm$ и $0{,}5m$. За колку денови ќе се направат кантите, ако секој вработен во текот на работното време може дневно да вгради по $50m^2$ лим?
27. Пресметај ја висината на права призма чија основа е ромб со дијагонали $6cm$ и $0{,}8dm$, ако нејзината плоштина е $328cm^2$.
28. Пресметај ја плоштината на права призма чија основа е рамнокрак трапез со основи $21cm$ и $11cm$ и крак $13cm$, ако плоштината на дијагоналниот пресек е $180cm^2$.
29. Плоштините на бочните ѕидови на права тристрана призма се $165cm^2, 99cm^2$ и $132cm^2$, а плоштината на основата е $54cm^2$. Пресметај го бочниот раб на призмата.
    Упатство. Изрази ги основните рабови со помош на плоштините на бочните ѕидови и висината на призмата, а потоа искористија Хероновата формула за плоштина на триаголник.
30. Пресметај ја плоштината на правилна четиристрана пирамида со основен раб $16cm$ и висина $6cm$.
31. Плоштината на основата на правилна четиристрана пирамида е $2m^2$. Пресметај ја нејзината плоштина ако висината е $2m$.
32. Пресметај ја плоштината на правилна тристрана пирамида со основен раб $6cm$ и бочен раб $5cm$.
33. Пресметај ја плоштината на тристрана пирамида со еднакви бочни рабови, висина $6cm$, периметар на основата $120cm$ и ако основните рабови се однесуваат како $5:12:13$.
34. Во еднакворабна четиристрана пирамида со раб $6cm$ е впишана коцка така што еден нејзин ѕид лежи на основата на пирамидата, а четирите други темиња на коцката лежат на бочните рабови на пирамидата. Пресметај ја плоштината на коцката.
35. Пресметај ја плоштината на правилна потсечена четиристрана пирамида со висина $12cm$ и основни рабови $18cm$ и $8cm$.
36. Основните рабови на правилна потсечена четиристрана пирамида се $12cm$ и $6cm$, а бочниот раб е $10cm$. Пресметај ја плоштината на потсечената пирамида.
37. Плоштината на правилна потсечена четиристрана пирамида е $704cm^2$, а плоштините на нејзините основи се $324cm^2$ и $100cm^2$. Пресметај ја висината на потсечената пирамида и висината на дополнителната пирамида.
38. Пресметај ја плоштината на правилна пресечена осумстрана пирамида со основни рабови $6cm$ и $4cm$ и висина $10cm$.
39. Основните рабови на правилна потсечена тристрана пирамида $18cm$ и $6cm$, а бочниот раб е $10cm$. Пресметај ја плоштината на потсечената пирамида.

6. ПОИМ ЗА ВОЛУМЕН. ВОЛУМЕН НА ПРАВА ПРИЗМА

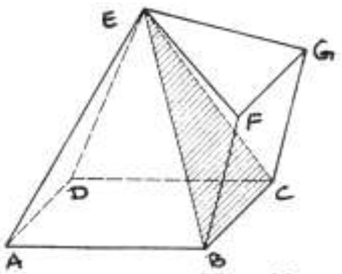
А) ПОИМ ЗА ВОЛУМЕН

Поимот волумен на геометриско тело се воведува аналогно на поимот плоштина на рамнинска геометриска фигура, на следниот начин. Да се востанови систем на мерење на внатрешната област на полиедрите значи на секој полиедар да му се придружи позитивен реален број, наречен негов *волумен*, при што се исполнети следните својства:

а) Складни полиедри имаат еднакви волумени.

б) Ако полиедарот е составен од два или повеќе полиедри што не се преклопуваат, тогаш неговиот волумен е збир од волумените на полиедрите кои се негови делови (на црт. 32 волуменот на полиедарот $ABCDEFG$ е еднаков на збирот на волумените на полиедрите $ABCDE$ и $BCGFE$).

в) Волуменот на коцка чиј раб е единична отсечка е еднаков на 1.



Црт. 32

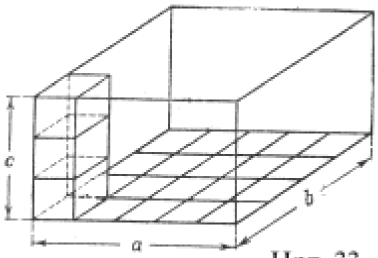
Својството в) ни овозможува да се утврди *единица мерка за волумен*. За ваква единица може да се земе која било коцка, но заради усогласување на мерните единици со меѓународниот SI систем е прифатено единица мерка за волумен да биде коцка со страна $1m$, за кој велиме дека има волумен од еден метар кубен и истата ја означуваме со $1m^3$. Во практиката како единици мерки за волумен се среќаваат и $1mm^3, 1cm^3, 1dm^3$ итн.

Б) ВОЛУМЕН НА ПРАВА ПРИЗМА

Теорема 7. Волуменот V на правоаголен паралелопипед со рабови a,b и c е еднаков на abc, т.е. $V = abc$.

Доказ. Ќе разгледаме три случаи.

а) Нека должините a,b и c на рабовите на паралелопипедот се природни броеви. Тогаш должините на страните на основата на паралелопипедот се природни броеви a и b, па затоа таа може да се подели на ab единечни квадрати. Над секој од овие ab квадрати може да се постави единечна коцка, што значи во еден слој можат да се постават ab коцки. Но, висината c на паралелопипедот е цел број, па затоа такви слоеви од единични коцки можат да се постават abc. Сега од својствата а)-в) на волуменот следува дека $V = abc$.

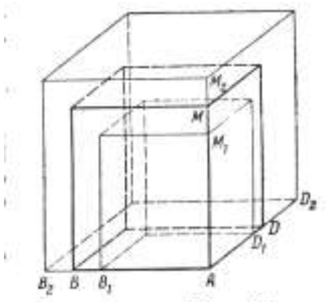


Црт. 33

б) Нека должините a,b и c на рабовите на правоаголниот паралелопипед се рационални броеви. Ги сведуваме дропките a,b и c под заеднички именител и добиваме $a = \frac{p}{n}, b = \frac{q}{n}$ и $c = \frac{r}{n}$.

Ако го поделиме секој раб на единичната коцка со n рамнини кои се паралелни на ѕидот кој е нормален на работ, тогаш добиваме n^3 складни коцки со раб $\frac{1}{n}$. Ако волуменот на една од овие коцки го означиме со V_1, тогаш од својствата а) и б) на волуменот добиваме $n^3V_1=1$, што значи $V_1=\frac{1}{n^3}$. Јасно, во квадарот со страни $a=\frac{p}{n}, b=\frac{q}{n}$ и $c=\frac{r}{n}$ на станата a можат да се поставаат p коцки со раб $\frac{1}{n}$, на страната b можат да се поставаат q коцки со раб $\frac{1}{n}$ и на станата c можат да се поставаат r коцки со раб $\frac{1}{n}$. Според тоа, волуменот на квадарот е $V=pqrV_1=pqr\cdot\frac{1}{n^3}=\frac{p}{n}\cdot\frac{q}{n}\cdot\frac{r}{n}=abc$.

в) (за оние што сакаат да знаат повеќе). Нека должините a,b и c на рабовите на квадарот, т.е. должината на барем еден од нив е ирационален број. Како што знаеме, во овој случај можат да се определат приближни рационални вредности на броевите a,b и c со произволна точност.



Црт.34

Нека n е произволен природен број. Од својствата на реалните броеви следува дека постојат природни броеви p,q и r такви, што $\frac{p}{10^n}\le a<\frac{p+1}{10^n}$, $\frac{q}{10^n}\le b<\frac{q+1}{10^n}$ и $\frac{r}{10^n}\le c<\frac{r+1}{10^n}$. На работ AB да нанесеме отсечки AB_1 и AB_2 со должини $\frac{p}{10^n}$ и $\frac{p+1}{10^n}$ соодветно, на работ AM да нанесеме отсечки AM_1 и AM_2 со должини $\frac{q}{10^n}$ и $\frac{q+1}{10^n}$ соодветно и на работ AD да нанесеме отсечки AD_1 и AD_2 со должини $\frac{r}{10^n}$ и $\frac{r+1}{10^n}$ соодветно (црт. 34). Од доказот на делот под б) следува дека

$$V_1=\frac{p}{10^n}\cdot\frac{q}{10^n}\cdot\frac{r}{10^n} \text{ и } V_2=\frac{p+1}{10^n}\cdot\frac{q+1}{10^n}\cdot\frac{r+1}{10^n},$$

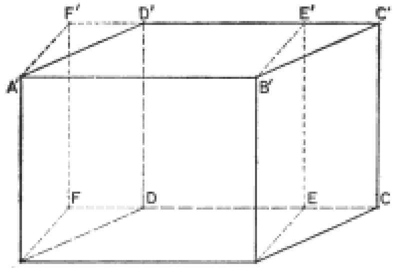
каде V_1 е волуменот на квадарот со рабови AB_1, AM_1 и AD_1, а V_2 е волуменот на квадарот со рабови AB_2, AM_2 и AD_2.

Ако со V го означиме волуменот на квадарот со рабови a,b и c, тогаш од својството б) на волуменот следува дека $V_1<V<V_2$. Бидејќи со зголемувањето на бројот n броевите $\frac{p}{10^n}$ и $\frac{p+1}{10^n}$ се приближуваат до бројот a, броевите $\frac{q}{10^n}$ и $\frac{q+1}{10^n}$ се приближуваат до бројот b и броевите $\frac{r}{10^n}$ и $\frac{r+1}{10^n}$ се приближуваат до бројот c, добиваме дека производите $\frac{p}{10^n}\cdot\frac{q}{10^n}\cdot\frac{r}{10^n}$ и $\frac{p+1}{10^n}\cdot\frac{q+1}{10^n}\cdot\frac{r+1}{10^n}$ се приближуваат до производот abc. Според тоа, волумените V_1 и V_2 се приближуваат кон бројот abc и како $V_1<V<V_2$ заклучуваме дека $V=abc$. ♦

Забелешка 7. а) Бидејќи кај коцката сите рабови се со еднаква должина заклучуваме дека волуменот на коцката со раб a се пресметува со формулата $V=a^3$.

б) Ако правоаголникот со рабови a и b го земеме за основа на квадарот со рабови a,b и c, а работ c го земеме за негова висина, тогаш плоштината на основата е $B=ab$, па за волуменот на квадарот имаме

$$V=abc=Bh. \qquad (1)$$



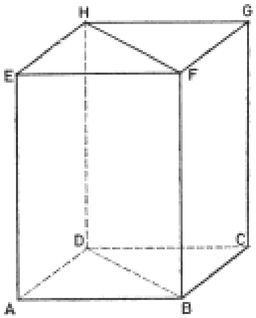
Црт.35

а) Нека $ABCDA'B'C'D'$ е прав палелопипед, кој не е квадар и AA' е негова висина, т.е. $\overline{AA'} = h$ (црт. 35). Да повлечеме рамнини кои ги содржата рабовите AA' и BB' и кои се нормални на рамнината на ѕидот $CDD'C'$ и кои оваа рамнина ја сечат во EE' и FF'. Призмите $BCEB'C'E'$ и $ADFA'D'F'$ се складни, па од својството а) на волуменот имаме

$$V_{BCEBC'E'} = V_{ADFAD'F'}.$$

Ако сега го искористиме својството б) на волуменот добиваме и фактот дека плоштината на основата на паралелопипедот $ABCDA'B'C'D'$ е $B = \overline{AB} \cdot \overline{BE}$, тогаш од теорема 7 за неговиот волумен добиваме

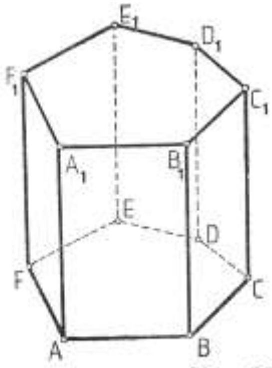
$$V = V_{ABEDAB'E'D'} + V_{BCEBC'E'} = V_{ABEDAB'E'D'} + V_{ADFAD'F'} = V_{ABEFAB'E'F'} = \overline{AB} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{AA'} = Bh.$$



Црт. 36

б) Нека е дадена правата тристрана призма $ABDEFH$ (црт. 36). Призмата ја надополнуваме до прав паралелопипед $ABCDEFGH$ така, што триаголникот ABD го надополнуваме до паралелограмот $ABCD$ итн. Јасно призмата $ABDEFH$ и паралелопипедот $ABCDEFGH$ имаат иста висина h. Со V_1 и B_1 да ги означиме волуменот и плоштината на основата на паралелопипедот, а со V и B волуменот и плоштината на призмата $ABDEFH$.

Призмите $ABDEFH$ и $BCDFGH$ се складни и ако се искористи својството б) на волуменот добиваме $V_1 = 2V$ и како $V_1 = B_1 h$ и $B_1 = 2B$ имаме $V = \frac{1}{2} V_1 = \frac{1}{2} B_1 h = Bh$.



Црт. 37

в) Нека е дадена произволна права призма со плоштина на основата B и висина h, на пример призмата $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (црт. 37). Од својството б) на волуменот имаме

$$\begin{aligned} V &= V_{ABCA_1B_1C_1} + V_{ACDA_1C_1D_1} + V_{ADEA_1D_1E_1} + V_{AEFA_1E_1F_1} \\ &= P_{ABC} \cdot h + P_{ACD} \cdot h + P_{ADE} \cdot h + P_{AEF} \cdot h \\ &= (P_{ABC} + P_{ACD} + P_{ADE} + P_{AEF}) \cdot h = P_{ABCDEF} \cdot h = Bh. \end{aligned}$$

Со тоа ја докажавме точноста на следната теорема.

Теорема 8. Ако со B ја означиме плоштината на основата и со h висината на права призма, тогаш нејзиниот волумен е даден со (1). ♦

Пример 20. Прав насип за пруга со должина $300m$ има нормален пресек во форма на трапез со основи $10m$ и $6m$ и висина $2,4m$. Колку кубни метри земја се потребни за оформување на насипот?

Решение. Очигледно насипот е призма со висина $300m$ и основа рамнокрак трапез $10m$ и $6m$ и висина $2,4m$.

Неговиот волумен е $V=Bh$, каде $B=\frac{10+6}{2}\cdot 2{,}4m^2=19{,}2m^2$ и $h=300m$. Според тоа, за изградба на насипот се потребни $V=Bh=19{,}2\cdot 300m^3=5760m^3$ земја. ♦

Пример 21. Основата на права призма е ромб со дијагонали $18cm$ и $24cm$. Пресметај го волуменот на призмата ако дијагоналата на бочниот ѕид е $17cm$.

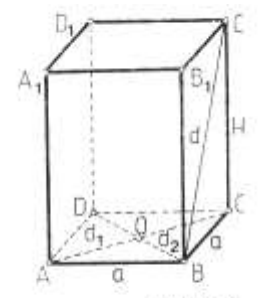
Решение. Плоштината на основата е $B=\frac{d_1d_2}{2}=216cm^2$. Од ΔBCO за страната a на ромбот добиваме

$$a=\sqrt{(\frac{d_1}{2})^2+(\frac{d_2}{2})^2}=15cm,$$

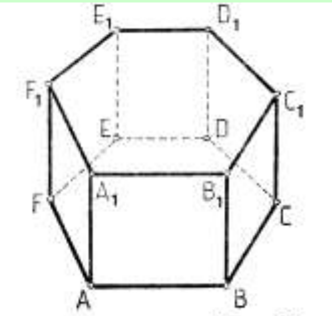
а од ΔBCC_1 за висината на призмата имаме

$$h=\sqrt{d^2-a^2}=8cm.$$

Конечно, волуменот на призмата е $V=Bh=1728cm^3$. ♦



Црт. 38



Црт. 39

Пример 22. Фабрика за стакло добивал нарачка да изработи стаклени чаши кои треба да собираат течност од во форма на правилна шестстрана призма. Пресметај ја должината на основниот раб на призмата ако чашата треба да биде висока $20cm$ и да има волумен $300cm^3$.

Решение. Плоштината на основата на правилна шестстрана призма со основен раб е $B=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, па затоа нејзиниот волумен е $V=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}h$. Од условот на задачата имаме $h=20cm$ и $V=300cm^3$, па затоа $300=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\cdot 20$ т.е. $a^2=\frac{10}{\sqrt{3}}$, што значи дека должината на основниот раб ќе биде $a=\sqrt{\frac{10}{\sqrt{3}}}$. ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

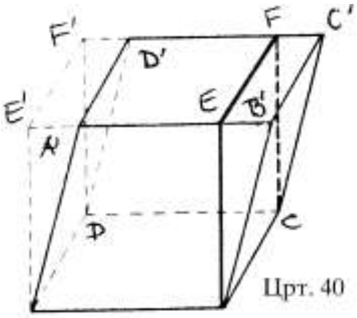
40. Колку ќе се зголеми волуменот на коцката, ако нејзиниот раб се зголеми:
    а) двапати, б) петпати, в) $n-$пати.
41. Димензиите на еден квадар се $3cm, 4cm$ и $2cm$. За колку ќе се зголеми неговиот волумен, ако при зголемување на секој негов раб за иста должина, неговата плоштина се зголемила за $96cm^2$.
42. Пресметај го волуменот на квадар, со дијагонала $14cm$, ако неговите страни се однесуваат како $2:3:6$.
43. Паралелограм со страни $10cm$ и $21cm$ и дијагонала $17cm$ е основа на прав паралелопипед. Пресметај го неговиот волумен, ако неговата плоштина е $770cm^2$.
44. Пресметај го волуменот на правилна четиристрана призма, ако нејзината дијагонала е $7cm$, а дијагоналата на бочниот ѕид е $5cm$.

45. Основата на права призма е ромб со дијагонали $6cm$ и $8cm$. Пресметај ја плоштината на призмата, ако нејзиниот волумен е $264cm^3$.

46. Основните рабови на права тристрана призма се еднакви на $4cm, 5cm$ и $7cm$, а бочниот раб е еднаков на најголемата висина на основата. Пресметај го волуменот на призмата.

47. Висината на права тристрана призма е $5cm$, а нејзиниот волумен е $480cm^3$. Пресметај ги должините на основните рабови на призмата, ако плоштините на нејзините бочни ѕидови се однесуваат како $4:13:15$.

7. ВОЛУМЕН НА КОСА ПРИЗМА



Црт. 40

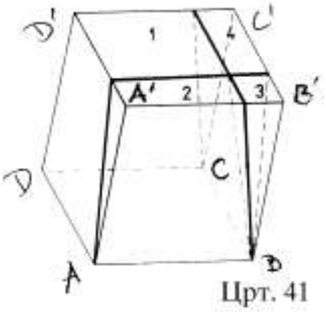
а) Да ја разгледаме косата четиристрана призма $ABCDA'B'C'D'$ која е навалена десно преку работ BC и таква што правата која минува низ темето B и е нормална на основата $ABCD$ ја сече отсечката $A'B'$ во точка E (црт. 40). Нека B е плоштината на основата $ABCD$ и h е висината на призмата.

Во рабовите BC и AD повлекуваме рамнини кои се нормални на рамнината на основата $ABCD$ и нека EF и $E'F'$ се пресечните прави на оваа рамнина со рамнината на основата $A'B'C'D'$. Од својствата а) и б) на волуменот и складноста на полиедрите $EFC'F'BC$ и $E'F'D'A'AD$ за волуменот на призмата $ABCDA'B'C'D'$ добиваме

$$V = V_{ABCDA'EFD'} + V_{EFC'B'BC} = V_{ABCDA'EFD'} + V_{E'F'D'A'AD} = V_{ABCDEFF'E'} = Bh,$$

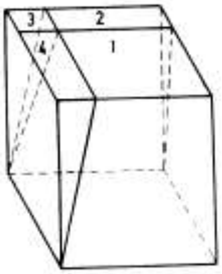
т.е. точна е формулата

$$V = Bh. \qquad (1)$$



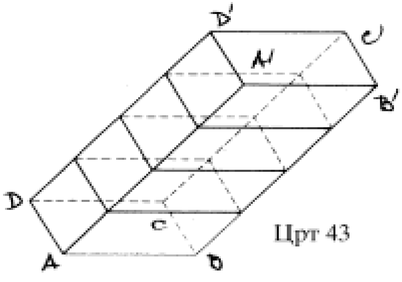
Црт. 41

б) Сега да ја разгледаме косата четиристрана призма $ABCDA'B'C'D'$ која е навалена десно преку работ BC и напред преку работ AB, но притоа правата која минува низ темето A и е нормална на основата $ABCD$ ја сече внатрешноста на основата $ABCD$ на призмата (црт. 41). Нека B е плоштината на основата $ABCD$ и h е висината на призмата.



Црт. 42

Низ рабовите AB и BC повлекуваме рамнини нормални на основата $ABCD$. Овие рамнини ја делат призмата на четири полиедри 1, 2, 3 и 4 со волумени V_1, V_2, V_3 и V_4, соодветно. Очигледно, ако извршиме префрлање на деловите со волумени V_2, V_3 и V_4 како што е прикажано на црт. 37 добиваме права призма чиј волумен е еднаков на волуменот на призмата $ABCDA'B'C'D'$. Но, призмата на црт. 42 е права со плоштина на основата B и висина h, па затоа нејзиниот волумен може да се пресмета со формулата (1). Конечно, волуменот на призмата $ABCDA'B'C'D'$ може да се пресмета со формулата (1).



Црт 43

в) Сега да ја разгледаме косата четиристрана призма $ABCDA'B'C'D'$ која е навалена десно преку работ BC и напред преку работ AB, но притоа правата која минува низ темето A и е нормална на основата $ABCD$ не ја сече внатрешноста на призмата (црт. 43). Нека B е плоштината на основата $ABCD$ и h е висината на призмата.

Сега на растојанија $h_1, h_2, ..., h_k$ од основата $ABCD$ последователно повлекуваме рамнини паралелни на рамнината на основата $ABCD$, со што призмата ја делиме на k призми со плоштина B на основите на овие призми и висини $h_1, h_2, ..., h_k$, но притоа водејќи сметка правите нормални на основата $ABCD$ повлечени од темињата кои се наоѓаат на работ BB' да ги сечат спротивните основи на новите призми во точки во внатрешноста. Од б) следува дека волумените на овие призми се $Bh_1, Bh_2, ..., Bh_k$, па затоа волуменот на призмата $ABCDA'B'C'D'$ е

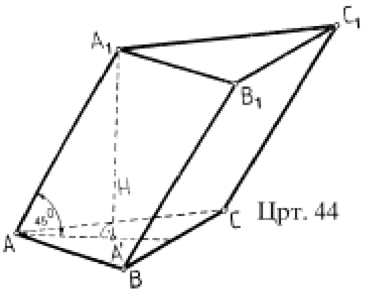
$$V = Bh_1 + Bh_2 + ... + Bh_k = B(h_1 + h_2 + ... + h_k) = Bh,$$

т.е. тој се пресметува според формулата (1).

г) Доказот за точноста на формулата (1) во случај на коса тристрана и произволна коса призма е аналоген на доказите на случаите б) и в) од теорема 8. Обиди се самостојно да ги реализираш доказите во овие два случаи.

Со тоа ја докажавме следната теорема.

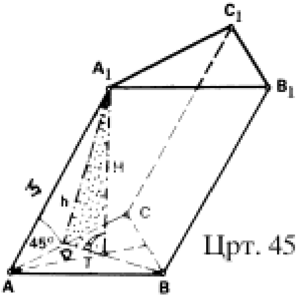
Теорема 9. Ако со B ја означиме плоштината на основата и со h висината на произволна призма, тогаш нејзиниот волумен е даден со (1). ♦



Црт. 44

Пример 23. Коса тристрана призма има основни рабови $5cm, 6cm$ и $9cm$ и бочен раб $10cm$. Пресметај го волуменот на призмата, ако бочниот раб со рамнината зафаќа агол од 45°.

Решение. Според Хероновата формула за плоштината на основата добиваме $B=\sqrt{10\cdot5\cdot4\cdot1}=10\sqrt{2}cm^2$. Од $\Delta AA'A_1$ следува дека $h=l\,\mathrm{tg}45^\circ=10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}cm=5\sqrt{2}cm$. Конечно, за волуменот на призмата имаме $V=Bh=10\sqrt{2}\cdot5\sqrt{2}cm^3=100cm^3$. ♦



Црт. 45

Пример 24. Основата на коса тристрана призма е рамностран ΔABC со страна a. Висината повлечена во темето A_1 ја сече рамнината на долната основа во тежиштето на ΔABC, а работ AA_1 зафаќа со работ AC агол од 45°. Пресметај го волуменот на призмата.

Решение. Од правоаголните триаголници ADT и DA_1T имаме $h^2=R^2-r^2$ и $H^2=h^2-r^2$, т.е. $H^2=R^2-2r^2$ каде R и r се радиусите на опишаната и впишаната кружница во ΔABC. Од $R=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $r=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}$ добиваме

$$H^2=(\frac{a\sqrt{3}}{3})^2-2(\frac{a\sqrt{3}}{6})^2=\frac{a^2}{6} \text{ т.е. } H=\frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Основата на призмата е рамнострана триаголник со страна a, па затоа $B=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и за волуменот добиваме $V=BH=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a}{\sqrt{6}}=\frac{a^2\sqrt{2}}{8}$. ♦

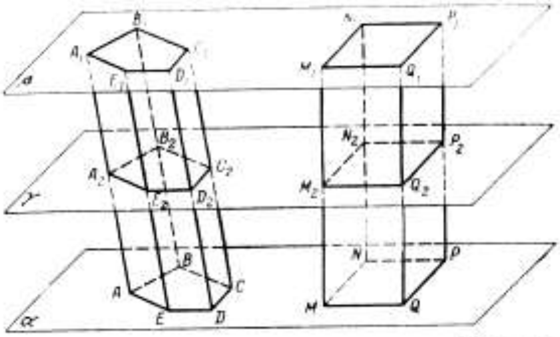
ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

48. Основата на една призма е рамнокрак триаголник со основа $2cm$ и крак $3cm$; еден бочен раб е $4cm$ и зафаќа со рамнината на основата агол од 45°. Одреди го работ на коцката чиј волумен е еднаков на волуменот на призмата.
49. Ѕидовите на еден паралелопипед се складни ромбови со страна a и остар агол 60°. Пресметај ги плоштината и волуменот на паралелопипедот.
50. Основата на паралелопипедот $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е ромб со страна a и остар агол 60°, а бочниот раб AA_1 исто така има должина a и со основните рабови AB и AD образува агол од 45°. Пресметај ги плоштината и волуменот на паралелопипедот.
51. Пресметај го волуменот на коса тристрана призма, со основни рабови $8cm,7cm$ и $5cm$ и бочен раб од $4cm$, кој со рамнината на основата зафаќа агол од 60°.

8. ВОЛУМЕН НА ПИРАМИДА

А) ПРИНЦИП НА КАВАЛИЕРИ

Како што е познато, сите области на животот во западноевропските земји во XVI и XVII век се карактеризираат со значаен цивилизациски напредок. Природно, развојот на техниката бил обусловен од развојот на науката и обратно, што се покажало особено значајно за развојот на математиката. Од овој период ги бележиме работите на Галилеј (1564-1642), Декарт (1596-1650) и други бројни математичари. Во случајот, еден од учениците на Галилеј, Кавалиери, се занимавал со прашањето за наоѓање на волумен на тело, "со сумирање на рамнински пресеци", кои се добиваат ако телото го сечеме со низа паралелни рамнини. Така, тој го искажал следниот принцип (теорема), кој овде ќе го прифатиме без доказ.



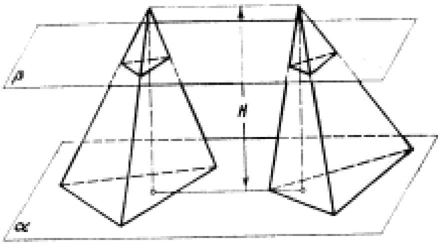
Црт. 46

Теорема 10 (Кавалиери). Ако две тела можат да се постават во таква положба што пресеците на обете тела со која било рамнина, паралелна на една дадена рамнина (црт. 46), да се фигури со еднакви плоштини, тогаш волумените на тие тела се еднакви. ♦

Користејќи го принципот на Кавалиери ќе го пресметаме волуменот на пирамида. Прво ќе ја докажеме следната теорема.

Теорема 11. Ако плоштините на основите и висините на две пирамидве се еднакви, тогаш тие имаат еднакви волумени.

Доказ. Да ги пресечеме пирамидите со рамнина β, паралелна на рамнината α (црт. 47). Бидејќи пирамидите имаат основи со еднакви плоштини, од теорема 3, т.е. од забелешка 4 следува дека плоштините на добиените пресеци се еднакви. Конечно, од принципот на Кавалиери (теорема 10) следува дека волумените на призмите се еднакви. ♦



Црт.47

Б) ВОЛУМЕН НА ПИРАМИДА

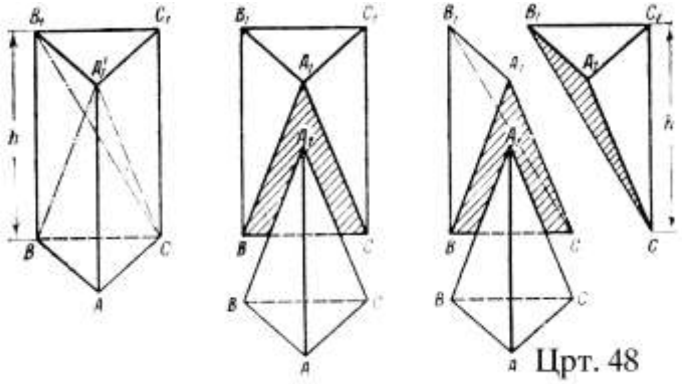
Теорема 12. За волуменот V на пирамида точна е формулата

$$V=\frac{Bh}{3}, \qquad (1)$$

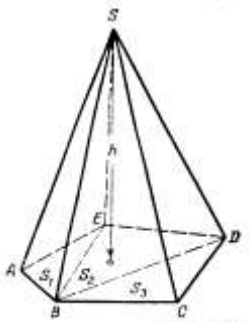
каде B е плоштината на основата на пирамидата и h е нејзината висина.

Доказ. Ќе разгледаме два случаи.

а) Нека е дадена пирамидата $ABCA_1$, каде B е плоштината на основата на пирамидата и h е нејзината висина (црт. 48). Ја дополнуваме пирамидата до призма $ABCA_1B_1C_1$ при што основата и висината на призмата се еднакви на основата и висината на пирамидата, соодветно. Сега од призмата да ја одделиме дадената пирамида. Останатиот дел, т.е. четиристраната пирамида $BCC_1B_1A_1$ ја сечеме со рамнината која минува низ точките A_1, B_1 и C. Со тоа добивме три пирамиди: $ABCA_1$, BCB_1A_1 и $B_1C_1CA_1$.



Црт. 48



Црт. 49

Основите на пирамидите BCB_1A_1 и $B_1C_1CA_1$ се складните триаголници BCB_1 и B_1C_1C (зошто?) и тие имаат еднакви висини повлечени од темето A_1, па од теорема 11 следува дека $V_{BCB_1A_1}=V_{B_1C_1CA_1}=V$. Исто така, основите на пирамидите $ABCA_1$ и $B_1C_1CA_1$ се складните триаголници ABC и $B_1C_1A_1$ и тие имаат еднакви висини повлечени од темињата A_1 и C, соодветно. Од теорема 11 следува дека $V_{ABCA_1}=V_{B_1C_1CA_1}=V$. Сега од својството б) на волуменот следува дека за волуменот V_1 на призмата имаме $V_1=3V$ и како $V_1=Bh$ добиваме $3V=Bh$, т.е. $V=\frac{Bh}{3}$.

б) Нека во многуаголната пирамида $SABCDE$ висината е еднаква на h и плоштината на основата е еднаква на B (црт. 49). Ја разбиваме дадената пирамида со рамнини, кои минуваат низ темето S и дијагоналите на основата. Со тоа, основата ја разбиваме на триаголници со плоштини S_1, S_2 и S_3 чиј збир е еднаков на плоштината B на основата на дадената пирамида, т.е. $S_1+S_2+S_3=B$.

Ако со V го означиме волуменот на почетната пирамида, а со V_1, V_2 и V_3 ги означиме волумените на добиените тристрани пирамиди, тогаш од својството б) на волуменот следува $V=V_1+V_2+V_3$ и како $V_1=\frac{S_1h}{3}, V_2=\frac{S_2h}{3}$ и $V_3=\frac{S_3h}{3}$ од претходно изнесеното добиваме

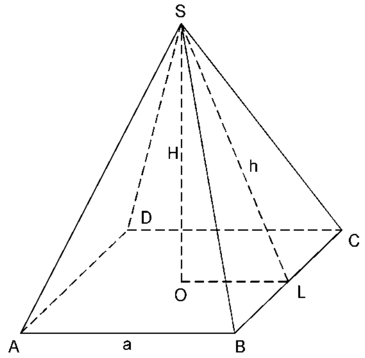
$$V=\frac{S_1h}{3}+\frac{S_2h}{3}+\frac{S_3h}{3}=\frac{(S_1+S_2+S_3)h}{3}=\frac{Bh}{3},$$

што и требаше да се докаже. ♦

Пример 25. Да се пресмета волуменот на правилна четристрана пирамида со основен раб $14cm$ и апотема $25cm$.

Решение. За висината на пирамидата имаме $H=\sqrt{h^2-(\frac{a}{2})^2}=\sqrt{25^2-7^2}=24cm$, од каде што следува дека волуменот

$$V=\frac{1}{3}BH=\frac{1}{3}a^2H=\frac{1}{3}14^2\cdot 24cm^3=1568cm^3.$$



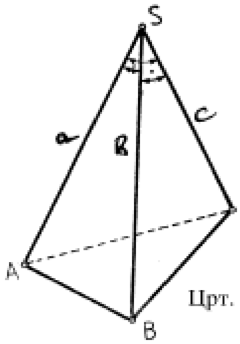
Пример 26. Една правилна четиристрана пирамида има плоштина $P=800cm^2$ и бочна плоштина $M=544cm^2$. Да се пресмета волуменот на пирамидата.

Решение. Основата на пирамидата е квадрат. Нека страната на квадратот е a, а висината на бочната страна е h. Имаме $P=\frac{4ah}{2}+a^2=800$ и $M=\frac{4ah}{2}=544$ од што следува $a^2=800-544=256$, па затоа $a=16cm,\ h=17cm$. Понатаму, од правоаголниот триаголник $\angle SOL$ имаме

$$H^2=h^2-OL^2=17^2-(\frac{16}{2})^2=225 \text{ т.е. } H=15cm.$$

Конечно, за волуменот на пирамидата наоѓаме

$$V=\frac{a^2H}{2}=\frac{256\cdot 15}{3}=1280cm^3.\ ♦$$



Црт. 51

Пример 27. Пресметај го волуменот на тристрана пирамида чии бочни рабови се заемно нормални и имаат должини $12cm, 7cm$ и $13cm$.

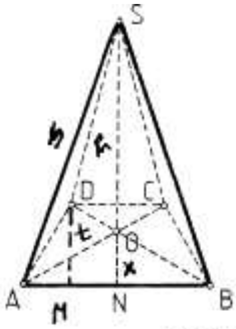
Решение. Од дефиницијата на пирамида следува дека секој ѕид на тристраната пирамида може да се земе за нејзина основа (зошто?).

Во случајот, ако за основа на пирамидатаземеме еден од бочните ѕидови, тогаш основата на пирамидата ќе биде правоаголен триаголник чии катети се два бочни рабови, а нејзината висина висината на пирамидата ќе биде третиот бочен раб. Ако со a,b,c ги означиме бочните рабови на пирамидата (црт. 51), тогаш за волуменот на пирамидата имаме $V=\frac{Bh}{3}=\frac{\frac{ab}{2}c}{3}=\frac{abc}{6}=182cm^3$. ♦

Пример 28. Пресметај го волуменот на четиристрана пирамида со основа трапез со страни $a=5cm, b=3cm$ и $c=7cm$, $(a\parallel b)$, ако подножната точка на нејзината висина се совпаѓа со пресекот на дијагоналите на основата и поголемиот бочен раб е $s=10cm$.

Решение. Нека е дадена пирамидата $ABCDS$, за која $\overline{AB}=a=5cm, \overline{CD}=b=3cm, \overline{AD}=c=7cm, \overline{SA}=s=10cm$ (црт. 52). Од ΔAMD имаме

$$t=\sqrt{c^2-(\tfrac{a-b}{2})^2}=\sqrt{7^2-(\tfrac{5-3}{2})^2}\,cm=4\sqrt{3}cm$$



Црт. 52

и како $\Delta BMD\sim\Delta BNO$ добиваме $t:x=\overline{BM}:\overline{BN}$ од што следува

$$x=\frac{\overline{BN}}{\overline{BM}}\cdot t=\frac{\frac{a}{2}}{a-\frac{a-b}{2}}\cdot t=\frac{a}{a+b}\cdot t=\frac{5\sqrt{3}}{2}cm.$$

Понатаму, од ΔAON следува

$$\overline{AO}=\sqrt{\overline{AN}^2+x^2}=\sqrt{(\tfrac{a}{2})^2+x^2}=5cm,$$

а од ΔASO наоѓаме

$$h=\sqrt{\overline{SA}^2-\overline{AO}^2}=\sqrt{10^2-5^2}\,cm=5\sqrt{3}cm.$$

Конечно, за волуменот на пирамидата добиваме

$$V=\frac{Bh}{3}=\frac{\frac{a+b}{2}t}{3}h=\frac{\frac{5+3}{2}\cdot 4\sqrt{3}}{3}\cdot 5\sqrt{3}=80cm^3.\ ♦$$

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

52. Основата на една пирамида е правоаголник со димензии $a=5cm$ и $b=6cm$, а секој бочен раб изнесува $c=13cm$. Да се пресмета волуменот на пирамидата.
53. Основата на една правилна пирамида е правоаголник со димензии $a=16cm$ и $b=12cm$. Подножјето на висината на пирамидата се совпаѓа со пресекот на дијагоналите на правоаголникот, а дијагоналниот пресек има плоштина $Q=240cm^2$. Да се пресмета волуменот V на пирамидата.
54. Плоштината на правилна четиристрана пирамида е $384cm^2$ а основниот раб и висината се однесуваат како $3:2$. Пресметај ги:
    а) рабовите и висината на пирамидата,
    б) волуменот на пирамидата
    в) волуменот на коцката впишана во пирамидата.
55. Гранитен споменик има форма на правилна четиристрана пирамида со основен раб $2m$ и висина $4m$. Дали камион со носивост 20 тони може да го превезе споменикот од местото каде што е направен до местото каде што треба да биде поставен. (Забелешка. Густината на гранитот е $2{,}5g/cm^3$).

56. Збирот на основниот раб и апотемата на правилна четиристрана пирамида е $0{,}5m$. Пресметај го волуменот на пирамидата ако нејзината плоштина е $16dm^2$.

57. Дадена е пирамида со висина h. Да се пресмета на кое растојание од основата треба да се пресече пирамидата со рамнина паралелна со основата, така што таа да биде поделена на два дела со еднакви волумени.

58. Правилна оловна шестстрана пирамида со основен раб a и висина h треба да се претопи воправилна еднакворабна тристрана призма. Пресметај ја плоштината на призмата.

59. Волуменот на правилна шесстрана пирамида е $486\sqrt{3}cm^3$. Пресметај ги висината и бочниот раб на пирамидата, ако плоштината на дијагоналниот пресек што минува низ два спротивни бочни раба е $108cm^2$.

60. Основата на тристрана пирамида е рамнокрак триаголник со основа $70cm$ и крак $37cm$, а бочниот раб што минува низ врвот на основата е нормален на рамнината на основата. Пресметај ги волуменот и плоштината на пирамидата.

61. Правилна осумстрана пирамида има основен раб $a=4cm$ и бочен раб $b=12cm$. Пресметај ги плоштината и волуменот на пирамидата.

9. ВОЛУМЕН НА ПОТСЕЧЕНА ПИРАМИДА

Нека е дадена потсечената пирамида $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (црт. 53), чија висина е h, а плоштините на основите се B и B_1. Преку горната основа ги продолжуваме бочните рабови и ја добиваме пирамидата $SABCD$ чија основа е долната основата на потсечената пирамида и има висина h_1, а на пирамидата $SA_1B_1C_1D_1$ основата е горната основа на потсечената пирамида и има основа h_2.

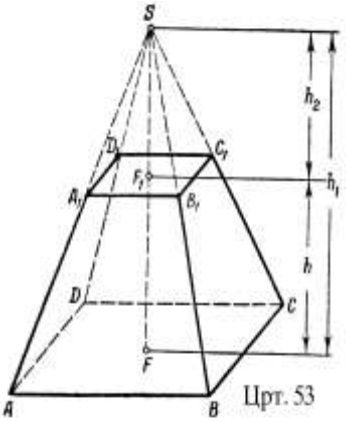
Волуменот на потсечената пирамида ќе го определиме како разлика на волумените на пирамидите $SABCD$ и $SA_1B_1C_1D_1$. Од теорема 2 следува $\frac{h_1^2}{h_2^2}=\frac{B}{B_1}$, т.е. $\frac{h_1}{h_2}=\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B_1}}$.

Но, $h_1=h+h_2$ и ако замениме во претходното равенство последователно добиваме

$$\frac{h+h_2}{h_2}=\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B_1}},$$

$$h\sqrt{B_1}+h_2\sqrt{B_1}=h_2\sqrt{B},$$

$$h_2=\frac{h\sqrt{B_1}}{\sqrt{B}-\sqrt{B_1}}.$$



Црт. 53

Според тоа, за волуменот на прсечената пирамида имаме

$$V=\tfrac{1}{3}B(h+h_2)-\tfrac{1}{3}B_1h_2=\tfrac{1}{3}[Bh+h_2(B-B_1)]=\tfrac{1}{3}[Bh+\frac{h\sqrt{B_1}}{\sqrt{B}-\sqrt{B_1}}(B-B_1)]$$

$$=\tfrac{1}{3}h[B+\frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{B}-\sqrt{B_1}}(\sqrt{B}-\sqrt{B_1})(\sqrt{B}+\sqrt{B_1})]=\tfrac{1}{3}h[B+\sqrt{B_1}(\sqrt{B}+\sqrt{B_1})]=\tfrac{1}{3}h[B+\sqrt{BB_1}+B_1)].$$

Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема 13. Волуменот на потсечена пирамида со висина h и плоштини на основите се B и B_1 се пресметува според формулата

$$V=\frac{1}{3}h[B+\sqrt{BB_1}+B_1)].\blacklozenge \qquad (1)$$

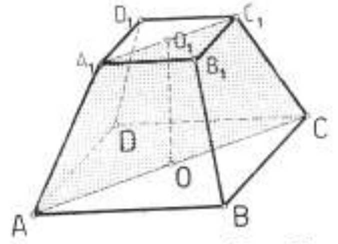
Забелешка 8. а) Во случај на правилна четиристрана потсечена пирамида со висина h и основни рабови a_1 и a_2 плоштините на основите се $B=a_1^2$ и $B_1=a_2^2$ и ако замениме во формулата (1) за волуменот на оваа пирамида ја добиваме формулата

$$V=\frac{h}{3}(a_1^2+a_2^2+a_1a_2)\,. \qquad (2)$$

б) Ако имаме правилна тристрана потсечена пирамида со висина h и основни рабови a_1 и a_2, тогаш плоштините на основите се $B=\frac{a_1^2\sqrt{3}}{4}$ и $B_1=\frac{a_2^2\sqrt{3}}{4}$. Ако замениме во (1), за волуменот на оваа пирамида ја добиваме формулата

$$V=\frac{h\sqrt{3}}{12}(a_1^2+a_2^2+a_1a_2)\,. \qquad (3)$$

Пример 29. Пресметај го волуменот на правилна потсечена четиристрана пирамида со основни рабови $a_1=7cm$, $a_2=5cm$ и дијагонала $D=9cm$.



Црт. 25

Решение. Со d_1 и d_2 да ги означиме дијагоналите на основите на потсечената пирамида. Имаме $d_1=7\sqrt{2}cm$ и $d_2=5\sqrt{2}cm$. Дијагоналниот пресек на потсечената пирамида (црт. 54) е рамнокрак трапез со основи d_1 и d_2, висина h еднаква на висината на протсечената пирамида. Според тоа,

$$h=\sqrt{D^2-(d_2+\frac{d_1-d_2}{2})^2}=3cm\,.$$

Основите на потсечената пирамида се квадрати со страни $a_1=7cm$, $a_2=5cm$, Конечно, од забелешка 8 а) следува дека волуменот на потсечената пирамида е

$$V=\frac{h}{3}(a_1^2+a_2^2+a_1a_2)=109cm^3\,.\ \blacklozenge$$

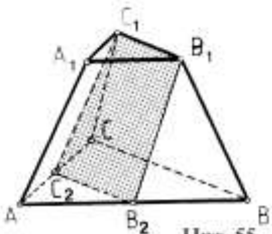
Пример 30. Волуменот на правилна потсечена тристрана пирамида е $196\sqrt{3}cm^3$, едниот основен раб е $10cm$, а висината е $12cm$. Пресметај го вториот основен раб.

Решение. Имаме, $V=196\sqrt{3}cm^3$, $a_1=10cm$ и $h=12cm$. Со замена во (3) ја добиваме равенката $196\sqrt{3}=\frac{12\sqrt{3}}{12}(10^2+a_2^2+10a_2)$ од која после средувањето ја имаме квадратната равенка

$$a_2^2+10a_2-96=0\,.$$

Решенија на последната равенка се $a_2=6$ и $a_2=-16$. Второто решение го отфрламе, бидејќи должината не може да биде негативна. Според тоа, вториот основен раб е $a_2=6$. ♦

Пример 31. Тристрана потсечена пирамида со рамнина која минува низ еден од рабовите на помалата основа и е паралелна на спротивниот бочен раб е поделена на два дела. Најди го односот на волумените на добиените полиедри ако се знае дека основните рабови на потсечената пирамида се однесуваат како $2:1$.



Црт. 55

Решение. Нека е дадена тристраната потсечена пирамида $ABCA_1B_1C_1$ со плоштина на долната и горната основа B и B_1, соодветно и висина h (црт. 55). Низ работ C_1B_1 повлекуваме рамнина паралелна на бочниот раб AA_1, која ја сече основата ABC во отсечка B_2C_2. Од $\Delta AB_2C_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$ следува дека $AB_2C_2A_1B_1C_1$ е коса призма со волумен $V_1 = B_1h$, па затоа волуменот на полиедарот $BCC_1B_1B_2C_2$ е $V_2 = V - V_1$, каде V е волуменот на тристраната потсечена пирамида, т.е. $V = \frac{1}{3}h[B+\sqrt{BB_1}+B_1)]$. Значи, $V_2 = \frac{1}{3}h[B+\sqrt{BB_1}+B_1)] - hB_1$ и ако се има предвид дека $\frac{B}{B_1} = (\frac{2}{1})^2 = 4$, тогаш за бараниот однос добиваме

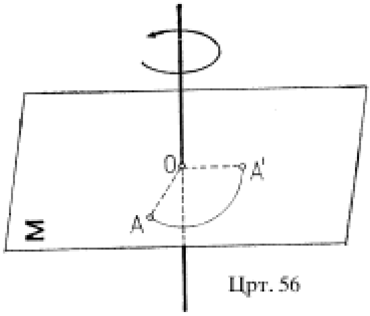
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3}h[B+\sqrt{BB_1}+B_1)]}{hB_1} - 1 = \frac{1}{3}(\frac{B}{B_1} + \sqrt{\frac{B}{B_1}} + 1) - 1 = \frac{1}{3}(4+2+1) - 1 = \frac{4}{3}\,. \blacklozenge$$

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

62. Основните рабови на правилна потсечена четиристрана пирамида се $4cm$ и $1cm$, а нејзината плоштина е $34cm^2$. Пресметај го волуменот на потсечената пирамида.
63. Висината на тристрана потсечена пирамида е $10cm$, рабовите на едната основа се $27cm$, $29cm$ и $52cm$, а периметарот на другата основа е $72cm$. Пресметај го волуменот на потсечената пирамида.
Упатство. Основите на потсечената пирамида се слични триаголници. Определи го коефициентот на сличност, а потоа искорити ја Хероновата формула за пресметување на плоштините на основите.
64. Бетонски потпирач има форма на правилна потсечена четиристрана пирамида со основни рабови $1{,}4m$ и $1m$ и висина $3{,}6m$. Колку е тежок потпирачот, ако густината на бетонот е $2{,}5g/cm^3$.
65. Висината на потсечена пирамида е $15cm$, волуменот и е $475cm^3$, а плоштините на основите се однесуваат како $4:9$. Пресметај ги плоштините на основите.
66. Пресметај го волуменот на правилна потсечена шестстрана пирамида чии основни рабови се однесуваат како $2:1$ а бочниот раб со рамнината на поголемата основа зафаќа агол од 60°.
67. Основните рабови на правилна потсечена четиристрана пирамида се $6cm$ и $4cm$. Пресметај го нејзиниот волумен ако се знае дека плоштината на обвивката е еднаква на збирот на плоштините на основите.
68. Основните рабови на правилна потсечена пирамида се a и b, а бочниот ѕид со рамнината на поголемата основа зафаќа агол $\alpha, (\alpha < 90^\circ)$. Докажи дека волуменот на потсечената пирамида е еднаков на $\frac{a^3-b^3}{12}\operatorname{tg}\alpha$.

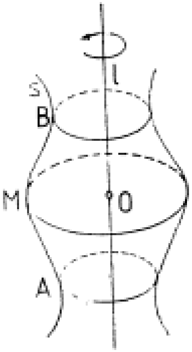
10. ПОИМ ЗА РОТАЦИОНО ТЕЛО. ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ЦИЛИНДАР

А) ПОИМ ЗА РОТАЦИОНО ТЕЛО И ЦИЛИНДЕР

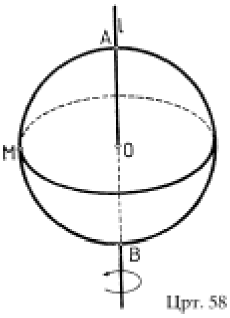


Црт. 56

Нека е дадена права l во просторот и агол α. Во произволна точка A која не припаѓа на правата l повлекуваме рамнина Σ нормална на правата l, ја наоѓаме точката $O = p \cap \Sigma$ и потоа определуваме точка $A' = \rho_{O,\alpha}(A)$ (црт. 56). На овој начин на секоја точка A која не припаѓа на правата l и придружуваме единствена точка A', а ако $B \in l$, тогаш на B и ја придружуваме самата точка B. На овој начин добивме една трансформација во просторот, која ја нарекуваме *ротација околу правата* l *за агол* α и ја означуваме со $\rho_{l,\alpha}$. Правата l ја нарекуваме *оска* на ротацијата, а α е *агол* на ротацијата. Очигледно дека при ротација $\rho_{l,\alpha}$ слика на геометриска фигура F е геометриска фигура F' складна на F. Уште повеќе, слика на права p која е паралелна со оската на ротација l е права p' паралелна на p.



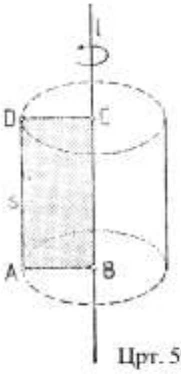
Црт. 57



Црт. 58

Нека сега земеме права l и крива s такви, што l и s лежат во иста рамнина. Ако кривата s ротира околу правата l за агол $\alpha = 2\pi$, тогаш секоја точка $M \in s$ ќе опише кружница која лежи во рамнина нормална на оската на ротација l и чиј центар е на оската l (црт. 57). Очигледно, со ротација на кривата s се добива една површина која ја нарекуваме *ротациона површина*. Кривата s што ја образува ротационата површина ја нарекуваме *генератриса* (*изводница*) на ротационата површина, а кружниците кои ги опишуваат точките од изводницата ги нарекуваме *паралели* на ротационата површина.

Дефиниција 16. Геометриското тело чија граница е ротациона површина и еден или два круга за кои соодветните кружници се паралели на ротационата површина го нарекуваме *ротационо тело*.



Црт. 59

Пример 31. При воведувањето на поимот геометриско тело топката ја дефинираме како множество точки кои се на помало или еднакво растојание од една фиксна точка.

Меѓутоа, топката е ротационо тело. Имено, со ротација на круг околу права l која мунива низ центарот на кругот се добива топка (црт. 58). ♦

Дефиниција 17. Ротационото тело добиено со ротација на отсечката AD паралелна на оската на ротација l и круговите кои се соодветни на паралелите на точките A и D го нарекуваме *прав* *кружен цилиндер* или пократко *прав цилиндер* (црт. 59).

Круговите соодветни на паралелите на точките A и D ги нарекуваме *основи* (*бази*) на цилиндерот, а радиусот r на основите го нарекуваме *радиус* на цилиндерот.

Ротационата површина добиена со ротација на отсечката AD ја нарекуваме *обвивка* или *бочна површина* на цилиндерот.

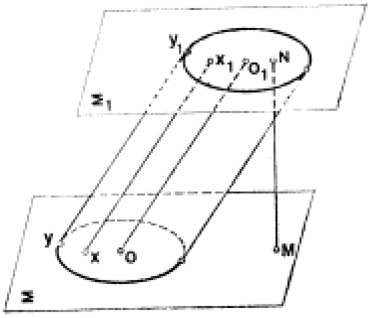
Оската на ротација l ја нарекуваме *оска* на цилиндерот, а секоја отсечка која поврзува две точки од основите на цилиндерот и е нормална на основите ја нарекуваме *висина* на цилиндерот.

Бидејќи генератрисите на прав цилиндер се еднакви меѓу себе, а исто така и се нормални на основите заклучуваме дека дека генератриста е еднаква на висината на цилиндерот.

Покрај правиот цилиндер постои и кос цилиндер, кој се дефинира како што следува.

Дефиниција 18. Нека Σ и Σ_1 се паралелни рамнини и круговите $k(O,r)$ и $k_1(O_1,r)$ лежат во Σ и Σ_1, соодветно. Множеството точки од сите отсечки XX_1 такви, што $X \in k, X_1 \in k_1$ и $XX_1 \| OO_1$ го нарекуваме *кружен цилиндер.* Ако правата OO_1, која ја нарекуваме *оска* на цилиндерот, не е нормална на рамнината Σ, тогаш за кружниот цилиндер ќе велиме дека е *кос* (црт. 60).

Круговите $k(O,r)$ и $k_1(O_1,r)$ ги нарекуваме *основи* (*бази*) на цилиндерот, а радиусот r на основите го нарекуваме *радиус* на цилиндерот.

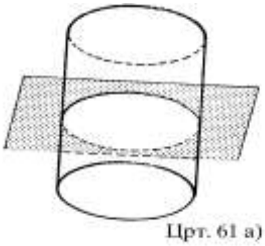


Црт. 60

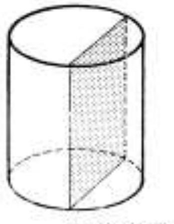
Множеството точки од сите отсечки YY_1 такви, што Y Y_1 се точки од кружниците k и k_1, соодветно, и $YY_1 \| OO_1$ го нарекуваме *обвивка* или *бочна површина* на цилиндерот. Отсечката YY_1 ја нарекуваме *генератриса* на цилиндерот.

Нека Σ и Σ_1 се рамнините на основите на цилиндерот и $M \in \Sigma$. Ако правата p минува низ точката M, $p \perp \Sigma$ и $N = p \cap \Sigma_1$, тогаш за отсечката MN ќе велиме дека е *висина* на цилиндерот.

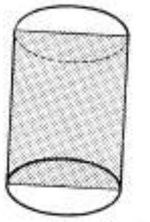
Како и во случај на призмата и пирамидата, во зависност од заемната положба на цилиндерот и рамнината постојат повеќе видови пресеци, од кои ние ќе споменеме само два.



Црт. 61 а)



Црт. 61 б)

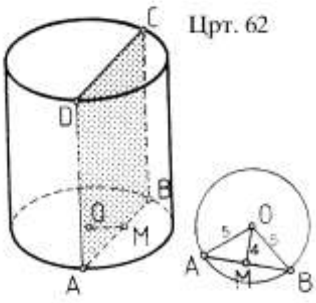


Црт. 61 в)

Дефиниција 19. Пресекот на цилиндерот со рамнина паралелна на рамнините на основите на цилиндерот го нарекуваме *паралелен* пресек (црт. 61 а)).

Пресекот на цилиндерот со рамнина паралелна на оската на цилиндерот го нарекуваме *надолжен* пресек (црт. 61 б)). Ако рамнината минува низ оската на цилиндерот, тогаш за надолжниот пресек ќе велиме дека е *оскин* пресек (црт. 61 в)).

Дефиниција 20. За цилиндерот ќе велиме дека е *рамностран* ако генератрисата е еднаква на дијаметарот на основата.



Црт. 62

Пример 32. Висината на прав цилиндерот е $11cm$, а радиусот на основата е $10cm$. Пресметај ја плоштината на надолжен пресек кој од оската е оддалечен $8cm$.

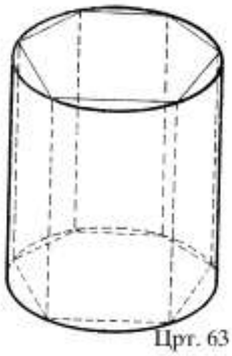
Решение. Јасно, пресекот е правоаголник со една страна $h = 11cm$, а другата страна е отсечката AB (црт. 62). Од условот на задачата имаме $\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{10^2 - 8^2}\,cm = 12cm$, па затоа плоштината на надолжниот пресек е

$$P = \overline{AB} \cdot h = 11 \cdot 12cm^2 = 132cm^2 . \ ♦$$

Б) ПЛОШТИНА НА ПРАВ ЦИЛИНДЕР

Од практична гледна точка, природно е да го поставиме прашањето за плоштина на цилиндер. При дефинирањето на цилиндерот видовме дека неговата граница се состои од два складни круга и бочна површина (обвивка), па затоа за да ја пресметаме неговата плоштина доволно е да ја пресметаме плоштината B на кругот и плоштината M на бочната површина, која ја нарекуваме *бочна плоштина,* а потоа плоштината на цилиндерот да ја пресметаме според формулата

$$P = 2B + M . \qquad (1)$$



Црт. 63

За да ја пресметаме бочната плоштина M, ќе ги разгледаме вписаните и опишаните призми во цилиндерот.

Дефиниција 21. За една призма ќе велиме дека е *вписана* (*опишана*) во (околу) цилиндер, ако нејзините основи се вписани (опишани) во (околу) кружниците кои се основи на цилиндерот (црт. 63).

Теорема 14. Бочната плоштина M на цилиндер со радиус на основата r и висина h се пресметува со формулата $M = 2\pi rh$.

Доказ. Во цилиндерот впишуваме правилна призма, на пример шестстрана (црт. 63). Бочната плоштина на оваа призма е $M_{пр} = L_{пр}h$, каде $L_{пр}$ е периметарот на нејзината основа. Понатаму, ако последователно го удвојуваме бројот на страните на основата на призмата, со што го удвојуваме бројот на нејзините бочни ѕидови добиваме дванаесетстрана, дваесетчетиристрана итн. вписана призма. Притоа, со зголемување на бројот на страните на основите, разликата на бочните плоштини на вака вписаните призми и бочната плоштина на цилиндерот се приближува кон нула (зошто?). Од друга страна, бидејќи висината h е константна, а периметарот $L_{пр}$ на правилните многуаголници се стреми кон периметарот на основата, т.е. кон $2\pi r$ добиваме дека бочните плоштини $M_{пр}$ на вписаните призми се стремат кон $2\pi rh$, што значи дека бочната плоштина на цилиндерот M е еднаква на $2\pi rh$. ♦

Од (1) и теорема 13, ако се има предвид фактот дека плоштината на круг со радиус r е $B = \pi r^2$, за плоштината на цилиндер со радиус r и висина h ја добиваме формулата

$$P = 2\pi r(r + h) . \qquad (2)$$

Пример 33. Дијагоналата $D = 24cm$ на оскиниот пресек на прав цилиндер со рамнината на основата зафаќа агол од 45°. Пресметај ја плоштината на цилиндерот.

Решение. Бидејќи дијагоналата на оскиниот пресек зафаќа агол од 45° заклучуваме дека оскиниот пресек е квадрат, т.е. цилиндерот е рамностран. Значи, $2r = h = \frac{24}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}cm$, т.е. $r = 6\sqrt{2}cm$. Со замена во (2) за добиваме $P = 2\pi r(r+h) = 432\pi cm^3$. ♦

В) ВОЛУМЕН НА ЦИЛИНДЕР

При воведувањето на поимот за волумен на полиедар, ние всушност при зададена единечна мерка за полиедарот воведовме нова бројна карактеристика, а тоа е неговиот волумен кој заправо е мерен број на областа ограничена со површината на полиедарот. Ќе докажеме дека ваква бројна карактеристика може да се воведе и за цилиндерот.

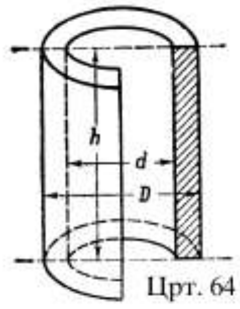
Теорема 15. Волуменот на цилиндер со радиус на основата r и висина h се пресметува со формулата $V = Bh$, каде $B = \pi r^2$ е плоштината на основата на цилиндерот.

Доказ. Во цилиндерот впишуваме правилна призма, на пример шестстрана (црт. 56). Волуменот на оваа призма е $V_{\text{пр}} = B_{\text{пр}}h$, каде $B_{\text{пр}}$ е плоштината на нејзината основа. Понатаму, ако последователно го удвојуваме бројот на страните на основата на призмата, со што го удвојуваме бројот на нејзините бочни ѕидови добиваме дванаесетстрана, дваесетчетиристрана итн. впишана призма. Притоа со зголемување на бројот на страните на основите, разликата на плоштините на основите на вака впишаните призми и плоштината на основата на цилиндерот се приближува кон нула (зошто?). Од друга страна, бидејќи висината h е константна, а плоштината $B_{\text{пр}}$ на правилните многуаголници се стреми кон плоштината на основата, т.е. кон πr^2 добиваме дека волумените $V_{\text{пр}}$ на впишаните призми се стремат кон $\pi r^2 h$, што значи дека волуменот на цилиндерот V е еднаков на $\pi r^2 h = Bh$. ♦

Забелешка 9. Имајќи предвид дека за дијаметарот d на основата важи $d = 2r$, т.е. $r = \frac{d}{2}$, за волуменот на цилиндерот ја добиваме формулата $V = \frac{\pi d^2 h}{4}$.

Пример 34. а) Бочната површина на цилиндер е квадрат со страна a. Пресметај го неговиот волумен.

б) Пресметај го волуменот на водоводна цевка со должина $6m$, ако дијаметарот на надворешната површина е $3cm$, а дијаметарот на внатрешната површина е $2{,}4cm$.



Црт. 64

Решение. а) Јасно, едната страна на бочната површина е висината на цилиндерот, па затоа $h = a$. Другата страна на бочната површина е еднаква на должината на кружницата на основата, па затоа $a = 2\pi r$, т.е. $r = \frac{a}{2\pi}$. Заменуваме во формулата $V = \pi r^2 h$ и за волуменот на цилиндерот добиваме $V = \frac{a^3}{4\pi}$.

б) Од условот на задачата имаме $h = 6m = 600cm$, $D = 3cm$ и $d = 2{,}4cm$. Според тоа, волуменот на цевката е

$$V = \frac{\pi D^2 h}{4} - \frac{\pi d^2 h}{4} = \frac{\pi(D^2 - d^2)h}{4} = \frac{\pi(3^2 - 2{,}4^2)\cdot 600}{4} cm^3 = 486\pi cm^3. \ ♦$$

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

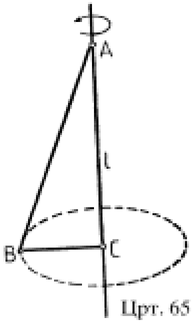
69. Оскиниот пресек на цилиндерот е квадрат со плоштина $36cm$. Да се пресметаат плоштината и волуменот на цилиндерот.
70. Должината на кружницата на основата на прав цилиндер е $14\pi cm$, а плоштината на оскиниот пресек е $70cm^2$. Пресметај ја висината на цилиндерот.
71. Пресметај ја плоштината на надолжниот пресек на прав цилиндер со висина $10cm$, ако пресекот е оддалечен од оската на цилиндерот $2cm$, а од кругот на основата отсекува лак со централен агол од 120°. Колкава е плоштината на цилиндерот?
72. Колку метри кубни камен е потребен за да се соѕида бунар длабок $16m$, ако неговиот внатрешен дијаметар е $1{,}2m$ и ѕидот е широк $40cm$.
73. Квадрат со страна a ротира околу оска паралелна со страна на квадратот и оддалечена од најблиската страна за $\frac{a}{2}$. Пресметај ги волуменот и плоштината на така добиеното тело.
74. Да се пресметаат волуменот и плоштината на цилиндарот впишан во права тристрана призма со основни рабови $9cm, 10cm$ и $17cm$ и висина $40cm$.

    Упатство. Прво со помош на Хероновата формула пресметај ја плоштината на основата на призмата, а потоа користјќи ја формулата за плоштина на триаголник $P = rs$ определи го радиусот на впишаната кружница во триаголникот.
75. Основните рабови на коса призма се $7cm, 8cm$ и $9cm$. Бочниот раб, кој со рамнината на основата зафаќа агол од 60° е долг $12cm$. Пресметај ги волумените и плоштините на впишаниот и опишаниот цѕлиндер околу призмата.
76. Колку тони нафта ќе собере цилиндрична цистерна долга $16{,}04m$ и висока $4{,}04m$ со дебелина на ѕидовите на цистерната $0{,}04m$, ако специфичната тежина на нафтата е $0{,}85g/cm^3$ и ако, согласно прописите за чување нафта, 10% од волуменот на цистерната мора да биде оставен празен.
77. Од дрвена греда долга $4m$ со форма на правилна четиристрана призма со раб на основата $20cm$, треба да се направи греда во форма на цилиндер и притоа да има најмал отпад на материјалот. Пресметај ги плоштината и волуменот на цилиндричната греда и волуменот на отпадниот материјал.
78. Бакарна жица долга $200m$ тежи $8{,}7kg$. Пресетај го дијаметарот на жицата, ако специфичната тежина на бакарот е $8{,}9g/cm^3$.

11. ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА КОНУС

Во претходните учебни години се запознавме со конусот и научивме да ги пресметуваме неговата плоштина и волумен. Овде повторно ќе се навратиме на ова геометриско тело, со тоа што истото подетално ќе го разгледаме.

Дефиниција 22. Ротационото тело добиено со ротација на отсечката AB која не е паралелна на оската на ротација l и таква, што $A \in l$ и кругот кој е соодветен на паралелата на точката B го нарекуваме *прав кружен конус* или пократко *прав конус* (црт. 65).



Црт. 65

Кругот $k(C,\overline{CB})$ соодветен на паралелата на точката B го нарекуваме *основа* (*база*) на конусот, радиусот $r=\overline{CB}$ на основата го нарекуваме *радиус* на конусот, а точката A ја нарекуваме *врв* на конусот.

Ротационата површина добиена со ротација на отсечката AB ја нарекуваме *обвивка* или *бочна површина* на конусот. Оската на ротација l ја нарекуваме *оска* на конусот, а отсечката која го поврзува врвот на конусот со подножјето на нормалата повлечена кон основата ја нарекуваме *висина* на конусот.

Очигледно, генератрисата s, висината h и радиусот r се хипотенуза и катети соодветно, на правоаголниот ΔABC, па затоа важи $s^2=h^2+r^2$.

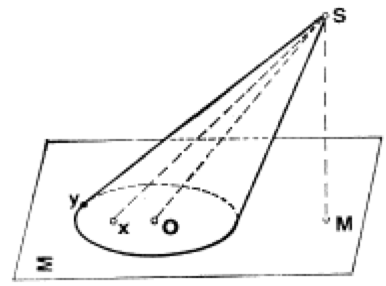
Покрај правиот конус постои и кос конус, кој се дефинира како што следува.

Дефиниција 23. Нека $k(O,r)$ е круг во рамнината Σ (црт. 66) и точката S не припаѓа на Σ. Множеството точки од сите отсечки SX такви, што $X\in k$ го нарекуваме *кружен конус.* Ако правата SO, која ја нарекуваме *оска* на конусот, не е нормална на рамнината Σ, тогаш за кружниот конус ќе велиме дека е *кос* (црт. 66).

Кругот $k(O,r)$ го нарекуваме *основа* (*база*) на конусот, а радиусот r на основата го нарекуваме *радиус* на конусот.

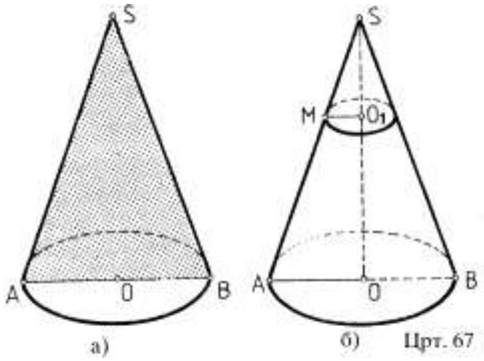
Множеството точки од сите отсечки SY такви, што $Y\in k$ го нарекуваме *обвивка* или *бочна површина* на конусот. Секоја отсечката SY ја нарекуваме *генератриса* на конусот.

Нека Σ е рамнината на основата на конусот. Ако правата p минува низ врвот S и $M=p\cap\Sigma$, тогаш за отсечката SM ќе велиме дека е *висина* на конусот.



Црт. 66

Како и во случај на цилиндерот, во зависност од заемната положба на конусот и рамнината постојат повеќе видови пресеци, од кои ние ќе споменеме само два.



а) б) Црт. 67

Дефиниција 24. Пресекот на конус со рамнина паралелна на рамнината на основата на конусот го нарекуваме *паралелен* пресек (црт. 67 а)).

Пресекот на конус со рамнина која минува низ оската на конусот го нарекуваме *оскин* пресек (црт. 67 б)).

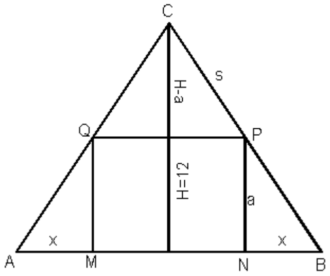
Дефиниција 25. За конусот ќе велиме дека е *рамностран* ако генератрисата е еднаква на дијаметарот на основата.

Пример 35. а) Во прав конус со радиус на основата $r=10cm$ и висина $h=12cm$ е впишана коцка, така што еден ѕид на коцката да лежи на основата на конусот. Пресметај го волуменот на коцката.

б) Пресметај ја плоштината на оскиниот пресек на прав конус со радиус $r=10cm$, ако дијаметарот и генератрисата зафаќаат агол од 45°.

Решение. а) Нека коцката $ABCA_1B_1C_1D_1$ е вписана во конусот (цт. 68). Означуваме $\overline{SO}=h$, $\overline{AB}=a$, $\overline{OM}=r$ и добиваме $\overline{AC}=\overline{A_1C_1}=a\sqrt{2}$, $\overline{MN}=2r=20cm$. Триаголниците SMN и SA_1C_1 се слични, па затоа

$$\frac{2r}{a\sqrt{2}}=\frac{h}{h-a} \text{ т.е. } a=\frac{2rh}{2r+h\sqrt{2}}=\frac{60}{5+3\sqrt{2}}cm=\frac{60(5+3\sqrt{2})}{7}cm.$$

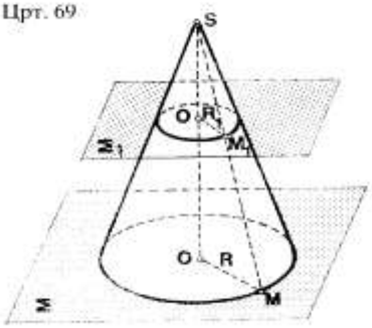


Конечно, за волуменот на коцката добиваме

$$V=a^3=\frac{60^3(5+3\sqrt{2})^3}{7^3}cm^3.$$

б) Оскиниот пресек е рамнокрак правоаголен триаголник за кој дијаметарот е хипотенуза. Јасно, висината на триаголникот е еднаква на радиусот на конусот, па затоа плоштината на оскиниот пресек е $P=r^2=100cm^2$. ♦

Црт. 69



Теорема 16. Ако конусот го пресечеме со рамнина паралелна на основата, тогаш изводница и висината се поделени во ист однос и плоштините на пресекот и основата се однесуваат како квадратите на нивните растојанија до врвот на конусот.

Доказ. Од $\Delta SOM \sim \Delta SO_1M_1$ (црт. 69), следува

$$\frac{\overline{SO}}{\overline{SO_1}}=\frac{\overline{SM}}{\overline{SM_1}}=\frac{R}{R_1} \text{ и } \frac{B}{B_1}=\frac{\pi R^2}{\pi R_1^2}=\frac{R^2}{R_1^2}=\frac{\overline{SO}^2}{\overline{SO_1}^2},$$

што и требаше да се докаже. ♦

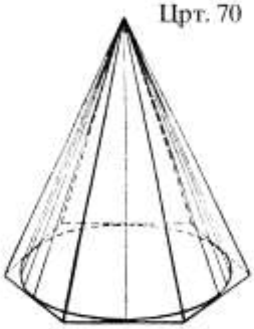
А) ПЛОШТИНА НА ПРАВ КОНУС

При дефинирањето на конусот видовме дека неговата граница се состои од еден круг и бочна површина (обвивка), па затоа за да ја пресметаме неговата плоштина доволно е да ја пресметаме плоштината B на кругот и плоштината M на бочната површина, која ја нарекуваме *бочна плоштина,* а потоа плоштината на конусот да ја пресметаме според формулата

$$P=B+M. \qquad (1)$$

За да ја пресметаме бочната плоштина M, ќе ги разгледаме вписаните и опишаните пирамиди во конусот.

Црт. 70



Дефиниција 26. За една пирамида ќе велиме дека е *вписана* (*опишана*) во (околу) конус, ако нејзината основа е вписана (опишана) во (околу) основата на конусот (црт. 70).

Теорема 17. Бочната плоштина M на цилиндер со радиус на основата r и генератриса s се пресметува со формулата $M=\pi rs$.

Доказ. Околу конусот опишуваме правилна пирамида, на пример шестстрана (црт. 70). Апотемата на пирамидата е еднаква на изводницата на конусот па затоа бочната плоштина на оваа пирамида е $M_{\text{пир}}=\frac{L_{\text{пир}}s}{2}$, каде $L_{\text{пр}}$ е периметарот на нејзината основа. Понатаму, ако последователно го удвојуваме бројот на страните на основата на пирамидата, со што го удвојуваме бројот на нејзините бочни ѕидови добиваме дванаесетстрана, дваесетчетиристрана итн. опишана пирамида. Притоа, со зголемување на бројот на страните на основите, разликата на бочните плоштини на вака опишаните пирамиди и бочната плоштина на конусот се приближува кон нула (зошто?). Од друга страна, бидејќи генератрисата s е константна, а периметарот $L_{\text{пир}}$ на правилните многуаголници се стреми кон периметарот на основата, т.е. кон $2\pi r$ добиваме дека бочните плоштини $M_{\text{пир}}$ на опишаните пирамиди се стремат кон $\frac{2\pi rs}{2}=\pi rs$, што значи дека бочната плоштина на конусот M е еднаква на πrs. ♦

Од (1) и теорема 17, ако се има предвид фактот дека плоштината на круг со радиус r е $B=\pi r^2$, за плоштината на конус со радиус r и изводница s ја добиваме формулата

$$P=\pi r(r+s). \qquad (2)$$

Пример 36. а) Висината на прав конус е $12cm$, а радиусот на основата е $5cm$. Пресметај ја неговата плоштина.

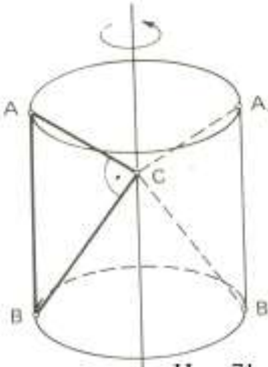
б) Правоаголен триаголник со катети $20cm$ и $15cm$ ротира околу права која минува низ темето на правиот агол и е паралелна со хипотенузата. Пресметај ја плоштината на ротационото тело.

Решение. а) Изводницата на конусот е $s=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{5^2+12^2}cm=13cm$. Ако замениме во (2) за плоштината на конусот добиваме $P=\pi r(r+s)=5\pi(5+13)cm^2=90\pi cm^2$.

б) Телото кое се добива е прикажано на црт. 71 и неговата плоштина е збир на плоштините на обвивката на цилиндер "опишан" од хипотенузата AB и на обвивките на конусите "опишани" од катетите BC и CA, за кои радиусот е висината h_c на ΔABC повлечена од темето C.

Од правоаголниот ΔABC имаме $\overline{AB}=\sqrt{20^2+15^2}=25cm$. Но, $P_{BAC}=\frac{\overline{AB}h_c}{2}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{2}$, па затоа $h_c=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{\overline{AB}}=12cm$. Конечно, бараната плоштина е

$$P=2\pi h_c\overline{AB}+\pi h_c\overline{AC}+\pi h_c\overline{BC}=\pi h_c(2\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})=1020cm^2. ♦$$



Црт. 71

Б) ВОЛУМЕН НА КОНУС

Теорема 18. Волуменот на конус со радиус на основата r и висина h се пресметува со формулата $V=\frac{Bh}{3}$, каде $B=\pi r^2$ е плоштината на основата на конусот.

Доказ. Околу конусот опишуваме правилна пирамида, на пример шестстрана (црт. 63). Волуменот на оваа пирамида е $V_{\text{пир}}=\frac{B_{\text{пир}}h}{3}$, каде $B_{\text{пир}}$ е плоштината на нејзината основа. Понатаму, ако последователно го удвојуваме бројот на страните на основата на пирамидата, со што го удвојуваме бројот на нејзините бочни ѕидови добиваме дванаесетстрана, дваесетчетиристрана итн. опишана пирамида. Притоа со зголемување на бројот на страните на основите, разликата на плоштините на основите на вака опишаните пирамиди и плоштината на основата на конусот се приближува кон нула (зошто?).

Од друга страна, бидејќи висината h е константна, а плоштината $B_{пир}$ на правилните многуаголници се стреми кон плоштината на основата, т.е. кон πr^2 добиваме дека волумените $V_{пир}$ на впишаните призми се стремат кон $\frac{\pi r^2 h}{3}$, што значи дека волуменот на конусот V е еднаков на $\frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{Bh}{3}$. ♦

Забелешка 10. Имајќи предвид дека за дијаметарот d на основата важи $d = 2r$, т.е. $r = \frac{d}{2}$, за волуменот на конусот ја добиваме формулата $V = \frac{\pi d^2 h}{12}$.

Пример 37. а) Ќе го пресметаме волуменот на ротационото тело од пример 36 б). За таа цел од волуменот на цилиндарот кој се добива со ротација на хипотенузата AB треба да ги одземеме волумените на конусите кои се добиваат со ротација на катетите AC и BC. Ако со h_1 и h_2 ги означиме висините на конусите, тогаш $h_1 + h_2 = \overline{AB}$ и бидејќи сите три тела имаат ист радиус еднаков на висината $h_c = 12cm$, за волуменот на ротационото тело добиваме

$$V = \pi \overline{AB} \cdot h_c^2 - \frac{\pi h_c^2 h_1}{3} - \frac{\pi h_c^2 h_2}{3} = \pi h_c^2 (\overline{AB} - \frac{h_1 + h_2}{3}) = \pi h_c^2 (\overline{AB} - \frac{\overline{AB}}{3}) = \frac{2\pi h_c^2 \cdot \overline{AB}}{3} = 2400\pi cm^3 .$$

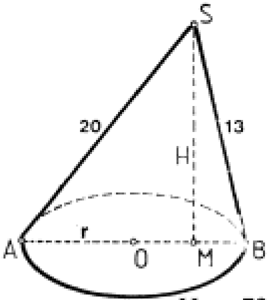
б) Ќе го пресметаме волуменот на кос конус со најголема генератриса $20cm$, најмала $13cm$ и дијаметар $21cm$.

Полупериметарот s на триаголникот ΔABC е $s = 27cm$, па од Хероновата формула за неговата плоштина добиваме

$$P = \sqrt{27(27-20)(27-13)(27-21)}cm^2 = 126cm^2 .$$

Според тоа, висината на ΔABC повлечена кон страна AB, која е и висина на конусот е $H = \frac{2P}{\overline{AB}} = 12cm$. Конечно, волуменот на конусот е

$$V = \frac{\pi d^2 H}{12} = 441\pi cm^3 . ♦$$



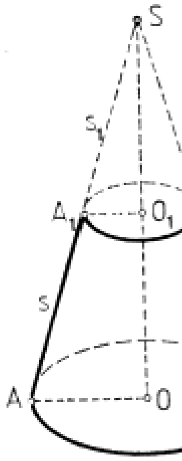
Црт. 72

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

79. Пресметај ја плоштината на прав конус, чија висина е $12cm$, а волуменот е $324\pi cm^3$.
80. Осниот пресек на еден конус е рамнокрак правоаголен триаголник со плоштина $36cm^2$. Пресметај го волуменот на конусот.
81. Висината и радиусот на основата на прав конус се однесуваат како $5:3$, а плоштината на неговата обвивка е $3\sqrt{34}\pi cm^3$. Пресметај го неговиот волумен.
82. Правоаголен триаголник со катети $9cm$ и $12cm$ ротира околу хипотенузата. Пресметај го волуменот на ротационото тело.
83. Висината и генератрисата на прав конус се однесуваат како $4:5$, а неговиот волумен е $96\pi cm^3$. Пресметај ја плоштината на конусот.
84. Правоаголен трапез со основи $15cm$ и $6cm$, и плоштина $96cm^2$ ротира околу поголемата основа. Пресметај го волуменот на ротационото тело.

12. ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ПОТСЕЧЕН КОНУС

При разгледувањето на пресеците на конус со рамнина споменавме дека нив ги има повеќе, но ги разгледавме само оскиниот и паралелниот пресек. Во овој дел повторно ќе се навратиме на пареленлиот пресек на конус со рамнина.



Црт. 73

Дефиниција 27. *Потсечен конус* го нарекуваме делот од конусот, зафатен со неговата основа и пресечна рамнина паралелна на основата (црт. 73).

Основата на конусот ја нарекуваме *долна основа* на потсечениот конус, а пресекот на конусот и рамнината го нарекуваме *горна основа* на потсечениот конус.

Делот од конусот кој се наоѓа над пресечната рамнина го нарекуваме *отсечен конус* (црт. 73).

Ротационата површина зафатена со основите на потсечениот конус ја нарекуваме *обвивка* или *бочна површина* на потсечениот конус.

Нека Σ_1 и Σ_2 се рамнините на основите на потсечениот конус и $M \in \Sigma_1$. Ако правата p минува низ точката M, $p \perp \Sigma_1$ и $N = p \cap \Sigma_2$, тогаш за отсечката MN ќе велиме дека е *висина* на потсечениот конус.

Забелешка 11. Поимите *оска* и *генератриса* на потсечен конус се воведуваат аналогно како и за конус. Притоа, во зависност од тоа дали оската на потсечениот конус е негова висина (зошто?), разликуваме *прав* и *кос* потсечен конус.

А) ПЛОШТИНА НА ПРАВ ПОТСЕЧЕН КОНУС

Бидејќи потсечениот конус има две основи и бочна површина, за да ја пресметаме неговата плоштина доволно е да ги пресметаме плоштините B и B_1 на основите и плоштината M на бочната површина, која ја нарекуваме *бочна плоштина,* а потоа плоштината на потсечениот конус да ја пресметаме според формулата

$$P = B + B_1 + M\,. \tag{1}$$

Теорема 19. Бочната плоштина на прав потсечен конус е еднаква на $\pi(R+r)s$, каде што r и R се радиусите на основите, а s е генератрисата на потсечениот конус.

Доказ. Нека потсечениот конус е добиен од прав конус со врв S и основа $k(O,R)$, кој е пресечен со рамнина и нека горната основа е кругот $k_1(O_1,r)$ (црт. 66). Ако генератрисата на отсечениот конус е s_1, тогаш генератрисата на конусот е $s+s_1$. Од доказот на теорема 16 имаме $\frac{R}{r}=\frac{s+s_1}{s_1}$, од каде следува $s_1=\frac{rs}{R-r}$.

Ако со M_2 и M_1 ги означиме бочните плоштини на конусот и отсечениот конус, тогаш за бочната плоштина на потсечениот конус имаме

$$M = M_2 - M_1 = \pi R(s+s_1) - \pi r s_1 = \pi R s + \pi(R-r)s_1 = \pi R s + \pi(R-r)\cdot\frac{rs}{R-r} = \pi s(R+r)\,.\ \blacklozenge$$

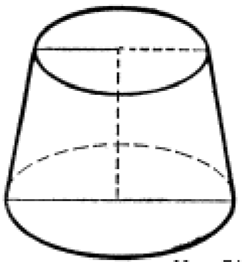
Плоштините на основите на потсечениот конус се $B=\pi R^2$ и $B_1=\pi r^2$, па од равенството (1) и од теорема 19 непосредно следува дека плоштината на потсечен конус со радиуси на основите r и R и генератриса s се пресметува со формулата

$$P = \pi[R^2 + r^2 + s(R+r)]. \qquad (2)$$

Пример 38. Плоштината на поголемата основа на прав потсечен конус е $144\pi cm^2$, а неговата висина е $8cm$. Пресметај ја неговата плоштина ако радиусите на основите се однесуваат како $2:1$.

Решение. Од условот на задачата за радиусот на поголемата основа имаме $\pi R^2 = 144\pi$, па затоа $R = 12cm$. Ако со r го означиме радиусот на помалата основа, тогаш $R:r = 2:1$, од каде наоѓаме $r = 6cm$. Од ΔAD_1D (црт. 74) следува

$$s = \sqrt{H^2 + (R-r)^2} = \sqrt{8^2 + (12-6)^2}\,cm = 10cm\,.$$

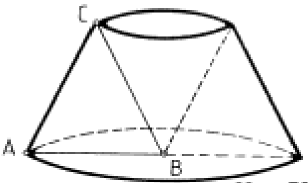


Црт. 74

Конечно, ако замениме во (2) за плоштината на потсечениот конус добиваме

$$P = \pi[R^2 + r^2 + s(R+r)] = \pi[12^2 + 6^2 + 10(12+6)]cm^2 = 360\pi cm^2\,.\ \blacklozenge$$

Пример 39. Рамнокрак триаголник со основа $15cm$ и крак $17{,}5cm$ ротира околу права која минува низ едно теме на основата и е нормална на неа. Пресметај ја плоштината на добиеното ротационо тело.



Црт. 75

Решение. При ротацијата на ΔABC се добива ротационо тело кај кое од потсечен конус е изваден конус (црт. 75). Неговата плоштина е

$$P = \pi\cdot\overline{AB}^2 + \pi\overline{AC}\cdot(\overline{AB} + \frac{\overline{AB}}{2}) + \frac{\pi\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2} = \pi\cdot\overline{AB}(\overline{AB} + 2\overline{AC}) = 750\pi cm^2$$

$.\ \blacklozenge$

Б) ВОЛУМЕН НА ПОТСЕЧЕН КОНУС

Волуменот на потсечениот конус ќе го пресметаме на сличен начин како и неговата плоштина . За таа цел ќе ја докажеме следната теорема.

Теорема 20. Волуменот на потсечен конус со радиуси на основите r и R и висина H се пресметува со формулата

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2). \qquad (3)$$

Доказ. Нека потсечениот конус е добиен од прав конус со врв S и основа $k(O,R)$, кој е пресечен со рамнина и нека горната основа е кругот $k_1(O_1,r)$ (црт. 66). Ако висината на отсечениот конус е H_1, тогаш висината на конусот е $H+H_1$. Од доказот на теорема 16 имаме $\frac{R}{r} = \frac{H+H_1}{H_1}$, од каде следува $H_1 = \frac{rH}{R-r}$.

Ако со V_2 и V_1 ги означиме волумените на конусот и отсечениот конус, тогаш за волуменот на потсечениот конус имаме

$$V = V_2 - V_1 = \frac{\pi R^2}{3}(H + H_1) - \frac{\pi r^2}{3} H_1 = \frac{\pi R^2}{3} H + \frac{\pi (R^2 - r^2)}{3} H_1$$

$$= \frac{\pi R^2}{3} H + \frac{\pi (R^2 - r^2)}{3} \frac{rH}{R-r} = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

што и требаше да се докаже. ♦

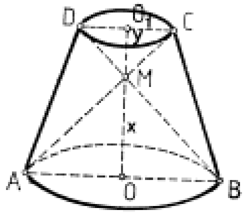
Пример 40. Ќе го пресметаме волуменот на ротационото тело од пример 39 б). Радиусите на основите $R = \overline{AB} = 15cm$ и $r = \frac{\overline{AB}}{2} = 7{,}5cm$, а висината е

$$H = \sqrt{\overline{BC}^2 - (\frac{\overline{AB}}{2})^2} = \sqrt{17{,}5^2 - 7{,}5^2}\, cm = \sqrt{250} cm = 5\sqrt{10} cm .$$

Сега волуменот на ротационото тело го добиваме ако од волуменот на потсечениот конус го одземеме волуменот на конусот. Имаме

$$V = V_2 - V_1 = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2) - \frac{\pi H}{3} r^2 = \frac{\pi H}{3} R(R + r) = \frac{5\sqrt{10}\pi}{3} 15(15 + 7{,}5) cm^3 = 1687{,}5\sqrt{10}\pi cm^3 .$$ ♦

Пример 41. Волуменот на потсечен конус е $56\pi cm^3$, а радиусот на едната основа е двапати поголем од радиусот на другата основа. Пресметај ја плоштината на потсечениот конус, ако се знае дека дијагоналите на неговиот оскин пресек се заемно нормални.



Црт. 76

Решение. Нека r и R се радиусите на конусот, а H е неговата висина (црт. 76). Од условот на задачата имаме $R = 2r$, па затоа од волуменот на конусот наоѓаме

$$56 = \frac{\pi H}{3}[(2r)^2 + 2rr + r^2)] = \frac{7\pi H r^2}{3} \text{ т.е. } Hr^2 = 24 .$$

Дијагоналите на оскиниот пресек на потсечениот конус се заемно нормални, па затоа ΔABM и ΔDCM се рамнокраки правоаголни, што значи дека нивните висини повлечени кон хипотенузите се еднакви радиусите на основите R и r, соодветно. Понатаму, $H = \overline{OM} + \overline{MO_1} = R + r = 3r$ што значи $3r^3 = 24$, односно $r = 2cm$. Според тоа, $R = 2r = 4cm$, $H = 3r = 6cm$ и $s = \sqrt{H^2 - (R - r)^2} = \sqrt{6^2 - 2^2}\, cm = 4\sqrt{2} cm$.

Конечно, плоштината на потсечениот конус е

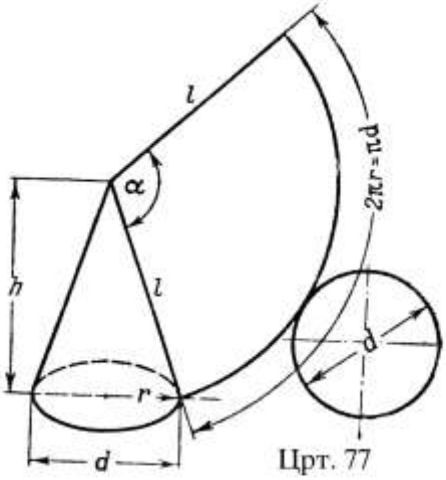
$$P = \pi[R^2 + r^2 + s(R + r)] = \pi[4^2 + 2^2 + 4\sqrt{2}(4 + 2)] cm^3 = 4(5 + 6\sqrt{2})\pi cm^3 .$$ ♦

ЗА ОНИЕ ШТО САКААТ ДА ЗНААТ ПОВЕЌЕ

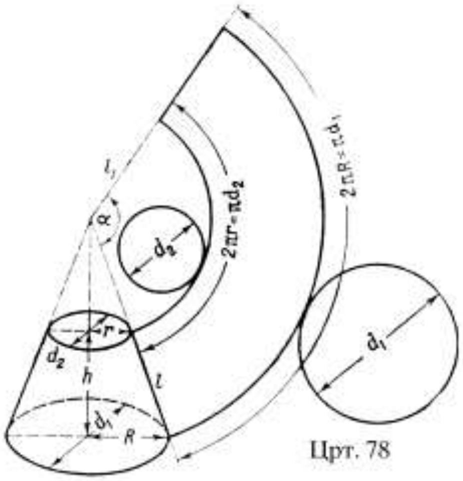
Во практиката често пати се бара да се направи тело во форма на конус или потсечен конус за кои се знаат потребните елементи. За таа цел е потребно да се направи мрежа на површината на телото. Ќе покажеме како тоа можеме да го направиме.

Ако конусот го расечеме по една генератриса и по кружницата на должната основа и ја развиеме бочната површина ја добиваме мрежата на конусот (црт. 77). Очигледно таа се состои од кружен исечок со централен агол α и радиус l. Од една страна, должината на соодветниот кружен лак е еднаква на $\frac{\pi l \alpha}{180^\circ}$, а од друга страна таа е еднаква на $2\pi r$. Оттука добиваме $\frac{\pi l \alpha}{180^\circ} = 2\pi r$, па затоа

$\alpha = \frac{360^\circ r}{l}$ или во радијани $\alpha = \frac{2\pi r}{l}$. Понатаму, ако φ е аголот при основата на оскиниот пресек, тогаш $\frac{r}{l} = \cos\varphi$, па затоа $\alpha = 2\pi\cos\varphi$.



Црт. 77



Црт. 78

Значи, за да ја нацртаме мрежата на конусот, прво го наоѓаме аголот α, потоа конструираме кружен исечок со радиус l и централен агол α, а потоа конструираме кружница со радиус r која го допира кружниот исечок.

Ако имаме потсечен конус (црт. 78), тогаш прво ги определуваме генератрисата l_1 на отсечениот конус и централниот агол α. Потоа, на ист централен агол α конструираме кружни исечоци со радиуси l_1 и $l_1 + l$ и соодветно ги конструираме допирните кружници на обввивката на потсечениот конус, чии радиуси се радиусите на основите R и r.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

85. Радиусите на основите на прав потсечен конус се $18cm$ и $8cm$, а висината е $12cm$. Пресметај ја плоштината на потсечениот конус.
86. Колку боја е потребна за надворешно бојадисување на 200 кофи во форма на пресечен конус, со дијаметри на горната и долната основа $30cm$ и $25cm$, соодветно и генератриса $27{,}5cm$, ако за $1m^2$ е потребно $100g$ боја.

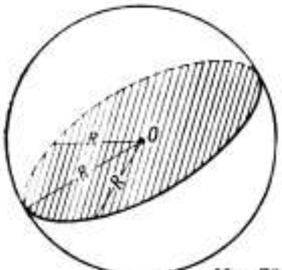
    Упатство. Плоштината која треба да се бојадиса е составена од обвивката и долната основа на потсечениот конус.
87. Плоштината на поголемата основа на прав потсечен конус е $100\pi cm^2$, а висината е $48cm$. Пресметај ја плоштината на потсечениот конус, ако радиусите на основите се однесуваат како $5:4$.
88. Правоаголен трапез со основи $2a$ и a и агол при поголемата основа од 60° ротира околу оска која е нормална на основите и минува низ темето на дадениот агол. Пресметај ја плоштината на добиеното ротационо тело.
89. Пресметај ја плоштината на прав потсечен конус опишан околу правилна четиристрана потсечена пирамида со волумен $406{,}25cm^3$ и висина $15cm$, ако плоштината на едната нејзина основа е деветпати поголема од плоштината на другата основа.
90. Пресметај го волуменот на потсечен конус со радиуси на основите $26cm$ и $8cm$, ако неговата генератриса е $30cm$.

91. Радиусите на основите на потсечен конус се R и r, а плоштината на оскиниот пресек е еднаква на разликата од плоштините на основите. Пресметај го волуменот на потсечениот конус.
92. Радиусите на потсечениот конус се $22cm$ и $4cm$. Пресметај го радиусот на цилиндерот кој има еднаков волумен и еднаква висина со потсечениот конус.
93. Радиусите на основите и генератриста на потсечениот конус се однесуваат како $4:11:25$, а неговиот волумен е $181\pi cm^3$. Прсеметај ја плоштината на потсечениот конус.
94. Рамностран триаголник ротира околу оска што минува низ едно теме и е нормална на страната која го содржи темето. Пресметај ги волуменот на добиеното ротационо тело, ако неговата плоштина е $144\pi cm^2$.
95. Паралелограм со страни $8cm$ и $4cm$ и остар агол од 60° ротира околу оска што минува низ темето на остриот агол и е нормална на поголемата страна. Пресметај ги плоштината и волуменот на добиеното ротационо тело.

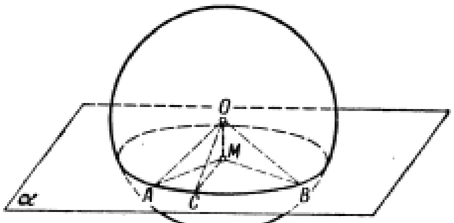
13. ПЛОШТИНА НА ТОПКА И ДЕЛОВИ НА ТОПКА

Да се потсетиме, сфера е множество на точки кои се наоѓаат на еднакво растојание R од дадена точка O. Точката O ја нарекуваме центар на сферата $S(O,R)$, а R нејзин радиус.

Ако ја пресечеме сферата со рамнина која минува низ нејзиниот центар, тогаш, бидејќи сите точки на сферата се еднакво оддалечени од нејзиниот центар, сите точки од пресекот се еднакво оддалечени од центарот на сферата и лежат во една рамнина. Според тоа, пресекот на сферата и секоја рамнина која минува низ центарот на сферата е кружница, чиј центар се совпаѓа со центарот на сферата, а нејзиниот радиус е еднаков на радиусот на сферата (црт. 79). Во врска со пресеците на сфера со произволна рамнина ќе ја докажеме следната теорема.



Црт.79



Црт. 80

Теорема 21. Пресекот на сфера и произволна рамнина, доколку истиот постои, е кружница.

Доказ. Од центарот на сферата O повлекуваме нормала на рамнината α и нека M е пресекот на нормалата и рамнината. Да ставиме $\overline{OM}=h$. Ако A е произволна точка од пресекот, тогаш

$$\overline{MA}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{MA}^2}=\sqrt{R^2-h^2}$$

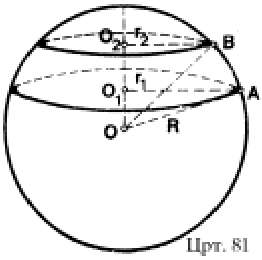
што значи дека растојанието од секоја точка на пресекот, кој лежи во рамнината α, до точката M е константно, па затоа пресекот е кружницата $k(M,\sqrt{R^2-h^2})$. ♦

Забелешка 12. Бидејќи радиусот на пресечната кружница зависи само од радиусот на сферата и растојанието на нејзиниот центар до рамнината, заклучуваме дека пресеците на сфера со рамнини, еднакво оддалечени од центарот на сферата имаат еднакви радиуси.

Јасно, ако растојанието од центарот на сферата до рамнината е еднакво на нула, тогаш се добива круг со најголем радиус (*голем круг*).

Пример 42. Плоштината на два паралелни пресека коишто се од иста страна од центарот на топката се $25\pi cm^2$ и $16\pi cm^2$. Да се пресмета плоштината на големиот круг, ако растојанието меѓу паралелните пресеци е $1cm$.

Решение. Од условот на задачата имаме $r_5 = 5cm$ и $r_2 = 4cm$ (црт. 81). Ако $\overline{O_2O_1} = 1cm$, $\overline{OA} = \overline{OB} = R$ и $\overline{OO_1} = x$, тогаш $\overline{OO_2} = x+1$. Од ΔOAO_1 следува дека $R^2 = r_1^2 + x^2$, а од ΔOAO_2 следува дека е $R^2 = r_2^2 + (x+1)^2$. Левите страни на последните две равенки се еднакви, па затоа $x^2 + r_1^2 = r_2^2 + (x+1)^2$ од каде добиваме $x = \frac{r_1^2 - r_2^2 - 1}{2} = 4cm$. Според тоа, $R^2 = 5^2 + 4^2 = 41$, па затоа плоштината на големиот круг е $P = \pi R^2 = 41\pi cm^2$. ♦



Црт. 81

A) ПЛОШТИНА НА ТОПКА

Пред да преминеме на разгледување на плоштината на топка, ќе докажеме едно тврдење кое се однесува на бочната плоштина на цилиндер, конус и потсечен конус, ротациони тела кои се добиваат со ротација на отсечка околу оска.

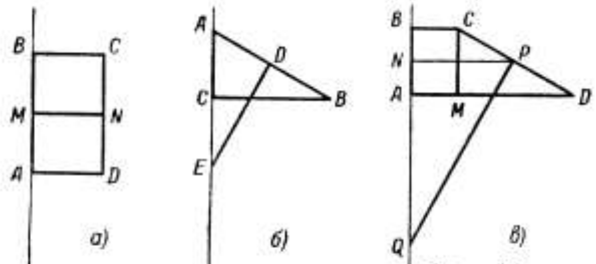
Теорема 22. Бочната плоштина на ротационо тело кое се добива со ротација на отсечка околу оска (отсечката не е нормална на оската) е еднаква на висината на телото и должината на кружницата, чиј радиус е еднаков на должината на нормалата повлечена во средината на отсечката до пресекот со оската.

Доказ. Ќе разгледаме три случаи.

а) Ако отсечката DC е паралелна на оската на ротација AB (црт. 82 а)), тогаш добиваме цилиндер со радиус $r = \overline{MN}$ еднаков на должината на нормалата повлечена од средината на отсечката DC до пресекот со правата AB и висината $h = \overline{AB}$. Бочната плоштина на цилиндерот е

$$M = 2\pi rh = \overline{AB} \cdot 2\pi \cdot \overline{MN},$$

што и требаше да се докаже.



Црт. 82

б) Нека отсечката AB и оската на ротација AE имаат заедничка точка A (црт. 82 б)). Од сличноста на триаголници ABC и AED (зошто?) следува $\overline{AC} : \overline{AD} = \overline{CB} : \overline{DE}$, па затоа $\overline{AC} \cdot \overline{DE} = \overline{AD} \cdot \overline{CB}$ и како $\overline{AD} = \frac{\overline{AB}}{2}$ добиваме $2\overline{AC} \cdot \overline{DE} = \overline{AB} \cdot \overline{CB}$. Сега, за бочната плоштина на конусот добиен со ротација на AB околу AE добиваме

$$M = \pi rs = \pi \overline{CB} \cdot \overline{AB} = 2\pi \overline{AC} \cdot \overline{DE} = \overline{AC} \cdot 2\pi \overline{DE},$$

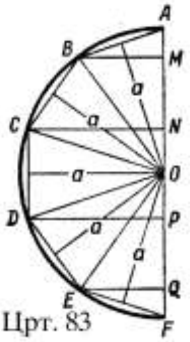
што и требаше да се докаже.

в) Повлекуваме нормали од точката P на AB и од точката C на AD (црт. 82 в)). Од сличноста на триаголниците CMD и NPQ (зошто?) следува $\overline{CD}:\overline{PQ}=\overline{CM}:\overline{NP}$ па затоа $\overline{CD}\cdot\overline{NP}=\overline{PQ}\cdot\overline{CM}$ и како $\overline{AB}=\overline{CM}$ добиваме $\overline{CD}\cdot\overline{NP}=\overline{PQ}\cdot\overline{AB}$. Сега, за бочната плоштина на потсечениот конус добиен со ротација на CD околу AB добиваме

$$M=2\pi\overline{CD}\cdot\overline{NP}=2\pi\overline{PQ}\cdot\overline{AB}=\overline{AB}\cdot 2\pi\overline{PQ}\cdot,$$

што и требаше да се докаже. ♦

Нека е дадена кружница $k(O,R)$ и во неа да впишеме правилен десетаголник $ABCDEF...$, го повлекуваме дијаметарот AF и ја разгледуваме полукружницата во која е впишана правилната искршена линија $ABCDEF$. Површината која се добива со ротација на оваа искршена линија околу дијаметарот AF се состои од бочните површини на два конуси, два потсечени конуси и еден цилиндер (црт. 83). Согласно теорема 22 имаме:



Црт. 83

- плоштината добиена со ротација на AB е еднаква на $\overline{AM}\cdot 2\pi a$,
- плоштината добиена со ротација на BC е еднаква на $\overline{MN}\cdot 2\pi a$,
- плоштината добиена со ротација на CD е еднаква на $\overline{NP}\cdot 2\pi a$,
- плоштината добиена со ротација на DE е еднаква на $\overline{PQ}\cdot 2\pi a$,
- плоштината добиена со ротација на EF е еднаква на $\overline{PF}\cdot 2\pi a$.

Од претходно изнесеното и ако се земе предвид фактот дека $\overline{AF}=2R$, следува дека плоштината добиена со ротација на искршената линија $ABCDEF$ околу дијаметарот AF е

$$P_{ABCDEF}=2\pi a(\overline{AM}+\overline{MN}+\overline{NQ}+\overline{PQ}+\overline{QF})=2\pi a\overline{AF}=4\pi Ra. \qquad (1)$$

Со последователно удвојување на бројот на страните на искршената линија се приближува кон кружницата, па затоа плоштината на ротационото тело кое се добива со нејзина ротација околу дијаметарот AF се стреми кон плоштината на топка со радиус R. Од друга страна апотемата a на рамнокраките триаголници се приближува кон радиусот R, па од (1) следува дека плоштината на ротационото тело добиена со ротација на искршената линија се стреми кон $4\pi R^2$.

Од претходно изнесеното следува точноста на следната теорема.

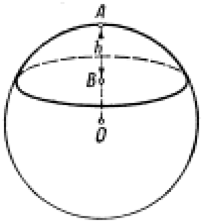
Теорема 23. Плоштината на топка со радиус R е еднаква на удвоениот производ на пресечната круг кој минува низ центарот на топката, т.е $P=4\pi R^2$. ♦

Б) ПЛОШТИНА НА КАЛОТА И ТОПКИН ПОЈАС

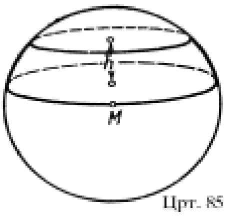
На крајот од овој дел ќе се осврнеме на пресметувањето на плоштината на некои делови од сферата кои се добиваат со помош на пресеците со рамнина.

Дефиниција 28. *Калота* или *топкин сегмент* го нарекуваме делот од сферата отсечен со рамнина (црт. 84).

Делот од радиусот нормален на пресечната рамнина, кој се наоѓа меѓу пресечната рамнина и граничната површина на топката го нарекуваме *висина* на калотата.



Црт. 84



Црт. 85

Топкин појас (*слој*) го нарекуваме делот од топката отсечен со две паралелни рамнини (црт. 85).

Растојанието меѓу паралелните рамнини го нарекуваме *висина* на топкиниот појас.

Ќе ја пресметаме плоштината на калотата со висина h.

Нека $h = \overline{AN}$ (црт. 83). Повлекуваме симетрала на $\angle AOC$ и во пресекот со кружницата ја наоѓаме точката B, со што ја добиваме правилната искршена линија ABC впишана во лакот AC. Постапувајќи како и при определувањето на плоштината на топката имаме

- плоштината добиена со ротација на AB е еднаква на $\overline{AM} \cdot 2\pi a$,
- плоштината добиена со ротација на BC е еднаква на $\overline{MN} \cdot 2\pi a$.

Од претходно изнесеното и ако се земе предвид фактот дека $\overline{AN} = h$, следува дека плоштината добиена со ротација на искршената линија ABC околу дијаметарот AF е

$$P_{ABC} = 2\pi a(\overline{AM} + \overline{MN}) = 2\pi a\overline{AN} = 2\pi ha. \qquad (2)$$

Со последователно удвојување на бројот на страните на искршената линија искршената линија се приближува кон лакот, па затоа плоштината на ротационото тело кое се добива со ротација на лакот околу дијаметарот AF се стреми кон плоштината на калотата со висина h отсечена од топка со радиус R. Од друга страна апотемата a на рамнокраките триаголници се приближува кон радиусот R, па од (2) следува дека плоштината на ротационото тело добиена со ротација на искршената линија се стреми кон $2\pi Rh$.

Од претходно изнесеното следува точноста на следната теорема.

Теорема 24. Плоштината на калота со висина h отсечена од сфера со радиус R е еднаква е $P = 2\pi Rh$. ♦

Што се однесува до топкиниот појас со висина h, тој може да се добие како разлика на две калоти (црт. 85), од кои ако висината на помалата ја означиме со x, тогаш висината на големата калота е $h + x$. Од претходно кажаното и од теорема 24, за плоштината на топкиниот појас со висина h отсечен од кружница со радиус R имаме

$$P = 2\pi R(h + x) - 2\pi Rx = 2\pi Rh. \qquad (3)$$

Пример 43. Радиусот на еден пресек на сферата е $60cm$, а висината на добиената калота е $25cm$. Пресметај ја плоштината на сферата.

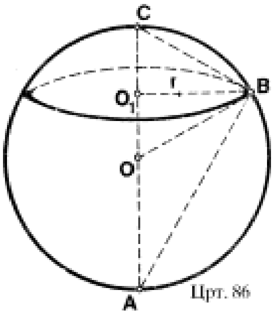
Решение. Нека

$$\overline{BO_1} = r = 6cm,\ \overline{O_1C} = h = 25cm \text{ и } \overline{OB} = R.$$

Од ΔABC, црт. 86, следува $r^2 = h(2R - h)$ (зошто?), па затоа $60^2 = 25(2R - 25)$ од каде добиваме $R = 84{,}5cm$.

Конечно, за плоштината на сферата имаме

$$P = 4R^2\pi = 28561\pi cm^2. ♦$$

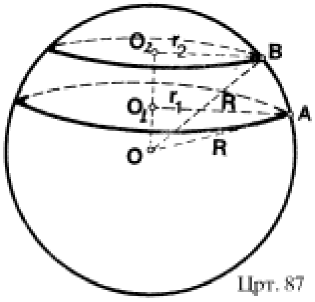


Црт. 86

Пример 44. Пресметај ја плоштината на топкин појас, ако радиусот на сферата е $65cm$ и ако радиусите на граничните кругови се $63cm$ и $60cm$.

Решение. Имаме, $R=65cm$ и кружниците $k_1(O_1,63)$ и $k_2(O_2,60)$ (црт. 87). Ставаме $\overline{OO_1}=y$, $\overline{OO_2}=x$ и за висината h на топкиниот појас добиваме $h=x-y$. Понатаму, од правоаголниот ΔOO_1A добиваме $y=\sqrt{65^2-63^2}=16cm$,

а од правоаголниот ΔOO_2B имаме $x=\sqrt{65^2-60^2}=25cm$. Значи, $h=25-16=9cm$.



Црт. 87

Конечно, плоштината P на топкиниот појас ќе биде $P=2R\pi H=1170\pi cm^2$. ♦

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

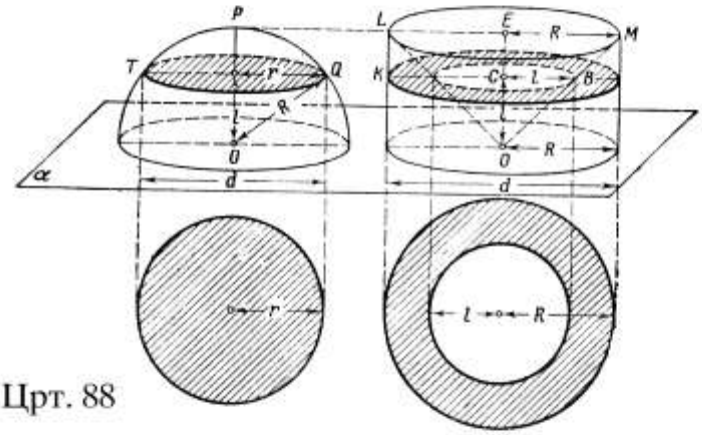
96. Колку пати ќе се зглеми дијаметарот на една сфера ако нејзината плоштина се зголеми 125 пати?
97. Определи го односот на плоштините на сфера и рамностран цилиндер впишан во сферата.
98. Точките A, B и C лежат на сфера и притоа $\overline{AB}=9cm, \overline{BC}=10cm$ и $\overline{CA}=17cm$. Пресечната рамнина определена со овие точки од центарот на сферата е оддалечена $\frac{\sqrt{875}}{8}cm$. Пресметај го радиусот на сферата.
Упатство. Прво определи го радиусот на пресечната кружница. Искористи ја Хероновата формула и формулата за плоштина на триаголник со помош на радиусот на опишаната кружница.
99. Паралелните пресеци чии радиуси се $15cm$ и $7cm$ се наоѓаат на различни страни од центарот на сферата. Прсеметај го радиусот на сферата R и растојанието меѓу пресеците h, ако се знае дека $R:h=6:5$.
100. Во сфера со радиус $20cm$ е впишана коцка. Пресметај го работ на коцката.
101. Во сфера со радиус $20cm$ е впишана правилна четиристрана пирамида се висина $32cm$. Пресметај ги волуменот и плоштината на пирамидата.
102. Во рамностран цилиндер се впишани конус и топка. Определи го односот на плоштините на трите тела.
103. Определи го односот на плоштините на сфера и рамностран цилиндер впишан во сферата.
104. Во полутопка со радиус R е впишан цилиндер. Пресметај ги радиусот на основата и висината на цилиндерот, ако се знае дека односот на плоштините на цилиндерот и полутопката е $3:5$.
105. Полукружница е поделена на три еднакви дела и ротира околу нејзиниот дијаметар. Докажи дека плоштината на ротационото тело добиено со ротација на средниот дел е еднаква на збирот на плоштините на ротационите тела добиени со ротација на крајните делови.
106. Дијаметарот на топката е $25cm$, а висината на топкиниот појас е $9cm$. Пресметај ја плоштината на топкиниот појас.

14. ВОЛУМЕН НА ТОПКА И ДЕЛОВИ НА ТОПКА

При пресметувањето на волумен на топка ќе се користиме со принципот на Кавалиери.

Нека полутопка со радиус R и цилиндер со дијаметар еднаков на дијаметарот на полутопката, а висина еднаква на радиусот на полутопката, ги поставиме така што големиот круг на полутопката и долната основа на цилиндерот се наоѓаат на една рамнина α. Потоа од цилиндерот да извадиме конус, чие теме се наоѓа во центарот на долната основа на цилиндерот, а основата се совпаѓа со горната основа на цилиндерот (црт. 88). Сега да повлечеме рамнина, паралелна на рамнината α и која ги сече полутопката и цилиндерот. Со l да го означиме растојанието меѓу оваа рамнина и рамнината α. Тогаш радиусот на кругот добиен во пресекот на рамнината и полутопката е $r=\sqrt{R^2-l^2}$. Плоштината на овој круг е еднаква на

$$\pi r^2=\pi(R^2-l^2)\,. \tag{1}$$



Црт. 88

Понатаму, на оваа рамнина го сече телото добиено со отстранување на конусот од цилиндерот во кружен прстен со поголем радиус R и помал радиус l. Имено, ΔOBC е рамнокрак правоаголен и како $\overline{OC}=l$ добиваме дека $\overline{BC}=l$. Според тоа, плоштината на добиениот кружен прстен е

$$\pi R^2-\pi l^2=\pi(R^2-l^2)\,. \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува дека паралелните пресеци на рамнината α на полутопката и добиеното тело имаат еднакви плоштини. Од принципот на Кавалиери следува дека овие две тела имаат еднакви волумени. Според тоа, за волуменот на полутопката наоѓаме

$$\tfrac{1}{2}V_{\text{т}}=V_{\text{ц}}-V_{\text{к}}=\pi R^3-\tfrac{1}{3}\pi R^3=\tfrac{2}{3}\pi R^3,$$

т.е.

$$V_{\text{т}}=\tfrac{4}{3}\pi R^3\,. \tag{3}$$

Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема 25. Волуменот на топка со радиус R е даден со (3). ♦

Да ги разгледаме калотата TQP и и телото добиено кога од цилиндерот $KLMN$ се отстрани потсечениот конус $LMBD$. Јасно, пресеците на овие тела со рамнини паралелни на рамнината на основите имаат еднакви плоштини, па од принципот на Кавалиери следува дека и нивните волумени се еднакви. Според тоа, ако висината на калотата е h, тогаш за нејзиниот волумен добиваме

$$V_{\text{к}} = V_{\text{ц}} - V_{\text{п.к}} = \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3}(R^2 + l^2 + Rl) = \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3}(R^2 + (R-h)^2 + R(R-h))$$
$$= \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3}(R^2 + R^2 + h^2 - 2Rh + R^2 - Rh) = \pi h^2 (R - \frac{h}{3}).$$

Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема 26. Волуменот на калота со висина h отсечена од топка со радиус R се пресметува со формулата

$$V_{\text{к}} = \pi h^2 (R - \frac{h}{3}). \blacklozenge \tag{4}$$

Што се однесува до волуменот на топкиниот појас со висина h и радиус на помалата пресечна кружница r, тој може да се добие како разлика на две калоти (црт. 85), од кои ако висината на помалата ја означиме со x, тогаш $(R-x)^2 + r^2 = R^2$ т.е. $x = R - \sqrt{R^2 - r^2}$, па затоа висината на поголемата калота е $h + x$. Од претходно кажаното и од теорема 26, за плоштината на топкиниот појас со висина h и радиус r на помалата пресечна кружница, отсечен од топка со радиус R имаме

$$V_{\text{т.п}} = V_{\text{к}_{x+h}} - V_{\text{к}_x} = \pi (x+h)^2 (R - \frac{x+h}{3}) - \pi x^2 (R - \frac{x}{3}),$$

од каде ако замениме за x после средувањето ја добиваме формулата

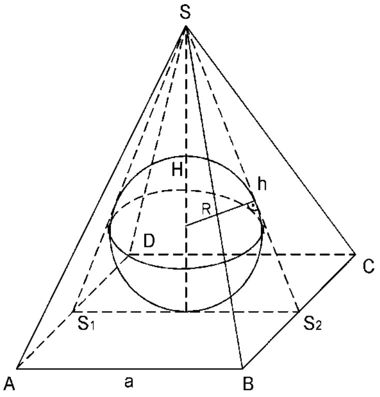
$$V_{\text{т.п}} = \pi h (r^2 + h\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{h^2}{3}). \tag{5}$$

Пример 45. Плоштината на правилна четиристрана пирамида е $360cm^2$, а работ на основата е $10cm$. Пресметај го волуменот на впишаната топка во пирамидата.

Решение. Плоштината на пирамида е $P = B + M = a^2 + 2ah$, каде h е висината на бочниот ѕид, па затоа $10^2 + 20h = 360$ т.е. $h = 13cm$. Од правоаголниот ΔSS_2O_1 (црт. 89), добиваме

$$H = \sqrt{h^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{169 - 25}cm = 12cm.$$

Триаголниците SS_2O_1 и SOM се слични, па затоа



Црт. 89

$$(H - R) : h = R : \frac{a}{2}$$

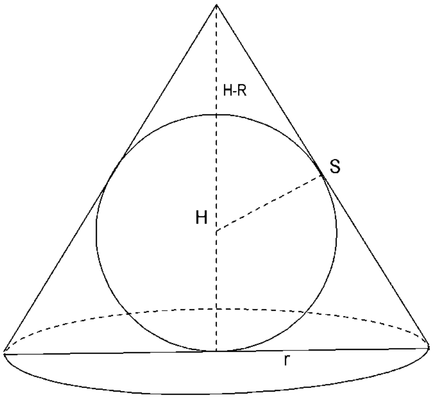
од што добиваме $R = \frac{aH}{2h+a}$, па затоа $R = \frac{10}{3}cm$. Конечно,

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi = \frac{4}{3}(\frac{10}{3})^3 \pi cm^3 = \frac{4000}{81}\pi cm^3. \blacklozenge$$

Пример 46. Во прав кружен конус аголот меѓу генератрисата и висината е 30°, а радиусот на основата е $5\sqrt{3}$. Пресметај го волуменот на впишаната топка во конусот.

Решение. Од ΔBSO имаме $\frac{r}{s}=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ па затоа $s=10\sqrt{3}cm$, од каде следува $H=\sqrt{s^2-r^2}=15cm$. Понатаму, од ΔMNS имаме $\frac{R}{H-R}=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ па затоа $R=\frac{H}{3}=5cm$.

Конечно, $V=\frac{4}{3}R^3\pi=\frac{500}{3}\pi cm^3$. ♦



Црт. 90

Пример 47. Во топка со дијаметар $50mm$ треба да се издлаби цилиндричен отвор вдолж дијаметарот на топката. Пресметај го волуменот на делот од топката што останува, ако дијаметарот на цилиндричниот отвор е $30mm$.

Решение. Делот што се издлабува се состои од цилиндер и две калоти чии основи се основите на цилиндерот (црт. 91). Висината на цилиндерот е $H=2\overline{BO}$.

Од триаголникот ABO следува

$$\overline{BO}=\sqrt{25^2-15^2}=20mm$$

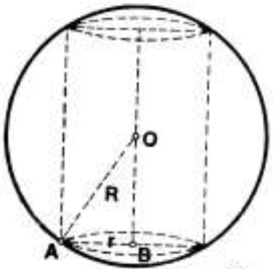
т.е. $H=40mm$. Според тоа, висината на секоја калота е

$$h=\frac{50-40}{2}=5mm.$$

Бараниот волумен е

$$V=\frac{4}{3}R^3\pi-r^2\pi H-\frac{2}{3}h^2\pi(3R-h)=\frac{4}{3}\cdot 25^3\pi-15^2\pi\cdot 20-\frac{2}{3}\cdot 5^2\pi(3\cdot 25-5)$$

$$=\frac{62500}{3}\pi-4500\pi-\frac{3500}{3}\pi=\frac{45500}{3}\pi mm^3=\frac{45{,}5}{3}\pi cm^3.$$



Црт. 91

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

107. Од колку оловни топчиња со дијаметар $5mm$ може да се излее (направи) топка со дијаметар $3cm$.

108. Во прав кружен конус аголот меѓу изводницата и висината е 30°, а радиусот на впишаната топка е $5cm$. Пресметај го волуменот на конусот.

109. Околу правилна четиристрана пирамида е опишана сфера. Должината на дијагоналата на основата на пирамидата е $24cm$, а радиусот на сферата е $13cm$. Пресметај го волуменот на пирамидата.

110. Во полутопка, со волумен $144cm^3$, впишана е коцка така што едната страна лежи на основата на полутопката, а преостанатите четири темиња на полутопката. Пресметај го волуменот на топката впишана во коцката.

111. Топка и прав цилиндар со радиус на основата $6cm$ и висина $10cm$ имаат еднакви плоштини. За колку се разликуваат нивните волумени?

112. Околу прав пресечен конус со радиуси на основите $4dm$ и $3dm$ и висина $7dm$ е опишана топка. Колкав дел е волуменот на пресечениот конус од волуменот на топката?

113. Пресметај го волуменот на калота, ако нејзиниот радиус на основата е $56cm$, а радиусот на топката е $65cm$.

114. Радиусите на основите на топкин појас се $3m$ и $4m$, а радиусот на топката е $5m$. Пресметај го волуменот на топкиниот појас.

115. Топка со радиус $65cm$ е пресечена со две паралелни рамнини од иста страна на центарот на топката. Пресметај го волуменот на топкиниот појас, ако рамнините од центарот се оддалечени за $16cm$ и $25cm$.

ПРОВЕРИ ГО СВОЕТО ЗНАЕЊЕ

1. **а)** Еден шатор има форма на правилна четиристрана пирамида чија висина е $3m$, а апотема $5m$. Колкава слободна површина е потребна за поставување на шаторот? (4 б)

   б) Еден споменик има форма на правилна шестстрана пирамида со основен раб $0,6m$. Колку треба да биде висок столбот, ако неговиот бочен раб има должина $1m$? (6 б)

2. **а)** Дадена е тристрана еднаквоработна призма со раб $a = 4cm$. Пресметај ја плоштината на пресекот што минува низ оската и еден бочен раб на призмата. (6 б)

   б) Дадена е коцка $MNPQM'N'P'Q'$ со раб $20cm$. Низ средините на рабовите NN', $N'P'$ и MQ е повлечена рамнина. Конструирај го пресекот на коцката и рамнината и најди ја неговата плоштина. (8 б)

3. **а)** Плоштината на основата на правилна четиристрана пирамида е $2m^2$. Пресметај ја нејзината плоштина ако висината е $2m$.. (10 б)

   б) Основните рабови на правилна потсечена тристрана пирамида $18cm$ и $6cm$, а бочниот раб е $10cm$. Пресметај ја плоштината на потсечената пирамида. (15 б)

4. **а)** Пресметај го волуменот на квадар, со дијагонала $14cm$, ако неговите страни се однесуваат како $2:3:6$. (10 б)

   б) Основните рабови на права тристрана призма се еднакви на $4cm, 5cm$ и $7cm$, а бочниот раб е еднаков на најголемата висина на основата. Пресметај го волуменот на призмата, (15 б)

5. **а)** Збирот на основниот раб и апотемата на правилна четиристрана пирамида е $0,5m$. Пресметај го волуменот на пирамидата ако нејзината плоштина е $16dm^2$. (15 б)

   б) Висината на потсечена пирамида е $15cm$, волуменот и е $475cm^3$, а плоштините на основите се однесуваат како $4:9$. Пресметај ги плоштините на основите. (20 б)

6. **а)** Должината на кружницата на основата на прав цилиндер е $14\pi cm$, а плоштината на оскиниот пресек е $70cm^2$. Пресметај ја висината на цилиндерот. (10 б)

   б) Колку тони нафта ќе собере цилиндрична цистерна долга $16,04m$ и висока $4,04m$ со дебелина на ѕидовите на цистерната $0,04m$, ако специфичната тежина на нафтата е $0,85g/cm^3$ и ако, согласно прописите за чување нафта, 10% од волуменот на цистерната мора да биде оставен празен (15 б)

7. **а)** Висината и генератрисата на прав конус се однесуваат како $4:5$, а неговиот волумен е $96\pi cm^3$. Пресметај ја плоштината на конусот. (10 б)

   б) Плоштината на поголемата основа на прав потсечен конус е $100\pi cm^2$, а висината е $48cm$. Пресметај ја плоштината на потсечениот конус, ако радиусите на основите се однесуваат како $5:4$ (15 б)

8. **а)** Определи го односот на плоштините на сфера и рамностран цилиндер впишан во сферата (10 б)

б) Во полутопка, со волумен $144cm^3$, впишана е коцка така што едната страна лежи на основата на полутопката, а преостанатите четири темиња на полутопката. Пресметај го волуменот на топката впишана во коцката (15 б)

Забелешка. При решавањето треба да избереш само по една подзадача од секоја задача. Доколку сакаш самостојно да се оцениш, можеш да го искористиш следниот критериум:

Бодови:	35-54	55-74	75-92	93-109
Оценка:	2	3	4	5

ГЛАВА VIII

ОБРАБОТКА НА ПОДАТОЦИ

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1. **Интервал, опсег, аритметичка средина, мода и медијана на податоци**
2. **Квартили и интерквартилно растојание. Процентили**
3. **Дисперзија и стандардна девијација**
4. **Стандардизирање на податоци. Споредување на распределби на обележја**

ПОТРЕБНИ ПРЕДЗНАЕЊА

За успешно совладување на содржините кои ќе ги усвојуваш во оваа тема, потребно е да се потсетиш на:

- *поимите примерок и популација,*
- *аритметичката средина,*
- *графичкото претставување на податоците и*
- *поимите фрекфренциите и релативните фрекфренција.*

НОВИ ЗНАЕЊА И УМЕЕЊА

Успешното совладување на содржините кои се разработени во оваа тема има за цел:

- да се оспособиш да ги користиш поимите популација, примерок, емпириска распределба, аритметичка средина, мода и медијана,
- да можеш да ги објаснуваш поимите квартил, процентил и да ги одредуваш нивните вредности
- да вршиш споредување на примероци со помош на наведените величини,
- да можеш да ја објасниш потребата за определување на мерки за расејување на податоците,
- да можеш да ги објасниш поимите дисперзија и стандардна девијација и да вршиш нивно пресметување,
- да можеш да ја објасниш потребата за стандардизација (нормирање) на податоците
- да се оспособиш да ја користиш техниката на стандардизација на податоците и
- графички да претставуваш и да одредуваш интервал и опсег на истите.

Во текот на досегашното образование се запозна со елементи од обработката на податоци, при што сигурно согледа дека нашето секојдневие всушност се состои од постојана обработка на некакви податоци. Се разбира, ако имаме мал број податоци, тогаш нивната обработка најчесто не претставува никаква потешкотија. Но, доколку имаме голем обем на податоци, т.е. сакаме да анализираме некоја масовна појава, тогаш нивната обработка не е ниту малку едноставна, дури и со помош на современите технички средства, како што се компјутерите. Токму затоа, во математиката е развиена посебна област која за предмет на проучување, меѓу другото, го има прибирањето и обработката на податоци и тоа е математичката статистика.

1. ИНТЕРВАЛ, ОПСЕГ, АРИТМЕТИЧКА СРЕДИНА, МОДА И МЕДИЈАНА НА ПОДАТОЦИ

Наједноставно кажано, множеството од сите елементи на една масовна појава што е предмет на нашето интересирање го нарекуваме *статистичко множество* или *популација*, а бројот на елементите на популацијата го нарекуваме *обем на популацијата*. Елементите на една популација се меѓусебно поврзани со некое заедничко обележје (својство, карактеристика) X коешто се менува од еден до друг елемент и ова карактеристика ја нарекуваме *статистичко обележје*.

Основна карактеристика на една популација е *истородноста* (*хомогеноста*) на нејзините елементи коишто можат да се разликуваат само во поглед на обележјето кое се испитува (мери) и притоа разликите на единките што настануваат надвор од испитуваното обележје не смеат значително да влијаат на разгледуваното обележје.

Друг важен поим во врска со обработката на податоците е поимот *примерок*. За да го објасниме овој поим ќе разгледаме еден пример. Имено, терминологијата на многу статистички задачи е сврзана со следнта постапка.

Нека имаме кутија со топчиња, кои се обележени со броевите $X_1, X_2, ..., X_N$, што во дадениот случај ни е популација. Од кутијата случајно избираме n топчиња на кои се означени броевите $x_1, x_2, ..., x_n$. Добиениот слог на броеви

$$x_1, x_2, ..., x_n \tag{1}$$

го нарекуваме *случаен примерок со големина* n *од популацијата*

$$X_1, X_2, ..., X_N. \tag{2}$$

Ако примерок (1) го подредиме по големина го добиваме таканаречениот *варијационен ред* $x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)}$.

Ако f_i е бројот на појавувањето (фрекфренцијата, честотата) на набљудувањето x_i и $f_1 + f_2 + ... + f_k = n$ е обемот на примерокот, тогаш количникот $\frac{f_i}{n}$ го нарекуваме *релативна честота (фрекфренција) на набљудувањето* x_i.

Пример 1. Нека во едно училиште има 200 ученици во втора година. Да претпоставиме дека треба да најдеме колку денови во текот на неделата рекреираат учениците од втора година во училиштето.

Во случајот популацијата се сите ученици од втора година, но иако бројот на учениците е мал, сепак треба да се потроши доста време и средства за да ја добиеме потребната информација. Затоа избираме подмножество од 20 ученици и за секој од нив го бележиме колку денови x_i во неделата рекреира.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	5	3	5	5	6	4	7	4	5	6	6	4	5	3	6	5	4	6	5	5

Ваквата таблица ја нарекуваме *статистички ред со негрупирани податоци*. Таблицата со групирани податоци според фрекфренцијата и релативната фрекфренција е следната:

x_i	3	4	5	6	7
f_i	2	4	8	5	1
$\frac{f_i}{n}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{1}{20}$

Ваквата таблица ја нарекуваме *статистички ред со групирани податоци*. ♦

Покрај фрекфренцијата и релативната фрекфренција, многу често, имаме потреба да го определиме бројот на елементите од примерокот за коишто вредностите се помали или еднакви на една негова вредност x_k. Тоа го постигнуваме со собирање на фрекфренциите на набљудувањата кои се помали или еднакви на x_k, со што всушност ги добиваме таканаречените *кумулативни фрекфренции*.

Слично, како собирањето на фрекфренциите можеме да ги собираме и релативните фрекренции на набљудувањата кои се помали или еднакви на x_k, со што ја добиваме таканаречената *емпириската распределба*.

Пример 2. Ќе ја определиме кумулативната фрекфренција и емпириската распределба на примерокот даден во пример 1. Пресметувањата се дадени во следната табела.

x_i	3	4	5	6	7
апсолутна фрекфренција f_i	2	4	8	5	1
релативна фрекфренција $\frac{f_i}{n}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{1}{20}$
кумулативна фрекфренција $x \le x_i$	2	6	14	19	20
емпириска распределба $F(x_i)$	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{14}{20}$	$\frac{19}{20}$	$\frac{20}{20}$

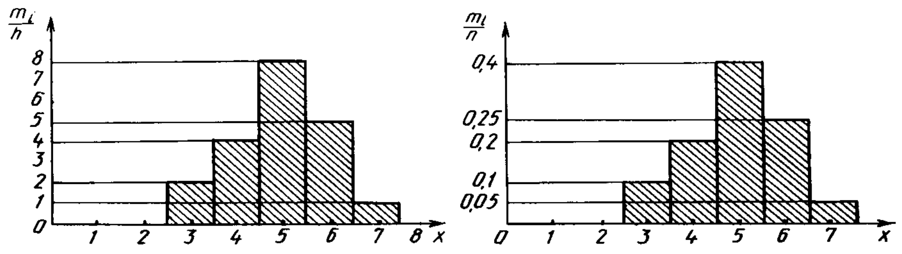
Забележуваме дека емпириската распределба на примерокот всушност е определена со формулата $F(x)=\frac{n_x}{n}$, каде n е обемот на примерокот и n_x е бројот на елементите на примерокот кои се помали или еднакви на x. ♦

Забелешка 1. Статистичките редови со групирани податоци можат да се претстават со графикони и дијаграми, од кои најраспространети се хистограмите и полигоните.

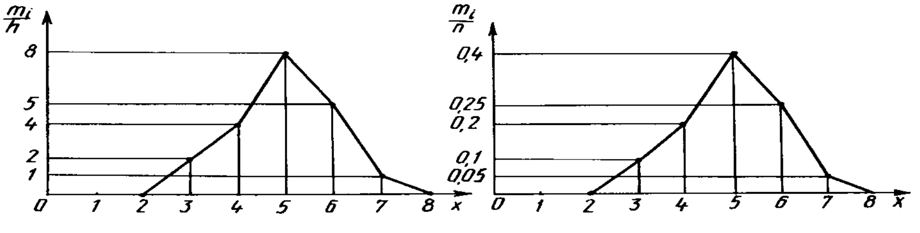
Со групирање на податоците определуваме k дисјунктни интервали со еднаква должина во кои треба да припаѓаат сите елементи на примерокот. Овие интервали ги нарекуваме *интервали на групирање*. За секој интервал на групирање со f_i да го означиме бројот на елементите на примерокот кои припаѓаат на тој интервал. Во правоаголен координатен систем на апцисата ги нанесуваме интервалите на групирање, а на ординатата броевите f_i. *Хистограм на фрекфренцијата* ја нарекуваме скалестата фигура која се состои од прилепените правоаголници со основи еднакви на должината h на интервалите на групирање, а нивните висини се еднакви на $\frac{f_i}{h}$ така, што плоштината на правоаголникот е еднаква на честотата f_i на елементите од примерокот кои припаѓаат на тој интервал.

Ако на ординатата ги нанесуваме релативните честоти $\frac{f_i}{n}$, тогаш го добиваме таканаречениот *хистограм на релативната фрекфренција*.

На црт. 1 а) е даден хистограмот на фрекфренцијата за примерокот, а на црт. 1 б) е даден хистограмот на релативната фрекфренција за примерокот од пример 2. Притоа на апцисата имаме 5 интервали со должина $h=1$ и средината на секој интервал е еднаква на соодветната вредност на x_i.



Црт. 1 а) Црт. 1 б)



Црт. 2 а) Црт. 2 б)

Друго графичко претставување на примерокот е можно со полигонот на фрекфренцијата и полигонот на релативната фрекфренција. Ако варијациониот ред добиен од примерокот (1) е претставен како статистички ред со групирани податоци, тогаш примерокот (1) може да се претстави со подредените парови (x_i, f_i), $i=1,2,...,k$ каде x_i се елементите на примерокот, а f_i нивните честоти. *Полигон на фрекфренцијата за примерокот* (1) ја нарекуваме искршената линија со темиња (x_i, f_i), $i=1,2,...,k$. Полигон на релативната фрекфренција ја нарекуваме искршената линија со темиња $(x_i, \frac{f_i}{n})$, $i=1,2,...,k$.

На црт. 2 а) е даден полигонот на фрекфренција за примерокот, а на црт. 2 б) е даден полигонот на релативната честота за примерокот од пример 2. Јасно, хистограм и полигон може да се направи и за кумулативните фрекфренции и емпириската распределба. Обиди се тоа самостојно да го направиш според податоците од табелата во пример 2.

Групирањето и обработката на податоците во смисол на наоѓање на апсолутната и релативната фрекфренција, потоа определувањето на кумулативните фрекфренции и емпириската распределба, како и претставувањето со помош на хистограми и полигони, само е вовед во обработката на податоците, кој им претходи на наоѓањето на аритметичката средина, модата, медијаната и други бројни карактеристики на примерокот. Да се потсетиме на овие поими.

Дефиниција 1. *Аритметичка средина* на обележјето X со негрупиран примерок (1) го нарекуваме реалниот број $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$. Ако f_i е фрекфренцијата на набљудувањето x_i, $f_1+f_2+...+f_k=n$, тогаш *аритметичка средина* на обележјето X е реалниот број $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}f_i x_i$.

Мода на обележјето X го нарекуваме набљудувањето x_i со најголема релативна фрекфренција. Притоа означуваме $\text{mo}\,X=x_i$.

Медијана на обележјето X го нарекуваме набљудувањето x_i за кое емпириската распределба прв пат е поголема или еднаква на $0{,}5$. Притоа означуваме $\text{me}\,X=x_i$.

Во пример 2 за $x_i=5$ имаме најголема релативна фрекфренција, па затоа $\text{mo}\,X=5$. Понатаму, $F(3)=\frac{2}{20}<\frac{1}{2}, F(4)=\frac{6}{20}<\frac{1}{2}$ и $F(5)=\frac{14}{20}>\frac{1}{2}$ па затоа $\text{me}\,X=5$.

Забелешка 2. Бидејќи медијаната всушност ги дели податоците на два еднакви дела, за пресметување на медијаната во случај ако имаме варијационен ред со негрупирани податоци, ќе имаме два случаи:

а) ако $n=2k+1$, тогаш $\text{me}\,X=x_{(k+1)}=x_{(\frac{n+1}{2})}$,

б) ако $n=2k$, тогаш $\text{me}\,X=\frac{x_{(k)}+x_{(k+1)}}{2}$.

Во случај на варијационен ред со групирани податоци за определување на медијаната, повторно ќе разгледаме два случаи:

а) ако $n=2k+1$, тогаш $\text{me}\,X=x_{(k+1)}$ од негрупираните податоци, па затоа ги пресметуваме кумулативните фрекфренции $f_1, f_1+f_2,...$ се дотогаш додека не се добијат неравенствата $f_1+f_2+...+f_{k-1}<\frac{n+1}{2}$ и $f_1+f_2+...+f_k\geq\frac{n+1}{2}$ и тогаш $\text{me}\,X=x_{(k+1)}$.

б) ако $n=2k$, ги пресметуваме кумулативните фрекфренции $f_1, f_1+f_2,...$ се додека не се добие број кој не е помал од $\frac{n}{2}$, т.е. $f_1+...+f_k\geq\frac{n}{2}$. Притоа, ако $f_1+f_2+...+f_k=\frac{n}{2}$, тогаш $\text{me}\,X=\frac{x_{(k)}+x_{(k+1)}}{2}$, а ако $f_1+f_2+...+f_k>\frac{n}{2}$, тогаш $\text{me}\,X=x_{(k)}$.

Забележуваме дека во пример 2 модата и медијаната се еднакви. Но ова не е правило, што може да се види од следниот пример.

Пример 3. а) Во следната табела е даден примерок со групирани податоци

x_i	45	50	55	60	65	70	75
f_i	4	16	20	10	25	17	8

Определи ги аритметичката средина, модата и медијаната.

Решение. Ако ја искористиме формулата (3) за аритметичката средина добиваме

$$\overline{x}=\frac{45\cdot4+50\cdot16+55\cdot20+60\cdot11+65\cdot25+70\cdot16+75\cdot8}{4+6+10+40+20+12+8}=60{,}85.$$

Понатаму, за релативните фрекфренции и и емпириската распределба добиваме:

x_i	45	50	55	60	65	70	75
релативна фрекфренција $\frac{f_i}{n}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{16}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{11}{100}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{16}{100}$	$\frac{8}{100}$
емпириска распределба $F(x_i)$	$\frac{4}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{40}{100}$	$\frac{51}{100}$	$\frac{76}{100}$	$\frac{92}{100}$	1

па затоа $\mathrm{mo}\,X=65$, а $\mathrm{me}\,X=60$. Провери, дали со алгоритмот од забелешка 2 се добива ист резултат за медијаната. ♦

Коментар 1. Модата и медијана спаѓаат во групата позициони средни вредности и истите не ја одразуваат тенденцијата на обележјето. Аритметичката средина спаѓа во таканаречените пресметани средни вредности и истата ја одразува централната тенденција на податоците и таа има репрезентативен карактер на податоците.

Дефиниција 2. Нека е даден примерокот $x_1, x_2, ..., x_n$ и да го формираме неговиот варијационен ред $x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)}$. Интервалот $[x_{(1)}, x_{(n)}]$ го нарекуваме *интервал на податоците*, а реалниот број $P = x_{(n)} - x_{(1)}$ го нарекуваме *опсег на податоците.*

Според тоа, опсегот на податоците е раликата меѓу најголемиот и најмалиот податок, а интервалот на податоците е затворениот интервал чии крајни точки се најмалиот и најголемиот податок на примерокот. Јасно, сите податоци се наоѓаат во интервалот на податоците и тој ги содржи $\overline{x}$, $\mathrm{mo}\,X$ и $\mathrm{me}\,X$.

Пример 4. а) За примерокот од пример 1 опсегот на податоците е $P=7-3=4$, а интервалот на податоците е [3,7] (направи цртеж).

б) За примерокот од пример 3 опсегот на податоците е $P=75-45=30$, а интервалот на податоците е [45,75] (направи цртеж). ♦

ЗА ОНИЕ ШТО САКААТ ДА ЗНААТ ПОВЕЌЕ

За аритментичката средина на може да се докажат следините тврдења, кои овде ќе ги прифатиме без доказ.

а) Аритметичката средина $\overline{x}$ на обележјето X секогаш е помала од неговата најголема вредност $x_{(n)}$ и е поголема од неговата најмала вредност $x_{(1)}$.

б) За збирот на *отстапувањата* $x_i - \overline{x}$ важи $\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x}) = 0$.

в) Ако меѓу обележјата X и Y постои линеарната зависност $Y = aX + b$, тогаш за нивните аритметички средини важи $\overline{y} = a\overline{x} + b$.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. За испитување на висината на учениците во едно училиште е земен примерок од 40 ученици во *cm*: 158, 184, 170, 152, 164, 145, 169, 177, 166, 178, 178, 166, 158, 152, 165, 170, 184, 174, 158, 170, 164, 145, 169, 177, 166, 178, 178, 158, 152, 165, 170, 184, 174, 158, 184, 170, 152, 164, 145, 166.
   а) Одреди ги: интервалот, опсегот, аритметичката средина, модата и медијаната на податоците. на податоците.
   б) Најди ја емпириската распределба и нацртај ги полигонот и хистограмот на распределбата.
2. За испитување на резултатот од приемнинот испит по математика на Универзитетот е земен примерок од 50 тестови (се бодува од 0 до 30 бода): 12, 15, 10, 23, 30, 16, 17, 16, 23, 21, 15, 30, 22, 21, 13, 12, 8, 21, 23, 12, 26, 28, 21, 13, 15, 12, 15, 10, 23, 30, 16, 17, 16, 23, 21, 15, 30, 22, 21, 13, 12, 8, 21, 23, 12, 26, 28, 21, 13, 15.
   а) Одреди ги: интервалот, опсегот, аритметичката средина, модата и медијаната на податоците.
   б) Најди ја емпириската распределба и нацртај ги нејзиниот полигон и хистограм
3. Распределбата на обележјето X е претставена со следнта таблица:

x_i	4	5	8	10	14	17	20
m_i	3	4	1	5	3	6	2

Најди ги модата, медијаната, аритметичката средина и емпириската распределба.

2. КВАРТИЛИ И ИНТЕРКВАРТИЛНО РАСТОЈАНИЕ. ПРОЦЕНТИЛИ

Како што рековме медијаната спаѓа во групата позициони средни вредности и таа всушност ги дели податоците на два еднакви дела. Слично, постојат мери кои податоците ги делат на четири, десет, па дури и на сто еднакви делови. Како и медијаната и овие мери се позициони. Ќе ги разгледаме позиционите мери кои податоците ги делат на четири и сто еднакви делови.

Дефиниција 3. Трите вредности Q_1, Q_2 и Q_3 на обележјето X кои ги делат податоците на четири еднакви дела ги нарекуваме *квартили*.

Забелешка 3. Од дефиниција 3 имаме дека првиот квартил Q_1 одделува $\frac{1}{4}$ од податоците, вториот квартил Q_2 одделува $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ од податоците и тоа всушност е медијаната и третиод квартил Q_3 одделува $\frac{3}{4}$ од податоците.

За пресметување на квартилите во случај ако имаме варијационен ред со негрупирани податоци, ги имаме следните случаи:

а) ако $n=4k+1$, тогаш $Q_1=x_{(k+1)}, Q_2=x_{(2k+1)}$ и $Q_3=x_{(3k+1)}$,

б) ако $n=4k+2$, тогаш $Q_1=x_{(k+1)}, Q_2=\frac{x_{(2k+1)}+x_{(2k+2)}}{2}$ и $Q_3=x_{(3k+2)}$,

в) ако $n=4k+3$, тогаш $Q_1=x_{(k+1)}, Q_2=x_{(2k+2)}$ и $Q_3=x_{(3k+3)}$,

г) ако $n=4k$, тогаш $Q_1=\frac{x_{(k)}+x_{(k+1)}}{2}, Q_2=\frac{x_{(2k)}+x_{(2k+1)}}{2}$ и $Q_3=\frac{x_{(3k)}+x_{(3k+1)}}{2}$.

Во случај на варијационен ред со групирани податоци за определување на квантилите повторно треба да разгледаме четири случаи, т.е. $n = 4k, 4k+1, 4k+2$ и $4k+3$. За $n = 4k+1$, постапуваме на следниот начин. Ги пресметуваме кумулативните фрекфренции $f_1, f_1 + f_2, \ldots$ се дотогаш додека не се добијат неравенствата:

1) $f_1 + f_2 + \ldots + f_{k-1} < \frac{n+1}{4}$ и $f_1 + f_2 + \ldots + f_k \geq \frac{n+1}{4}$ и тогаш $Q_1 = x_{(k+1)}$,

2) $f_1 + f_2 + \ldots + f_{k-1} < \frac{2n+1}{4}$ и $f_1 + f_2 + \ldots + f_k \geq \frac{2n+1}{4}$ и тогаш $Q_1 = x_{(2k+1)}$,

3) $f_1 + f_2 + \ldots + f_{k-1} < \frac{3n+1}{4}$ и $f_1 + f_2 + \ldots + f_k \geq \frac{3n+1}{4}$ и тогаш $Q_3 = x_{(3k+1)}$.

Аналогно постапуваме и во осанатите три случаи, меѓутоа формулите заради сложеноста на постапката нема да ги изведуваме, туку наоѓањето на квартилите ќе го објасниме на пример. Ќе разгледаме пример со групирани податоци, бидејќи истиот најчесто се среќава во практиката.

Пример 5. На едно тестирање се зададени 15 прашања, при што секој ученик точно одговорил барем три прашања. Од тестирањето ги имаме следните податоци:

о.п.	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
фрек.	144	149	763	3304	10883	23466	28919	20673	8796	2128	370	81	39
кум.ф.	144	293	1056	4360	15243	38709	67628	88301	97097	99225	99595	99676	99715

Најди ги квартилите за дадените податоци.

Решение. Од условот на задачата имаме $n = 99715$. Ги пресметуваме броевите $\frac{1}{4}n = 24928{,}75$; $\frac{2}{4}n = 49857{,}5$ и $\frac{3}{4}n = 74786{,}25$. За да ги определиме квартилите ја користиме табелата на кумулативните фрекфренции. Притоа, бидејќи квартилот Q_1 треба да оддели група од $\frac{1}{4}n = 24928{,}75$ во колоната за кумулативните фрекфренции од табелата наоѓаме дека тоа е за $x_6 = 8$, па значи $Q_1 = 8$. Аналогно имаме $Q_2 = 9$ и $Q_3 = 10$. ♦

Пример 6. Имаме податоци за заработувачката на 90 работници за еден час, во денари, кои се дадени во следната табела.

заработувачка на час во ден.	50	60	70	80	90	100	110	120
број на работници (фрек.)	15	17	17	12	12	7	3	7
кумулативна фрекфренција	15	32	49	61	73	80	83	90

Значи, $n = 90$, $\frac{1}{4}n = 22{,}5$; $\frac{2}{4}n = 45$; $\frac{3}{4}n = 67{,}5$ од каде што добиваме $Q_1 = 60$, $Q_2 = 70$ и $Q_3 = 90$. Тоа значи дека најмалку 25% од работниците имаат заработувачка за 1 час 50 или 60 денари, најмалку 50% од работниците имаат заработувачка за 1 час 50,60 или 70 денари и најмалку 75% од работниците имаат заработувачка за 1 час 50, 60, 70, 80 или 90 денари.

Секако, ваквата анализа многу не ни говори, па затоа пожелно е во вакви случаи да се пресмета и аритметичката средина, но е некои други големини за кои покасно ќе стане збор. За аритметичката средина имаме $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{8} f_i x_i = 76{,}33$, што значи дека просечната заработувачка е 76,33 денари. ♦

Во претходната точка се запознавме со опсегот на податоците, кој го дефиниравме како разлика на најголемиот и најмалиот податок. Секако, опсегот лесно се пресметува, но тој е доста груба мерка за варирањето на податоците и како таква има свои недостатоци од кои ќе споменеме два:

а) опсегот се базира само на два податоци, при што се занемарени податоците меѓу нив, кои можат да бидат доста оддалечени од најмалиот и најголемиот податок, па со самото тоа се доведува во прашање ваквата мерка за простирање на податоците и

б) опсегот, практично е називисен од вкупните податоци, што непосредно ја доведува во прашање неговата валидност како мерка.

Недостатоците на опсегот, како мерка за простирањето на податоците не наведува на размисла за дефинирање на нови мерки за простирање на податоците, се со цел да се намали влијанието на екстремните вредности меѓу податоците. Една таква мерка е квартилната девијација, која се дефинира како што следува.

Дефиниција 4. Разликата меѓу квартилите Q_3 и Q_1, т.е. $Q_0 = Q_3 - Q_1$ ја нарекуваме *квартилна девијација (интерквартилно растојание).*

Да забележиме дека квартилната девијација всушност содржи 50% од податоците. Лесно се гледа дека за податоците од пример 5 квартилната девијација е $Q_0 = 2$, а за податоците од пример 6 таа е $Q_0 = 30$.

Што се однесува до квартилната девијација, често пати таа се дефинира како полуразликата меѓу квартилите Q_3 и Q_1, т.е. $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ и во овој случај таа содржи 25% од податоците. За податоците од примерите 5 и 6 имаме $Q = 1$ и $Q = 15$, соодветно.

На крајот од овој дел ќе дадеме уште една позициона средна вредност, а тоа е перцентилот.

Дефиниција 5. Вредностите $P_1, P_2, ..., P_{99}$ кои го делат варијациониот ред на сто еднакви делови ги нарекуваме *процентили.*

Наоѓањето на процентилите е аналогно како и наоѓањето медијаната и квартилите, со тоа што во случајот на местото броевите 2 и 4, го земаме бројот 100. Секако, испишувањето на толкав голем број формули не е практично, па затоа само на пример ќе покажеме како се определуваат процентилите. Така, ако сакаме да ги определиме процентилот P_{37}, во примерот 5, постапуваме на следниот начин:

- вкупниот број на податоци го делиме 100 и наоѓаме $\frac{1}{100} n = 997{,}15$,
- потоа пресметуваме $37 \cdot \frac{1}{100} n = 36894{,}55$,
- конечно, бидејќи $15243 < 36894{,}55 < 38709$ од табелата за кумулативните фрекфренции наоѓаме дека $P_{37} = 8$, што значи дека 37% од податоците се помали од 8.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

4. Пресметај ги квартилите и квартилната девијација за податоците од задача 1.

5. Пресметај ги квартилите и квартилната девијација за податоците од задача 2.

6. Распределбата на обележјето X е претставена со следнта таблица:

x_i	4	5	8	10	14	17	20
f_i	12	11	9	13	14	6	5

Пресметај ги квартилите и квартилната девијација. .

3. ДИСПЕРЗИЈА И СТАНДАРДНА ДЕВИЈАЦИЈА

Нека се извршени две серии од мерења на една од димензиите на еден производ, кој се произведува во две смени и истите се дадени во следната табела.

прво мерење	56	57	61	63	63
второ мерење	44	52	61	67	76

Природно е да не интересира во која смена квалитетот на производот во однос на ова обележје е подобар. Како што рековме аритметичките средина е карактеристика за централната тенденција на вредностите на обележјето. Да ги пресметаме аритметичките средини за расположливите податоци. Имаме,

$$\frac{56+57+61+63+63}{5}=60 \text{ и } \frac{44+52+61+67+76}{5}=60,$$

Забележуваме дека имаме иста аритметичка средина, што значи дека врз основа на овој податок не можеме да судиме за квалитетот на производот во однос на ова обележје.

Како да го разрешиме проблемот? Одговорот на ова прашање го даваат другите мерки на растурањето на податоците, како што е дисперзијата и стандардната девијација.

Дефиниција 6. Нека е даден примерокот $x_1, x_2, ..., x_n$ и нека $\overline{x}$ е неговата аритметичка средина. Реалниот број

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2 \qquad (1)$$

го нарекуваме *дисперзија* на примерокот.

Квадратниот корен од дисперзијата на примерокот го нарекуваме *средно квадратно отстапување (стандардна девијација)* на примерокот.

Ќе ја трансформираме формулата (1). Имаме

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-2x_k\overline{x}+\overline{x}^2)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2-\frac{2\overline{x}}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k+\frac{\overline{x}^2}{n}n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2-\overline{x}^2,$$

т.е.

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2-\overline{x}^2. \qquad (2)$$

Јасно, формулата (2) е попогодна за практична работа, па затоа истата има и поголема примена.

Да забележиме, дека во случај кога вредностите x_i на примерокот имаат честоти f_i, $i=1,2,...,k$, $\sum_{i=1}^{k} f_i = n$, тогаш формулите (1) и (2) ги добиваат облиците

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2 \tag{3}$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \bar{x}, \tag{4}$$

соодветно.

Пример 7. Во следната табела е даден примерок со групирани податоци

x_i	45	50	55	60	65	70	75
f_i	4	6	10	40	20	12	8

Определи ја аритметичката средина, дисперзијата и средноквадратното отстапување на примерокот.

Решение. а) Ако ја искористиме формулата (6) за средината на примерокот добиваме

$$\bar{x} = \frac{45\cdot4+50\cdot6+55\cdot10+60\cdot40+65\cdot20+70\cdot12+75\cdot8}{4+6+10+40+20+12+8} = \frac{6170}{100} = 61{,}7\,.$$

Со примена на формулата (7) за дисперзијата на примерокот наоѓаме

$$s^2 = \frac{45^2\cdot4+50^2\cdot6+55^2\cdot10+60^2\cdot40+65^2\cdot20+70^2\cdot12+75^2\cdot8}{100} - 61{,}7^2 = 3856{,}50 - 3806{,}89 = 49{,}61.$$

Конечно, за средноквадратното отстапување имаме $s = \sqrt{49{,}61} \approx 7{,}04$. ♦

Што се однесува до користењето на дисперзијата како мерка за варирање на податоците истата не е најпогодна, особено за интерпретирање на резултатите кои истата ги дава. Ова пред се се должи на фактот што дисперзијата скоро секогаш е изразена со доста голем број, што е резултат на самата нејзина дефиниција, а тоа дека истата е аритметичка средина на квадратите на отстапувањата.

Меѓутоа, кај стандардната девијација како мерка за варирање на податоците скоро да се отстранети сите недостатоци и истата е една од најдобрите мерки од овој вид. Имено, како што можеме да забележиме од пример 7 во интервалот

$$(\bar{x} - s, \bar{x} + s) = (54{,}66; 68{,}74)$$

се наоѓа голем дел од податоците, т.е. 70 од 100 податоци. Што се однесува до значењето на стандардната девијација, може да се каже дека колку таа е помала, толку податоците се погусто групирани околу аритметичката средина. Може да се каже дека во случај на два примерока земени од една иста популација, примерокот со помала срандардна девијација подобро ја репрезентира популацијата.

Да се вратиме на примерот од почетокот на оваа точка. За првата серија податоци имаме

$$s^2 = \frac{56^2+57^2+61^2+63^2+63^2}{5} - 60^2 = 14{,}8 \text{ т.е. } s = 3{,}847$$

а втората серија податоци имаме

$$s^2 = \frac{44^2+52^2+61^2+67^2+72^2}{5} - 60^2 = 125{,}2 \text{ т.е. } s = 11{,}189,$$

од што заклучуваме дека во првата смена се произведува поквалитетен производ во однос на разгледуваното обележје.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

7. Просечното годишно производство на пченица во Пелагонискиот регион од 1980 до 2001 година, изразено во илјади тони, се движело според податоците од следната табела:

год.	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	00	01
произв.	41	36	35	35	36	40	38	41	42	38	36	41	39	38	37	36

Пресметај го:

а) просечно годишно производство на пченица во разгледуваниот период и

б) стандардното отстапување.

8. За оценување на просечната висина на учениците од едно училиште избран е примерокод 60 ученици. Со мерење на нивната висина се добиени следните податоци:

висина во *m*	1,67	1,68	1,70	1,73	1,76	1,78	1,80	1,81	1,82	1,85
број на учен..	5	7	5	7	10	15	6	2	2	1

Пресметај ја просечната висна на учениците и стандардното отстапување на учениците од просечната висина.

9. Распределбата на обележјето X е претставена со следната таблица:

x_i	4	5	8	10	14	17	20
f_i	12	11	9	13	14	6	5

Пресметај ги аритметичката средина и стандардното отстапување на обележјето X .

4. СТАНДАРДИЗИРАЊЕ НА ПОДАТОЦИТЕ. СПОРЕДУВАЊЕ НА РАСПРЕДЕЛБИ НА ОБЕЛЕЖЈА

Често пати се наоѓаме во ситуација да сакаме да споредиме две распределби на обележја. Во претходните разгледувања се запознавме со два карактеристични броја кои на извесен начин ни овозможуваат да ги окарактеризираме овие две распределби, а тоа се аритметичката средина и стандардната девијација. Логично е да се запрашаме, дали и како можеме да ги искористиме овие два броја за споредбата да ја направиме најдобро можна?

Нека имаме графички приказ на две распределби на обележја (хистограм или полигон на фрекфренциите). Како најдобро да ги споредиме во целина? Јасно, првата пречка е нееднаквоста на плоштините која е последица од различниот збир на сите фрекфреніции. Но, овој проблем лесно може да се реши. Треба само да се земат релативните фрекфренции (честоти), па сега плоштините ќе бидат еднакви, а како лесно може да се види ваквата трансформација не влијае ниту на обликот на графиконот, ниту на аритметичката средина или варијансата. Следната потешкотија, која се должи на различните големини на аритметичките средини, лесно може да се отстрани, ако двете аритметички средини ги нацртаме на исто место, па за секоја распределба ги разгледуваме фрекфренциите кои соодветствуваат на отстапувањата од аритметичката средина. Но, со ова не е сосема отстрането влијанието на потполно различната променливост кај двете распределби на обележјата. Ова влијание ќе го отстраниме на тој начин, што повторно ги разгледуваме отстапувањата од аритметичката средина и нив ги мериме со помош на стандардната девијација, на секоја распределба одделно.

Од претходно изнесенот следува дека правилно споредување можеме да извршиме, ако наместо оригиналните вредности $x_1, x_2, ..., x_n$ на обележјето X ги разгледуваме вредностите

$$\xi_i = \frac{x_i - \overline{x}}{s_x}, \qquad (1)$$

каде $\overline{x}$ е аритметичката средина на обележјето X, а s_x е неговата стандардна девијација. Оваа постапка е позната како *стандардизација* (*нормирање*) на податоците.

Пример 8. Да разгледаме две распределби на обележја кои сакаме да ги споредиме и кои се дадени во следната табела.

висина *x*	фрекфренција	релативна фрекрен.	нормали. обележје	тежина *y*	фрекфренција	релативна фрекрен.	нормали. обележје
155	3	2,50	-2,63	50	14	5,83	-2,08
160	8	6,67	-1,85	55	32	13,33	-1,27
165	13	10,83	-1,06	60	62	25,83	-0,46
170	41	34,16	-0,28	65	82	34,18	0,35
175	32	26,67	0,50	70	36	15,00	1,17
180	20	16,67	1,29	75	14	5,83	1,98
185	3	2,50	2,07				
вкупно	120	100,00		вкупно	240	100,00	

За да ги определиме нормализираните обележја, треба за двете распределби да ги определиме аритметичките средини и стандардните дивијации. За обележјето X имаме $\overline{x} = 171{,}792$ и $s_x = 6{,}3835$, а за обележјето Y имаме $\overline{y} = 62{,}833$ и $s_y = 6{,}1486$. Според тоа, нормализираните обележја се $\xi = \frac{x - 171{,}792}{6{,}3835}$ и $\eta = \frac{y - 62{,}833}{6{,}1486}$. Оттука се пресметуваат одделните вредности на нормализираните обележја при што имаме:

$$\xi_1 = \frac{155 - 171{,}792}{6{,}3835} = -2{,}63, \; \xi_2 = \frac{160 - 171{,}792}{6{,}3835} = -1{,}85 \text{ итн,}$$

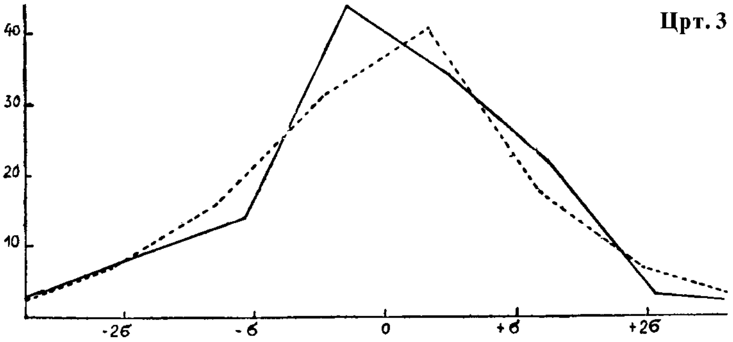
и

$$\eta_1 = \frac{50 - 62{,}833}{6{,}1486} = -2{,}08, \; \eta = \frac{55 - 62{,}833}{6{,}1486} = -1{,}27 \text{ итн.}$$

и истите ги внесуваме во почетната табела (четвртата и осмата колона).

Понатаму, податоците на обележјето X се наоѓаат на растојание 5 еден од друг, па за да можеме да извршиме внесување во ист координатен систем треба да го определиме новото растојание на податоците, а тоа е $\frac{5}{s_x} = \frac{5}{6{,}3835} = 0{,}783$ (зошто?). Сега во координатен систем за апциса ги земаме податоците од четвртата колона, а за ордината ги земаме податоците за релативната фрекфренција на обележјето X, но поделени со $\frac{5}{s_x} = 0{,}783$, на пример, $\frac{2{,}5}{0{,}783} = 3{,}58$, па за апциса $-2{,}63$ имаме ордината $3{,}58$, за апциса $-1{,}85$ имаме ордината $\frac{6{,}67}{0{,}783} = 8{,}52$ итн.

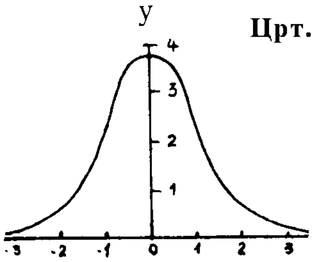
Во ист координатен систем треба да го внесеме и нормализираното обележје од Y. Бидејќи обележјата на X и Y имаат различни стандардни девијации $s_x = 6{,}3835$ и $s_y = 6{,}1486$ прво треба релативните фрекфренции на Y да ги усогласиме со релативните фрекфренции на обележјето X, па затоа истите ги множиме со количникот $\frac{s_y}{s_x} = 0{,}9634$ и притоа наместо првобитните релативни фрекфренции 5,83; 13,33; 25,83; 34,18; 15,0 и 5,83 итн ги добиваме фрекфренциите 5,3; 12,0; 23,3; 30,8; 13,6 и 5,3. Понатаму, податоците на обележјето Y се наоѓаат на растојание 5 еден од друг, па за да можеме да извршиме внесување во ист координатен систем треба да го определиме новото растојание на податоците, а тоа е $\frac{5}{s_y} = \frac{5}{6{,}1486} = 0{,}813$. Сега во координатен систем за апциса ги земаме податоците од осмата колона, а за ординати ги земаме трансформираните податоци за за релативната фрекфренција на обележјето Y, но поделени со $\frac{5}{s_y} = 0{,}813$, на пример, $\frac{5{,}3}{0{,}813} = 6{,}3$, па за апциса $-2{,}08$ имаме ордината $6{,}3$, за апциса $-1{,}27$ имаме ордината $\frac{12{,}0}{0{,}813} = 14{,}8$ итн.



Црт. 3

Вака усогласените податоци ги внесуваме во ист координатен систем (црт. 3). Од цртежот гледаме дека за двете обележја начинот на групирање на податоците околу средините е многу сличен. Затоа заклучуваме дека распределбите на висната и тежината за разгледувата група луѓе е многу слична. ♦

Забелешка 1. Во претходниот пример укажавме како со помош на нормирањето на податоците може да се споредуваат распределби на обележја. Овде само ќе напоменеме дека во праксата ваквото споредување се прави со теориската нормална распределба на податоците, чиј график е даден на црт. 4, или со некоја друга теориска распределба.



Црт. 4

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

10. Врз основа на примерокот даден во следната табела спореди ги распределбитр на обележјата висна и тежина на учениците од втора година од едно училиште.

висина во *m*	1,66	1,68	1,70	1,72	1,74	1,76	1,80	1,82
број на уче.	3	5	8	12	14	11	4	3
тежина во *kg*	55	58	61	64	67	70	73	76
број на уче.	2	5	9	13	12	10	6	3

11. Врз основа на примерокот даден во следната табела спореди ги распределбите на обележјата просечна месечна потрошувачка на месо и млеко во едно четиричлено семејство.

Млеко во *l*	10	14	18	22	26	30	34	38
Семејства	4	6	7	13	15	12	6	5
Месо во *kg*	5	7	9	11	13	15	17	19
број на уче.	3	6	10	14	13	11	7	4

ОДГОВОРИ И УПАТСТВА НАНЕКОИ ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

I глава

21. а) $\alpha = 55^\circ$ б $\alpha = 54^\circ$ в) $\alpha = 38^\circ$ г) $\alpha = 73^\circ$

22. а) $\alpha = 40^\circ$ б) $\alpha = 32^\circ$ **23.** а) $\alpha = 45^\circ$ б) $\alpha = 40^\circ$ в) $\alpha = 20^\circ$

25. а) 5 б)1 в) 1 **26.** а) $\sin 44^\circ > \sin 33^\circ$

28. а) $\cos 17^\circ > \cos 18^\circ$ **33.** а) $0^\circ \leq \alpha < 45^\circ$ **34.** а) 2 б) 5 в) 7

35. а) 1 б) -5 в) 1 **38.** б) $\sin \alpha = 0{,}8$; $tg\alpha = \frac{3}{4}$; $ctg\alpha = \frac{4}{3}$

42. $\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha} = 4 \Rightarrow \frac{2tg\alpha + 1}{tg\alpha} = 4 \Rightarrow 2tg\alpha = 1 \Rightarrow tg\alpha = \frac{1}{2}$

50. *Упатство.* Висината ја дели основата на два еднакви дела. $tg\alpha = \frac{15}{12{,}5}$; $\alpha = arctg\,\frac{15}{12{,}5}$;

$\frac{\beta}{2} = 90^\circ - \alpha$ ..

II глава

3. а) $\operatorname{Re} z = \frac{2+\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{1}{3}$ б) $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. а) $z = 1 + i$ б) $z = 2\sqrt{3}$

5. а) $x = 2, y = -2$ б) $x = 1, y = 1$

8. а) $14 - 3i$ в) $9x + 2yi$

10. а) $y = -3, x = 2$ в) $x = 1, y = 1$

14. а) $|2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$ б) $\sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58}$

г) $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ д) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9+16}{36}} = \frac{5}{6}$

18. а) $\frac{1}{z} = \frac{1}{5+12i} = \frac{5-12i}{(5+12i)(5-12i)} = \frac{5-12i}{169}$ в) $\frac{1}{z} = \frac{1}{-7+2i} = \frac{-7-2i}{(-7+2i)(-7-2i)} = \frac{-7-2i}{49+4} = \frac{-7-2i}{53}$

21. а) 0 **28.** а) $|z - w| = |2 + 1| = \sqrt{5}$ б) $|z - w| = |3 + 5i| = \sqrt{34}$

29. а) Кружница со центар во $O(0{,}0)$ и радиус 1.

б) Симетралата на точките чии се крајни точки комплексните броеви 1 и i .

III глава

5. а) $3x(2x - 1)$ б) $\left(x - \sqrt{6}\right)\left(x + \sqrt{6}\right)$ в) $(x - 3)(x + 2)$

г) Не се разложува во множеството реални броеви, но во множеството комплексни броеви имаме $\left(x - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

6. а) 0 и $\frac{3}{2}$ б) -2 и 5 **13.** а) $7, -4$ б) $1, -13$

14. а) $1{,}4\sqrt{2} - 7$ б) $4 + 2\sqrt{5}, 2 + 2\sqrt{5}$ в) $1 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$

17. *Упатство:* Дискриминантата на равенката треба да е еднаква на 0 .

21. а) $x_1 + x_2 = -\frac{31}{4}$, $x_1 x_2 = \frac{71^2}{4}$

24. $\frac{189}{125}$ 29. *Упатство:* Искористиги виетовите формули $6y^2+5y-3=0$

33. а) не б) не в) не г) не

37. а) $x\neq\pm2$ б) $a\neq0,-1,-4$

39. а,б) Воведи ја смената $x+\frac{1}{x}=t$ в) Воведи ја смената $x-\frac{1}{x}=t$

49. *Упатство. а) и б)* Разгледај ги дефиниционите области.

51. а) Воведи ја смената $x^2+x=t$ б) Воведи ја сманата $x^2-x+9=t^2$

62. 5,6 и 7 или $-5,-6$ и -7 63. 5,6 или $-6,-5$ 64. 56 65. 64

69. 3 часа и 5 часа 70. 30 дена и 20 дена 71. $6m$ и $4m$

72. $x=\frac{R}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)$ 73. $x=R$ или $x=\frac{5}{6}R$

IV глава

4. а) $y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$ 5. а) $f(x)=3-t$ 8. а) $f(x)=-\frac{5}{2}x^2+\frac{9}{2}x+1$

12. а) $f(x)=3x^2+4$ б) $f(x)=3x^2-3$

16. Минимум за $x=-3$, $f(-3)=0$. Опага $(-\infty,-3)$ и расте од $(-3,\infty)$.

21. а) $T\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right), x=-\frac{1}{2}$ 22. а) $x=-3, y_{\max}=5$ б) $x=3, y_{\min}=-2$

23. $m=\frac{5}{2}$ 25. $P(x)=x(20-x)=-x^2+20$ Најди максимум за $P(x)$.

26. Ако едниот собирок е x, другиот $18-x$, па имаме $S(x)=x^2+(18-x)^2$ И најди минимум пд оваа функција.

27. Нека страната на квадратот е x, и димензиите на правоаголникот се x и $3x$. Тогаш $4y+2(3x+x)=56$ и $P=y^2+3x$, па е $P(x)=7x^2-56x+196$. Сега минимумот е за $x=4$ и притоа $y=6$.

28. $3\sqrt{2}$

35. *Упатств:.* а) и б) На интервалите $(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$, каде x_1 и x_2 се нули на функцијата.
в) На интервалот (x_1,x_2), каде x_1 и x_2 се нули на фунцијата.

38. *Упатство:* $m<0$ и $D<0$

39. а)Именителот има најмала вредност б) Именителот има најголема вредност

42. а) Нацртај ги параболита $y=x^2$ и правата $y=2x-6$.

44. в) $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ г) $(-\infty,+\infty)$

47. *Упатство:* $\left[\begin{array}{l}x^2-5x+6>0\\ x^2+x+1>0\end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l}x^2-5x+6<0\\ x^2+x+1<0\end{array}\right.$ 51. Упатство: а) $D<0$ б) $D>0$

V глава

9. *Упатство:* Искористи ја идејата од конструкцијата на четврта пропорционала.

16. *Упатство:* Конструирај помошен правоаголен триаголник, освен во четвртиот случај кога помшниот триаголник е со страин b ,$\frac{b}{2}$ и t_b.

19. а) Конструирај помошен триаголник со страин $a,\frac{c}{2}$ и t_c

б) Конструирај помошен триаголник со страин $c,\frac{2}{3}t_a,\frac{2}{3}t_b$.

20. а) Констриуирај помошен правоаголен триаголник со катета h_c и хипотенуза t_c.

21. а,б) Искористи дека страната c се гледа под агол γ.

д) Во кружница со радиус R конструирај периферен агол γ, а потоа од средината на добиената тетива опишИ кружница со радиус t_c.

28. Конструирај помошен триаголник со страин $a, \frac{d}{2}$ и агол еднаков на аголот мегу дијагоналите.

30. а) Конструирај помошен рамнокрак триаголник со: основа $a-b$ и агол при основата α.

б) Конструирај правоаголен триаголник со катети $a-b$ и h.

VI глава

6. *Упатство:* Од $a:b=3:5$ следува $a=3k, b=5k$ и сега $15k^2=240$.

8. *Упатство:* Дијагоналата на правоаголникот е $d=25cm$.

9. *Упатство:* Од $d_1:d_2=3:4$ следува $d_1=3k$, $d_2=4k$ па е $\frac{12k^2}{k}=96$ итн.

16. *Упатство:* Висината спуштена кон основата е $h=\sqrt{10^2-\left(\frac{12}{2}\right)^2}=8$.

20. Катетите се $a=8k, b=5k$, па $80=20k^2$ т.е. $k=2$. Значи $a=16, b=10$ и сега $c=\sqrt{16^2+10^2}=\sqrt{356}$, па е $P=sr$.

24. *Упатство:* Искористи ја Хероновата формула, а потоа формулите $P=sr$ и $P=\frac{abc}{4R}$.

26. $8cm$ **27.** $6cm, 9cm$ и $12cm$ **28.** $1224cm^2$

30. Искористи $r=\frac{P}{s}$, $h_a=\frac{2P}{b}$ И $h_c=\frac{2P}{c}$ **35.** а) $15cm$ и $9cm$ б) $16cm$ и $8cm$

39. $1m$ **45.** $3m^2$ **48.** $1m$ **49.** $120cm^2$

54. а) $P_5=\frac{5}{4}a^2 ctg 36^\circ$ б) $P_6=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ в) $P_8=2a^2 ctg 22^\circ 30'$

55. а) $P_8=2\sqrt{2}R^2$ б) $P_9=\frac{9}{2}R^2\sin 40^\circ$ в) $P_{12}=3R^2$

56. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}Q$ б) $\frac{\sqrt{2}}{2}Q$.

61. *Упатство:* Пресметај ја разликата на радиусите од условот $L+1=L_1$ т.е. $2\pi R+1=2(R+h)\pi$

67. $26cm$ **77.** $11^\circ 15'$ **79.** $9\pi cm^2$ (Упатство: $R^2-r^2=3^2$, направи цртеж).

83. а) $\frac{\pi-2}{2}a^2$ б) $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{2}a^2$ в) $\frac{\pi-2}{4}a^2$

VII глава

9. $64m^2$ **12.** $54cm^2$ **14.** $8\sqrt{3}cm^2$ **17.** $\frac{126}{5}cm^2$ **19.** $1dm$

22. $\sqrt{3}$ **23.** $2\left(9\sqrt{3}+\sqrt{23}\right)$ **27.** $14cm$ **30.** $776cm^2$

35. $1128cm^2$ **36.** $36\left(5+\sqrt{91}\right)cm^2$ **40.** а) осумпати б) 125 пати в) n^3 пати

47. $8cm, 26cm$ и $30cm$ **55.** Упатство: $V=\frac{a^2H}{3}$, каде $a=200cm$, $h=400cm$, а тежината е $2{,}5Vgr$.

56. $\frac{8\sqrt{2}}{3}dm^3$ **58.** Упатство: Искористи дека $V=\frac{BH}{3}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}h$ И $V_1=\frac{x^3\sqrt{3}}{4}$ и $V_1=V$.

65. $20cm^2$ и $45cm^2$

ИНДЕКС НА ПОИМИ

ЛИТЕРАТУРА

1. **Андреев, П. П; Шувалова, Э. З.:** *Геометрия*, Наука, Москва, 1965
2. **Андров, И. К.; Окунев, А. К.:** *Курс тригонометрии*, Просвещение, Москва, 1967
3. **Бандиќ, И. М.; Илиќ-Дајовиќ, М.:** *Математика за* III *клас гимназија*, Просветно дело, Скопје, 1970
4. **Bogoslavov, T. V.:** *Zbirka rešenih zadataka iz elementarne algebre, za* II *razred gimnazije*, ZUNS, Beograd, 1975
5. **Димоски, Д.; Тренчевски, К.; Малчески, Р.; Јосифовски, Б.:** *Практикум по елементарна математика*, Просветно дело, Скопје, 1993
6. **Đurković, R.:** *Zbirka riješenih zadataka iz elementarne algebre*, IKTP “Sarajevo”, 1990
7. **Živković, R.:** *Matematika* 2, Svjetlost, Sarajevo, 1991
8. **Илиевски, Б.; Пандевски, Н.; Малчески, Р.; Бабинкостова, Л.:** *Приемни испити на Институт за математика*, ПМФ, Скпје, 2002
9. **Јанев, И., Самарџиски, А.:** *Збирка задачи по математика за* II *година*, Просветно дело, Скопје, 1994
10. **Јанев, И., Петрески, Н.; Тренчевски, Г.:** *Збирка задачи по математика за* I *година*, Просветно дело, Скопје, 1991
11. **Јаношевић, Д.; Чепинац, Н.:** *Збирка задатака из планиметрија*, Знање, Београд, 1952
12. **Карнацевич, Л. С.; Карнацевич, В. С.:** *Сборник от въпроси и задачи по планиметрия*, Народна просвета, София, 1963
13. **Кочетков, Е.С.; Кочеткова, Е.С.:** *Алгебра и елементарные функции, часть* 1, Просвещение, Москва, 1972
14. **Kurepa, Đ.; Škreblin, S.; Brečević, J.:** *Matematika za* III *razred gimnazije*, Školska knjiga, Zegreb, 1966
15. **Kurepa, A.; Kurepa, S.:** *Matematika* 2, Školska knjiga, Zagreb, 1987
16. **Мадески, Ж.; Самарџиски, А.; Целакоски, Н.:** *Геометрија за* II *клас на средното образование*, Просветно дело, Скопје, 1976
17. **Мадески, Ж.; Самарџиски, А.; Целакоски, Н.:** *Збирка задачи по геометрија за средното образование*, Просветно дело, Скопје, 1976
18. **Малчески, Р.; Малчески. А.:** *Избрани содржини од елементарна математика*, СДМИ, Скопје, 1994
19. **Малчески, Р. ; Малчески, А.:** *Херонови триаголници,* СИГМА 28, Скопје, 1994

20. **Малчески, Р.; Малчески. А.:** *За златниот пресек,* Нумерус, XXII 2,3, Скопје, 1996
21. **Малчески, Р.:** *Методика на наставата по математика (општ дел),* Алфа ´94, Скопје, 2001
22. **Малчески, Р.:** *Две задачи за правилен шестаголник*, Нумерус, XXI 4, Скопје, 1996
23. **Малчески, Р.:** *Како да и помогнете на мува која не знае геометрија?*, Нумерус, XXI 2,3, Скопје, 1996
24. **Обрадовић, М.; Георгијевић, Д.:** *Одабрани задаци за други разред средњих школа*, Математископ, Београд, 1995
25. **Перепьолкин, Д.И.:** *Курс по елементарна геометрия, част* I, Наука и изкуство, София, 1965
26. **Перепьолкин, Д.И.:** *Курс по елементарна геометрия, част* II, Наука и изкуство, София, 1965
27. **Рибкин, Н.:** *Збирка задачи по геометрија,* I *дел (планиметрија),* Просветно дело, Скопје, 1971
28. **Рибкин, Н.:** *Збирка задачи по геометрија,* II *дел (стереометрија),* Просветно дело, Скопје, 1967
29. **Сканави, М. И.:** *Сборник задача по математике*, Высшая школа, Москва, 1972
30. **Смогоржевски, А. С.:** *Линийката в геометричните построения*, Техника, София, 1964
31. **Стојановић, В.:** *Математика за матуранте*, Математископ, Београд, 1996
32. **Трајков, И.; Петрески, Н.:** *Геометрија за* II *клас*, Просветно дело, Скопје, 1983
33. **Тренчевски, Г.; Јанев, И.:** *Алгебра за* II *клас,* Просветно дело, Скопје, 1983
34. **Целакоски, Н.; Мадевски, Ж.:** *Математика* 2, Просветно дело, Скопје, 1990