Никола Петрески

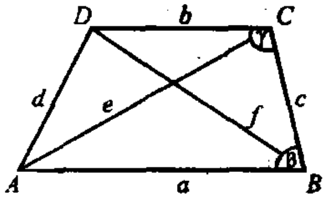
МЕТРИЧКИ ЗАВИСНОСТИ ВО ЧЕТИРИАГОЛНИК

Овој напис е инициран од шестата задача, зададена на квалификациониот испит по математика на Универзитетот "Св. Кирил и Методиј" - Скопје, во првиот уписен рок на 1. 09. 1993 год. Истата беше решена од мал број кандидати, а во СИГМА 28 беа понудени повеќе решенија на задачата.

Во нашето излагање ќе изведеме формула со која најлесно се решава поставената задача. За таа цел прво ќе ја докажеме следната

Теорема 1. *Во секој трапез, збирот од квадратите на дијагоналите е еднаков на збирот од квадратите на краците и двојниот производ на основите.*

Доказ. Нека за трапезот $ABCD$ е: $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=c$, $\overline{CD}=b$, $\overline{AC}=e$ и $\overline{BD}=f$ (црт. 1). Применувајќи ја косинусната теорема за триаголниците ABC и BCD, добиваме:



Црт. 1

$$e^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$

$$f^2=b^2+c^2-2bc\cos\gamma$$

$$f^2=b^2+c^2-2bc\cos(180^\circ-\beta)=b^2+c^2+2bc\cos\beta.$$

Оттука:

$$\cos\beta=\frac{a^2+c^2-e^2}{2ac} \text{ и } \cos\beta=\frac{f^2-b^2-c^2}{2bc}$$

$$\frac{a^2+c^2-e^2}{2ac}=\frac{f^2-b^2-c^2}{2bc}$$

(1) $$be^2+af^2=(a+b)(ab+c^2).$$

Аналогно, за триаголниците ABC и ACD добиваме:

(2) $$ae^2+bf^2=(a+b)(ab+d^2).$$

Со собирање на (1) и (2) добиваме:

$$(a+b)e^2+(a+b)f^2=(a+b)(ab+c^2+ab+d^2)$$

(3) $$e^2+f^2=c^2+d^2+2ab.$$

Со тоа теоремата е докажана.

Последица. *Кај секој паралелограм збирот на квадратите на дијагоналите е еднаков на двојниот збир од квадратите на неговите страни.*

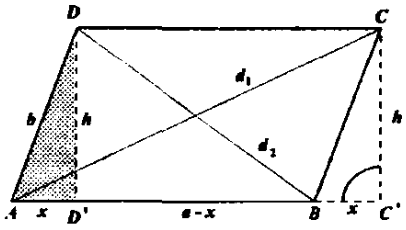
Доказ. Од $a=b$, $c=d$ и релацијата (3) следува

$$e^2+f^2=2(a^2+c^2),$$

или со вообичаените ознаки

$$(*) \qquad d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Равенството (*) можеме да го докажеме користејќи ја Питагоровата теорема. Обиди се тоа да го направиш самостојно. Разгледај ги правоаголните триаголници ACC', BDD' и ADD' (црт. 2).



Црт. 2

Да ја решиме сега задачата зададена на споменатиот квалификационен испит.

Задача. *Страните на еден паралелограм се* $a = 13$ *и* $b = 19$, *а поголемата дијагонала* $d_1 = 24$. *Најди ја помалата дијагонала.*

Решение. Со замена на дадените вредности во равенството (*) добиваме:

$$24^2 + d_2^2 = 2(13^2 + 19^2)$$

од каде што $d_2 = 22$.

Ќе докажеме уште едно тврдење, кое важи за секој трапезоид.

Теорема 2. Ако a, b, c, d се страни на конвексен четириаголник, s полупериметар, а 2φ збирот на два негови спротивни агли, тогаш неговата плоштина е

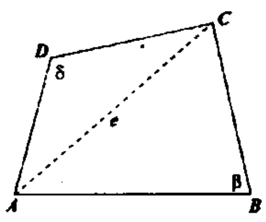
$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\varphi}.$$

Доказ. Нека за конвексниот четириаголник $ABCD$ е: $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{AD} = d$ и $\beta + \delta = 2\varphi$ (црт. 3). Со дијагоналата AC тој е поделен на два триаголника, чиј збир на плоштини е еднаков на плоштината P на четириаголникот, па имаме:

$$P = P_{ABC} + P_{ACD} = \frac{ab}{2}\sin\beta + \frac{cd}{2}\sin\delta$$

$$2P = ab\sin\beta + cd\sin\delta$$

$$4P^2 = a^2b^2\sin^2\beta + c^2d^2\sin^2\delta + 2abcd\sin\beta\sin\delta$$



Црт. 3

Заменувајќи $\sin^2\beta$ со $1-\cos^2\beta$ и $\sin^2\delta$ со $1-\cos^2\delta$ и дополнувајќи до полн квадрат добиваме:

$$4P^2 = (ab+cd)^2 - (ab\cos\beta - cd\cos\delta)^2 - 2abcd(1 + \cos\beta\cos\delta - \sin\beta\sin\delta)$$

Имајќи предвид дека $1 + \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi$, добиваме:

$$(4) \qquad 4P^2 = (ab+cd)^2 - (ab\cos\beta - cd\cos\delta)^2 - 4abcd\cos^2\varphi$$

За да го одредиме изразот $ab\cos\beta - cd\cos\delta$, ја применуваме косинусната теорема за триаголниците ABC и ACD и добиваме:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta \text{ и } e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta,$$

од каде што, по одземање, наоѓаме:

$$(5) \qquad (ab\cos\beta - cd\cos\delta) = \frac{1}{2}(c^2 + d^2 - a^2 - b^2).$$

Заменувајќи (5) во (4) добиваме:

$$4P^2 = (ab+cd)^2 - \frac{1}{4}(c^2 + d^2 - a^2 - b^2)^2 - 4abcd\cos^2\varphi.$$

Со разложување на множители на десната страна од горното равенство добиваме:

$$4P^2 = \frac{1}{4}(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d) - 4abcd\cos^2\varphi$$

$$P^2 = \frac{-a+b+c+d}{2}\cdot\frac{a-b+c+d}{2}\cdot\frac{a+b-c+d}{2}\cdot\frac{a+b+c-d}{2} - abcd\cos^2\varphi$$

Ставајќи $\frac{a+b+c+d}{2} = s$, добиваме:

$$(6) \qquad P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\varphi}.$$

Последица 1. *Плоштината на тетивен четириаголник со страни a, b, c, d и полупериметар s е*

$$(7) \qquad P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Доказ. Ако четириаголникот е тетивен, тогаш $\beta + \delta = 2\varphi = 180^\circ$, т.е. $\cos\varphi = \cos 90^\circ = 0$, па формулата (7) непосредно следува од формулата (6).

Да забележиме дека формулата (7) е позната како **формула на Брамагупта** (598 - 660), според името на еден од најпознатите индиски математичари и астрономи.

Последица 2. *Ако тетивниот четириаголник со страни a, b, c, d е во исто време и тангентен, тогаш неговата плоштина е*

$$(8) \qquad P = \sqrt{abcd}$$

Доказ. За тангентниот четириаголник важи:

$$a + c = b + c, \text{ т.е. } s = a + c = b + d,$$

од каде што:

$$s - a = a + c - a = c, \quad s - b = b + c - b = d$$
$$s - c = a + c - c = a, \quad s - d = b + d - d = b.$$

Со замена на овие вредности во (7) ја добиваме формулата (8).

На крајот, за самостојно решавање, ви ги предлагаме следниве задачи:

1. ***Во рамнокрак трапез квадратот на дијагоналата е еднаков на збирот од квадратот на кракот и двојниот производ на основите. Докажи!***

2. ***Одреди ја плоштината на паралелограм со остар агол α и дијагонали e и f $(e > f)$.***

(Одг. $P = \frac{e^2 - f^2}{4} tg\alpha$. Во формулата $P = ab\sin\alpha$ производот ab замени го со резултатот од косинусната теорема за ΔABC.)

3. ***Докажи дека од сите четириаголници, со дадени страни, најголема плоштина има оној околу кој може да се опише кружница.***

4. ***Кај рамнокрак трапез со заемно нормални дијагонали квадратот на кракот е еднаков на полузбирот од квадратите на основите. Докажи!***

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија