Ристо Малчески
Алекса Малчески
Самоил Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 11
ОЛИМПИСКИ ТЕМИ – ТРЕТ ДЕЛ

Скопје, 2019

Рецензент
Проф. д-р Сава Гроздев

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Книгава Математички талент 11 на извесен начин е продолжение на книгите Математички талент 7 и 8. Во истата се дадени 301 целосно решени задачи од ибластите кои се застапени на математичките олимпијади за учениците до 15,5 години, т.е. од областите алгебра, теорија на броеви, геометрија и комбинаторика. За разлика од книгите кои за оваа намена се дел од оваа серија збирки, во предметнава книга не е направена оиделба на задачите внатре во разработуваните области. Последново е направено се со цел учениците, кои претпоставуваме дека претходно ги разработиле задачите во првите две книги со олимписки теми, да вложат дополнителен напор се со цел да согледаат во кој дел од разгледуваната област припаѓа задачата која ја репаваат.

Рецензентот д-р Сава Гроздев, придонесе со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно му благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје Авторот
ноември, 2019 г.

I АЛГЕБРА

1. Во множеството на целите броеви дефинираме операција $*$ за која важи:
i) $m*(n+s)=(m*n)-s$ за секои цели броеви m,n,s,
ii) $(n+s)*m=(n*m)+2s$ за секои цели броеви m,n,s,
iii) $1*1=1$.
Најди формула за $a*b$, $a,b\in\mathbb{Z}$.

2. Нека
$$A=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{1997\cdot 1998} \text{ и } B=\frac{1}{1000\cdot 1998}+\frac{1}{1001\cdot 1997}+\dots+\frac{1}{1998\cdot 1000}.$$
Докажи, дека $\frac{A}{B}$ е природен број.

3. Нека $a_1,a_2,a_3,\dots,a_{2002}$ се природни броеви такви што
$$\frac{1}{a_1^3}+\frac{1}{a_2^3}+\frac{1}{a_3^3}+\dots+\frac{1}{a_{2002}^3}=\frac{1}{2}.$$
Докажи дка барем три од овие броеви се еднакви меѓу себе.

4. а) Дадени се реални броеви a,b и c такви што $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$. Докажи, дека $a=b=c$.
б) Определи ја вредноста на изразот $x+y$, ако $\frac{x}{3y}=\frac{y}{2x-5y}=\frac{6x-15y}{x}$ и изразот $-4x^2+36y-8$ прима најголема вредност.

5. Определи ја вредноста на изразот
$$w=\frac{(a+b-c)^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{(b+c-a)^2}{(b-a)(c-a)}+\frac{(c+a-b)^2}{(c-b)(a-b)}.$$

6. Нека $x,y,z\in\mathbb{R}$ се такви што $x+y+z=xyz$ Докажи дека
$$x(1-y^2)(1-z^2)=y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz.$$

7. Нека a,b,c се реални броеви такви што $\frac{1}{bc-a^2}+\frac{1}{ca-b^2}+\frac{1}{ab-c^2}=0$. Докажи, дека
$$\frac{a}{(bc-a^2)^2}+\frac{b}{(ca-b^2)^2}+\frac{c}{(ab-c^2)^2}=0.$$

8. Нека a,b,c се реални броеви такви што $abc(a+b)(b+c)(c+a)\neq 0$. Ако

$$(a+b+c)(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})=\tfrac{1007}{1008},$$

докажи дека

$$\frac{ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}=2017.$$

9. Нека a,b,c се различни реални броеви за кои постојат реални броево x и y такви што $a^3+ax+y=0, b^3+bx+y=0, c^3+cx+y=0$. Докажи, дека $a+b+c=0$.

10. Ако a,b,c се реални броеви такви што

$$a+b+c=0 \text{ и } a^4+b^4+c^4=50,$$

пресметај ја вредноста на изразот $ab+bc+ca$.

11. Реалните броеви a,b,c,d се такви што важи

$$abc-d=1,\quad bcd-a=2,\quad cda-b=3,\quad dab-c=-6.$$

Докажи дека $a+b+c+d\neq 0$.

12. За реалните броеви x,y,z,k важи $x\neq y\neq z\neq x$ и

$$x^3+y^3+k(x^2+y^2)=y^3+z^3+k(y^2+z^2)=z^3+x^3+k(z^2+x^2)=2008.$$

Определи го производот xyz.

13. Природните броеви a,x и y се поголеми од 100 и важи $y^2-1=a^2(x^2-1)$. Определи ја најмалата можна вредност на $\frac{a}{x}$.

14. Определи ја најмалата вредност на изразот

$$A=\frac{(x+\frac{1}{x})^6-(x^6+\frac{1}{x^6})-2}{(x+\frac{1}{x})^3+x^3+\frac{1}{x^3}},\ x>0.$$

15. Докажи дека за $a,b,c\neq 0$ важи

$$\left|\frac{|b-a|}{|ab|}+\frac{b+a}{ab}-\frac{2}{c}\right|+\frac{|b-a|}{|ab|}+\frac{b+a}{ab}+\frac{2}{c}=4\max\{\tfrac{1}{a},\tfrac{1}{b},\tfrac{1}{c}\}.$$

16. Од првите $2k$ $(k\geq 1)$ природни броеви се избрани k броеви такви што збирот на секои два од овие броеви е различен од $2k+1$. Нека S е збирот на избраните броеви, а T е збирот на нивните квадрати.

а) Определи го T .

б) Докажи дека за $k=1009$ броевите може да се изберат така што $S=1009^2$.

в) Пресметај го T за $k=1009$ и $S=1009^2$.

17. Определи ја 2005-тата цифра после децималната запирка на бројот $\sqrt{a}$, каде

$$a=0,\underbrace{444...444}_{2005}.$$

18. Нека n е орироден број, $A=\underbrace{44...44}_{2n}$ и $B=\underbrace{88...88}_{n}$. Докажи, дека бројот $A+2B+4$ е точен квадрат.

19. Пресметај го збирот

$$\frac{1}{4\cdot 1^4+1}+\frac{2}{4\cdot 2^4+1}+...+\frac{2009}{4\cdot 2009^4+1}.$$

20. Определи ги сите реални броеви a,b,c,d такви што

$$a+b+c+d=20 \text{ и } ab+ac+ad+bc+bd+cd=150.$$

21. За секој природен број дефинираме $f(n)=\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$. Пресметај го збирот $f(1)+f(2)+...+f(40)$.

22. Разложи го на множители изразот

$$(a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3.$$

23. За реалните броеви a,b,c и d важи

$$a+b+c+d=0$$

$$a^3+b^3+c^3+d^3=0.$$

Докажи, дека збирот на некои два од овие броеви е еднаков на 0.

24. Нека a е позитивен реален број таков што $a^3=6(a+1)$. Докажи, дека равенката $x^2+ax+a^2-6=0$ нема решенија во множеството реални броеви.

25. Нека x, y се реални броеви за кои важи: $x^2+y^2=2$ и $(x^3+y^3)^2=8$. Пресметај ја вредноста на изразот x^4+y^4 .

26. Нека a,b,c се позитивни рационални броеви. Докажи дека бројот

$$\sqrt{\tfrac{1}{a^2}+\tfrac{1}{b^2}+\tfrac{1}{c^2}+(\tfrac{a+b+c}{ab+bc+ca})^2}$$

е рационален.

27. Нека $k>1$ е природен број и $n>2018$ е непарен природен број. Ненултите рационални броеви $x_1,x_2,...,x_n$ се такви што не се сите еднакви меѓу себе и ги задоволуваат идентитетите

$$x_1+\frac{k}{x_2}=x_2+\frac{k}{x_3}=x_3+\frac{k}{x_4}=...=x_{n-1}+\frac{k}{x_n}=x_n+\frac{k}{x_1}.$$

Определи:

а) го производот $x_1x_2...x_n$ како функција од k и n

б) ја најмалата вредност за k за која постојат $n,x_1,x_2,...,x_n$ кои ги исполнуваат дадените услови.

28. Докажи дека за секој природен број $n>1$ бројот

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}}$$

е ирационален.

29. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases}(1+4x^2)y=4z^2\\(1+4y^2)z=4x^2\\(1+4z^2)x=4y^2.\end{cases}$$

30. Нека x и y се реални броеви такви што $x^{2017}+y^{2017}>x^{2016}+y^{2016}$. Докажи, дека

$$x^{2018}+y^{2018}>x^{2017}+y^{2017}. \qquad (1)$$

31. Нека x,y,z се ненегативни реални броеви такви што $x+y+z=4$. Определи ја најмалата вредност на изразот $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1}$.

32. Даден е природен број n. Нека

$$A=x_1+x_2+...+x_s, \text{ каде } x_1x_2...x_s=n,\ x_i>1,\quad x_i\in\mathbb{N}.$$

Определи ја најголемата можна вредност на A.

33. Определи ја најмалата вредност на изразот $x+y+z$, ако x,y,z се

реални броеви такви што $x \geq 4, y \geq 5, z \geq 6$ и $x^2 + y^2 + z^2 \geq 90$.

34. Докажи дека за позитивните релани броеви a,b,c важи

$$\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ca}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b} \geq a+b+c .$$

35. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b и c важи:

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc . \qquad (1)$$

36. Нека $x, y, z > -1$ се реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2 .$$

37. Докажи дека за секои реални броеви x, y, z важи

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq \max\{\frac{3(x-y)^2}{4}, \frac{3(y-z)^2}{4}, \frac{3(z-x)^2}{4}\} .$$

38. Нека $k > 1$ е природен број и $n > 2018$ е непарен природен број. Ненултите рационални броеви $x_1, x_2, ..., x_n$ се такви што не се сите еднакви меѓу себе и ги задоволуваат равенствата

$$x_1 + \frac{k}{x_2} = x_2 + \frac{k}{x_3} = x_3 + \frac{k}{x_4} = ... = x_{n-1} + \frac{k}{x_n} = x_n + \frac{k}{x_1} .$$

Определи:

а) го производот $x_1 x_2 ... x_n$ како функција од k и n,

б) ја најмалата вредност на k за која постојат $n, x_1, x_2, ..., x_n$ кои ги исполнуваат дадените услови.

39. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x_1^3}{x_1^2+x_1x_2+x_2^2} + \frac{x_2^3}{x_2^2+x_2x_3+x_3^2} + ... + \frac{x_n^3}{x_n^2+x_nx_1+x_1^2} \geq \frac{x_1+x_2+...+x_n}{3} .$$

40. Нека

$$S = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} + ... + \frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{\frac{1996\cdot 1997}{2}}} .$$

Докажи, дека $S > 1001$.

41. Квадрат со димензии 3×3 е поделен на 9 единечни квадратчиња, во кои се распоредени 9 различни природни броеви, по еден број во секое квадратче. Производот на трите броја запишани во секој ред и

во секоја колона е еднаков. Определи ја најмалата можна вредност на овој производ.

42. За броевите $a_1, a_2, ..., a_{20}$ важи

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_{20} \geq 0,$$
$$a_1 + a_2 = 20 \text{ и}$$
$$a_3 + a_4 + ... + a_{20} \leq 20.$$

Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{20}^2.$$

43. Нека a,b,c се реални броеви такви што $abc = 1$. Докажи дека најмногу два од броевите $2a - \frac{1}{b}$, $2b - \frac{1}{c}$ и $2c - \frac{1}{a}$ се поголеми од 1.

44. Нека a,b,c се реални броеви такви што $a,b,c \geq -3$ и $a+b+c=0$. Докажи дека

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq -\frac{3^4}{4}.$$

Кога важи знак за равенство?

45. Нека a,b,c се позитивни реални броеви за кои важи $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Докажи дека

$$(\tfrac{1+a^2}{4bc})^2 + (\tfrac{1+b^2}{4ca})^2 + (\tfrac{1+c^2}{4ab})^2 \geq 3.$$

46. Нека a,b,c,d,e се реални броеви такви што $a+b+c+d+e=0$ и нека

$$A = ab + bc + cd + de + ea \text{ и } B = ac + ce + eb + bd + da.$$

Докажи дека $2005A + B \leq 0$ или $2005B + A \leq 0$.

47. Нека a,b,c,d и x,y,z,t се реални броеви такви што

$$0 \leq a,b,c,d \leq 1, \; x,y,z,t \geq 1 \text{ и } a+b+c+d+x+y+z+t = 8.$$

Докажи дека

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 28.$$

Кога важи знак за равенство?

48. Докажи дека за секој природен број n важи

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{...+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}} < 2.$$

49. Определи го најголемиот природен број k таков што за секои природни броеви m,n за кои важи $m^3+n^3>(m+n)^2$ важи
$$m^3+n^3\geq(m+n)^2+k\,.$$

50. Определи ја најмалата вредност на изразот $x+\frac{y^2}{9x}+\frac{3z^2}{32y}+\frac{2}{z}$, каде x,y и z се позитивни реални броеви.

51. Докажи, дека за позитивните реални броеви a,b,c,d,e важи неравенството
$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{e}{d}+\frac{a}{e}\leq(\frac{a}{b})^4+(\frac{b}{c})^4+(\frac{c}{d})^4+(\frac{d}{e})^4+(\frac{e}{a})^4\,.$$

52. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи, дека
$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\leq 1.$$

53. Нека a, b, c се позитивни реални броеви, такви што $a+b+c=3$. Определи ја најмалата (минималната) вредност што може да ја има изразот
$$A=\frac{2-a^3}{a}+\frac{2-b^3}{b}+\frac{2-c^3}{c}\,.$$

54. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b и c важат неравенствата
$$\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}\leq 1\leq\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\,. \qquad (1)$$

55. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи, дека
$$\frac{a^2-bc}{2a^2+bc}+\frac{b^2-ca}{2b^2+ca}+\frac{c^2-ab}{2c^2+ab}\leq 0\,.$$

56. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $xyz=1$. Докажи дека
$$\frac{x^2+y^2+z}{x^2+2}+\frac{y^2+z^2+x}{y^2+2}+\frac{z^2+x^2+y}{z^2+2}\geq 3.$$
Кога важи знак за равенство?

57. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека

$$\frac{(x+y)^3}{z}+\frac{(y+z)^3}{x}+\frac{(z+x)^3}{y}+9xyz\geq 9(xy+yz+zx).$$

Кога важи знак за равенство?

58. Нека a,b,c се реални броевви такви што $0<a\leq b\leq c$. Докажи дека

$$(a+3b)(b+4c)(c+2a)\geq 60abc\ .$$

Кога важи занк за равенство?

59. Нека $x,y,z\in(0,1)$. Докажи дека

$$\frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+z^3+x^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3}\leq\frac{1}{3}\ .$$

60. Нека a,b,c се позитивни броеви такви што $ab+bc+ca=3$. Докажи дека

$$\frac{a}{\sqrt{a^3+5}}+\frac{b}{\sqrt{b^3+5}}+\frac{c}{\sqrt{c^3+5}}\leq\frac{\sqrt{6}}{2}\ .$$

61. Нека a,b,c и d се позитивни реални броеви такви што

$$a^3+b^3+c^3+d^3=4\ .$$

Докажи го неравенството

$$\frac{1}{a^4+3}+\frac{1}{b^4+3}+\frac{1}{c^4+3}+\frac{1}{d^4+3}\geq 1\ .$$

62. Нека a,b,c се реални броеви такви што $abc=1$. Докажи го неравенството

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\ .$$

Кога важи знак за равенство?

63. Нека x и y се ненегативни реални броеви такви што $x+y=1$. Определи ја најмалата и најголемата вредност на изразот

$$A(x,y)=x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}\ .$$

64. Збирот на позитивните броеви a,b,c,d е еднаков на 3. Докажи дека

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\leq\frac{1}{a^2b^2c^2d^2}\ .$$

65. Збирот на позитивните броеви a,b,c и d е еднаков на 3. Докажи дека

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\leq\frac{1}{a^3b^3c^3d^3}\ .$$

66. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $ab+bc+ca=1$.

Докажи, дека

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3(a+b+c)\,.$$

Кога важи знак за равенство?

67. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{ab(b+1)(c+1)}+\frac{1}{bc(c+1)(a+1)}+\frac{1}{ca(a+1)(b+1)}\geq\frac{3}{(1+abc)^2}\,.$$

68. Нека x,y,z се позитивни реални броеви за кои важи

$$x^2+y^2+z^2=1 \text{ и } x^4+y^4+z^4=\frac{1}{3}\,.$$

Докажи дека

$$(x^2+1)x\sqrt{2(1-x^2)}+(y^2+1)y\sqrt{2(1-y^2)}+(z^2+1)z\sqrt{2(1-z^2)}\geq\frac{8}{3}\,.$$

69. Нека $a,b,c\in\mathbb{R}$. Докажи дека

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}\,. \qquad (1)$$

70. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{2}{a(a+b)}+\frac{2}{b(b+c)}+\frac{2}{c(c+a)}\geq\frac{27}{(a+b+c)^2}\,.$$

71. Нека x,y,z,m,n се позитивни реални броеви и $m+n\geq 2$. Докажи го неравенството

$$x\sqrt{yz(x+my)(x+nz)}+y\sqrt{zx(y+mx)(y+nz)}+z\sqrt{xy(z+mx)(z+ny)}\leq$$
$$\leq\frac{3(m+n)(x+y)(y+z)(z+x)}{8}\,.$$

72. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=2017$. Докажи, дека

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\leq\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2017}}\,.$$

Кога важи знак за равенство?

73. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви што $abc=2$. Докажи дека

$$a^3+b^3+c^3\geq a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\,.$$

74. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=\frac{2}{3}$. Докажи дека

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\geq\frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}.$$

75. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\geq 1.$$

76. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a^2+b^2+c^2=3$. Докажи, дека

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2}.$$

77. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи, дека

$$(ab+bc+\tfrac{1}{ca})(bc+ca+\tfrac{1}{ab})(ca+ab+\tfrac{1}{bc})\geq(1+2a)(1+2b)(1+2c).$$

78. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+...+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geq\frac{a_1+a_2+...+a_n}{2}.$$

79. Докажи дека за позитивни реални броеви x,y и z важи неравенството

$$(x+y+z)(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z})\geq 4(\tfrac{x}{xy+1}+\tfrac{y}{yz+1}+\tfrac{z}{zx+1})^2.$$

80. Нека a,b,c се страни на триаголник за кои важи $a+b+c=6$. Докажи дека

$$\sqrt{(a+1)(b+1)}+\sqrt{(b+1)(c+1)}+\sqrt{(c+1)(a+1)}\geq 2(\sqrt{3-a}+\sqrt{3-b}+\sqrt{3-c})+3$$

81. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x}{\sqrt{\sqrt[4]{y}+\sqrt[4]{z}}}+\frac{y}{\sqrt{\sqrt[4]{z}+\sqrt[4]{x}}}+\frac{z}{\sqrt{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}}\geq\frac{\sqrt[4]{(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^7}}{\sqrt{2\sqrt{27}}}.$$

82. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{a^5}{a^3+1}+\frac{b^5}{b^3+1}+\frac{c^5}{c^3+1}\geq\frac{3}{2}.$$

Кога важи знак за равенство?

II ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. Бројот 74^{2015} запиши го како збир од квадрати на седум различни дропки со ист именител.

2. За еден природен број ќе велиме дека е *скоро квадратен* ако може да се претстави како производ на два последователни природни броја. Докажи дека секој скоро квадратен природен број може да се претстави како количник на два скоро квадратни природни броја.

3. Со цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 се составени девет (не задолжително различни) деветцифрени броеви, при што секоја цифра во секој број е употребена точно по еднаш. На колку најмногу нули може да завршува збирот на овие девет броја?

4. Докажи дека за секој природен број n постои природен број кој се запишува само со цифрите 0 и 1 и кој е делив со n.

5. Дали постои бесконечна низа природни броеви таква што на секој k збирот на секои k последователни броеви е делив со $k+1$?

6. Докажи, дека броевите од 1 до 16 може да се наредат во низа така што збирот на секои два соседни броеви е точен квадрат на природен број.

7. Докажи дека за секој природен број m постои природен број n таков што $m+n+1$ е точен квадрат и е $mn+1$ точен куб на некои природни броеви.

8. Определи го најмалиот природен број N со следново својство: ако од множеството $\{1,2,...,N\}$ произволно се избришат 2016 елементи секогаш меѓу преостанатите елементи ќе има 2016 броеви чиј збир е еднаков на N.

9. Нека a,b,c,d,e,f се ненулти цифри (може да има и еднакви) такви што броевите $\overline{abc}, \overline{def}$ и $\overline{abcdef}$ се точни квадрати.

   а) Докажи, дека бројот $\overline{abcdef}$ може барем на два начина да се запише како збир на три квадрати.
   б) Дади пример на вакви броеви.

10. Определи ги сите четирицифрени броеви $\overline{abcd}$ такви што
$$a(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)(a^6+2b^6+3c^6+4d^6)=\overline{abcd}\,.$$

11. Определи го најголемиот природен број p таков што бројот 5^7 може да се запише како збир на p последователни природни броеви.

12. Одреди ги сите природни броеви n за кои збирот на парните броеви поголеми од n^3-n^2, а помали од n^3+n^2, е помал од 2018.

13. Определи ги сите природни броеви n за кои постојат природни броеви a,b и c такви што $a+b+c=3n$ и $ab+ac+bc=n^3$.

14. Одреди го најмалиот природен број делив со 63 чиј збир на цифри е 63.

15. Десетцифрениот природен број $n=\overline{a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ е запишан со различни цифри и е делив со 11. Ако $S_1=a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$ и $S_2=a_0+a_2+a_4+a_6+a_8$ докажи дека или $7\,|\,S_1$ или $7\,|\,S_2$.

16. Дали постои природен број n, таков што збирот на цифрите во декадниот запис на бројот $n(4n+1)$ е еднаков на 2017.

17. Броевите од 1 до 1998 се поделени во две дисјунктни множества $\{a_1,a_2,...,a_{999}\}$ и $\{b_1,b_2,...,b_{999}\}$ такви што за секој i важи $|a_i-b_i|=1$ или 6. Определи ја цифрата на единиците на збирот $\sum\limits_{i=1}^{999}|a_i-b_i|$.

18. Во множеството рационални броеви најди ги сите решенија (a,b) на равенката
$$(a+b\sqrt{2})^2=11+14\sqrt{2}\,.$$

19. Дали постојат рационални броеви x,y,z и t такви што
$$(x+y\sqrt{2})^2+(z+t\sqrt{2})^2=5+4\sqrt{2}\,?$$

20. Определи ги сите природни броеви n за кои
$$\sqrt{n+\sqrt{2018}}+\sqrt{n-\sqrt{2018}}$$
е рационален број.

21. Определи ги сите цели броеви a такви што $\sqrt{\frac{9a+4}{a-6}}$ е рационален број.

22. Нека x е реален број така што броевите x^3 и x^2+x се рационални. Докажи дека бројот x е рационален.

23. Нека x, y, z се реални броеви такви што xy, yz, zx се рационални броеви различни од нула. Докажи:

а) бројот $x^2+y^2+z^2$ е рационален, и

б) ако $x^3+y^3+z^3$ е рационален број различне од 0, тогаш броевите x, y, z се рационални.

24. Нека a и b се реални броеви такви што $a+b=1$. Ако a^3 и b^3 се рационални броеви, тогаш a и b се рационални броеви. Докажи!

25. Дали постои природен број n таков што $n(n+1)(n+2)$ е квадрат на природен број?

26. Нека $x+\sqrt{y}, y+\sqrt{x}$ и $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ се цели броеви. Докажи дека x и y се цели броеви.

27. Определи ги сите природни броеви a и b такви што $(ab+1)\,|\,(a^2-1)$.

28. Природните броеви a и b го задоволуваат равенството

$$a^3+4a=b^2.$$

Докажи, дека бројот a е од видот $2t^2, t\in\mathbb{N}$.

29. Нека a и b се различни природни броеви поголеми од 10^6 и такви што $ab\,|\,(a+b)^3$. Докажи дека $|a-b|>10^4$.

30. Даден е природен број n. Определи ги сите природни броеви кои може да се запишат во обликот

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\ldots+\frac{n}{a_n}$$

за некои природни броеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

31. Нека m е бројот на различните прости делители на бројот $n\geq 2$. Докажи дека $2^{2m}<4n$.

32. Нека p е прост број за кој постојат различни природни броеви u и v такви што p^2 е аритметичка средина на u^2 и v^2. Докажи дека $2p-u-v$ е или точен квадрат или е удвоен квадрат.

33. Нека p е прост број и $a_1, a_2, a_3, ...$ е низа природни броеви такви што
$$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 + p,$$
за секој природен број n. Докажи дека за секој природен број n бројот a_{n+1} е делител на бројот $a_n + a_{n+2}$.

34. Нека $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$ се сите делители на природниот број $n > 1$. Докажи дека $d_1 + d_2 + ... + d_k > k\sqrt{n}$.

35. Нека n е природен број и нека $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ се различни цели броеви такви што равенката
$$(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_{2n})-(-1)^n (n!)^2 = 0 \qquad (1)$$
има целобројно решение r. Докажи дека $r = \frac{a_1+a_2+a_3+...+a_{2n}}{2n}$.

36. Нека a и b се природни броеви такви што $ab \mid (a^2+b^2)$. Докажи дека $a = b$.

37. Нека $n > 1$, $a_1 < a_2 < ... < a_n$ се природни броеви и нека
$$\text{NZS}(a_i, a_j) = [a_i, a_j].$$
Докажи дека
$$\frac{1}{[a_1,a_2]} + \frac{1}{[a_2,a_3]} + ... + \frac{1}{[a_{n-1},a_n]} < 1$$

38. а) На колку нули завршува бројот $2019!$?
б) На колку нули завршува бројот $n!$?

39. Определи ги сите непразни подмножества A на множеството $\{2,3,4,...\}$ такви што за секој $n \in A$ броевите n^2+4 и $[\sqrt{n}]+1$ припаѓаат на A. (Со $[x]$ е означен најголемиот цел број кој е помал или еднаков на реалниот број x.)

40. Нека A е множество природни броеви кое го содржи бројот 1 и содржи барем уште еден број различен од 1.

Ако од $m,n \in A, m \neq n$, следува $\frac{m+1}{\text{NZD}(m+1,n+1)} \in A$, тогаш $A = \mathbb{N}$. Докажи!

41. Нека n е природен број и p е прост број така што важи $n \mid p-1$ и $p \mid n^6 - 1$. Докажи дека барем еден од броевите $p-n$ или $p+n$ е точен квадрат.

42. Нека е даден простиот број p. Определи ги сите природни броеви a и b такви што $\frac{4a+p}{b} + \frac{4b+p}{a}$ и $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$ се природни броеви.

43. Нека p е прост број и нека $3p+10$ е збир на квадратите на 6 последователни природни броеви. Докажи дека $36 \mid p-7$.

44. Најди ги сите природни броеви n такви што n има цифри колку што има различни прости делители и збирот на различните прости делители е еднаков со збирот на степените на истите делители.

45. Определи ги сите природни броеви $n > 2$, такви што $n = a^3 + b^3$, каде што a е најмалиот природен делител на n поголем од 1 и b е произволен природен делител на n.

46. Определи ги сите прости броеви p, q, r, s такви што нивниот збир е прост број и броевите $p^2 + qr$ и $p^2 + qs$ се квадрати на природни броеви.

47. Определи ги сите прости броеви p за кои бројот $p^3 + p^2 + p + 1$ е точен квадрат.

48. Нека p е прост број и a е цел број. Докажи дека ако за секој природен број n бројот $n^2 - 5$ не е делив со p, тогаш постојат бесконечно многу цели броеви m такви што $p \mid m^5 + a$.

49. Докажи, дека за секој природен број n барем еден од броевите $A = 2n-1, B = 5n-1, \; C = 13n-1$ не е точен квадрат.

50. Докажи дека 1023 е делител на $7^{6^n} + 4^{6^n - 1} - 5$ за секој природен број n.

51. Нека a е природен број таков што $\text{NZD}(a,10)=1$. Докажи дека последните две цифри на a^k за $k=1,2,...$, периодично се повторуваат.

52. Нека со a_n го означиме збирот на цифрите на бројот 1189^n, $n\in\mathbb{N}$. Определи ја најмалата вредност на a_n.

53. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот 36^n-6 е производ на два или повеќе последователни природни броеви.

54. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $n^4+8n+11$ е производ на два или повеќе последователни природни броеви.

55. Определи ги сите природни броеви n такви што бројот $n^3-2n^2+3n+21$ е степен на бројот 3.

56. Антон на таблата ги запишал вредностите на $3!$, $4!$, $5!$, $6!$, $7!$, $8!$, $9!$ и $10!$. Потоа избришал една од нив и се покажало дека производот на останатите е квадрат на природен број n. Определи ја цифрата на илјадитите на бројот n.

57. Природните броеви m и n се такви што бројот $m-n$ е непарен. Докажи дека бројот $(m+3n)(5m+7n)$ не е точен квадрат.

58. Во множеството природни броеви решија равенката
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}.$$

59. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\text{NZS}(x,y)}+\frac{1}{\text{NZD}(x,y)}=\frac{1}{2}.$$

60. Докажи дека равенката
$$a^3+b^3+c^3+d^2+e^2=2008$$
има бесконечно многу решенија во множеството цели броеви.

61. Во множеството цели броеви реши ја равенката $a^3+b^3+3ab=1$.

62. Определи ги сите решенија на равенката
$$p-x^4=4$$
каде p е прост број, а x е цел број.

63. Определи ги сите природни броеви a,b,c такви што

$$a+b+c=15$$
$$(a-3)^2+(b-5)^2+(c-7)^2=540.$$

64. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2+y^2+z^2+u^2=3(x+y+z+u)\,.$$

65. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$(x+y)^2(x^2+y^2)=2009\,.$$

66. Определи ги сите парови цели броеви (m,n) кои ја задоволуваат равенката

$$m^5-n^5=16mn\,.$$

67. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката

$$(xy-7)^2=x^2+y^2\,.$$

68. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$9x^2y^2+9xy^2+6x^2y+18xy+x^2+2y^2+5x+7y+6=0\,.$$

69. Во множеството природни броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2+3y=u^2 \\ y^2+3x=v^2. \end{cases}$$

70. Докажи дека равенката

$$x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2=2000$$

нема решенија во множеството цели броеви.

71. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^3-y^3=999\,. \qquad (1)$$

72. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$a^3+b^3+c^3=2001\,.$$

73. Определи ги сите тројки природни броеви (x,y,z) такви што

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=p\,,$$

каде p е прост број поголем од 3.

74. Определи ги сите прости броеви такви што $p_1 \le p_2 \le p_3 \le \ldots \le p_{13}$,

$$p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_{12}^2 = p_{13}^2 \qquad (1)$$

и еден од броевите е еднаков на $2p_1 + p_9$.

75. Определи природен број n за кој постои цел број x таков што

$$499 \cdot (1997^n + 1) = x^2 + x .$$

76. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$125 \cdot 2^n - 3^m = 271 .$$

77. Определи ги сите прости броеви a, b, c и природни броеви k кои што ја задоволуваат равенката

$$a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1 .$$

78. Определи ги сите подредени тројки цели броеви (x, y, z) такви што

$$xy(x^2 - y^2) + yz(y^2 - z^2) + zx(z^2 - x^2) = 1 .$$

79. Одреди ги сите парови (p, q) каде p и q се природни броеви за кои важи

$$(p+1)^{p-1} + (p-1)^{p+1} = q^q .$$

80. Докажи, дека бројот не е точен куб за ниту еден природен број .

81. Определи ги сите прости броеви p такви што

$$13 \mid (2^{p^2} + 3^{p^2} + 4^{p^2} - 5) .$$

82. Определи ги сите прости броеви од облик $1 + 2^p + 3^p + \ldots + p^p$ каде p е прост број.

83. Определи ги сите прости броеви p и q, $p \le q$ за кои

$$pq \mid (5^p - 2^p)(7^q - 2^q) .$$

84. Определи ги сите природни броеви n за кои множеството

$$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$$

може да се подели на две дисјунктни подмножества такви што производите на елементите во двете подмножества се еднакви.