Републички натпревар 1985

I година

1. Да се најдат сите подмножества S од множеството цели броеви $\mathbb{Z}$, такви што:

(1) $m,n\in S \qquad \Rightarrow \qquad m+n\in S$

(2) $m,n\in S \qquad \Rightarrow \qquad mn\in S$

(3) $(\forall m\in\mathbb{Z})$ $m\in S$ или $-m\in S$ или $m=0$.

Решение. Нека $S\subseteq\mathbb{Z}$ ги задоволува условите од задачата. Бидејќи $1\in\mathbb{Z}$, од условот (3) следува дека $1\in S$ или $-1\in S$. Ако $-1\in S$, тогаш од условот (2) имаме $1=(-1)(-1)\in S$. Значи $1\in S$, што заедно со (1) повлекува дека множеството природни броеви $\mathbb{N}$ е содржано во S. Ако $-1\in S$ и $0\in S$ тогаш $S=\mathbb{N}$. Ако $-1\notin S$ и $0\in S$, тогаш $S=\mathbb{N}\cup\{0\}$. Според тоа, единствени подмножества S од $\mathbb{Z}$ што го задоволуваат условот од задачата се $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}\cup\{0\}$ и $\mathbb{Z}$.

2. Да се најдат сите природни броеви a,b,c,d,e такви што

(1) $a\neq 2$,

(2) $a<b<c<d<e$

(3) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1$.

Решение. Нека a,b,c,d,e ги задоволуваат условите од задачата; тогаш $a=3$, бидејќи: $a\neq 2$ според (1); $a\neq 1$, зошто $a=1$ повлекува $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}>1$; $a\geq 4$ повлекува

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\leq\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}<1.$$

Слично, $b=4$, бидејќи: $b>4$, според (2), а $b\geq 5$ повлекува

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}<1.$$

Ако $c\geq 7$, тогаш

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}<1$$

Според тоа, c може да биде 5 или 6. Ако $c=6$, тогаш $\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$. Ако $d\geq 8$, тогаш $\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\leq\frac{1}{8}+\frac{1}{9}<\frac{1}{4}$, што заедно со $d>c=6$ повлекува дека $d=7$. Но $\frac{1}{e}=\frac{1}{4}-\frac{1}{7}$ нема решение во $\mathbb{N}$. Значи, $c=5$. Тогаш

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{13}{60},$$

и $5<d<e$. Ако $d\geq 9$ тогаш $\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\leq\frac{1}{9}+\frac{1}{10}<\frac{13}{60}$, што заедно со $5<d$ повлекува дека $d=6$, $d=7$ или $d=8$. Ако $d\geq 7$, тогаш $\frac{1}{e}=\frac{13}{60}-\frac{1}{d}$ нема решение во $\mathbb{N}$.

Според тоа, $d=6$. Од $\frac{1}{e}=\frac{13}{60}-\frac{1}{6}=\frac{1}{20}$ добиваме $e=20$. Значи, бараните броеви се: $3,4,5,6,20$.

3. Дедото на Филип е роден во овој век. Филип забележал дека збирот на цифрите од годината на раѓањето на дедому е еднаков со збирот на цифрите од бројот на годините што дедому ги имал во 1985. Во која година е роден дедото на Филип?

Решение. Нека дедото на Филип е роден во $19xy$ година за $0\le y\le 9$ и $0\le x\le 9$. Цифрите на бројот на годините на дедото во 1985 година се: $8-x$ и $5-y$ или $7-x$ и $15-y$. Тогаш

$$1+9+x+y=8-x+5-y \text{ или } 1+9+x+y=7-x+15-y,$$

т.е.

$$2(x+y)=3 \text{ или } 2(x+y)=12.$$

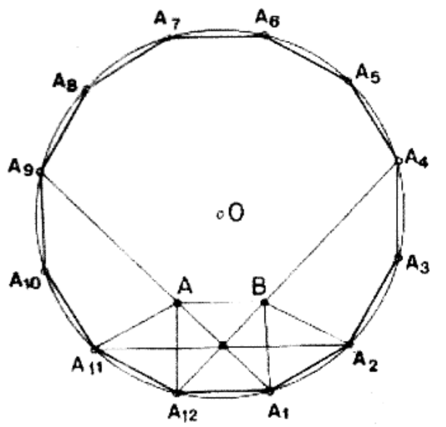
Бидејќи 3 не е делив со 2, добиваме дека $x+y=6$. Ако $x\ge 1$, тогаш дедото во 1985 година има помалку од 71 година, а збирот на цифрите на секој природен број помал од 71 е помал од $16=1+9+x+y$. Значи $x=0$ и $y=6$, т.е. дедото е роден во 1906 година.

4. Нека $A_1, A_2, A_3, ..., A_{11}, A_{12}$ се последователни темиња на правилен дванаесетаголник. Да се докаже дека дијагоналите A_1A_9, A_2A_{11} и A_4A_{12} се сечат во една точка.

Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница околу дадениот правилен 12-аголник. Со помош на: својството за еднаквост на периферниски агли над ист лак, својството на централен и периферниски агол над ист кружен лак и тоа што $\measuredangle A_1OA_2=30^\circ$, се докажува дека

$$\measuredangle A_1A_{12}A_4=\measuredangle A_{12}A_1A_9=45^\circ \text{ и}$$

$$\measuredangle A_1A_2A_{11}=\measuredangle A_{12}A_{11}A_2=30^\circ.$$



Нека A и B се точки од A_1A_9 и A_4A_{12} соодветно, така што A_1B и $A_{12}A$ се нормални на A_1A_{12} (направи цртеж). Вака формираниот четириаголник ABA_1A_{12} е квадрат со центар во пресекот на дијагоналите A_1A_9 и A_4A_{12}. Понатаму, триаголниците A_1A_2B и $AA_{11}A_{12}$ се рамнострани чии висини спуштени од A_2 и A_{11} се делови од дијагоналата A_2A_{11}.

Според тоа, A_2A_{11} минува низ средните точки на спротивните страни на квадратот ABA_1A_{12}, што значи дека минува и низ центарот на тој квадрат.

II година

1. Да се реши равенката:

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

Решение. Со помош на равенствата

$$x+3-4\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-2)^2$$

и

$$x+8-6\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-3)^2$$

Дадената равенка се сведува на равенката

$$|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=1. \qquad (1)$$

Сега, доволно е да се разгледаат случаите кога $\sqrt{x-1}\le 2$, $2<\sqrt{x-1}\le 3$ и $\sqrt{x-1}>3$. Решение на дадената равенка е секој $x\in[5,10]$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

2. Да се најдат сите четирицифрени броеви m за кои се знае дека:

i) m е квадрат од природен број;

ii) првата и втората цифра на m се еднакви; и

iii) третата и четвртата цифра на m се еднакви.

Решение. Нека x е првата, а y е третата цифра на m и нека $m=k^2$. Тогаш

$$k^2=1000x+100x+10y+y=11(100x+y),$$

од каде што следува дека 11 е делител на k, т.е. $k=11n$. Од

$$11\cdot 11n^2=11(100x+y)$$

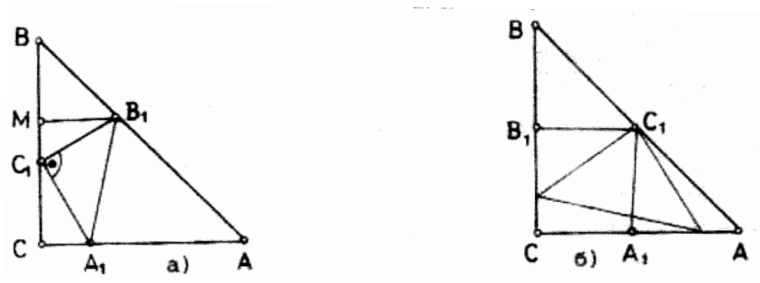
следува дека 11 е делител на $x+y$. Бидејќи $1\le x\le 9$ и $0\le y\le 9$, добиваме дека $1\le x+y\le 18$, што значи дека $x+y=11$. Тогаш $n^2=9x+1$, што е можно само за $x=7$. Според тоа, бараниот број m е $7744=88^2$.

3. Во рамнокрак правоаголен триаголник ABC впишан е рамнокрак правоаголен триаголник $A_1B_1C_1$. Да се најде најмалата вредност на односот

$$P_{A_1B_1C_1}:P_{ABC}\ .$$

Решение. Нека C и C_1 се темиња кај правите агли. Можни се два случаја.

Прв случај. C_1 е точак од катета, на пример од CB. Нека A_1 е од AC и нека M е точка од BC таква што B_1M е нормална на BC. Тогаш триаголниците $B_1M<C_1$ и C_1CA_1 се складни, од што следува дека $\overline{MB_1}=\overline{CC_1}$, па затоа важи $\overline{BC}=2\overline{CC_1}+\overline{MC_1}$ и $\overline{B_1C_1}^2=\overline{CC_1}^2+\overline{MC_1}^2$. Ако означиме $\overline{CC_1}:\overline{BC}=x$, добиваме дека $P_{A_1B_1|C_1}:P_{ABC}=5x^2-4x+1$. Според тоа, бараната најмала вредност во овој случај е најмалата вредност на квадратната функција $y=5x^2-4x+1$, т.е. нејзиното теме кое има координати $(\frac{4}{10},\frac{1}{5})$. За триаголникот $A_1B_1C_1$ со $\overline{CC_1}=\frac{4}{10}\overline{BC}$ и $\overline{CA_1}=\frac{2}{10}\overline{BC}$ важи $P_{A_1B_1|C_1}:P_{ABC}=\frac{1}{5}$ (цртеж а)).



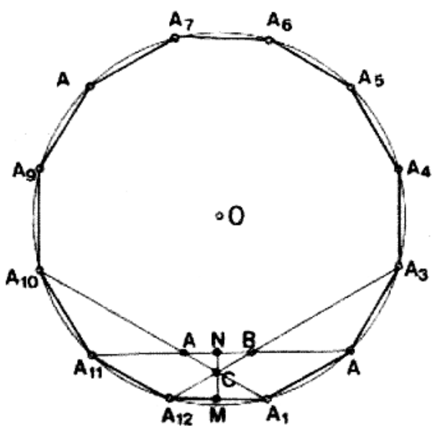
Втор случај. C_1 е точка на хипотенузата AB (цртеж б)). Во овој случај мора C_1 да биде средната точка на AB. Тогаш $P_{A_1B_1|C_1}$ ќе биде најмала ако A_1 и B_1 се средини на катетите. Тоа значи дека во овој случај

$$P_{A_1B_1|C_1}:P_{ABC}=\frac{1}{4}.$$

Конечно, бидејќи $\frac{1}{5}<\frac{1}{4}$, заклучуваме дека бараната најмала вредност е $\frac{1}{5}$.

4. Нека $A_1,A_2,A_3,....,A_{11},A_{12}$ се последователни темиња на правилен дванаесетаголник со страна $a=2\ cm$. Нека дијагоналите A_1A_{10}, A_2A_{11} и A_3A_{12} се сечат во точките A,B и C. Да се најде плоштината P_{ABC}.

Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница околу правилниот дванаесетаголник. Нека A_1A_{10} и A_2A_{11} се сечат во A, A_2A_{11} и A_3A_{12} се сечат во B и A_1A_{10} и A_3A_{12} во C. Со помош на својствата за еднаквост на периферните агли над ист лак, својството на централен и периферен агол над ист лак и тоа така што $\measuredangle A_1OA_2=30^\circ$, се докажува дека



$\measuredangle A_1A_{10}A_2 = \measuredangle A_{12}A_3A_{10} = \measuredangle A_3A_{12}A_1 = \measuredangle A_{10}A_1A_{12} = \measuredangle A_{12}A_1A_2 = \measuredangle A_1A_2A_{11} = 30^\circ$.

Од тоа што A_1A_{12}, A_2A_{11} и A_3A_{10} се паралелни, следува дека $\measuredangle CAB = \measuredangle CBA = 30^\circ$, што значи дека $P_{ABC} = \overline{AC}^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. Нека M и N се точки од A_1A_{12} и A_2A_{11}, соодветно така што M, N, C се колинеарни и MN е нормалнба на A_1A_{12}, што значи и на A_2A_{11}. Бидејќи CN и CM се висини на рамнокраки триаголници, добиваме дека M и N се средини на A_1A_{12} и AB, соодветно. Потоа, по ред, се заклучува дека:

$1 = \overline{A_1M} = \overline{A_1C}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{MC} = \frac{\overline{A_1C}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\overline{MN} = \frac{\overline{A_1A_{12}}}{2} = 1$, $\overline{NC} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$ и $\overline{AC} = 2\overline{NC} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$

Значи,

$$P_{ABC} = \frac{4(\sqrt{3}-1)^2\sqrt{3}}{3\cdot 4} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2\sqrt{3}}{3} cm^2.$$

III година

1. Нека $P_1, P_2, P_3, ..., P_6, P_7$ се седум различни точки од дадена кружница. Докажи дека постојат барем пет агли $\measuredangle P_iP_jP_k$, $i \neq j \neq k \neq 1$, што се помали од 30°.

Решение. Движејќи се по кружницата во насока на движењето на стрелките на часовникот, нека по P_i доаѓа P_{i+1} за $i = 1, 2, ..., 6$ и нека по P_7 доаѓа P_1. Нека $\alpha_i = \measuredangle P_iP_{i+1}P_{i+2}$, за $i = 1, 2, .., 5$, $\alpha_6 = \measuredangle P_6P_7P_1$ и $\alpha_7 = \measuredangle P_7P_1P_2$. Ако за секој $i = 1, 2, ..., 7$ важи $\alpha_i \geq 150^\circ$, тогаш $\sum_{i=1}^{7}\alpha_i \geq 7\cdot 150^\circ = 1050^\circ > 900^\circ$ што е спротивно со фактот дека збирот на на аглите во седумаголник е еднаков на 900°. Значи, барем еден од аглите $\alpha_i, i = 1, 2, ..., 7$ е помал од 150°. Нека $\alpha_7 < 150^\circ$ и нека $\beta_i = \measuredangle P_iP_1P_{i+1}$ за $i = 2, 3, 4, 5, 6$. Ако за секој $i = 2, 3, 4, 5, 6$ важи $\beta_i \geq 30^\circ$, тогаш $\alpha_7 = \sum_{i=2}^{6}\beta_i \geq 150^\circ$, што противречи на $\alpha_7 < 150^\circ$. Значи, барем еден од аглите β_i е помал од 30°. Нека $\beta_2 < 30^\circ$. Бидејќи за секој $i = 4, 5, 6, 7$ важи $\measuredangle P_2P_iP_3 = \measuredangle P_2P_1P_3$ (како периферски агли над ист лак), следува дека за $i = 1, 4, 5, 6, 7$ важи $\measuredangle P_2P_iP_3 < 30^\circ$.

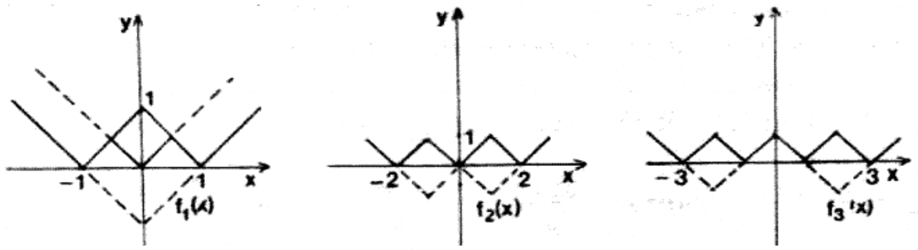
2. Колку решенија има равенката

$$||...|||x|\underbrace{-1|-1|-...|-1}_{1985}| = \frac{1}{1985}.$$

Решение. Нека

$$f_n(x) = |\,\ldots\,||\,|x| \underbrace{-1|-1|-\ldots|-1}_{n}|, \text{ за } n \in \mathbb{N}.$$

Графикот на $f_{n+1}(x)$ се добива со: поместување на графикот на $f_n(x)$ за 1 надолу, а потоа со рефлектирање на негативниот дел во однос на $x-$оската (види цртеж).



Секоја права $y=a$ за $0<a<1$ го сече графикот на $f_n(x)$ во A_n точки такви што $A_n = 2 + A_{n-1}$. Според тоа, дадената равенка има A_{1985} решенија, а

$$A_{1985} = 1984 \cdot 2 + A_1 = 3968 + 4 = 3972.$$

3. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ со агли α, β, γ и δ различни од 90°. Да се докаже дека

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\delta} = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta.$$

Решение. Од тоа што $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360^\circ$ и четириаголникот е конвексен, следува дека α, β, γ и δ може да се поделат на два пара чии збирови се различни од 90° и 270°. Да претпоставиме дека $\alpha+\beta \neq 90^\circ \neq \gamma+\delta$, што повлекува дека $\alpha+\beta \neq 270^\circ \neq \gamma+\delta$.

Бидејќи $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360^\circ$, добиваме

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}(360^\circ - (\gamma+\delta)) = -\operatorname{tg}(\gamma+\delta), \text{ т.е. } \operatorname{tg}(\alpha+\beta) + \operatorname{tg}(\gamma+\delta) = 0.$$

Сега, ако искористиме дека α, β, γ и δ различни од 90°, добиваме

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) + \operatorname{tg}(\gamma+\delta) = 0,$$
$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(1 - \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\delta) + (\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta)(1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta) = 0$$
$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\delta + (\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta)\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$$

Конечно, ако посленото равенство го поделиме со $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\delta$, го добиваме бараното равенство.

4. Рамнината ги сече бочните рабови од правилна четиристрана пирамида со врв S во точките A, B, C и D. Притоа A и C се точки од спротивни рабови и ниту една од точките A, B, C, D не се совпаѓа со S. Да се докаже дека

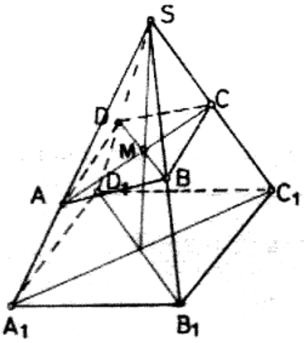
$$\frac{1}{AS}+\frac{1}{CS}=\frac{1}{BS}+\frac{1}{DS}.$$

Решение. Нека рамнината што ја сече пирамидата, ја сече, висината на пирамидата во точка M. Тогаш SM е симетрала на аголот кај темето S и во двата триаголници ASC и BSD. Од друга страна, бидејќи пирамидата е правилна, $\measuredangle ASC=\measuredangle BSD$. Нека $\measuredangle ASM=\alpha$. Тогаш

$$2P_{ASC}=\overline{SM}\cdot\overline{SA}\sin\alpha+\overline{SM}\cdot\overline{SC}\sin\alpha$$

и

$$2P_{ASC}=\overline{SA}\cdot\overline{SC}\sin 2\alpha .$$



Според тоа,

$$\frac{\overline{SA}+\overline{SC}}{\overline{SA}\cdot\overline{SC}}=\frac{2\cos\alpha}{\overline{SM}}.$$

Слично, и

$$\frac{\overline{SA}+\overline{SC}}{\overline{SA}\cdot\overline{SC}}=\frac{2\cos\alpha}{\overline{SM}}.$$

Значи,

$$\frac{1}{AS}+\frac{1}{CS}=\frac{\overline{SA}+\overline{SC}}{\overline{SA}\cdot\overline{SC}}=\frac{\overline{SB}+\overline{SD}}{\overline{SB}\cdot\overline{SD}}=\frac{1}{BS}+\frac{1}{DS}$$ (види цртеж).

IV година

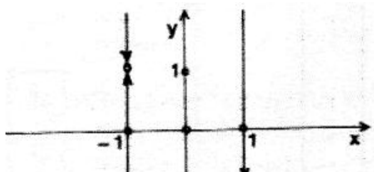
1. Нека A и B се подмножества од $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ определени со:

$$A=\{(x,y)\,|\,\text{за секој } a\in\mathbb{R}, y\neq\tfrac{x-a}{ax-1}\}$$

$$B=\{(x,y)\,|\,\text{постои } a\in\mathbb{R}, a(1+xy)=x+y\}.$$

Да се најде $A\cap B$, а потоа да се претстави графички.

Решение. Нека $(x,y)\in A\cap B$. Бидејќи $(x,y)\in B$, постои $a\in\mathbb{R}$ така што $a(1+xy)=x+y$, т.е. $y(ax-1)=x-a$. Ако $ax-1\neq 0$, тогаш $y=\frac{x-a}{ax-1}$, што е спротивно со $(x,y)\in A$. Значи, $ax=1$ и $x=a$, од што следува дека $x^2=1$. За $x=1$ имаме $-1=\frac{1-a}{a-1}$ а за $x=-1$, $1=\frac{-1-a}{-a-1}$, што значи дека $xy\neq -1$. Следствено,



$$A\cap B=\{(x,y)\,|\,x^2=1, xy\neq 1\}.$$

Графичкото претставување е дадено на цртежот десно.

2. Да се најде збирот $a_1+a_2+...+a_{1985}$, ако

$$a_{k-1}=\frac{3k^2-3k+1}{(k^2-k)^3} \text{ за } k\geq 2.$$

Решение. За $k \geq 2$ имаме

$$a_{k-1} = \frac{3k^2-3k+1}{(k^2-k)^3} = \frac{k^3-(k-1)^3}{k^3(k-1)^3} = \frac{1}{(k-1)^3} - \frac{1}{k^3} = b_{k-1} - b_k,$$

каде што $b_n = \frac{1}{n^3}$ за $n \geq 1$. Тогаш

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_{1985} &= b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + \ldots + b_{1984} - b_{1985} + b_{1985} - b_{1986} \\ &= b_1 - b_{1985} \\ &= 1 - \frac{1}{1986^3} = \frac{1986^3-1}{1986^3}. \end{aligned}$$

3. Нека $S_k(n) = \sum_{j=1}^{n} j^k$, за $k, n \in \mathbb{N}$. Да се покаже дека за секои $k, n \in \mathbb{N}$

$$nS_k(n) = S_{k+1}(n) + \sum_{i=1}^{n-1} S_k(i)$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} nS_k(n) &= S_k(n) + S_k(n) + S_k(n) + \ldots + S_k(n) \\ &= \;\; n^k + \underline{(n-1)^k + (n-2)^k + \ldots + 3^k + 2^k + 1^k} \\ &\quad + n^k + (n-1)^k + \underline{(n-2)^k + \ldots + 3^k + 2^k + 1^k} \\ &\quad + n^k + (n-1)^k + (n-2)^k + \underline{\ldots + 3^k + 2^k + 1^k} \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + n^k + (n-1)^k + (n-2)^k + \ldots + 3^k + \underline{2^k + 1^k} \\ &\quad + n^k + (n-1)^k + (n-2)^k + \ldots + 3^k + 2^k + \underline{1^k} \\ &\quad + n^k + (n-1)^k + (n-2)^k + \ldots + 3^k + 2^k + 1^k \\ &= n \cdot n^k + (n-1)(n-1)^k + (n-2)(n-2)^k + \ldots + 3 \cdot 3^k + 2 \cdot 2^k + 1^k \\ &\quad + S_k(n-1) + S_k(n-2) + \ldots + S_k(3) + S_k(2) + S_k(1) \\ &= n^{k+1} + (n-1)^{k+1} + (n-2)^{k+1} + \ldots + 3^{k+1} + 2^{k+1} + 1^{k+1} \\ &\quad + S_k(n-1) + S_k(n-2) + \ldots + S_k(3) + S_k(2) + S_k(1) \\ &= S_{k+1}(n) + \sum_{i=1}^{n-1} S_k(i). \end{aligned}$$

4. Иста како и задача четири од трета година.