EVOLVENTA (JAMTK) 5(2) (2022), 2–14

Publikovano od UM TK,
Udruženje matematičara TK
Dostupno na: http://evolventa.ba
http://www.umtk.info

Kompleksni brojevi i trigonometrijske jednakosti

Mehmed Nurkanović

Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Tuzli, Tuzla

Sažetak: Često se na takmičenjima iz matematike učenika srednjih škola, kao i na ispitima kod studenata na fakultetima, pojavljuju problemi iz trigonometrije (posebno problemi dokazivanja raznih trigonometrijskih jednakosti ili nejednakosti) koji znaju biti izazovni i za najbolje među njima. U ovom radu će biti demonstrirana upotreba kompleksnih brojeva u trigonometriji pri dobijanju nekih vrlo specifičnih jednakosti, koristeći osobine n-tog korijena jedinice, binomnu formulu, geometrijski niz ili neku drugu ideju.

1. Uvod

Nekada trigonometrijski problemi mogu zadavati popriličnu glavobolju studentima na ispitima kao i učenicima koji se spremaju za takmičenja. Koristiti isključivo trigonometrijski ili općenito geometrijski metod u njihovom rješavanju zna biti često vrlo komplicirano i naizgled nemoguća misija. Budući da kompleksni brojevi mogu biti predstavljeni na tri različita načina, od kojih je jedan u trigonometrijskom obliku (ostala dva su: algebarski i Eulerov), to se nameće ideja o mogućnosti primjene kompleksnih brojeva u rješavanju takvih problema. Problemi dokazivanja nekih trigonometrijskih jednakosti mogu biti riješeni ponekad upotrebom potpune matematičke indukcije. Međutim, ukoliko je problem oblika da se izračuna neka suma ili proizvod nekih trigonometrijskih funkcija, onda to poprima znatno veću težinu. Ideja ovog rada je da ilustriramo primjenu kompleksnih brojeva s nekoliko zanimljivih primjera dobijanja nekih trigonometrijskih jednakosti. No, prije toga podsjetimo se nekih baznih činjenica o kompleksnim brojevima. Prije svega, kako je već rečeno, kompleksan broj možemo predstaviti u sljedećim oblicima:
a) algebarskom

$$z = a + ib,$$

b) trigonometrijskom

$$z = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

i
c) Eulerovom

$$z = |z| e^{i\varphi}, \tag{1}$$

Ciljna skupina: srednja škola, fakultet
Ključne riječi: kompleksan broj, n-ti korijen jedinice, binomna formula, geometrijski niz, Moivreova formula
Kategorizacija: Stručno-istraživački rad
Rad preuzet: decembar, 2022.

pri čemu je: $a = \mathrm{Re}\{z\}$, $b = \mathrm{Im}\{z\}$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ i φ je ugao koji se dobije iz jednakosti

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|}.$$

Važno je istaknuti još i sljedeće:

$$i^{4k} = 1, \ i^{4k+1} = i, \ i^{4k+2} = -1, \ i^{4k+3} = -i, \ k \in \mathbb{N} \tag{2}$$

i da vrijedi tzv. *Moivreova formula*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{3}$$

2. Primjena n-tog korijena jedinice

U mnogim problemima iz trigonometrije moguće je primijeniti metod kompleksnih brojeva u slučaju korištenja osobina n-tog korijena jedinice (n je prirodan broj). Prisjetimo se tog fenomena. Naime,

$$z^n - 1 = 0 \Longleftrightarrow z^n = e^{2k\pi i} \ (k \in \mathbb{Z}) \ \Longleftrightarrow z_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i} \ (k = 1, 2, ..., n).$$

Znamo da algebarska jednadžba n-tog stepena ima n rješenja u skupu kompleksnih brojeva, računajući pri tome i višestrukost pojedinih rješenja (osnovni teorem algebre). Tako se brojevi z_k, $k = 1, 2, ..., n$, zovu n-tim korijenima jedinice. Oni geometrijski predstavljaju vrhove pravilnog n-tougla koji su raspoređeni na jediničnoj kružnici (s centrom u koordinatnom početku) u kompleksnoj ravni.
Uzmemo li specijalno $n = 5$, imamo jednadžbu

$$z^5 - 1 = 0, \tag{4}$$

za koju znamo da su joj rješenja 5-i korijeni jedinice: 1, $e^{\frac{2\pi}{5}i}$, $e^{\frac{4\pi}{5}i}$, $e^{\frac{6\pi}{5}i}$, $e^{\frac{8\pi}{5}i}$. S druge strane, jednadžbu (4) možemo riješiti i na drugi način i tako njena rješenja dobiti u algebarskom obliku, koja ćemo moći uporediti s već dobijenim oblicima rješenja u Eulerovom, odnosno trigonometrijskom obliku. Naime,

$$z^5 - 1 = 0 \Longleftrightarrow (z-1)\left(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\right) = 0,$$

odakle se dobije $z_1 = 1$ i

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0,$$

što je simetrična jednadžba koja se, dijeljenjem s z^2, svede na ekvivalentnu jednadžbu

$$z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0.$$

Uvođenjem smjene $w = z + \frac{1}{z}$ posljednja jednadžba prelazi u jednadžbu oblika

$$w^2 + w - 1 = 0,$$

čija su rješenja $w_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, te nakon vraćanja smjene dobijemo

$$\begin{aligned}
z_2 &= \frac{\sqrt{5} - 1}{4} + i\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \\
z_3 &= -\frac{\sqrt{5} + 1}{4} + i\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}, \\
z_4 &= -\frac{\sqrt{5} + 1}{4} - i\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}, \\
z_5 &= \frac{\sqrt{5} - 1}{4} - i\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.
\end{aligned}$$

Gledajući položaj ovih rješenja u kompleksnoj ravni, zaključujemo da vrijedi

$$
\begin{aligned}
z_2 &= e^{\frac{2\pi}{5}i} = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5},\\
z_3 &= e^{\frac{4\pi}{5}i} = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5},\\
z_4 &= e^{\frac{6\pi}{5}i} = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5},\\
z_5 &= e^{\frac{8\pi}{5}i} = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}.
\end{aligned}
$$

Upoređivanjem svakog od dobijenih rješenja u njegovom algebarskom i njegovom trigonometrijskom obliku, dobijemo

$$
\begin{aligned}
\cos\frac{2\pi}{5} &= \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\\
\cos\frac{4\pi}{5} &= -\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \quad \sin\frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.
\end{aligned}
$$

Odavde se mogu sada dobiti vrijednosti tangensa ovih uglova, što nam predstavlja rješenje problema navedenog u [3], Zad. 797. Naime, tako imamo

$$
\begin{aligned}
\tan\frac{2\pi}{5} &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}}\cdot\frac{6+2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}} = \sqrt{5+2\sqrt{5}},\\
\tan\frac{4\pi}{5} &= -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} = -\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}} = -\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}\cdot\frac{6-2\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}}} = -\sqrt{5-2\sqrt{5}}.
\end{aligned}
$$

Naravno, korištenjem adicionih teorema i formula za polovične uglove, jednostavno se dobije i da su

$$
\tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}, \quad \tan\frac{3\pi}{5} = -\sqrt{5+2\sqrt{5}}.
$$

Čitaocu preporučujemo da do ovih rezultata dođe i geometrijskim putem (vidjeti geometrijski način rješavanja sličnog problema u [2], V Način).
Time smo pokazali kako se može uspješno pristupiti rješavanju problema u obliku Zad. 797 [3], kao i njemu sličnih problema, koristeći upravo kompleksne brojeve i osobine n-tog korijena jedinice.

Sada se, naravno, mogu izvesti i drugi rezultati slično prethodnom razmatranju. Naime, već smo vidjeli da vrijedi

$$
x^5 - 1 = 0 \Longleftrightarrow x^5 = e^{2k\pi i} \Longleftrightarrow x_k = e^{\frac{2k\pi i}{5}}, \;\; k = 1,2,3,4,5,
$$

gdje je $x_5 = 1$ i $|x_k| = 1$. S druge strane je

$$
x^5 - 1 = (x-1)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4). \tag{5}
$$

Kako je

$$
x_4 = e^{\frac{8\pi i}{5}} = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5} = \cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5} = e^{-\frac{2\pi i}{5}} = \overline{x}_1
$$

i analogno i $x_3 = \overline{x}_2$, zamjenom u (5) dobijemo zanimljivu vezu

$$\begin{aligned}
x^5 - 1 &= (x-1)(x-x_1)(x-\overline{x}_1)(x-x_2)(x-\overline{x}_2) \\
&= (x-1)\left[x^2 - (x_1+\overline{x}_1)x + x_1\overline{x}_1\right]\left[x^2 - (x_2+\overline{x}_2)x + x_2\overline{x}_2\right] \\
&= (x-1)\left[x^2 - 2\mathrm{Re}\{x_1\}x + |x_1|^2\right]\left[x^2 - 2\mathrm{Re}\{x_2\}x + |x_2|^2\right] \\
&= (x-1)\left(x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}x + 1\right)\left(x^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5}x + 1\right).
\end{aligned}$$

Dakle,

$$x^5 - 1 = (x-1)\left(x^2 - 2x\cos 72^\circ + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos 144^\circ + 1\right). \tag{6}$$

Dokazati jednakost (6) se javlja kao problem u obliku Zad. 826 [3].

Posljednji se rezultat može i popćiti za proizvoljan prirodni broj n. Razmatranja se razlikuju za parne i neparne n. Prvo, razmotrimo slučaj neparnog stepena

$$x^{2n+1} - 1 = 0 \Longleftrightarrow x^{2n+1} = e^{2k\pi i} \Longleftrightarrow x_k = e^{\frac{2k\pi}{2n+1}i},\ \ k = 1, 2, ..., 2n+1,$$

gdje je $x_{2n+1} = 1$ i $|x_k| = 1$. S druge strane je, zbog $x_{2n+1-k} = \overline{x}_k$,

$$\begin{aligned}
x^{2n+1} - 1 &= (x-1)\prod_{k=1}^{2n}(x-x_k) = (x-1)\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)(x-\overline{x}_k) \\
&= (x-1)\prod_{k=1}^{n}\left[x^2 - (x_k+\overline{x}_k)x + x_k\overline{x}_k\right] \\
&= (x-1)\prod_{k=1}^{n}\left[x^2 - 2\mathrm{Re}\{x_k\}x + |x_k|^2\right],
\end{aligned}$$

odnosno

$$x^{2n+1} - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1} + 1\right). \tag{7}$$

U slučaju parnog stepena, imamo

$$x^{2n} - 1 = 0 \Longleftrightarrow x^{2n} = e^{2k\pi i} \Longleftrightarrow x_k = e^{\frac{2k\pi}{2n}i},\ \ k = 1, 2, ..., 2n,$$

gdje je $x_n = -1$, $x_{2n} = 1$ i $|x_k| = 1$. Međutim, zbog $x_{2n-k} = \overline{x}_k$, bit će

$$\begin{aligned}
x^{2n} - 1 &= (x-x_n)(x-x_{2n})\prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k)\prod_{k=n+1}^{2n-1}(x-x_k) \\
&= \left(x^2-1\right)\prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k)(x-x_{2n-k}) \\
&= \left(x^2-1\right)\prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k)(x-\overline{x}_k) \\
&= \left(x^2-1\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left[x^2 - 2\mathrm{Re}\{x_k\}x + |x_k|^2\right],
\end{aligned}$$

odnosno

$$x^{2n}-1=\left(x^2-1\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right). \tag{8}$$

Slično se dobije da je

$$x^{2n+1}+1=(x+1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\,\pi}{2n+1}+1\right) \tag{9}$$

i

$$x^{2n}+1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{(2k+1)\,\pi}{2n}+1\right). \tag{10}$$

Problem dokazivanja jednakosti (7), (8), i (10) javlja se u npr. [3] u obliku Zad. 829, 827 i 828, respektivno. Primijetimo sada da možemo iz ovih jednakosti dobiti vrlo zanimljive veze. Kako je, s jedne strane,

$$x^{2n}-1=\left(x^2-1\right)\left(x^{2n-2}+x^{2n-4}+...+x^2+1\right),$$

a s druge, kako smo već vidjeli,

$$x^{2n}-1=\left(x^2-1\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right),$$

imamo da je

$$x^{2n-2}+x^{2n-4}+...+x^2+1=\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right). \tag{11}$$

Uzimajući da je $x=1$ u posljednjoj jednakosti, dobija se

$$n=\prod_{k=1}^{n-1}2\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}4\sin^2\frac{k\pi}{2n}=4^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\frac{k\pi}{2n},$$

odakle je

$$\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\right)^2=\frac{n}{4^{n-1}},$$

odnosno

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}...\sin\frac{(n-1)\,\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},\quad n>1, \tag{12}$$

čime smo upravo demonstrirali i rješenje problema datog kao Zad. 830, 1° [3].
Analogno, uzimajući da je $x=-1$ u (11), dobije se

$$\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}...\cos\frac{(n-1)\,\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},\quad n>1. \tag{13}$$

Također, na analogan način se iz jednakosti (7) dobiju sljedeće formule

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}...\sin\frac{(n-1)\,\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n},\quad n\in\mathbb{N} \tag{14}$$

i

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}...\cos\frac{(n-1)\,\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n},\quad n\in\mathbb{N}. \tag{15}$$

3. Primjena binomne formule

Koristeći binomnu formulu i kompleksne brojeve moguće je doći do vrlo zanimljivih jednakosti (a koje se često pojavljuju u literaturi kao problemi za rješavanje, te kao problemi na raznim takmičenjima iz matematike ili ispitima na fakultetima).
Tako, na primjer, imamo

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}i+\binom{n}{2}i^2+\binom{n}{3}i^3+\binom{n}{4}i^4+\binom{n}{5}i^5+...+i^n \\ &= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}i-\binom{n}{2}-\binom{n}{3}i+\binom{n}{4}+\binom{n}{5}i+...+i^n \ ,\end{aligned}$$

gdje smo koristili (2) i binomnu formulu.
Koristeći sada Moivreovu formulu i činjenicu da je

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

dobijamo

$$(1+i)^n=\sqrt{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

te vrijedi

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-...=\operatorname{Re}\left\{(1+i)^n\right\}=\sqrt{2^n}\cos\frac{n\pi}{4} \tag{16}$$

i

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-...=\operatorname{Im}\left\{(1+i)^n\right\}=\sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}. \tag{17}$$

Problemi dokazivanja jednakosti (16) i (17) mogu se, na primjer, naći u [3] kao Zad. 795.

Krenemo li sada od jednakosti

$$\begin{aligned}(\cos x+i\sin x)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}x\,(i\sin x)^k \\ &= \binom{n}{0}\cos^n x+i\binom{n}{1}\cos^{n-1}x\sin x+i^2\binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x+i^3\binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^3 x \\ &+ i^4\binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^4 x+i^5\binom{n}{5}\cos^{n-5}x\sin^5 x+...+i^n\binom{n}{n}\sin^n x \\ &= \binom{n}{0}\cos^n x+i\binom{n}{1}\cos^{n-1}x\sin x-\binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x-i\binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^3 x \\ &+ \binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^4 x+i\binom{n}{5}\cos^{n-5}x\sin^5 x+...+i^n\binom{n}{n}\sin^n x \\ &= \cos nx+i\sin nx,\end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned}\cos nx &= \operatorname{Re}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}x\,(i\sin x)^{k}\right\}\\ &= \binom{n}{0}\cos^{n}x-\binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^{2}x+\binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^{4}x-...,\\ \sin nx &= \operatorname{Im}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}x\,(i\sin x)^{k}\right\}\\ &= \binom{n}{1}\cos^{n-1}x\sin x-\binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^{3}x+\binom{n}{5}\cos^{n-5}x\sin^{5}x-...\ ,\end{aligned}$$

dobijemo sljedeću jednakost

$$\tan nx=\frac{\sin nx}{\cos nx}=\frac{\binom{n}{1}\cos^{n-1}x\sin x-\binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^{3}x+\binom{n}{5}\cos^{n-5}x\sin^{5}x-...}{\binom{n}{0}\cos^{n}x-\binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^{2}x+\binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^{4}x-...}.$$

Nakon dijeljenja i brojnika i nazivnika posljednjeg razlomka s $\cos^n x$, slijedi vrlo zanimljiva jednakost

$$\tan nx=\frac{\binom{n}{1}\tan x-\binom{n}{3}\tan^{3}x+\binom{n}{5}\tan^{5}x-}{1-\binom{n}{2}\tan^{2}x+\binom{n}{4}\tan^{4}x-...},\tag{18}$$

čije se dokazivanje pojavljuje kao problem u obliku Zad. 800 [3].

4. Primjena geometrijskog niza

U ovoj sekciji ćemo, koristeći se geometrijskim nizom i kompleksnim brojevima, doći do još nekih vrlo zanimljivih trigonometrijskih jednakosti, kao što slijedi.
Kombiniranjem Eulerovog i trigonometrijskog oblika komopleksnog broja, imamo

$$\begin{aligned}1+ae^{ix}+\left(ae^{ix}\right)^{2}+...+\left(ae^{ix}\right)^{n} &= \frac{\left(ae^{ix}\right)^{n+1}-1}{ae^{ix}-1}=\frac{\left(ae^{ix}\right)^{n+1}-1}{ae^{ix}-1}\cdot\frac{ae^{-ix}-1}{ae^{-ix}-1}\\ &= \frac{a^{n+2}e^{inx}-ae^{-ix}-a^{n+1}e^{i(n+1)x}+1}{a^{2}-ae^{ix}-ae^{-ix}+1}\\ &= \frac{a^{n+2}\cos nx-a\cos x-a^{n+1}\cos(n+1)x+1}{a^{2}-2a\cos x+1}\\ &\quad+i\frac{a^{n+2}\sin nx+a\sin x-a^{n+1}\sin(n+1)x}{a^{2}-2a\cos x+1}.\end{aligned}$$

odakle je

$$\operatorname{Re}\left\{1+ae^{ix}+\left(ae^{ix}\right)^{2}+...+\left(ae^{ix}\right)^{n}\right\}=1+a\cos x+a^{2}\cos 2x+...+a^{n}\cos nx$$

i

$$\operatorname{Re}\left\{1+ae^{ix}+\left(ae^{ix}\right)^{2}+...+\left(ae^{ix}\right)^{n}\right\}=\frac{a^{n+2}\cos nx-a\cos x-a^{n+1}\cos(n+1)x+1}{a^{2}-2a\cos x+1}$$

pa je

$$1 + a\cos x + a^2\cos 2x + ... + a^n\cos nx = \frac{a^{n+2}\cos nx - a\cos x - a^{n+1}\cos(n+1)x + 1}{a^2 - 2a\cos x + 1}. \tag{19}$$

Slično se dobije da je

$$\operatorname{Im}\left\{1 + ae^{ix} + \left(ae^{ix}\right)^2 + ... + \left(ae^{ix}\right)^n\right\} = a\sin x + a^2\sin 2x + ... + a^n\sin nx$$

i

$$\operatorname{Im}\left\{1 + ae^{ix} + \left(ae^{ix}\right)^2 + ... + \left(ae^{ix}\right)^n\right\} = \frac{a^{n+2}\sin nx + a\sin x - a^{n+1}\sin(n+1)x}{a^2 - 2a\cos x + 1},$$

odakle slijedi

$$a\sin x + a^2\sin 2x + ... + a^n\sin nx = \frac{a^{n+2}\sin nx + a\sin x - a^{n+1}\sin(n+1)x}{a^2 - 2a\cos x + 1}. \tag{20}$$

Uzimajući, specijalno, $a = 1$, iz gornjih jednakosti slijede sljedeće jednakosti (v.npr. [3], Zad. 798):

$$\begin{aligned}\sin x + \sin 2x + ... + \sin nx &= \frac{\sin nx + \sin x - \sin(n+1)x}{2 - 2\cos x} \\ &= \frac{2\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{(n-1)x}{2} - 2\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\left[\cos\frac{(n-1)x}{2} - \cos\frac{(n+1)x}{2}\right]}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cdot 2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}},\end{aligned}$$

odnosno

$$\sin x + \sin 2x + ... + \sin nx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \tag{21}$$

i

$$\begin{aligned}1 + \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx &= \frac{\cos nx - \cos(n+1)x + 1 - \cos x}{2 - 2\cos x} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{(2n+1)x}{2} + 2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},\end{aligned}$$

odnosno

$$1 + \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \tag{22}$$

i

$$\cos x + \cos 2x + ... + \cos nx = \frac{\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{23}$$

Sličnim postupkom možemo dobiti još neke zanimljive trigonometrijsle jednakosti. Kako je

$$\begin{aligned} 1+e^{i2\alpha}+e^{i4\alpha}+...+e^{i2n\alpha} &= \frac{e^{i2(n+1)\alpha}-1}{e^{i2\alpha}-1} = \frac{e^{i2(n+1)\alpha}-1}{e^{i2\alpha}-1}\cdot\frac{e^{-i2\alpha}-1}{e^{-i2\alpha}-1} \\ &= \frac{e^{i2n\alpha}-e^{-i2\alpha}-e^{i2(n+1)\alpha}+1}{2-e^{i2\alpha}-e^{-i2\alpha}} \\ &= \frac{\cos 2n\alpha-\cos 2\alpha-\cos 2\left(n+1\right)\alpha+1}{2-2\cos 2\alpha} \\ &+ i\frac{\sin 2n\alpha+\sin 2\alpha-\sin 2\left(n+1\right)\alpha}{2-2\cos 2\alpha}, \end{aligned}$$

imamo

$$\begin{aligned} 1+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+...+\cos 2n\alpha &= \operatorname{Re}\left\{1+e^{i2\alpha}+e^{i4\alpha}+...+e^{i2n\alpha}\right\} \\ &= \frac{\cos 2n\alpha-\cos 2\left(n+1\right)\alpha+1-\cos 2\alpha}{4\sin^2\alpha} \\ &= \frac{2\sin\left(2n+1\right)\alpha\sin\alpha+2\sin^2\alpha}{4\sin^2\alpha} \\ &= \frac{\sin\left(2n+1\right)\alpha+\sin\alpha}{2\sin\alpha}. \end{aligned}$$

odnosno

$$1+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+...+\cos 2n\alpha = \frac{\sin\left(n+1\right)\alpha\cos n\alpha}{\sin\alpha}. \tag{24}$$

Lijevu stranu jednakosti (24) možemo pisati u obliku

$$\begin{aligned} 1+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+...+\cos 2n\alpha &= (1+\cos 2\alpha)+(1+\cos 4\alpha)+...+(1+\cos 2n\alpha)-(n-1) \\ &= 2(\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+...\cos^2 n\alpha)-(n-1), \end{aligned}$$

odakle je

$$\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+...\cos^2 n\alpha = \frac{n}{2}+\frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+...+\cos 2n\alpha\right). \tag{25}$$

Iz (25) i (24) slijedi

$$\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+...\cos^2 n\alpha = \frac{n-1}{2}+\frac{\sin\left(n+1\right)\alpha\cos n\alpha}{2\sin\alpha}. \tag{26}$$

Analogno se dobije i sljedeća jednakost

$$\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+...\sin^2 n\alpha = \frac{n+1}{2}-\frac{\sin\left(n+1\right)\alpha\cos n\alpha}{2\sin\alpha}, \tag{27}$$

jer je

$$\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+...\sin^2 n\alpha = \frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+...+\cos 2n\alpha).$$

Izračunavanje suma na lijevim stranama jednakosti (26) i (27) dati su kao problemi u Zad. 804, 1° i 2° [3]. Pođimo sada od izraza

$$\begin{aligned} e^{i\alpha}+\binom{n}{1}e^{i2\alpha}+\binom{n}{2}e^{i3\alpha}+...+\binom{n}{n-1}e^{in\alpha}+e^{i(n+1)\alpha} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(k+1)\alpha} \\ &= e^{i\alpha}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\alpha} \\ &= e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha}+1\right)^n. \end{aligned}$$

Odavde je

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left\{e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha}+1\right)^{n}\right\} &= \operatorname{Re}\left\{e^{i\alpha}+\binom{n}{1}e^{i2\alpha}+\binom{n}{2}e^{i3\alpha}+...+\binom{n}{n-1}e^{in\alpha}+e^{i(n+1)\alpha}\right\} \\ &= \cos\alpha+\binom{n}{1}\cos 2\alpha+\binom{n}{2}\cos 3\alpha+...+\binom{n}{n-1}\cos n\alpha+\cos(n+1)\alpha. \qquad (28)\end{aligned}$$

No, kako je (korištenjem Moivreove formule (3))

$$\begin{aligned}e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha}+1\right)^{n} &= (\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\alpha+1+i\sin\alpha)^{n} \\ &= (\cos\alpha+i\sin\alpha)\left(2\cos^{2}\frac{\alpha}{2}+i2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{n} \\ &= 2^{n}\cos^{n}\frac{\alpha}{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{n} \\ &= 2^{n}\cos^{n}\frac{\alpha}{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right) \\ &= 2^{n}\cos^{n}\frac{\alpha}{2}\left(\cos\alpha\cos\frac{n\alpha}{2}-\sin\alpha\sin\frac{n\alpha}{2}\right) \\ &+ i2^{n}\cos^{n}\frac{\alpha}{2}\left(\cos\alpha\sin\frac{n\alpha}{2}+\sin\alpha\cos\frac{n\alpha}{2}\right) \\ &= 2^{n}\cos^{n}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{(n+2)\alpha}{2}+i2^{n}\cos^{n}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{(n+2)\alpha}{2},\end{aligned}$$

slijedi

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha}+1\right)^{n}\right\}=2^{n}\cos^{n}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{(n+2)\alpha}{2},$$

što zajedno s (28) daje

$$\cos\alpha+\binom{n}{1}\cos 2\alpha+\binom{n}{2}\cos 3\alpha+...+\binom{n}{n-1}\cos n\alpha+\cos(n+1)\alpha=2^{n}\cos^{n}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{(n+2)\alpha}{2}. \qquad (29)$$

Primijetimo da se odavde može izvući zaključak i da je

$$\sin\alpha+\binom{n}{1}\sin 2\alpha+\binom{n}{2}\sin 3\alpha+...+\binom{n}{n-1}\sin n\alpha+\sin(n+1)\alpha=2^{n}\cos^{n}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{(n+2)\alpha}{2}. \qquad (30)$$

Također i izračunavanje suma na lijevim stranama u (26) i (27) dati su kao problemi u Zad. 804, 3° i 4° [3].

Do još nekih trigonometrijskih jednakosti možemo doći koristeći sljedeću sumu

$$\begin{aligned}e^{ix}+e^{i(x+\alpha)}+...+e^{i(x+n\alpha)} &= e^{ix}\frac{\left(e^{i(n+1)\alpha}-1\right)}{e^{i\alpha}-1}=e^{ix}\frac{\left(e^{i(n+1)\alpha}-1\right)}{e^{i\alpha}-1}\cdot\frac{e^{-\frac{i\alpha}{2}}}{e^{\frac{-i\alpha}{2}}} \\ &= \frac{e^{i\left(x+\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right)}-e^{i\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)}}{e^{\frac{i\alpha}{2}}-e^{-\frac{i\alpha}{2}}} \\ &= \frac{\cos\left(x+\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right)-\cos\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)}{2i\sin\frac{\alpha}{2}} \\ &+ \frac{\sin\left(x+\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right)-\sin\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right) \\ &+ i\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right).\end{aligned}$$

Kako je, s jedne strane,

$$\operatorname{Re}\left\{e^{ix}+e^{i(x+\alpha)}+...+e^{i(x+n\alpha)}\right\}=\cos x+\cos\left(x+\alpha\right)+...+\cos\left(x+n\alpha\right),$$
$$\operatorname{Im}\left\{e^{ix}+e^{i(x+\alpha)}+...+e^{i(x+n\alpha)}\right\}=\sin x+\sin\left(x+\alpha\right)+...+\sin\left(x+n\alpha\right),$$

a s druge strane,

$$\operatorname{Re}\left\{e^{ix}+e^{i(x+\alpha)}+...+e^{i(x+n\alpha)}\right\}=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right),$$
$$\operatorname{Im}\left\{e^{ix}+e^{i(x+\alpha)}+...+e^{i(x+n\alpha)}\right\}=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right),$$

zaključujemo da vrijede sljedeće jednakosti [4]:

$$\cos x+\cos\left(x+\alpha\right)+...+\cos\left(x+n\alpha\right)=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right) \tag{31}$$

i

$$\sin x+\sin\left(x+\alpha\right)+...+\sin\left(x+n\alpha\right)=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right). \tag{32}$$

5. Druge ideje

Sada ćemo demonstrirati korištenje ideje rješavanja neke pomoćne jednadžbe kako bismo dobili neku vrlo zanimljivu trigonometrijsku jednakost. Kao prvo, razmotrimo sljedeću jednadžbu po z (v. [1])

$$(z+1)^n=e^{2n\alpha i}.$$

Označimo njena rješenja sa z_k, $k=0,1,...,n-1$. Tada je

$$z_k=e^{\frac{2n\alpha i+2k\pi i}{n}}-1. \tag{33}$$

Jasno je da vrijedi

$$(z+1)^n-e^{2n\alpha i}=\left(z-z_0\right)\left(z-z_1\right)...\left(z-z_{n-1}\right),$$

odakle, specijalno uzimajući $z=0$, slijedi

$$(-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}z_k=1-e^{2n\alpha i}. \tag{34}$$

S druge strane, prema (33), imamo

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}z_k&=\prod_{k=0}^{n-1}\left(e^{2\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}-1\right)\cdot\frac{e^{-\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}}{e^{-\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}}=\prod_{k=0}^{n-1}e^{\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}\left[e^{\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}-e^{-\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}\right]\\&=\prod_{k=0}^{n-1}e^{\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}\cdot 2i\sin\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)=(2i)^n\left(\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)\right)e^{A_k},\end{aligned}$$

gdje je

$$A_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) i = \left(n\alpha + \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k\right) i = \left(n\alpha + \frac{\pi}{n} \cdot \frac{(n-1)\, n}{2}\right) i$$
$$= \left(n\alpha + \frac{(n-1)\,\pi}{2}\right) i.$$

Dakle,

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_k = (2i)^n \left(\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right)\right) e^{\left(n\alpha + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) i}. \tag{35}$$

Iz jednakosti (34) i (35) dobijamo

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{(-1)^n \left(1 - e^{2n\alpha i}\right)}{(2i)^n\, e^{\left(n\alpha + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) i}} \cdot \frac{e^{-n\alpha i}}{e^{-n\alpha i}} = \frac{(-1)^n}{(2i)^n} \cdot \frac{e^{-n\alpha i} - e^{n\alpha i}}{e^{\frac{(n-1)\pi}{2} i}}$$
$$= \frac{(-1)^n}{(2i)^n} \cdot \frac{-2i \sin(n\alpha)}{\left(e^{\frac{\pi}{2} i}\right)^{n-1}} = \frac{(-1)^n}{(2i)^n} \cdot \frac{-2i \sin(n\alpha)}{i^{n-1}}$$
$$= \frac{1}{2^{n-1}} \sin n\alpha.$$

Dakle, vrijedi jednakost

$$\sin\alpha \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) ... \sin\left(\alpha + \frac{(n-1)\,\pi}{n}\right) = \frac{\sin n\alpha}{2^{n-1}}, \tag{36}$$

čije se dokazivanje zahtijeva kao problem i u Zad. 806 [3].

Promatrajmo sada sljedeću jednadžbu po z

$$z^n = e^{2n\alpha i} (z - 2i)^n, \tag{37}$$

za čija rješenja z_k, $k = 0, 1, ..., n-1$, vrijedi

$$\frac{z_k}{z_k - 2i} = e^{\frac{2n\alpha i + 2k\pi i}{n}},$$

odnosno

$$\left(1 - e^{2\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) i}\right) z_k = -2i e^{2\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) i}.$$

Odavde slijedi

$$z_k = -2i \frac{e^{2\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) i}}{1 - e^{2\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) i}} \cdot \frac{e^{-\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) i}}{e^{-\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) i}} = -2i \frac{e^{\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) i}}{e^{-\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) i} - e^{\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) i}}$$
$$= -2i \frac{\cos\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right)}{-2i \sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right)} = \cot\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) + i \tag{38}$$

Uočimo da je suma korijena jednadžbe (37), $\sum\limits_{k=0}^{n-1} z_k$, prema Vietèovim formulama, jednaka koeficijentu sa suprotnim predznakom koji stoji uz z^{n-1} u tzv. normiranom obliku jednadžbe, to jest kada je koeficijent uz z^n jednak 1. Kako je

$$(37) \Longleftrightarrow \left(1 - e^{2n\alpha i}\right) z^n + 2nie^{2n\alpha i} z^{n-1} + ... = 0 \Longleftrightarrow z^n + \frac{2nie^{2n\alpha i}}{1 - e^{2n\alpha i}} z^{n-1} + ... = 0,$$

prema tome, imamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} z_k &= -\frac{2nie^{2n\alpha i}}{1-e^{2n\alpha i}} = -\frac{2nie^{2n\alpha i}}{1-e^{2n\alpha i}} \cdot \frac{e^{-n\alpha i}}{e^{-in\alpha i}} = -\frac{2nie^{n\alpha i}}{e^{-n\alpha i}-e^{n\alpha i}} \\ &= -\frac{2ni\left(\cos n\alpha + i\sin n\alpha\right)}{-2i\sin n\alpha} = n\left(\cot n\alpha + i\right). \end{aligned} \tag{39}$$

S druge strane je, koristeći (38),

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} \cot\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) + ni. \tag{40}$$

Poređenjem jednakosti (39) i (40), dobijemo još jednu zanimljivu trigonometrijsku jednakost

$$\cot\alpha + \cot\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) + ... + \cot\left(\alpha + \frac{(n-1)\pi}{n}\right) = n\cot n\alpha, \tag{41}$$

čije se dokazivanje zahtijeva u Zad. 805 [3].

Primjedba 5.1. *Iz prethodno dobijenih trigonometrijskih jednakosti vidi se da se neke od njih mogu dokazati i bez upotrebe kompleksnih brojeva. Međutim, ako bi se umjesto njihovog dokazivanja razmatrao problem izračunavanja izraza na njihovoj lijevoj strani, teško da bi se to moglo učiniti bez upotrebe kompleksnih brojeva, upravo kako smo to i demonstrirali u ovom radu.*

Literatura

[1] LJ. Jarnjak, A. Rašidagić-Finci, M. Vuković: *Zbirka zadataka iz teorije funkcija kompleksne promjenljive*, IP "Svjetlost" - OOUR Zavod za udžbenike, Sarajevo, 1975.
[2] Dragoljub Milošević: Različiti načini izračunavanja tan(7π/27), *Evolventa*, vol. 4, no. 2 (2021), 34–38.
[3] M. Ušćumlić, P. Miličić: *Zbirka zadataka iz više matematike I* (VI izdanje), Naučna knjiga, Beograd, 1977.
[4] Y.V. Sidorov, M.V. Fedoryuk, M.I. Shabunin: *Lekcii po teorii funkcij kompleksnogo peremennogo*,"Nauka", Moskva , 1982.