Драгољуб Милошевић (Прањани)

НЕКЕ ПРИМЕНЕ ПАСКАЛОВОГ ТРОУГЛА

У једном од ранијих бројева *Математичког листа* изложена је примена тзв. Паскаловог троугла у одређивању коефицијената полинома који представља степен бинома у развијеном облику[1]. Овде ћемо приказати примену тог троугла у:

а) одређивању броја подскупова са по k елемената скупа од n елемената;

б) извесним проблемима теорије вероватноће.

1.1. Подсетимо се да чланове Паскаловог троугла добијамо на следећи начин. Први и последњи члан сваког реда је број 1, а остале чланове добијамо сабирањем по два члана из претходног реда и то оног који је изнад траженог члана и оног који му претходи. (Таб. 1).

	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(0)	1					
(1)	1	1				
(2)	1	2	1			
(3)	1	3	3	1		
(4)	1	4	6	4	1	
(5)	1	5	10	10	5	1

Таб. 1

	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(0)	1					
(1)	1	$\frac{1}{1}$				
(2)	1	$\frac{2}{1}$	$\frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}$			
(3)	1	$\frac{3}{1}$	$\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}$	$\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}$		
(4)	1	$\frac{4}{1}$	$\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}$	$\frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}$	$\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$	
(5)	1	$\frac{5}{1}$	$\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}$	$\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}$	$\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$	$\frac{5\cdot 4\cdot 4\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$

Таб. 2

Међутим, лако се уверавамо да се бројеви из првих неколико редова Паскаловог троугла из таб. 1 могу представити и онако као што је то учињено у таб. 2. При томе код разломака којима

[1]) Видети о томе чланак: П. Димић, Паскалов троугао, МЛ. XIV, 3.

су у таб. 2 предсатављени чланови Паскаловог троугла примећу јемо извесну законитост. (Њу и сам читалац може да установи.) Може се, потом, доказати да та законитост важи и за чланове осталих редова из Паскаловог троугла. Због тога, ако се договоримо да први од редова Паскаловог троугла сматрамо за нулти, други за први, итд., и да први од чланова сваког ступца сматрамо за нулти, други за први, итд., чланови n-тог реда Паскаловог троугла добијају се по формулама:

$$C_n^0=1,\ C_n^1=\frac{n}{1},\ C_n^2=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2},\ \ldots,$$
$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k},$$
$$C_n^{n-1}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)},\ \ C_n^n=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\,n}.$$

Ове формуле дају могућност да се чланови n-тог реда Паскаловог троугла израчунају директно, без одређивања чланова из претходних редова, а у вези са њима се лако утврђује да је:

$$C_n^0=C_n^n,\ C_n^1=C_n^{n-1},\ C_n^3=C_n^{n-3},\ldots$$

1.2. Нека је дат скуп од n елемената $S=\{a_1,\ a_2,\ldots,a_{n-1},\ a_n\}$. Тај скуп има, очигледно, као подскупове један празан скуп $\varnothing$ и један n-точлани скуп $\{a_1,\ a_2,\ldots,a_{n-1},\ a_n\}$.

Сваки непразан скуп, даље, има једночланих скупова колико и елемената, што значи да скуп S има n једночланих скупова; а како се издвајањем по једног елемента из скупа S добија (од преосталих чланова) увек по један подскуп од $(n-1)$ чланова, закључујемо да је и број ових подскупова n.

Ако се по један елемент скупа S комбинује са по једним од преосталих елемената, добијају се двочлани подскупови овог скупа. Њих има $n(n-1)$. Међутим, како се повезивањем неког елемента са неким другим, и затим тог другог елемента са оним првим, добија исти подскуп — тј. пошто је $\{a_i,\ a_j\}=\{a_j,\ a_i\}$ — то ће број ових подскупова бити $\frac{n(n-1)}{2}$; сем тога, пошто се издвајањем сваког оваквог подскупа из скупа S добија по један подскуп са по $(n-2)$ елемента, закључујемо да је и број ових подскупова $\frac{n(n-1)}{2}$.

Сада одредимо колико скуп S има трочланих подскупова. Ако се било којем двочланом подскупу придружи по један од преосталих $(n-2)$ елемената скупа S, добија се по један трочлани подскуп скупа S. Међутим, таквих придруживања (комбинација) има три пута мање него што се, на први поглед, очекује. Наиме, ако се, на пример, двочланим скуповима $\{a_i, a_j\}$, $\{a_i, a_k\}$, $\{a_j, a_k\}$ придруже редом елементи a_k, a_j, a_i, добијају се скупови $\{a_i, a_j, a_k\}$, $\{a_i, a_k, a_j\}$, $\{a_j, a_k, a_i\}$. Како су ови скупови међусобно једнаки, то број придруживања двочланих подскупова, којих има $\frac{n(n-1)}{2}$, по једном од преосталих $(n-2)$ елемената скупа S износи у ствари $\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n-2}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Зато број трочланих подскупова скупа S износи $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, па је, услед тога, то и број оних подскупова скупа S који имају по $(n-3)$ елемента.

Резонујући на тај начин долазимо до закључка да има

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ четворочланих,}$$

$$C_n^5 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$ петочланих, и C_n^k k-точланих

подскупова скупа од n елемената. Међутим, видимо да се сви ови бројеви налазе у n-том реду Паскаловог троугла. Зато можемо рећи: *бројеви из n-шоі реда Паскаловоі шроуіла йоказују колико има йразних, једночланих, двочланих, ишд., йодскуйова скуйа од n елемеиаша.*

1.3. Овде ћемо утврдити још и следеће.

На основу Паскаловог троугла видимо да скуп од једног елемента има укупно $2=2^1$ подскупова; скуп од 2 елемента има укупно $4=2^2$ подскупова; скуп од 3 елемента има укупно $8=2^3$ подскупова; итд. Према томе, за ова три скупа важи свакако правило: збир свих подскупова n-точлнаног скупа износи 2^n.

Покажимо да наведено правило важи и за четворочлани скуп. Наиме, ако се елементима трочланог скупа дода још и четврти елемент, онда ће се, сем већ формираних подскупова, добити још исто толико нових подскупова, те ћемо имати укупно $2^3 \cdot 2=2^4$ подскупова. Настављајући овај поступак, утврдићемо да, заиста, напред наведено правило важи за свако n, за сваки скуп од n чланова.

Пример **1.** — Одредити (непосредно) број четворочланих подскупова шесточланог скупа.

Тај број је $$C_6^4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Пример **2.** — Колики је укупни број подскупова петочлачланог скупа?

Тај број је $S=2^5=32$.

2.1. Ако новчић бацимо у ваздух, можемо ишчекивати да исти падне на „грб" (Г), или на „број" (Б). Искуство нас учи да ће код великог броја бацања приближно исто толико пута пасти „грб" колико пута и „број". Тако, у два бацања просечно падне једанпут „грб", што значи да је вероватноћа да ће приликом бацања новчића пасти „грб" управо 50%, или 1/2 (и да је толика вероватноћа да ће пасти „број").[2)]

Међутим, ако бацимо у ваздух 2 новчића, тада постоји могућност да се добије: „грб" — „грб", „грб" — „број", „број" — „грб", „број" — „број". Како су све ове четири могућности једнако вероватне (имају исту вероватноћу), то значи да свака има вероватноћу од 25%, тј. 1/4. У случају да догађаје ГБ и БГ не разликујемо (до чега свакако долази ако су оба новчића једнака), тада је вероватноћа да ће приликом бацања пасти две неједнаке стране новчића $\frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$. Тако, вероватноћа да ће се добити два „грба" износи 1/4, вероватноћа да ће се добити „грб" и „број" — 1/2, а вероватноћа да ће се добити два „броја" — опет 1/4.

На крају, претпоставимо да имамо 3 новчића. Како 2 новчића могу пасти на 4 начина, а сваки се од њих може комбиновати са по две могућности падања трећег новчића, то је укупан број могућности, у овом случају, управо $4 \cdot 2=8$. Према томе, вероватноћа да наступи било која од ових могућности је 1/8. Но, како су скупови {Г, Г, Б}, {Г, Б, Г} и {Б, Г, Г} (а исто тако и скупови {Б, Б, Г}, {Б, Г, Б}, {Г, Б, Б}) међусобно једнаки, то вероватноћа да приликом бацања падну 2 „грба" и један „број" (односно да падну два „броја" и један „грб") износи 3/8. Напослетку, вероватноћа да падну 3 „грба" (или 3 „броја") је 1/8.

[2)] Под математичком вероватноћом подразумева се број $V=\frac{p}{m}$, где је p број повољних а m број свих могућих случајева.

Ако вероватноће за поједине случајеве, у наведена три примера, представимо таблицом, добијамо

1/2	1/2		
1/4	2/4	1/4	
1/8	3/8	3/8	1/8

Таб. 3

Одавде се види да се у овим случајевима бројиоци оних разломака који представљају вероватноћу да ће се приликом бацања n новчића „грбови" и „бројеви" појавити у одређеној размери — да се ти бројеви могу наћи у n-том реду. Паскаловог троугла, док је именилац ових разломака увек 2^n.

Уверимо се сад да ово правило важи уопште.

Претпоставимо да је бачено n новчића. Да сви они падну с „грбом" нагоре, може се догодити само на један начин. Да од n новчића $n-1$ падне с „грбом" нагоре, а само један с „бројем" нагоре, може се догодити на n начина, с обзиром на то да се сваком од n новчића може догодити да падне с „бројем" нагоре. Да од n новчића $(n-2)$ падну с „грбом" нагоре, а 2 с „бројем" нагоре, може се догодити на онолико начина колико двочланих подскупова има скуп од n елемената (јер сада све по два од укупно n новчића падају с „бројем" нагоре), а то значи на $\frac{n(n-1)}{2}$ начина. Да од n новчића $n-3$ падну с „грбом" нагоре, а 3 с „бројем" нагоре, може се догодити на онолико начина колико има трочланих подскупова скуп од n елемената, а то значи $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}$; итд. Стога је укупан број могућих начина падања новчића, према ономе што смо видели у претходном члану, 2^n, а вероватноћа да се падање одигра баш на један одређен начин $1/2^n$, из чега произилази да је напред наведено правило тачно.

Задаци

1. Колико има трочланих подскупова скуп од 20 елемената?

2. Ако бацимо 8 новчића, колика је вероватноћа да се појави комбинација: трипут „грб" и пет пута „број"?

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија