Задача 1

Алфавит состоит из n букв. *Слогом* назовём любую упорядоченную пару, состоящую из двух не обязательно различных букв. Некоторые слоги считаются *неприличными*. *Словом* является любая (конечная или бесконечная) последовательность букв, в которой нет неприличных слогов. Найдите наименьшее возможное количество неприличных слогов, при котором не существует бесконечных слов.

Ответ. $\frac{n(n+1)}{2}$.

Первое решение. Докажем, что количество неприличных слогов не может быть меньше $\frac{n(n+1)}{2}$, индукцией по n. При $n = 1$ алфавит состоит из одной буквы a, и единственный слог aa должен быть неприличным, иначе существует бесконечное слово $aaa\ldots$.

Рассмотрим алфавит из n букв. Хотя бы для одной буквы должны быть неприличными все начинающиеся с неё слоги (в противном случае для каждой буквы x есть буква, которую можно написать после x, действуя таким образом, можно написать бесконечное слово). Остальные $n-1$ букв по предположению индукции должны образовывать не менее $\frac{(n-1)n}{2}$ неприличных слогов (иначе бесконечное слово удастся составить уже из этих $n-1$ букв). Таким образом, всего получается не менее $\frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ неприличных слогов, что и требовалось доказать.

Пример $\frac{n(n+1)}{2}$ неприличных слогов, для которых не существует бесконечных слов в алфавите $a_1, a_2, \ldots, a_n$, доставляют все слоги вида a_ia_j с $i \geq j$. При таких неприличных слогах в любом слове индексы букв должны строго возрастать, и слово не может быть бесконечным.

Второе решение. Для каждой буквы a слог aa должен быть неприличным, чтобы нельзя было написать бесконечное слово $aaa\ldots$. Для двух различных букв a и b хотя бы один из слогов ab и ba должен быть неприличным, чтобы нельзя было написать бесконечное слово $ababab\ldots$

Поэтому количество неприличных слогов должно быть не менее $n + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Пример с таким количеством неприличных слогов приведён в первом решении.

Схема оценивания. Частичные продвижения

1.1. Замечено, что каждый слог вида aa неприличный: .... 0 баллов

1.2. Замечено, что хотя бы один из слогов ab и ba неприличный: .... 1 балл

1.3. Замечено, что хотя бы для одной буквы должны быть неприличными все начинающиеся с неё слоги: 1 балл

1.4. Доказательство того, что неприличных слогов не менее $\frac{n(n+1)}{2}$: .... 3 балла

II. Пример.

2.1. Верный пример $\frac{n(n+1)}{2}$ неприличных слогов с доказательством: .... 3 балла

2.2. Верный пример $\frac{n(n+1)}{2}$ неприличных слогов без доказательства: .... 2 балла

III.

3.1. Решение задачи в предположении, что не существует слогов из двух одинаковых букв, оценивается не более чем 4 баллами.

3.2. Решение задачи для конечного количества конкретных значений числа n оценивается .. в 0 баллов.

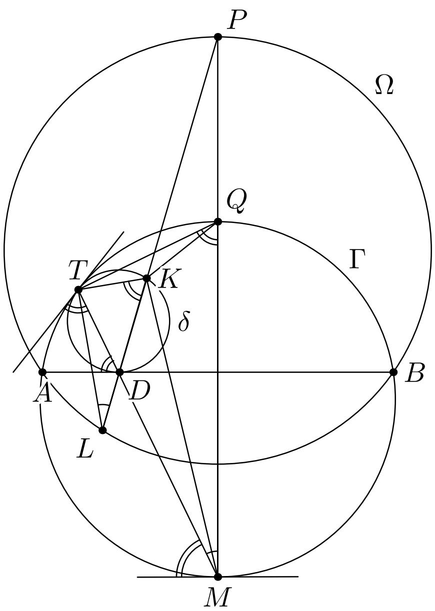
Баллы за частичные продвижения внутри одного пункта не суммируются друг с другом.

Полное решение.

4.1. Полное решение задачи оценивается .... в 7 баллов.

4.2. Решение задачи, которому для полноты не хватает только обоснования приведённого примера, оценивается .... в 6 баллов.

Задача 2



Окружности Ω и Γ пересекаются в точках A и B. Линия центров этих окружностей пересекает Ω и Γ в точках P и Q соответственно так, что они лежат по одну сторону от прямой AB, причём точка Q расположена ближе к этой прямой. По ту же сторону от AB взята окружность δ, касающаяся отрезка AB в точке D и Γ в точке T. Прямая PD вторично пересекает δ и Ω в точках K и L соответственно. Докажите, что $\angle QTK = \angle DTL$.

Первое решение. Без потери общности, пусть D лежит ближе к A чем к B. Пусть M — середина дуги AB окружности Γ, не содержащей точку Q. По лемме Архимеда точки T, D, M лежат на одной прямой. Тогда, с одной стороны, $DA \cdot DB = DT \cdot DM$, а с другой, $DA \cdot DB = DP \cdot DL$, то есть $DT \cdot DM = DP \cdot DL$, поэтому четырехугольник $LTPM$ вписанный, откуда $\angle KLT = \angle QMT$. Так как δ касается Γ, то $\angle TKD = \angle TQM$, как углы между прямой TM и общей касательной в точке T. В треугольниках TKL и TQM нашлись две пары равных углов, поэтому, в них $\angle LTK = \angle MTQ$, откуда $\angle LTD = \angle KTQ$.

Второе решение. Как и в первом решении, введём точку M, диаметрально противоположную точке Q в окружности Γ и звметим, что она лежит на прямой TD по лемме Архимеда. По той же лемме, существует окружность μ, касающаяся прямой AB и окружности Ω в точках D и L соответственно. Радикальный центр X окружностей Γ, μ и δ — это точка пересечения AB и касательных к Γ и Ω в точках T и L соответственно. Следовательно, $XL = XT = XD$. и X — центр окружности, описанной около треугольника TDL. Значит, $\angle DTL = \frac{1}{2}\angle DXL = 90^\circ - \angle XDL = 90^\circ - \angle KDB$. С другой стороны, $\angle QTM = 90^\circ$ как опирающийся на диаметр, поэтому $\angle QTK = 90^\circ - \angle DTK = 90^\circ - \angle KDB = \angle DTL$.

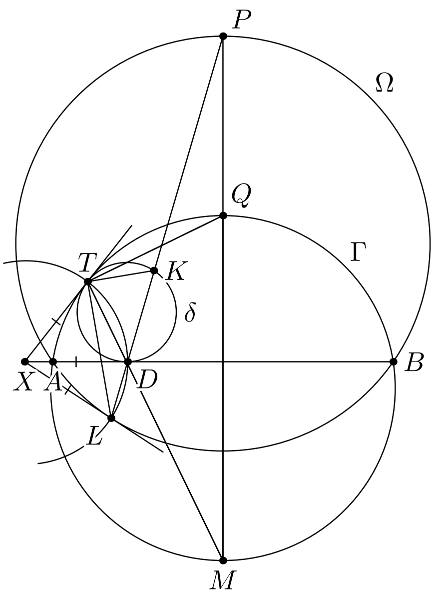


Схема оценивания

Недоведенное счетное решение (в координатах, в комплексных числах, в векторах, тригонометрическое, и т.д.): .... **0 баллов**

Частичные баллы к первому решению.

1.1. Доказано, что точки T, D, M лежат на одной прямой: **0 баллов**

1.2. Доказано, что $LTPM$ – вписанный четырехугольник: ...**3 балла**

1.3. Доказано равенство $\angle TKD = \angle TQM$ или вписанность четырехугольника $TKQP$: .... **3 балла**

Частичные баллы ко второму решению.

2.1. Доказано, что точки T, D, M лежат на одной прямой: **0 баллов**

2.2. Введена в рассмотрение окружность μ: .... **0 баллов**

2.3. Доказано, что касательные к δ (или Γ) и μ в точках T и L пересекаются на прямой AB, или доказано, что на этой прямой лежит центр описанной окружности треугольника TDL: .... **3 балла**

2.4. Один из фактов в 2.3 явно сформулирован (но не доказан), **и** утверждение задачи сведено к этому факту: .... **3 балла**

Частичные баллы к *разным* решениям не суммируются между собой.

Лишь *формулировки* фактов, упомянутых выше, без явного доказательства оцениваются в 0 баллов.

Задача 3

Натуральное число d не является точным квадратом. Для каждого натурального числа n обозначим через $s(n)$ количество единиц среди первых n цифр двоичной записи числа $\sqrt{d}$ (цифры до запятой тоже учитываются). Докажите, что существует такое натуральное A, что при всех натуральных $n \geq A$ выполнено неравенство $s(n) > \sqrt{2n} - 2$.

Решение. Нам потребуется следующее соображение: если двоичная запись числа конечна и содержит k единиц, то любое представление этого числа в виде суммы степеней двойки с целыми показателями содержит не менее k слагаемых. Действительно, представление числа в виде суммы *различных* степеней двойки с целыми показателями (то есть двоичная запись) единственно. С другой стороны, если в представлении числа суммой степеней двойки есть одинаковые слагаемые, их количество можно уменьшать, производя замены вида $2^s + 2^s = 2^{s+1}$; рано или поздно такие замены закончатся, и тогда все слагаемые станут различными, то есть и после сокращений их будет не меньше k.

Пусть m – количество разрядов в двоичной записи числа $[\sqrt{d}]$, то есть $2^{m-1} < \sqrt{d} < 2^m$. Запишем первые n цифр двоичной записи числа $\sqrt{d}$:

$$\sqrt{d} - 2^{m-n} < \sum_{i=1}^{k} 2^{s_i} < \sqrt{d}$$

(неравенства строгие, так как $\sqrt{d}$ иррационально). Возводя в квадрат, получаем

$$d - 2^{1+m-n}\sqrt{d} + 2^{2m-2n} < \sum_{i=1}^{k} 2^{2s_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq k} 2^{s_i+s_j+1} < d.$$

Левая часть больше, чем $d - 2^{1+2m-n}$, так что

$$d - 2^{1+2m-n} < \sum_{i=1}^{k} 2^{2s_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq k} 2^{s_i+s_j+1} < d.$$

Средняя часть последнего неравенства меньше натурального числа d на число, меньшее 2^{1+2m-n}, то есть при $n > 2m+1$ в её двоичной записи не менее $n - 2m - 1$ единиц. С другой стороны, она представлена в виде суммы $\frac{k(k+1)}{2}$ степеней 2. В силу замечания из первого абзаца получаем $\frac{k(k+1)}{2} \geq n - 2m - 1$. Значит, если $k \leq \sqrt{2n} - 2$, то

$$\frac{k(k+1)}{2} \leq \frac{(\sqrt{2n}-2)(\sqrt{2n}-1)}{2} = n - \frac{3}{2}\sqrt{2n} + 1,$$

что при достаточно больших n меньше, чем $n - 2m - 1$. Значит, при всех достаточно больших n имеем $k > \sqrt{2n} - 2$, что и требовалось доказать.

Схема оценивания

1. Замечено, что квадрат суммы k степеней двойки представляется в виде суммы $\frac{k(k+1)}{2}$ степеней двойки 1 балл

2. Доказана оценка $s(n) > \sqrt{2n} - C$ с некоторым постоянным C .... 5 баллов (не суммируется с предыдущим).

Problem 1

In an alphabet of n letters, a *syllable* is any ordered pair of two (not necessarily distinct) letters. Some syllables are considered *indecent.* A *word* is any sequence, finite or infinite, of letters, that does not contain indecent syllables. Find the least possible number of indecent syllables for which infinite words do not exist.

Answer. $\frac{n(n+1)}{2}$.

First solution. We will prove by induction on n that the number of indecent syllables cannot be less than $\frac{n(n+1)}{2}$. For $n = 1$ the alphabet contains only one letter, say, a, and the only syllable aa has to be indecent, otherwise an infinite word $aaa\ldots$ exists.

Consider an alphabet of n letters. There is at least one letter such that all the syllables beginning with it are indecent (otherwise for each letter x there is a letter that can be written after x; acting in this way we can write an infinite word). By the induction hypothesis, the remaining $n-1$ letters form at least $\frac{(n-1)n}{2}$ indecent syllables (otherwise there is an infinite word made of those $n-1$ letters). Thus, in total we have at least $\frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ indecent syllables, q.e.d.

An example of $\frac{n(n+1)}{2}$ indecent syllables for which there is no infinite word in the alphabet $a_1, a_2, \ldots, a_n$ is the set of all syllables $a_i a_j$ with $i \geq j$. When all such syllables are indecent, the indices of letters in any word form a strictly increasing sequence, and the word cannot be infinite.

Second solution. For every letter a, the syllable aa should be indecent, otherwise an infinite word $aaa\ldots$ exists. Moreover, for any two different letters a and b, at least one of the syllables ab and ba should be indecent, otherwise there exists an infinite word $ababab\ldots$

Therefore, the number of indecent syllables is at least $n + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. An example with this number of indecent syllables is presented in the first solution.

Marking scheme

Partial progress

Part I. Lower bound.

1.1. Observation that every syllable of the form aa is indecent: .... 0 points.
1.2. Observation that at least one of the syllables ab and ba is indecent: .... 1 point.
1.3. Observation that there exists a letter such that all syllables starting from that lettes are indecent: 1 point.
1.4. A complete proof that the number of indecent syllables is at least $\frac{n(n+1)}{2}$: .... 3 points

Part II. Construction.

2.1. A correct example of $\frac{n(n+1)}{2}$ indecent syllables, with proof: .... 3 points.
2.2. An example of $\frac{n(n+1)}{2}$ indecent syllables, without proof: .... 2 points.

Part III.

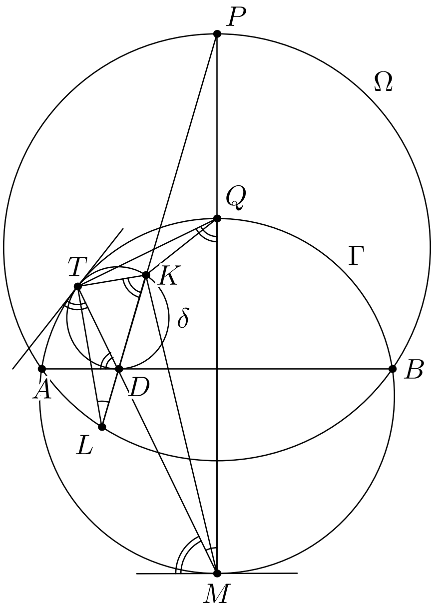
3.1. Solution made on the supposition that there are no syllables with two identical letters: at most 4 points.
3.2. Solution of the problem for a finite number of particular values of n is worth .... 0 points.

Points for partial progress inside one part are not to be added to each other.

Complete solution.

4.1. A complete solution is worth .... 7 points.
4.2. If the construction lacks the proof in an otherwise complete solution, it is worth .... 6 points.

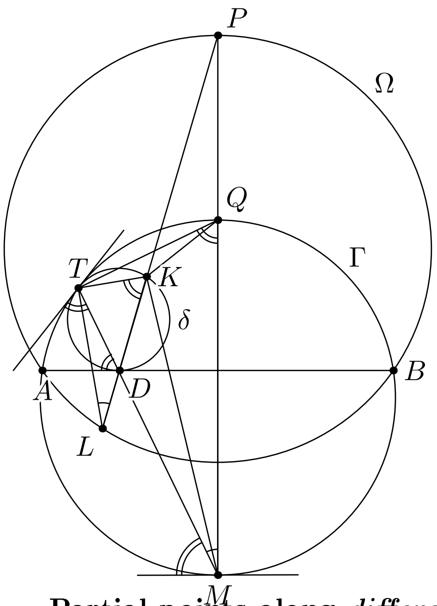
Problem 2



Circles Ω and Γ meet at points A and B. The line containing their centres intersects Ω and Γ at points P and Q, respectively, such that these points lie on the same side of the line AB and point Q is closer to AB than point P. The circle δ lies on the same side of the line AB as P and Q, touches the segment AB at point D and touches Γ at point T. The line PD meets δ and Ω again at points K and L, respectively. Prove that $\angle QTK = \angle DTL$.

First solution. Assume without loss of generality that D is nearer to A than to B. Let M be the midpoint of the arc AB of Γ that does not contain Q. By Archimedes' lemma, the points T, D, and M are collinear. Then, on the one hand, $DA \cdot DB = DT \cdot DM$, and on the other hand $DA \cdot DB = DP \cdot DL$, that is, $DT \cdot DM = DP \cdot DL$, therefore quadrilateral $LTPM$ is cyclic, hence $\angle TLK = \angle TMQ$. Since δ touches Γ, we have $\angle TKL = \angle TQM$ as angles between the line TM and the common tangent at point T. The triangles LTK and MTQ have two pairs of equal angles, therefore $\angle LTK = \angle MTQ$, whence $\angle LTD = \angle KTQ$.

Second solution. As in the first solution, we introduce the point M opposite to Q in Γ and notice that the points M, T, and D are collinear, due to Archimedes' lemma. By the same lemma, there exists a circle μ tangent to AB and to Ω at D and L, respectively. The radica; center X of the circles Γ, μ, and δ is the meeting point of AB and the tangents to Γ and Ω at T and L, respectively. Hence $XL = XT = XD$,.and thus X is the circumcenter of the triangle TDL. Therefore, $\angle DTL = \frac{1}{2}\angle DXL = 90^\circ - \angle XDL = 90^\circ - \angle KDB$. On the other hand, $\angle QTM = 90^\circ$ by Tpales' theorem, and hence $\angle QTK = 90^\circ - \angle DTK = 90^\circ - \angle KDB = \angle DTL$.



Marking scheme

Incomplete analytic solution (using coordinates, complex numbers, vectors, trigonometry and so on) is worth **0 points**

Partial points along the first solution.

1.1. Proof that T, D, and M are colinear: .... **0 points**

1.2. Proof that $LTPM$ is cyclic: .... **3 points**

1.3. Proof that $\angle TKL = \angle TQM$ or, equivalently, that $TKQP$ is cyclic: **3 points**

Partial points along the second solution.

2.1. Ptoof that T, D, and M are collinear: .... **0 points**

2.2. Just an introduction of circle μ: .... **0 points**

2.3. Proof that the tangents to δ (or Γ) and μ at T and L meet on AB, ot, equivalently, proof that the circumcenter of TDL lies on AB: ..... **3 points**

2.4. One of the facts in 2.3 is explicitly formulated (yet not proved), **and** the problem is reduced to that fact: .... **3 балла**

Partial points along *different* solutions are not to be added to each other.
Just *stating* the facts mentioned above without direct proofs is worth no points.

Problem 3

Positive integer d is not a perfect square. For each positive integer n, let $s(n)$ denote the number of digits 1 among the first n digits in the binary representation of $\sqrt{d}$ (including the digits before the point). Prove that there exists an integer A such that $s(n) > \sqrt{2n} - 2$ for all integers $n \geq A$.

Solution. We will make use of the following

Observation. If the binary representation of a number is finite and contains k digits 1, then every representation of this number as a sum of powers of 2 with integral exponents contains at least k terms.

Indeed, the representation of a number as a sum of powers of 2 with *distinct* integral exponents (that is, its binary representation) is unique. On the other hand, if a representation of the number as a sum of powers of 2 contains equal terms, the number of terms can be reduced (by changes of the form $2^s + 2^s = 2^{s+1}$) until all the terms are distinct.

Let m be the number of digits in the binary representation of $[\sqrt{d}]$ (that is, $2^{m-1} < \sqrt{d} < 2^m$). Then for the first n digits of the binary representation of $\sqrt{d}$ we have the inequalities

$$\sqrt{d} - 2^{m-n} < \sum_{i=1}^{k} 2^{s_i} < \sqrt{d}$$

(the inequalities are strict, since $\sqrt{d}$ is irrational).

Squaring this inequality we get

$$d - 2^{1+2m-n} < d - 2^{1+m-n}\sqrt{d} + 2^{2m-2n} < \sum_{i=1}^{k} 2^{2s_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq k} 2^{s_i+s_j+1} < d.$$

The middle part of this inequality is less than the positive integer d by a number smaller than 2^{1+2m-n}, that is, for $n > 2m+1$ its binary representation contains at least $n - 2m - 1$ digits 1. On the other hand, it is a sum of $\frac{k(k+1)}{2}$ powers of 2. It follows from the above observation that $\frac{k(k+1)}{2} > n - 2m - 1$. If $k \leq \sqrt{2n} - 2$, then

$$\frac{k(k+1)}{2} \leq \frac{(\sqrt{2n}-2)(\sqrt{2n}-1)}{2} = n - \frac{3}{2}\sqrt{2n} + 1,$$

which is less than $n - 2m - 1$. Thus $k > \sqrt{2n} - 2$ for large enough n, q.e.d.

Marking scheme

1. An observation that the square of a sum of k powers of 2 is a sum of $\frac{k(k+1)}{2}$ powers of 2: ....1 point.
2. The inequality $s(n) > \sqrt{2n} - C$ is proved for some constant C:5 points (not additive with the above point).

Задача 4

Учитель выдал детям 10 различных положительных чисел. Серёжа вычислил все 45 их попарных сумм; среди них нашлось пять равных чисел. Петя вычислил все 45 их попарных произведений. Какое наибольшее количество из них могли оказаться равными?

Ответ. 4.

Решение. Пусть среди попарных сумм встречается пять раз число $2s$. Очевидно, одно и то же число не может встречаться в двух суммах, равных $2s$ (вторые слагаемые тогда тоже должны были бы совпадать). Поэтому в пяти суммах, равных $2s$, встречаются по одному разу все 10 чисел. В каждой из них одно слагаемое меньше s, а другое больше. Упорядочим слагаемые, меньшие s, по возрастанию: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Записывая $2s = a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = a_3 + a_8 = a_4 + a_7 = a_5 + a_6$, получаем упорядочение всех десяти исходных чисел: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8 < a_9 < a_{10}$.

Если и некоторое произведение t^2 встречается среди попарных произведений пять раз, то аналогичным образом каждое из десяти чисел встречается ровно в одном из пяти произведений, равных t^2. Если числа, меньшие t, в этих произведениях суть $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5$ и $t^2 = b_1b_{10} = b_2b_9 = b_3b_8 = b_4b_7 = b_5b_6$, то $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 < b_6 < b_7 < b_8 < b_9 < b_{10}$ – также упорядочение исходных чисел. Но тогда $a_i = b_i$ при всех i, то есть $a_1 + a_{10} = a_2 + a_9$ и $a_1a_{10} = a_2a_9$. Отсюда следует, что $a_1 = a_2$ и $a_9 = a_{10}$, противоречие.

Пример, в котором равны четыре произведения, строится, например, так. Положим $x_1 = 0,9$, $x_{2k} = 2 - x_{2k-1}$ при $1 \le k \le 5$ и $x_{2k+1} = \frac{1}{2k}$ при $1 \le k \le 4$. При этом $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6 = x_7 + x_8 = x_9 + x_{10} = 2$ и $x_2x_3 = x_4x_5 = x_6x_7 = x_8x_9 = 1$. Поскольку, очевидно, $x < \frac{1}{2-x} < 1$ при $0 < x < 1$, имеем $x_1 < x_3 < x_5 < x_7 < x_9 < 1 < x_{10} < x_8 < x_6 < x_4 < x_2$, то есть все построенные 10 чисел действительно различны.

Схема оценивания

Доказательство того, что в 5 равных суммах встречаются все числа по одному разу: .... 0 баллов
Доказательство того, что равных произведений не более 4: .... 3 балла
Пример 4 равных произведений: .... 3 балла
Полное решение: .... 7 баллов
В примере не доказано, что числа различны: .... −1 балл

Задача 5

Дана таблица $m \times n$, где mn делится на 6. В этой таблице *полоской* назовём любой прямоугольник 1×3 или 3×1, а *доминошкой* – любой прямоугольник 1×2 или 2×1. Таблицу замостили полосками. Докажите, что поверх этого замощения таблицу можно замостить доминошками так, что в каждой полоске две клетки будут накрыты одной доминошкой и ещё одна – другой. (При замощении прямоугольники покрывают всю таблицу и не перекрываются между собой.)

Решение. Не ограничивая общности, предположим, что число m чётное. Рассмотрим отдельно два случая, в зависимости от чётности числа n.

Случай 1: n чётно. Разобьём таблицу на квадратики 2×2. Заметим, что в каждой полоске некоторые две соседние клетки лежат в одном квадратике, покроем эти клетки доминошкой. Теперь для каждого квадратика выполнена одна из трёх возможностей: 1) все его клетки покрыты доминошками; 2) пара соседних клеток покрыта доминошкой, а две другие клетки не покрыты – покроем их новой доминошкой; 3) все четыре клетки не покрыты – покроем их двумя новыми доминошками. Нетрудно видеть, что полученное замощение удовлетворяет условию задачи.

Случай 2: n нечётно. Разобьем прямоугольник $m \times (n-1)$ на квадратики 2×2, а оставшийся столбец $m \times 1$ – на прямоугольники 2×1. Снова, в каждой полоске некоторые две соседние клетки лежат в одном квадратике 2×2 или прямоугольнике 2×1, поэтому мы сможем получить требуемое замощение аналогично первому случаю.

Схема оценивания

Рассмотрение случаев, в которых m или n принимает конечное число значений: .... 0 баллов

Попытки пошагового построения требуемого замощения, которые не привели к полному решению: ... 0 баллов

Введение в рассмотрение графа с вершинами–полосками и рёбрами, соединяющими пары полосок, которые можно замостить тремя доминошками с соблюдением условия: .... 0 баллов

Доказательство того, что граф, описанный выше, является двудольным : .... 0 баллов

Решение задачи в предположении, что m и n чётные: .... 4 балла

Задача 6

Медианы треугольника ABC пересекаются в точке G. Среди шести углов GAB, GAC, GBA, GBC, GCA, GCB есть не менее трёх, каждый из которых не меньше α. При каком наибольшем α это могло произойти?

Ответ. $\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Решение. Обозначим $\alpha_0 = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Для начала предъявим треугольник, в котором три из рассмотренных углов не меньше α_0. Это будет прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90^\circ$, $AC = 2$ и $BC = \sqrt{2}$. Тогда $\angle BAC = \alpha_0$. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно. Прямоугольные треугольники NCB и BCA подобны, так что $\angle NBC = \alpha_0$. Треугольник MAC — равнобедренный, поэтому $\angle MCA = \angle MAC = \alpha_0$. Наконец, $\angle MCB = 90^\circ - \angle MCA = 90^\circ - \alpha_0 > \alpha_0$. Итак, каждый из углов GBC, GCA и GCB не меньше α_0.

Осталось доказать, что в произвольном треугольнике ABC максимум два из рассматриваемых шести углов могут оказаться строго больше α_0. Мы докажем, что максимум один из углов GAB, GBC и GCA может превышать α_0; для остальных трёх углов рассуждение аналогично.

Предполагая противное, можно считать, что углы $\angle GAB$ и $\angle GBC$ строго больше α_0. Тогда каждый из них меньше, чем $180^\circ - \alpha_0$, ибо их сумма меньше 180°. Поэтому синус каждого из этих двух углов больше, чем $\sin \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Пусть K — середина BC, тогда $KA = 3KG$. С другой стороны, по теореме синусов имеем

$$\frac{KA}{KB} = \frac{\sin \angle KBA}{\sin \angle KAB} < \frac{1}{\sin \alpha_0}, \quad \text{аналогично} \quad \frac{KB}{KG} = \frac{\sin \angle KGB}{\sin \angle KBG} < \frac{1}{\sin \alpha_0}.$$

Отсюда

$$3 = \frac{KA}{KG} = \frac{KA}{KB} \cdot \frac{KB}{KG} < \frac{1}{\sin^2 \alpha_0} = 3.$$

Это противоречие завершает решение.

Схема оценивания

1. Только ответ .... 0 баллов.
2. Пример (с обоснованием), в котором три угла не меньше $\alpha_0 = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$ .... 2 балла.
3. Доказательство того, что наибольшее значение α больше 30° .... 0 баллов.

Problem 4

The teacher has given 10 disinct positive numbers to his students. Serge found all their 45 pairwise sums; five of these sums are equal. Pete found all their 45 pairwise products. What maximum number of equal products can be among Pete's numbers?

Answer. 4.

Решение. Let $2s$ be the number that appears five times among the pairwise sums. One number obviously cannot appear in two of these sums (otherwise the other summands in these sums are also equal). Therefore the five sums equal to $2s$ contain each of the ten numbers exactly once. In each of these sums one number is less than s and another is greater than s. Let the terms less than s, in increasing order, be $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Writing $2s = a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = a_3 + a_8 = a_4 + a_7 = a_5 + a_6$, we obtain the ordering of all the ten numbers: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8 < a_9 < a_{10}$.

If some product t^2, too, appears five times among the pairwise products, then, similarly, each of the ten numbers appears exactly once in those five products. If the smaller factors in these products are $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5$ and $t^2 = b_1 b_{10} = b_2 b_9 = b_3 b_8 = b_4 b_7 = b_5 b_6$, then $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 < b_6 < b_7 < b_8 < b_9 < b_{10}$ is also an ordering of the original numbers. But then $a_i = b_i$ for all i, that is, $a_1 + a_{10} = a_2 + a_9$ and $a_1 a_{10} = a_2 a_9$. It follows that $a_1 = a_2$ and $a_9 = a_{10}$, a contradiction.

An example with four equal products can be constructed in the following way. Let $x_1 = 0,9$, $x_{2k} = 2 - x_{2k-1}$ for $1 \le k \le 5$ and $x_{2k+1} = \frac{1}{2k}$ for $1 \le k \le 4$. Then $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6 = x_7 + x_8 = x_9 + x_{10} = 2$ and $x_2 x_3 = x_4 x_5 = x_6 x_7 = x_8 x_9 = 1$. Since obviously $x < \frac{1}{2-x} < 1$ for $0 < x < 1$, we have $x_1 < x_3 < x_5 < x_7 < x_9 < < 1 < x_{10} < x_8 < x_6 < x_4 < x_2$, and the 10 numbers in this example are indeed distinct.

Marking scheme

Proof that the five equal sums contain every number exactly once: .... 0 points
Proof that five products cannot be equal: .... 3 points
Example of 4 equal products: .... 3 points
Complete solution: .... 7 points
In the example, the numbers are not proved to be distinct: .... −1 point

Problem 5

A table $m \times n$ is given, where mn is divisible by 6. In this table a *stripe* is any 1×3 or 3×1 rectangle, and a *domino* is any 1×2 or 2×1 rectangle. The table is tiled with stripes. Prove that on top of this tiling the table can be tiled with dominoes so that in each stripe some two cells are covered by one domino and the remaining cell is covered by another domino. (The table is tiled by rectangles if the rectangles cover the entire table and do not overlap with each other.)

Решение. Without loss of generality suppose m is even. Consider two cases depending on the parity of n.

Case 1: n is even. Partition the table into 2×2 squares. Note that in each stripe some two adjacent cells belongs to the same square, let's cover them by a domino. Now for each square there are three possibilities: 1) all it's cells are covered by dominoes; 2) one pair of adjacent cells is covered by a domino and other two adjacent cells are uncovered – let's cover them by a domino; 3) all it's cells are uncovered – let's cover them with two dominoes. Clearly, we ontained the required tiling wih dominoes.

Case 2: n is odd. Partition the table $m \times (n-1)$ into 2×2 squares and partition the rest $m \times 1$ column with 2×1 rectangles. Again, in each stripe some two adjacent cells belongs to the same 2×2 square or 2×1 rectangle, hence we can obtain the required tiling similarly to the case 1.

Marking scheme

Considering any cases where m and n have finite number of values: .... 0 points

Unsuccessful attempts to construct the tiling step by step: .... 0 points

Introducing the graph with vertices–stripes and the edges connecting the stripes which can be tiled with two dominoes: .... 0 points

Proof that the graph described above is bipartite: .... 0 points

Solution of the problem for even m and n: .... 4 points

Problem 6

The medians of a triangle ABC concur at point G. Among the six angles GAB, GAC, GBA, GBC, GCA, GCB there are at least three angles each of which is at least α. Determine the largest α for which this is possible.

Answer. $\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Решение. Denote $\alpha_0 = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$.

We start with presenting a triangle in which three desired angles are at least α_0. Let ABC be a right triangle with $\angle C = 90^\circ$, $AC = 2$, and $BC = \sqrt{2}$. Then $\angle BAC = \alpha_0$. Let M and N be the midpoints of AB and AC, respectively. The right triangles NCB and BCA are similar, so $\angle NBC = \alpha_0$. The triangle MAC is isosceles, so $\angle MCA = \angle MAC = \alpha_0$. Finally, $\angle MCB = 90^\circ - \angle MCA = 90^\circ - \alpha_0 > \alpha_0$. Hence each of the angles GBC, GCA, and GCB is at least α_0.

It remains to prove that, in an arbitrary triangle ABC, at most two of the six angles can be strictly larger than α_0. We will show that at most one of the angles GAB, GBC, and GCA is larger than α_0; the argument for the other three angles is similar.

Arguing indirectly, we may assume without loss of generality that $\angle GAB$ and $\angle GBC$ are both strictly greater than α_0. Then each of them is also less than $180^\circ - \alpha$, as their sum is less than 180°. Therefore, the sine of either angle is greater than $\sin \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Let K be the midpoint of BC; then $KA = 3KG$. On the other hand, by the sines theorem, we have

$$\frac{KA}{KB} = \frac{\sin \angle KBA}{\sin \angle KAB} < \frac{1}{\sin \alpha_0} \quad \text{and, similarly,} \quad \frac{KB}{KG} = \frac{\sin \angle KGB}{\sin \angle KBG} < \frac{1}{\sin \alpha_0}.$$

Therefore,

$$3 = \frac{KA}{KG} = \frac{KA}{KB} \cdot \frac{KB}{KG} < \frac{1}{\sin^2 \alpha_0} = 3.$$

This contradiction finishes the proof.

Marking scheme

1. The answer only: .... 0 points.
2. An example (with proof) with three angles greater or equal to $\alpha_0 = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$: .... 2 points.
3. Proof that the largest α is greater than 30°: .... 0 points.