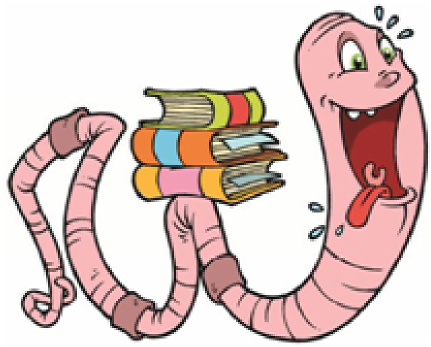
ТИ ЧУДЕСНИ БРОЈЕВИ

Ратко Тошић, Нови Сад



Бројеви су фасцинирали људе од најранијих почетака цивилизације. Питагора је открио да музичка хармонија зависи од односа целих бројева и закључио је да је све у природи број. Према Плутарху, Ксенократ је израчунао да је број слогова који се могу формирати од слова грчке азбуке једнак 1002000000000. То је први забележен покушај решавања једног тешког комбинаторног проблема који се односи на бројеве. У једном проблему који је поставио Архимед (проблем о биковима) као решење појављује се број који се у децималној нотацији (која није била позната Архимеду) записује помоћу 206545 цифара. Да би се наштампао тај број потребна је цела књижица од 50 страница.

У теорији бројева има много дубоких и лепих теорема, а такође и мноштво тешких и до сада нерешених проблема који стотинама година одолевају настојањима највећих математичара. Многи делови савремене математике настали су као резултат решавања и уопштавања проблема из теорије бројева. Карл Фридрих Гаус (1777–1855) који је учинио многа важна открића у математици, рекао је: „Математика је краљица наука, теорија бројева је краљица математике". Леополд Кронекер (1823–1891) рекао је да је Бог створио целе бројеве, а све остало је дело човека. Овим је артикулисао идеју да цели бројеви заузимају посебно место у односу на све остале бројеве.

Ниједна грана математике није толико омиљена код аматера као теорија бројева. У исто време, ниједна грана математике није постављала толико замки и проузроковала толико неуспеха и код највећих математичара. Од почетка рачунарске ере, програмери тестирају своје способности, квалитет својих програма и моћ рачунара решавајући проблеме и откривајући разне куриозитете у тој области.

Циљ овог чланка је да скрене пажњу читаоца на само неколико од небројено много куриозитета у вези са бројевима. То ће можда код неких од њих пробудити жељу да се и сами више позабаве овом интересантном граном математике.

Неке особине броја 2014

1. Збир броја 2014 и свих његових простих делилаца једнак је збиру броја 2013 и свих његових простих делилаца. Заиста,

$$2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61; \qquad 2013 + 3 + 11 + 61 = 2088;$$
$$2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53; \qquad 2014 + 2 + 19 + 53 = 2088.$$

Да ли можеш наћи још нека два суседна броја са том особином?

2. Број 2014 и оба његова суседа су производи три различита проста броја:

$$2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61; \qquad 2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53; \qquad 2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31.$$

Постоје и друге тројке узастопних бројева са том особином, на пример:

$$1885 = 5 \cdot 13 \cdot 29; \qquad 1886 = 2 \cdot 23 \cdot 41; \qquad 1887 = 3 \cdot 17 \cdot 37.$$
$$2665 = 5 \cdot 13 \cdot 41; \qquad 2666 = 2 \cdot 31 \cdot 43; \qquad 2667 = 3 \cdot 7 \cdot 127.$$

Нађи и друге тројке узастопних бројева са том особином. Да ли постоје четири узастопна природна броја који су производ три различита проста броја?

Одговор је: Не. Од четири узастопна природна броја један је дељив са 4, тј. дељив је квадратом простог броја 2.

3. Број 2014 једнак је разлици 365. простог броја и 365. сложеног броја. Заиста, у таблицама простих бројева може се проверити да је 365. прост број – број 2467. Лако се онда налази да је 365. сложен број – број 453, а 2014 = 2467 – 453.

4. Посматрајмо следећи низ:

$$4, 9, 16, 26, 39, \ldots$$

Први члан низа је први сложен број. Други члан низа је 4. сложен број, ... У низу иза броја k долази k-ти сложен број. Да ли се у том низу појављује број 2014?
Одговор је потврдан. Заиста, користећи таблицу простих бројева, налазимо да је 22. члан низа број 2014. Низ изгледа овако:

$$4, 9, 16, 26, 39, 56, 78, 106, 141, 184, 236, 299, 374,$$
$$465, 570, 696, 843, 1014, 1212, 1441, 1708, 2014, \ldots$$

5. Број 2014 не може се представити у облику разлике квадрата два природна броја. Заиста, ако је $x^2 - y^2 = 2014$, онда је $(x - y)(x + y) = 2014$. Бројеви $x - y$ и $x + y$ су исте парности. Међутим, не могу бити оба непарни јер је њихов производ паран. С друге стране, не могу бити ни оба парна, јер је $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$, па како 2014 није дељиво са 2^2, само један од чинилаца $x - y$ и $x + y$ може да садржи прост чинилац 2. Ова чињеница може се геометријски интерпретирати на следећи начин: Не постоји правоугли троугао код кога су дужине једне катете и хипотенузе цели бројеви, а дужина друге катете је $\sqrt{2014}$.

Који је данас датум?

Датуми се обично записују тако што се напишу три броја: први – редни број дана у месецу, други – редни број месеца, трећи – две последње цифре године. На пример, 18.6.14. означава 18. јун 2014. године, 3.10.09. означава 3. октобар 2009. године, итд. Прва два броја не могу бити 0, а трећи записујемо у облику 00 само кад је у питању последња година столећа. Некад се и дан и месец формално записују у облику двоцифреног броја иако је у питању једноцифрен. На пример, 6. март 2035. године се може записати у облику 06.03.35. Ми ћемо се, међутим, придржавати оног првог начина избегавајући да користимо 0 као прву цифру у записивању редних бројева дана и месеца. Покушај да одговориш на следећа питања:

1. Колико пута се у току једног века у запису датума појављује само једна цифра?
2. Да ли је могуће да цифре у запису датума образују број који је куб природног броја, ако се занемаре тачке између цифара? Ако је могуће, наведи све могућности.
3. Да ли је могуће заменити једну тачку знаком једнакости, а другу знаком множења тако да добијена једнакост буде тачна? Ако јесте, нађи све могућности.
4. Да ли је могуће заменити једну тачку знаком једнакости, а другу знаком дељења тако да добијена једнакост буде тачна? Ако јесте, нађи све могућности.
5. Колико пута је у току једног века збир три броја у запису датума једнак квадрату неког природног броја?

6. Колико пута у току једног века је број који се добије кад се занемаре тачке једнак квадрату неког природног броја?
7. Ако тачке посматрамо као знак множења, колико пута је у току једног века производ та три броја (при чему трећи није 00):
   а) квадрат неког природног броја;
   б) куб неког природног броја?

Одговори на нека од горе постављених питања:

1. 13 пута: 1.1.11; 11.1.11; 1.11.11; 11.11.11; 2.2.22; 22.2.22; 3.3.33; 4.4.44; 5.5.55; 6.6.66; 7.7.77; 8.8.88; 9.9.99.
2. Да. Постоји 18 могућности.
3. Да.
4. Да.
5. 2011 пута.
6. 136 пута. На тај начин се могу добити квадрати природних бројева од 34 до 177, изузев бројева 55, 71, 84, 95, 100, 138, 155 и 174. При томе се квадрат броја 106 добија два пута: 1.12.36. и 11.2.36. ($11236 = 106^2$)
7. Квадрат 925 пута, куб 180 пута.

Употреби све цифре!

У овом одељку наводимо неке куриозитете у вези са природним бројевима.

Број 567 има следећу особину: При запису тога броја и његових квадрата свака цифра различита од 0 користи се тачно једанпут. Заиста, $567^2 = 321489$, а у запису бројева 567 и 321489, свака цифра различита од 0 појављује се тачно једанпут. Постоји још само један природан број са том особином, а то је број 854: $854^2 = 729316$. А сада решимо два задатка:

1. Да ли постоји природан број такав да се у запису тога броја и његовог квадрата свака цифра од 0 до 9 појављује тачно једанпут?

Решење. Не. Ако тражени број има мање од четири цифре (тј. највише три), онда његов квадрат има највише шест цифара (јер је 1000 најмањи број чији квадрат има више од шест цифара). Дакле, за записивање броја и његовог квадрата у том случају потребно је не више од девет цифара, па се у њиховом запису не може појавити свака од десет цифара. С друге стране, ако тражени број има бар четири цифре, онда његов квадрат има бар седам цифара, па се приликом њиховог записивања бар једна цифра мора појавити више од једанпут.

2. Да ли постоји природан број такав да се у запису тога броја, његовог квадрата и његовог куба свака цифра од 0 до 9 појављује тачно једанпут?

Решење. Не. Како је $20^2 = 400$; $20^3 = 8000$ и $32^2 = 1024$; $32^3 > 32000$, закључујемо да за тражени број x важи $20 < x < 32$, јер би у противном укупан број цифара у три броја био или мањи од 10 или већи од 10. Бројеви који се завршавају са 0, 1, 5 и 6 не долазе у обзир, јер се и квадрати тих бројева завршавају истом цифром. Број 22 не долази у обзир, јер има две једнаке цифре. Преостаје да испитамо бројеве 23, 27 и 28. За сваки од њих налазимо да се у њима и њиховим квадратима појављује једна иста цифра.

И још једно питање:
иста цифра.

И још једно питање:

3. Да ли постоји природан број такав да се у запису његовог квадрата и његовог куба свака цифра од 0 до 9 појављује тачно једанпут?

Решење. Да. Једини такав број је 69. Заиста, $69^2 = 4761$, $69^3 = 328509$, а у записима бројева 4761 и 328509 свака цифра се користи тачно једанпут.

Curiouser and curiouser

Број 371 једнак је збиру кубова својих цифара. Заиста,

$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3.$$

Постоји укупно пет природних бројева са том особином: 1, 153, 370, 371 и 407.

Постоје четири природна броја који су једнаки збиру четвртих степена својих цифара: 1, 1634, 8208 и 9474. На пример,

$$8208 = 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4.$$

Наведимо примере и за друге степене:

$$54748 = 5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5,$$

$$548834 = 5^6 + 4^6 + 8^6 + 8^6 + 3^6 + 4^6.$$

Бројеви који су једнаки збиру седмих степена својих цифара: 1, 1741725, 4210818, 9800817, 9926315, 14459929. На пример,

$$1741725 = 1^7 + 7^7 + 4^7 + 1^7 + 7^7 + 2^7 + 5^7.$$

Слично за осме и десете степене:

$$24678050 = 2^8 + 4^8 + 6^8 + 7^8 + 8^8 + 0^8 + 5^8 + 0^8,$$

$$4679307774 = 4^{10} + 6^{10} + 7^{10} + 9^{10} + 3^{10} + 0^{10} + 7^{10} + 7^{10} + 7^{10} + 4^{10}.$$

Број 109418989131512359209 има особину да се може добити степеновањем неког природног броја са бројем својих цифара:

$$109418989131512359209 = 9^{21}.$$

Да ли постоји још неки број са том особином?

Број 13744803133596058624 једнак је десетом степену збира својих цифара:

$$13744803133596058624 =$$
$$= (1 + 3 + 7 + 4 + 4 + 8 + 0 + 3 + 1 + 3 + 3 + 5 + 9 + 6 + 0 + 5 + 8 + 6 + 2 + 4)^{10}.$$

Да ли постоји још неки природан број који се може добити тако што се збир његових цифара степенује неким природним бројем (осим тривијалног случаја – броја 1)?

Број 3435 има особину да се добија тако што се свака цифра степенује сама собом, а затим се ти степени саберу:

$$3435 = 3^3 + 4^4 + 3^3 + 5^5.$$

Број 40585 једнак је збиру факторијела својих цифара:

$$40585 = 4! + 0! + 5! + 8! + 5!.$$

Треба имати у виду да је $0! = 1$. Постоје још само три природна броја који су једнаки збиру факторијела својих цифара. То су 1, 2 и један троцифрен број. Нађи тај број.

Економични бројеви

Сваки природан број се разлаже на просте чиниоце на јединствен начин до на поредак чинилаца. На пример:

$$2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53; \quad 2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7; \quad 3072 = 2^{10} \cdot 3; \quad 1701 = 3^5 \cdot 7.$$

У запису разлагања, број употребљених цифара може бити већи од броја цифара самог броја (на пример, за бројеве 2014 и 2016), може бити једнак (на пример, за број 3072) или мањи од броја цифара самог броја (на пример, за број 1701).

Ако је број цифара у разлагању на просте чиниоце мањи од броја цифара самог броја, кажемо да је тај број *економичан*. На пример, бројеви 1701 и $2197 = 13^3$ су економични. Покушај да одговориш на следећа питања:

1. Који је најмањи економичан број?
2. Колико има економичних бројева мањих од 10000?
3. Може ли прост број бити економичан?
4. Може ли степен простог броја бити економичан број?

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија