

Билјана Јошевска Јованчева,
Скопје

ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ

Функционалните равенки се дел од математичката разноликост и истите се природна врска на алгебрата и математичката анализа. Тие се одликуваат со разнообразност на идеите за нивно решавање, отсуството на шаблони и поврзувањето на поимите меѓу елементарната и вишата математика. Во ова статија ќе разгледаме неколку елементарни функционални равенки во множеството реални броеви.

Задача 1. Најди ги сите функции $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ такви да важи

$$f(xy) = xf(y) + f(x), \text{ за секои } x, y \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Решение. Ако во (1) ставиме $y=0$ добиваме $f(x) = f(0) - xf(0)$. Нека $a = f(0)$. Тогаш $f(x) = a - ax$. Непосредно се проверува дека овие функции се решенија на функционалната равенка (1) за секој $a \in \mathbf{R}$. ■

Задача 2. Нека $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ и нека $f(x+y) = f(xy)$, за секои $x, y \in \mathbf{R}$. Ако $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$, пресметај $f(2014)$.

Решение. Од условот на задачата следува

$$f(x) = f(x+0) = f(x \cdot 0) = f(0).$$

Ако во последната равенка ставиме $x = -\frac{1}{2}$ добиваме $f(0) = f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$, па затоа $f(x) = f(0) = -\frac{1}{2}$. Конечно, за $x = 2014$ имаме $f(2014) = -\frac{1}{2}$. ■

Задача 3. Најди ги сите функции $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ такви да важи

$$(f(x))^2 + f(x)f(y) = x^2 + xy, \text{ за секои } x, y \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

Решение. За $x = y = 1$ од (2) добиваме $2(f(1))^2 = 2$, па затоа $f(1) = 1$ или $f(1) = -1$. Ако сега во (2) ставиме $x = 1$ наоѓаме $f(y) = y$ или $f(y) = -y$, за секој $y \in \mathbf{R}$. Непосредно се проверува дека функциите $f(x) = x$ и $f(x) = -x$ се решенија на равенката (1). ■

Задача 4. Најди ги сите функции $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ такви да важи

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y, \text{ за секои } x, y \in \mathbf{R}. \quad (3)$$

Решение. Нека $y = 0$. Со замена во (3) добиваме

$$f(0)(f(x) - 1) = x, \text{ за секој } x \in \mathbf{R}. \quad (4)$$

Од последната равенка следува дека $f(0) \neq 0$, бидејќи во спротивно левата страна на (4) би била еднаква на 0, а десната страна е произволен реален број, што не е можно. Сега, од (4) добиваме $f(x) = \frac{x}{f(0)} + 1$. Ако во последната равенка ставиме $x = 0$ добиваме $f(0) = 1$, што значи дека единствено решение на дадената равенка е $f(x) = x + 1$. ■

Задача 5. Најди ги сите функции $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ такви да важи

$$f(x+y) + 2f(x-y) + f(x) + 2f(y) = 4x + y, \text{ за секои } x, y \in \mathbf{R}. \quad (5)$$

Решение. Ако во (5) ставиме $y = 0$ добиваме $4f(x) + 2f(0) = 4x$.

Земаме $f(0) = a$ и добиваме $f(x) = x - \frac{a}{2}$. Понатаму, со замена во равенката (5) добиваме

$$x + y - \frac{a}{2} + 2(x - y - \frac{a}{2}) + x - \frac{a}{2} + 2(y - \frac{a}{2}) = 4x + y,$$

од каде наоѓаме $a = 0$. Според тоа, единствено решение на равенката (5) е функцијата $f(x) = x$. ■

Задача 6. Најди ги сите функции $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ такви да важи

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{x+y}, \text{ за секои } x, y \in \mathbf{R} \text{ такви што } x + y \neq 0.$$

Решение. За $y = 1, x \neq -1$ имаме

$$f(x) = \frac{f(x) + f(1)}{x+1}, \text{ т.е. } xf(x) = f(1).$$

Ако во последната равенка ставиме $x = 0$ добиваме $f(1) = 0$. Значи, за $x \neq 0, x \neq -1$ имаме $f(x) = 0$. Сега, бидејќи $f(2) = 0$, ако во дадената равенка ставиме $y = 0, x = 2$ добиваме

$$f(0) = \frac{f(2) + f(0)}{2}, \text{ т.е. } f(0) = f(2) = 0.$$

Конечно, ако во дадената равенка ставиме $y = 0, x = -1$, добиваме

$$f(0) = \frac{f(-1) + f(0)}{-1}, \text{ т.е. } f(-1) = -2f(0) = 0.$$

Значи, $f(x) = 0$, за секој $x \in \mathbf{R}$. ■

Непозната функција може да се определи и во случај кога имаме дадено неравенства кои функцијата треба да ги задоволува, како што е тоа во следниов пример.

Задача 7. За функцијата $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ важи

- 1) $f(x) \leq x$, за секој $x \in \mathbf{R}$ и
- 2) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$, за секои $x, y \in \mathbf{R}$.

Докажи дека $f(x) = x$, за секој $x \in \mathbf{R}$.

Решение. Од $f(0+0) \leq f(0) + f(0)$ следува $2f(0) \geq f(0)$, т.е. $f(0) \geq 0$. Понатаму, од $f(x+(-x)) \leq f(x) + f(-x)$ добиваме

$$f(x) \geq f(0) - f(-x) \geq 0 - f(-x) \geq -(-x) = x,$$

што заедно со условот 1) дава $f(x) = x$. ■

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Најди ги сите функции $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ такви да важи

$$f(x+y) + f(x-y) - f(x) - x^3 - 6xy\sqrt[3]{f(y)} = 0, \text{ за секои } x, y \in \mathbf{R}.$$

2. Најди ги сите функции $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ такви да важи

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y), \text{ за секои } x, y \in \mathbf{R}.$$

Статијата прв пат е објавена во списанието НУМЕРУС на СММ