МАГДАЛЕНА ГЕОРГИЕВА
РАДОЈКО СЕКУЛОСКИ
КАТЕРИНА ЧУНДЕВА

ПРАКТИЧНА МАТЕМАТИКА

ЗА IV ГОДИНА
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКА СТРУКА

„ПРОСВЕТНО ДЕЛО“
СКОПЈЕ, 1992 год.

Уредник
КИРИЛ МИЛЧЕВ

Рецензенти

д-р ДИМИТРА КАРЧИЦКА, редовен професор на Природно-математички факултет - Скопје

м-р МЕТОДИЈА ТРАЈКОСКИ, советник по математика во Педагошки завод на Македонија

РУЖА ВЕЛКОВСКА, професор во УСО "Раде Јовчевски-Корчагин" - Скопје

Со решение на Републичкиот педагошки совет бр. 03-41/1 од 19.04.1988 година се одобрува употребата на овој учебник

ПРЕДГОВОР

Оваа книга е пишувана со цел да послужи како учебник за предметот Практична математика во IV година природно-математичка струка. Според програмата, во овој предмет се опфатени елеметнти од нумеричкото сметање (сметање со приближни броеви, приближно решавање на равенки со една непозната) и подетално изучување на поимите и методите на веројатноста и статистиката. Наведените три математички дисциплини се дел од таканаречената применета математика. Нивните методи се користат при решавањето на скоро сите задачи од науката и практиката. Затоа, за успешно применување на сметачите во такви задачи, неопходно е познавањето на поимите и методите на нумеричкото сметање, веројатноста и статистиката.

Основна цел на оваа книга е учениците да се запознаат со најважните поими и закони на наведените дисциплини, да се убедат во постоењето на множество реализации на тие поими и закони во секојдневниот живот, како и во можностите на нивните методи за решавање на низа важни закони.

Заради континуитет и комплетност во излагањето на материјата, во почетокот на делот веројатност, како и на делот статистика, поместени се наслови во коишто се обработуваат основните поими на овие две математички дисциплини.

Авторите

I СМЕТАЊЕ СО ПРИБЛИЖНИ БРОЕВИ. ПРЕСМЕТУВАЊЕ ВРЕДНОСТИ НА ФУНКЦИИ

1. ПРИБЛИЖНИ БРОЕВИ. ГРЕШКА НА ПРИБЛИЖЕН БРОЈ

Честопати се јавува потреба од пресметување со приближни броеви. До приближните броеви се доаѓа при извршување на разни мерења и експерименти. Колку и да се прецизни мерните инструменти и колку и да се вешто извршувани мерењата никогаш не се точни. Затоа мерните броеви на величините се само приближни броеви. При пресметувањата, пак, до приближните броеви се доѓа поради непостоењето на точни методи или поради непогодност на точните методи за пресметувања. Исто така, во разни формули среќаваме константи коишто претставуваат приближни броеви. На пример, бројот $\pi = 3,1415926535\ldots$, за којшто знаеме дека е ирационален број, т.е. дека претставува бесконечна непериодична децимална дропка, при аритметички пресметувања не може да се користи ако не се замени со некој приближен број.

Понекогаш, заради олеснување на сметањето, точниот број чиј запис има многу децимални цифри се заменува со приближен број со помал број децимали.

Постојат и други случаи при кои се доаѓа до приближни броеви. Така, на пример, од геометријата знаеме дека плоштината на круг со радиус r се пресметува по формулата $P = r^2\pi$. Ако вредноста на радиусот е определена, тогаш за пресметување на плоштината P, бројот π мора да се замени со некој од броевите $3,14$; $3,141$; $3,1415$; ... Овие броеви претставуваат приближни броеви за бројот π.

Воопшто, ако x е некој определен број, т.е. x **е точен број**, тогаш секој друг број $\bar{x}$ кој него го заменува во пресметувањата се нарекува **приближен број за** x, или **апроксимација** за x, или **приближна** вредност за x, или **приближување за** x.

Пишуваме $x \approx \overline{x}$ или $\overline{x} \approx x$ и читаме „x е приближно еднаков на x" или „$\overline{x}$ е приближна вредност на x".

На пример, за бројот $\sqrt{2} = 1,4142135....$ приближни се следниве броеви: 1,41; 1,414; 1,42 и др., па затоа пишуваме,

$$\sqrt{2} \approx 1,41; \qquad \sqrt{2} \approx 1,414 \quad \text{или} \quad \sqrt{2} \approx 1,42.$$

Притоа забележуваме дека:

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42, \quad \text{т.е.} \quad \sqrt{2} \in (1,41;\ 1,42).$$

Приближниот број има практично значење само ако можеме да ја определиме неговата **грешка**, т.е. неговото отстапување од точниот број. Во таа смисла разликата

$$\boxed{\varepsilon = x - \overline{x}} \tag{1}$$

се нарекува **грешка** на приближниот број $\overline{x}$. Очигледно е дека $\varepsilon > 0$ ако $x > \overline{x}$ и $\varepsilon < 0$ ако $x < \overline{x}$. Така, на пример, ако $\sqrt{2} \approx$ $\approx 1,41$ тогаш:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{2} - 1,41 = 1,4142135... - 1,41 = 0,0042135...,$$

т.е.

$$\varepsilon_1 > 0.$$

Ако, пак, $\sqrt{2} \approx 1,42$ тогаш:

$$\varepsilon_2 = \sqrt{2} - 1,42 = 1,4142135... - 1,42 = -0,0057865...,$$

т.е.

$$\varepsilon_2 < 0.$$

Кој од броевите 1,41; 1,42 е „подобро" приближување на $\sqrt{2}$?

Задача 1. *Нека* $\overline{x}_1 = 3,14$; $\overline{x}_2 = 3,15$; $\overline{x}_3 = 3,141$ *се приближни броеви на бројот* π. *Да се определат нивните грешки и да се одреди кој од нив е „најблизок" до* π.

Решение. *Ако грешките на броевите* $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ *и* $\overline{x}_3$ *ги означиме соодветно со* ε_1, ε_2 *и* ε_3 *ќе добиеме* $\varepsilon_1 = 0,00159265...$; $\varepsilon_2 = -0,00840735...$; $\varepsilon_3 = 0,00059265...$ *Најблизок до* π *е бројот* $\overline{x}_3$.

2. АПСОЛУТНА ГРЕШКА НА ПРИБЛИЖЕН БРОЈ

Во точка 1, видовме дека $\sqrt{2} \approx 1,41$, со грешка $\varepsilon_1 = -0,0042135\ldots$ и $\sqrt{2} \approx 1,42$, со грешка $\epsilon_2 = -0,0057865\ldots$. На прашањето кој од броевите 1,41 и 1,42 е подобро приближување на бројот $\sqrt{2}$, полесно ќе одговориме ако наместо грешките ε_1 и ε_2 ги разгледаме нивните апсолутни вредности, т.е. $|\varepsilon_1|$ и $|\varepsilon_2|$. Бидејќи $|\varepsilon_1| < |\varepsilon_2|$, заклучуваме дека бројот 1,41 е подобро приближување на $\sqrt{2}$ одошто 1,42. Постапувајќи слично како во задачата 1, можеме да заклучиме дека приближниот број $\overline{x}_3=3,141$ е „најблизок" до бројот π, бидејќи $|\varepsilon_3| < |\varepsilon_1| < |\varepsilon_2|$. Значи, за оценка на блискоста на приближниот број $\overline{x}$ и точниот број x, попрактично е да се работи со апсолутната вредност $|\varepsilon|$ на грешката (1).

Вредноста

$$\boxed{\Delta = |x - \overline{x}|} \tag{2}$$

се нарекува **апсолутна грешка** на приближниот број $\overline{x}$.

На пример, ако $x = 3,426715$, а $\overline{x} = 3,43$ тогаш:

$$\Delta = |3,426715 - 3,43| = 0,003285.$$

Задача 2. *Нека $x = 3,426715$, а $\overline{x} = 3,427$. Определи ја апсолутната грешка на бројот $\overline{x}$.*

Во практиката најчесто точниот број не е познат, па затоа и апсолутната грешка не може да биде определена. Разгледувајќи ги броевите $\sqrt{2}$ и π видовме дека и покрај тоа што тие се познати сепак апсолутната грешка за нивните приближувања не може точно да се определи. Во вакви случаи се врши оценка на апсолутната грешка со укажување на број кој не е помал од неа. Имено, секој позитивен број Δ_x за кој важи неравенството

$$\Delta = |x - \overline{x}| \leq \Delta_{\overline{x}} \tag{3}$$

се нарекува **максимална апсолутна грешка**, или **граница на апсолутната грешка**, или **гранична апсолутна грешка**. Бројот $\Delta_{\overline{x}}$ не е еднозначно определен, бидејќи секој број $\Delta^* > \Delta_{\bar{x}}$ го задоволува неравенството (3).

Очигледно е дека, колку е помал бројот $\Delta_{\bar{x}}$, толку подобро ја карактеризира блискоста на броевите x и $\bar{x}$. Затоа секогаш ќе настојуваме за бројот $\Delta_{\bar{x}}$ да го одбереме што е можно помалиот број кој го задоволува неравенството (3).

На пример, нека е:

$$x = e = 2,718281\ldots,^{1)} \text{ а } \bar{x} = 2,7, \text{ тогаш}$$
$$\Delta = |x - \bar{x}| = |2,718281\ldots - 2,7| = 0,018281\ldots$$

Очигледно е дека $\Delta < 0,019 < 0,02 < 0,03 < 0,04 < \ldots$ Секој од броевите 0,019; 0,02; 0,03; 0,04 може да се земе за максимална апсолутна грешка на приближниот број 2,7, но очигледно е дека бројот 0,019 најдобро ја оценува блискоста на броевите 2,718281... и 2,7, па затоа ставаме $\Delta_{\bar{x}} = 0,019$.

Во поопшт случај, ако $x, \bar{x} \in (a, b)$, тогаш $\Delta = |x - \bar{x}| \le b - a$, па затоа можеме да ставиме $\Delta_{\bar{x}} = b - a$. На пример, ако $x = \sqrt{2}$, а $\bar{x} = 1,41$, тогаш, бидејќи $\sqrt{2} \in (1,41;\ 1,42)$, следува дека $\Delta = |\sqrt{2} - 1,41| \le 0,01$; односно $\Delta_{\bar{x}} = 0,01$.

Во практиката почесто се среќаваме со максималната апсолутна грешка одошто со самата апсолутна грешка, па затоа овие поими ќе ги користиме со исто значење, т.е. како синоними.

Од неравенството (3) следува дека:

$$\bar{x} - \Delta_{\bar{x}} \le x \le \bar{x} + \Delta_{\bar{x}} \tag{4}$$

што значи дека приближниот број $\bar{x} - \Delta_{\bar{x}}$ не е поголем, а приближниот број $\bar{x} + \Delta_{\bar{x}}$ не е помал од точниот број x. При задавањето на приближниот број $\bar{x}$ обично се укажува и на апсолутната грешка. Така за точниот број x кратко пишуваме:

$$x = \bar{x} \pm \Delta_{\bar{x}} \quad \text{или} \quad x \approx \bar{x}\ (\Delta_{\bar{x}}),$$

а велиме дека бројот $\bar{x}$ е даден со точност до $\Delta_{\bar{x}}$. На пример,

---

1) Бројот e, како и π, е ирационален број и обично се користи за основа на т.н. природни логаритми.

ако $x \in (3,1;\ 3,2)$ и ако земеме $\bar{x} = 3,15$, тогаш:

$$\Delta = |x - \bar{x}| \leq 0,05 \quad \text{т.е.} \quad \Delta_{\bar{x}} = 0,05,$$

а $x = 3,15 \pm 0,05$ или $x \approx 3,15\ (0,05)$. Ако, пак, $x = 4,7 \pm 0,3$, или $x \approx 4,7\ (0,3)$, тогаш $\bar{x} \in (4,4;\ 5)$.

3. РЕЛАТИВНА ГРЕШКА НА ПРИБЛИЖЕН БРОЈ

Досега точноста на приближното равенство $x \approx \bar{x}$ ја оценувавме со апсолутната грешка на $\bar{x}$. Но во квалитативна смисла степенот на точноста на едно приближување не може да се окарактеризира доволно само со апсолутната грешка.

На пример, нека при мерењето на должините x и y се добиени вредностите $x = 100$ *m*, $y = 10$ *m* и нека при двете мерења е направена иста апсолутна грешка еднаква на 1 *cm*, односно 0,01 *m*. Се поставува прашањето дали двете мерења се извршени со иста прецизност.

Очигледно дека не се, бидејќи при првото мерење е направена грешка од 1 *cm* на должина од 100 *m*, а при второто мерење е направена иста грешка на должина од 10 *m*. Значи, првото мерење е извршено попрецизно од второто. Јасно е дека апсолутната грешка на приближниот број не е доволна за окарактеризирање на точноста на горните мерења. За да се добие правилен увид во точноста на извршените мерења потребно е да се разгледа апсолутната грешка на единица од мерените должини. Односно, потребно е да се пресметаат количниците:

$$\frac{0,01}{100} = 0,0001 \text{ и } \frac{0,01}{10} = 0,001$$

и да се споредат. Гледаме дека првиот количник е помал од вториот, а тоа значи дека првото мерење е поточно извршено од второто.

Бројот 0,0001 се нарекува **релативна грешка** на приближниот број $\bar{x} = 100$, а бројот 0,001 е **релативна грешка** на приближниот број $\bar{y} = 10$.

Поопшто, под релативна грешка δ на приближниот број $\bar{x}$ се подразбира количникот од апсолутната грешка и апсолутната вредност на тој број, т.е.

$$\boxed{\delta = \frac{|x-\overline{x}|}{|\overline{x}|} = \frac{\Delta}{|\overline{x}|}} \tag{5}$$

На **пример**, релативната грешка на приближниот број 3,55 (0,02) изнесува

$$\delta = \frac{0,02}{3,55} \approx 0,06.$$

Задача 3. *Определи ги апсолутните грешки Δ_1, Δ_2, Δ_3 и релативните грешки δ_1, δ_2 и δ_3, соодветно на приближните равенства:*

а) 5,3726 ≈ 5,373

б) 5,3726 ≈ 5,37

в) 5,3726 ≈ 5,4.

Исто како апсолутната грешка, така и релативната грешка во општ случај не може точно да се одреди, па затоа и таа се оценува со укажување на таков број $\delta_{\overline{x}}$ (по можност помал) за кој важи неравенството:

$$\delta = \frac{|x-\overline{x}|}{|\overline{x}|} \le \delta_{\overline{x}}, \tag{6}$$

а кој се нарекува **максимална релативна грешка.**

При тоа во практиката поимите релативна грешка и максимална релативна грешка се користат со исто значење.

Од (3) и (6) следува дека

$$\delta_{x} = \frac{\Delta_{\overline{x}}}{|\overline{x}|}, \tag{7}$$

односно

$$\Delta_{\overline{x}} = |\overline{x}|\delta_{\overline{x}} \tag{8}$$

Задача 4. *Да се определи максималната релативна грешка за приближното равенство $\sqrt{3} = 1,732$.*

Решение. Бидејќи $\sqrt{3} = 1,7321\ldots$ имаме $|\sqrt{3} - 1,732| = 0,0001\ldots < 0,0002$, од каде следува дека $\Delta_{1,732} = 0,0002$, а бидејќи :

$$\frac{0,0002}{1,732} = 0,00011\ldots < 0,00012$$

можеме да земеме $\delta_{1,732} = 0,00012$. Релативната грешка често се искажува во проценти, па во тој случај таа се вика **процентна грешка**. Така во претходниот пример имаме:

$$\delta_{1,732} = 0,012\%.$$

ЗАДАЧИ

5. *Нека се* $a=4,36547$, $b=0,67888\ldots$, $c=81,2456389$ *точни броеви, а* $\bar{a}=4,366$, $\bar{b}=0,679$, $\bar{c}=81,2456$ *нивни приближни броеви, соодветно. Пресметај ги апсолутната и релативната грешка за секој од броевите* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, *а потоа релативната грешка изрази ја во проценти.*

6. *Нека се* $x = \sqrt[3]{2} = 1,259921\ldots$, $y = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707107\ldots$, $z = \frac{1}{\pi} = 0,318310\ldots$, $u = \sqrt{\pi} = 1,772454$, $v = \lg 9 = 0,95424\ldots$, *точни броеви кои во пресметувањата се заменуваат, соодветно, со* $\bar{x} = 1,2599$, $\bar{y} = 0,71$, $\bar{z} = 0,3183$, $\bar{u} = 1,772$, $\bar{v} = 0,95$. *Пресметај ги апсолутните и релативните грешки на броевите* $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{u}$ *и* $\bar{v}$, *а потоа релативните грешки изрази ги во проценти.*

7. *Точниот резултат на некое мерење се наоѓа помеѓу броевите 567,5 и 568.*

Најди приближни вредности на резултатот како и соодветна апсолутна и релативна грешка.

8. *Нека приближните броеви* $\bar{x} = 6,24$ *и* $\bar{y} = 0,564$ *имаат релативни грешки* $\delta_{\bar{x}} = 1\%$, $\delta_{\bar{y}} = 0,4\%$. *Најди ги соодветните апсолутни грешки.*

9. *Помеѓу кои броеви се наоѓа точниот број x ако него-*

виот приближен број $\bar{x} = 524,52$ е зададен со релативна грешка од 0,4%.

10. *За броевите $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{6}$ и $\sqrt{7}$ најди приближни броеви чии апсолутни грешки не се поголеми од 0,01, односно 0,001.*

11. *Нека ℓ е точната должина на некоја метална оска, d е точниот дијаметар на нејзиниот напречен пресек, а t е нејзината точна тежина. Со мерење е утврдено дека:*

$$\ell = 500\ mm \pm 1\ mm; \quad d = 5,00\ mm \pm 0,05\ mm;$$
$$t = 150\ g \pm 0,01\ g.$$

Најди ги соодветните релативни грешки и кажи која од наведените величини е измерена со најголема точност.

4. ТОЧНИ И ЗНАЧАЈНИ ЦИФРИ НА ПРИБЛИЖЕН БРОЈ. ЗАОКРУЖУВАЊЕ НА ПРИБЛИЖЕН БРОЈ

Секој реален број може да се претстави во вид на конечна или бесконечна децимална дропка. Од практични причини, приближните броеви треба да се запишуваат во вид на конечни децимални дропки, т.е. со конечен број децимални цифри. Притоа добро е да се даде информација за апсолутната грешка (со допишување во загради од десната страна на бројот). Ако при запишувањето на приближниот број не е дадена информација за неговата апсолутна грешка, тогаш се води сметка таа да не биде поголема од половина единица од разредот на последната негова цифра.

На пример, ако $x = 4,87563$ е точен број, а $\bar{x} = 4,8756$ е неговиот приближен број, тогаш:

$$|x - \bar{x}| = |4,87563 - 4,8756| = 0,00003 < 0,00005 = \\ = \frac{1}{2}\cdot 10^{-4},$$

т.е. апсолутната грешка 0,00003 е помала од $\frac{1}{2}\cdot 0,00001 = 0,00005$. Ова не доведува до поимот за точни цифри кај приближните броеви.

Цифрата α_k, која се наоѓа во k-от разред од запишувањето на приближниот број $\bar{x}$, се нарекува **точна во строга (потесна) смисла** ако апсолутната грешка на $\bar{x}$ не е поголема од половина единица на k-от разред и точна во поширока смисла, ако апсолутната грешка на $\overline{x}$ не е поголема од единица на k-от разред. Во спротивно, цифрата α_k е **неточна или сомнителна**.

Примери:

1. Нека $x = 2,40763$, а $\overline{x} = 2,4076$.

Бидејќи $|x - \overline{x}| = 0,00003 < 0,00005 = \frac{1}{2}\cdot 0,00001$ цифрата 6 од приближниот број $\overline{x}$ е точна во строга смисла. Да забележиме дека и цифрите 2, 4, 0 и 7 што се наоѓаат пред точната цифра 6, се исто така точни цифри.

2. Нека, $x=2,40763$, а $\overline{x}=2,407$, тогаш $|x-\overline{x}| = 0,00063 < < 0,001$. Тоа значи дека цифрата 7 од $\overline{x}$ е точна во поширока смисла. Истото важи и за цифрите 2, 4 и 0.

3. Нека $x = 100$, а $\overline{x} = 99,986$. Тогаш $|x-\overline{x}|=0,014<0,05 = = \frac{1}{2}\cdot 0,1$, а тоа значи дека првите три цифри на приближниот број $\overline{x}$ се точни во строга смисла. Од овој пример гледаме дека точните цифри на $\overline{x}$ не се совпаѓаат со ниедна цифра од x.

4. Нека се дадени приближните броеви $\overline{x}=1,41421$; $\overline{y}=1,4$; $\overline{z}=4,500$ на коишто сите цифри се точни во строга смисла. Тогаш, $\Delta_{\overline{x}} = 0,000005$, $\Delta_{\overline{y}} = 0,05$ и $\Delta_{\overline{z}} =0,0005$.

Забележуваме дека нулите на крајот од приближниот број $\overline{z}$ не се излишни, имено кога би ставиле $\overline{z} = 4,5$ би имале $\Delta_{\overline{z}} = = 0,05$; т.е. постои разлика во информацијата за апсолутната грешка. Во таа смисла можеме да кажеме дека броевите 4,5 и 4,500 како приближни броеви не се еднакви. Воопшто, сите нули што се јавуваат на крајот од некој приближен број, за кои се знае дека се точни цифри, треба да се пишуваат.

5. Нека $x = 473\ 567$, а $\overline{x} = 473\ 600$. Бидејќи $|x-\overline{x}| = 33< < \frac{1}{2}\cdot 100 = 50$ заклучуваме дека приближниот број $\overline{x}$ има четири точни цифри од кои првите три се исти со првите три цифри на точниот број x. Ако $\overline{x} = 473\ 500$, тогаш $|x-\overline{x}| = 67 < 100$, па приближниот број $\overline{x}$ има пак четири точни цифри, но во поширока смисла. Во овој случај, за да се воочи бројот на точните цифри, приближниот број $\overline{x}$ треба да се запише во следниов облик:

$$\overline{x} = 4376\cdot 10^2, \text{ односно } \overline{x} = 4375\cdot 10^2.$$

Во тесна врска со точните цифри на еден приближен број се и неговите т.н. **значајни цифри**. **Значајни цифри** на еден приближен број се викаат сите негови точни цифри освен нулите што стојат пред пред првата, различна од нула, цифра.

На пример, ако сите цифри на бројот $\bar{x} = 0,00\underline{35070}$ се точни, тогаш значајни цифри се 3, 5, 0, 7, 0, т.е. потцртаните. Првите три нули не се значајни цифри, тие служат само за означување на декадните единици. Нулите на крајот од приближниот број $\bar{x} = 437\ 600$, од претходниот пример, не се значајни цифри бидејќи не се точни. (Истото важи и за бројот $\bar{x} = 437\ 500$.)

Во практиката, при работа со броеви што имаат голем број значајни цифри, често се јавува потреба од упростување на пресметувањата. Тоа се постигнува на тој начин што од броевите со голем број значајни цифри се отфрла дел од тие значајни цифри. Тоа дејство (операција) се вика **заокружување** на броевите. Да се заокружи еден број a, значи тој да се замени со некој број a_1 кој има помал број значајни цифри. Притоа, a_1 се избира така што апсолутната вредност $|a-a_1|$, наречена **грешка на заокружувањето**, да биде најмала. Заокружувањето на броевите се врши користејќи го следново правило:

Ако бројот се заокружува до k значајни цифри, тогаш се отфрлаат сите цифри десно од k-та (или пак, се заменуваат со нули, ако е потребно да се зачуваат разредите). Притоа ако изоставениот (отфрлениот) број е помал од половина на единицата на k-от разред, тогаш k-та цифра се остава неизменета; ако е поголем, на *k-та цифра ѝ се додава 1;* а ако е точно половина, тогаш *k-та цифра останува непроменета ако е парна, а се зголемува за 1 ако е непарна („Правило на парната цифра").*

Примери:

1. Ако бројот 3,72365 се заокружи до третата значајна цифра се добива приближниот број 3,72. Овде отфрлениот број $0,00365 < \frac{1}{2}\cdot 0,01$, па затоа третата значајна цифра 2 останува непроменета. Грешката на заокружувањето ќе биде $|3,72365 - 3,72| = 0,00365 < 0,005$.

2. Ако истиот број 3,72365 се заокружи до четвртата значајна цифра се добива приближниот број 3,724. Бидејќи отфрлениот број $0,00065 > \frac{1}{2}\cdot 0,001$ четвртата значајна цифра 3 се зголемува за 1. И овде грешката на заокружувањето

$$|3{,}72365 - 3{,}724| = 0{,}00035 < \frac{1}{2}\cdot 0{,}001.$$

(Што значи тоа за приближниот број?)

3. Ако броевите 0,034500 и 0,037500 се заокружат до втората значајна цифра, тогаш се добиваат, соодветно, приближните броеви 0,034 и 0,038. Кај двата броја отфрлениот број е ист 0,000500, но кај првиот број втората значајна *цифра 4 е парна,* па останува непроменета, а кај вториот број *таа е непарна,* па затоа се *зголемува за 1 и станува 8.* Грешката на заокружувањето кај двата броја е иста 0,0005. (Провери!)

Забелешка: Овој дел од правилото за заокружување на броевите е познат под името: *„Правило на парната цифра".*

Задача 12. *Бројот 1 203 752 да се заокружи на десетките, стотките, илјадите и десетилјадите.*

Решение. Имаме:

$$1\ 203752 \approx 1\ 203750 = 1\ 20375\cdot 10^1$$

$$1\ 203\ 752 \approx 1\ 203\ 800 = 1\ 2038\cdot 10^2$$

$$1\ 203\ 752 \approx 1\ 204\ 000 = 1\ 204\cdot 10^3$$

$$1\ 203\ 752 \approx 1\ 200\ 000 = 1\ 20\cdot 10^4$$

Од записот на броевите на десната страна од погорните равенства веднаш се воочува бројот на значајните цифри. Тие се соодветно 6, 5, 4 и 3.

Задача 13. *Броевите 2 876 672 и 699 973 да се заокружат на четири значајни цифри.*

Решение. Имаме:

$$2\ 876\ 672 \approx 2\ 877\ 000 = 2\ 877\cdot 10^3$$

$$699\ 973 \approx 700\ 000 = 7\ 000\cdot 10^2.$$

Забележуваме дека кај бројот 2 877 000 нулите не се значајни цифри, додека кај бројот 700 000 само последните две нули не се значајни цифри.

Забелешка. При работата со приближните броеви честопати е потребно да се изврши заокружување и на приближниот број. Тоа се постигнува со веќе изученото правило за заокружување.

Притоа, ако A е точен број, a приближен број и a_1 број добиен по заокружување на a, тогаш имаме:

$$|A-a_1| = |A-a+a-a_1| \leq |A-a| + |a-a_1| \tag{9}$$

што значи дека апсолутната грешка на a_1 е збир од апсолутната грешка на a и грешката на заокружувањето.

На **пример**, нека a=1,547 389 (0,0001) е приближна вредност на бројот A. Бидејќи последните три цифри на бројот a не се значајни цифри, нема смисла да се задржуваат. Затоа, заокружувајќи го бројот a на четири значајни цифри добиваме a_1 = 1,547. Грешката на заокружувањето, тогаш, ќе биде

$$|a-a_1| = 0,000389 < 0,0004.$$

Додека, врз основа на (9) добиваме:

$$|A-a_1| \leq 0,0001 + 0,0004 = 0,0005.$$

Одовде гледаме дека a е подобро приближување на A, одошто a_1, но доволна компензација за тоа е олеснувањето при пресметувањата во кои учествува a.

ЗАДАЧИ

15. *Дадени се броевите:* $x=5,6578$; $y=\sqrt{\pi} = 1,7724539...$, $z=0,040534...$

$$a = \frac{\pi}{360} = 0,008727..., \quad v = 9875,345 \quad и \quad g = 754893.$$

Определи ги точните цифри (во строга и широка смисла) на приближните броеви:

$$\bar{x} = 5,6586; \quad \bar{y} = 1,773; \quad \bar{z} = 0,0407; \quad \bar{a}_1 = 0,0087;$$
$$\bar{a}_2 = 0,0088; \quad \bar{v} = 9870; \quad \bar{g} = 750000.$$

16. *Најди го бројот на значајните цифри во бројот* $\bar{x}$ *ако се знае неговата апсолутна грешка:*

а) $\bar{x} = 25,3246$ (0,01); *б)* $\bar{x} = 0,7231$ (0,0015);

в) $\bar{x} = 0,004327$ (0,00001); *г)* $\bar{x} = 312,0078$ (0,0001);

д) $\bar{x} = -0,0793$ (0,0025).

17. *При мерењето на должината* ℓ *добиен е резултат* $\bar{\ell} = 12,354$ m *со апсолутна грешка:*

а) 0,03 m; *б)* 0,07 m.

Определи го бројот на точните цифри во приближниот број $\bar{\ell}$.

18. *Дадени се приближните броеви:*

$\bar{x} = 0,6457;$ $\bar{y} = 543,9;$ $\bar{z} = 99,4308;$

$\bar{a} = 9875402;$ $\bar{b} = 5789,342.$

Се знае дека кај првиот број последната точна цифра е 5; кај вториот 9; кај третиот 3; кај четвртиот 4, а кај петиот 2. Определи ги апсолутните грешки на дадените приближни броеви ако спомнатите цифри се точни прво, во строга смисла, а потоа во широка смисла.

19. *Дадени се приближните броеви* $\bar{x} = 458,347;$ $\bar{y} = 78943$ *на кои последните цифри им се точни во строга смисла.*

Определи ги интервалите во кои се наоѓаат точните броеви x и y.

20. *Дадени се приближните броеви* $\bar{x}=0,02378$ *и* $\bar{y}=10,98$, *на кои последните цифри им се точни во широка смисла.*

Определи ги интервалите во кои се наоѓаат точните броеви x и y.

21. *Секој од следниве броеви да се заокружи на три значајни цифри:*

а) 0,02359; б) 2,154; в) 2,15499; г) 2,698;

д) 2,998; ѓ) 2,355; е) 2,345; ж) 2154; з) 2698.

22. *Бројот 7,82495 заокружи го, постепено, на број со една значајна цифра.*

23. *Бројот 9854367 заокружи го на две значајни цифри:*

а) *постепено;* б) *директно.*

24. *Покажи дека бројот 3,142 е приближна вредност на бројот* π *со 4 значајни цифри.*

25. *Броевите* $\bar{x} = 3,7622$ (0,0121) *и* $\bar{y} = 12,5123$ (0,0211) *заокружи ги така што ќе ги отфрлаш нивните сомнителни цифри. Потоа определи ги соодветните грешки на заокружувањето и вкупните грешки.*

5. ОПЕРАЦИИ СО ПРИБЛИЖНИ БРОЕВИ. ОЦЕНКА НА ГРЕШКИ

Сега ќе ги разгледаме аритметичките операции: собирање, одземање, множење и делење со приближни броеви, како и грешките што се јавуваат при изведувањето на тие операции.

1^0. Собирање и одземање на приближни броеви

Нека $\bar{x}$ и $\bar{y}$ се приближувања на x и y со грешки ε_1 и ε_2, соодветно, така што:

$$\boxed{x = \bar{x}+\varepsilon_1,} \quad \boxed{y = \bar{y}+\varepsilon_2,} \tag{10}$$

тогаш

$$\begin{aligned} x + y &= (\bar{x} + \bar{y}) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ x - y &= (\bar{x} - \bar{y}) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \end{aligned} \tag{11}$$

Бидејќи:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_1 + \varepsilon_2| &\le |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \\ |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| &\le |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|, \end{aligned} \tag{12}$$

следува дека апсолутната грешка на збир или разлика на два приближни броја не е поголема од збирот на апсолутните грешки на тие броеви.

Ако $|\varepsilon_1| \le \Delta_{\bar{x}}$, $|\varepsilon_2| \le \Delta_{\bar{y}}$, каде што $\Delta_{\bar{x}}$, $\Delta_{\bar{y}}$ се максимални апсолутни грешки, соодветно, на броевите $\bar{x}$ и $\bar{y}$, тогаш од (12) добиваме:

$$|\varepsilon_1 + \varepsilon_2| \le \Delta_{\bar{x}} + \Delta_{\bar{y}}$$

$$|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \le \Delta_{\bar{x}} + \Delta_{\bar{y}},$$

од каде што следува дека

$$\begin{aligned} \Delta_{(\bar{x}+\bar{y})} &= \Delta_{\bar{x}} + \Delta_{\bar{y}} \\ \Delta_{(\bar{x}-\bar{y})} &= \Delta_{\bar{x}} + \Delta_{\bar{y}}, \end{aligned} \tag{13}$$

т.е. максималната апсолутна грешка на збир или разлика на два броја е еднаква на збирот на максималните апсолутни грешки на тие броеви.

Ако $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ се приближувања соодветно на a_1, a_2, $\dots$, a_n со соодветни апсолутни грешки Δ_1, $\Delta_2, \dots$, Δ_n, тогаш, со помош на методот на математичка индукција, може да се докаже дека:

$$\Delta_{\bar{s}} = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n, \tag{14}$$

каде што $\bar{s} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n$.

Одовде следува дека максималната апсолутна грешка на збир од два или повеќе броја не може да биде помала од максималната апсолутна грешка на најмалку точниот приближен број.

Тоа значи, колку и да се точни останатите собироци, точноста на збирот не може да се зголеми преку точноста на собирокот со најголема апсолутна грешка. Одовде произлегува следново практично правило за собирање на приближни броеви: Собирокот (собироците, ако има повеќе) со најголема апсолутна грешка се зема без промена, а останатите собироци се заокружуваат на декадни единици чиј разред (ред) е за 1 или 2 понизок од редот на декадната еденица на најмалку точниот собирок. Потоа збирот се заокружува на онолку значајни цифри колку што има најмалку точниот собирок.

Ако собироците се зададени со иста апсолутна грешка, тогаш тие се собираат без заокружување, а збирот се заокружува по желба.

Исто се постапува и при одземањето на приближни броеви.

Задача 26. *Да се пресмета збирот:*

$$s = 425{,}3 + 0{,}4391 + 12{,}85 + 0{,}07483 + 0{,}000453$$

ако сите собироци се точни во строга смисла.

Решение. Според погоре изложеното правило за собирање на приближни броеви, собироците 425,3 и 12,85 ги земаме без промена, а собироците 0,4391, 0,07483 и 0,000453 ги заокружуваме на 3 децимали. Така добиваме:

$$\bar{s} = 425{,}3 + 0{,}439 + 12{,}85 + 0{,}075 + 0{,}000 = 438{,}664.$$

Според (9) заокружените собироци имаат апсолутни грешки не поголеми, соодветно, од:

$$0{,}00005 + 0{,}0001 = 0{,}00015 \qquad \text{за } 0{,}439$$

2*

$0,000005 \ \ + 0,00017 \ \ = 0,000175$ за $0,075$
$0,0000005 + 0,000453 = 0,0004535$ за $0,000453$.

Затоа, апсолутната грешка на збирот $\bar{s}$ не е поголема од:

$$0,05 + 0,00015 + 0,005 + 0,000175 + 0,0004535 = 0,0557785.$$

Заокружувајќи го збирот $\bar{s}$ на првата децимала добиваме $s* = 438,7$ со грешка на заокружувањето $0,036$. Според (9) апсолутната грешка на збирот $s*$ не е поголема од:

$$0,0557785 + 0,036 = 0,0917785 < 0,1$$

Задача 27. *Да се пресмета разликата:*

$$d = 97,86 - 89,654785$$

ако намаленикот и намалителот се точни во строга смисла.

Решение. Постапуваме исто како во претходниот пример, имено, намаленикот го земаме без промена, а намалителот го заокружуваме на четири децимали. Така добиваме:

$$\bar{d} = 97,86 - 89,6548 = 8,2052.$$

Според (9) намалителот има апсолутна грешка не поголема од:

$$0,0000005 + 0,000015 = 0,0000155,$$

додека апсолутната грешка на разликата $\bar{d}$ не е поголема од

$$0,005 + 0,0000155 = 0,0050155.$$

Заокружувајќи ја разликата $\bar{d}$ до втората децимала $d* = 8,21$ со грешка на заокружувањето $0,0048$. Според (9) апсолутната грешка на разликата $d*$ не е поголема од :

$$0,0050155 + 0,0048 = 0,0098155 < 0,01.$$

Врз основа на дефиницијата за максимална релативна грешка и равенствата (13) добиваме:

$$\delta_{(\bar{x}+\bar{y})} = \frac{\Delta_{\bar{x}} + \Delta_{\bar{y}}}{|\bar{x} + \bar{y}|} \qquad (15)$$

$$\delta_{(\bar{x}-\bar{y})} = \frac{\Delta_{\bar{x}} + \Delta_{\bar{y}}}{|\bar{x} - \bar{y}|},$$

а врз основа на равенството (14)

$$\delta_{\bar{s}} = \frac{\Delta_1+\Delta_2+\ldots+\Delta_n}{|\bar{a}_1+\bar{a}_2+\ldots+\bar{a}_n|} \tag{16}$$

На пример, релативната грешка на збирот s^* од примерот 1) ќе биде

$$\frac{0,1}{438,7} \approx 0,0002,$$

додека релативната грешка на разликата d^* од примерот 2) ќе биде

$$\frac{0,01}{8,21} \approx 0,0012.$$

Забелешка. Врз основа на (15), при одземањето на два блиски броја може да дојде до значително зголемување на релативната грешка. За да се избегне тоа потребно е броевите да содржат повеќе точни цифри или пак одземањето да се замени, ако е можно, со некоја друга операција.

На пример, ако сакаме $d = \sqrt{5,01} - \sqrt{5}$ да има две точни цифри, потребно е намаленикот и намалителот да имаат по пет точни цифри. Навистина, земајќи $\sqrt{5} \approx 2,2361$, $\sqrt{5,01} \approx 2,2383$ добиваме $\bar{d} = 0,0022$. До истиот резултат доаѓаме ако ставиме:

$$\sqrt{5,01} - \sqrt{5} = \frac{0,01}{\sqrt{5,01} + \sqrt{5}},$$

а броевите $\sqrt{5,01}$ и $\sqrt{5}$ ги земеме, приближно, со три точни цифри. Навистина, земајќи $\sqrt{5} \approx 2,24$ и $\sqrt{5,01} \approx 2,24$ добиваме:

$$\sqrt{5,01} - \sqrt{5} = \frac{0,01}{2,24 + 2,24} = \frac{1}{4,48} \approx 0,0022.$$

28. *Пресметај го збирот:*

$$s = 0{,}348+0{,}1834+345{,}4+235{,}2+11{,}75+9{,}27+0{,}0849+0{,}000345,$$

ако сите цифри на собироците се точни во широка смисла, а заокружувањето да се врши на една децимала повеќе во однос на најмалку точните собироци.

29. *Пресметај го збирот:*

$$s = 1{,}3\ (0{,}01) + 3{,}187\ (0{,}001) + 0{,}2578\cdot(0{,}0002)$$

и оцени ги апсолутната и релативната грешка ако заокружувањето го вршиш на првата децимала.

30. *Пресметај го збирот:*

$$s = 3{,}22\ (0{,}02) + 1{,}0148\ (0{,}0002) + 9{,}6\ (0{,}1)$$

и оцени ги апсолутната и релативната грешка ако вршиш заокружување на првата децимала.

31. *Пресметај ја разликата:*

$$d = 5{,}847 - 2{,}342$$

и оцени ги апсолутната и релативната грешка ако сите цифри на намаленикот и намалителот се точни во строга смисла.

32. *Пресметај ја разликата:*

$$d = 89{,}543 - 75{,}05782$$

и оцени ги апсолутната и релативната грешка ако сите цифри на намаленикот и намалителот се точни во широка смисла, а заокружувањето се врши на третата децимала.

33. *Пресметај ја разликата:*

$$d = 0{,}007 - 0{,}0005436$$

и оцени ги апсолутната и релативната грешка, ако намаленикот и намалителот се точни во строга смисла, намалителот се заокружи на четири децимали, а разликата на три децимали.

34. *Нека* $\sqrt{2{,}01} \approx 1{,}41774469$, $\sqrt{2} \approx 1{,}4142135$ *и при пресметувањето на разликата* $d = \sqrt{2{,}01} - \sqrt{2}$ *е добиен резултат* $\overline{d} = 0{,}00353$. *Како може поинаку да се добие* $\overline{d}$?

2°. Множење на приближни броеви

Со множење на броевите од (10) добиваме:

$$xy = \overline{x}\overline{y} + \overline{y}\varepsilon_1 + \overline{x}\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2.$$

Одовде со занемарување на членот $\varepsilon_1\varepsilon_2$ добиваме:

$$\underline{xy \approx \overline{x}\overline{y} + \overline{y}\varepsilon_1 + \overline{x}\varepsilon_2},$$

од каде што следува дека грешката на производот $\overline{x}\overline{y}$ ќе биде

$$\boxed{\varepsilon = \overline{y}\varepsilon_1 + \overline{x}\varepsilon_2.}$$

Одовде за апсолутната грешка добиваме:

$$|\varepsilon| = |\overline{y}\varepsilon_1 + \overline{x}\varepsilon_2| \le |\overline{y}||\varepsilon_1| + |\overline{x}||\varepsilon_2|.$$

Ставајќи $|\varepsilon_1| \le \Delta_{\overline{x}}$, $|\varepsilon_2| \le \Delta_{\overline{y}}$, каде што $\Delta_{\overline{x}}$, $\Delta_{\overline{y}}$ се максимални апсолутни грешки соодветно на $\overline{x}$, $\overline{y}$, за максималната апсолутна грешка на производот $\overline{x}\overline{y}$ добиваме:

$$\Delta_{\overline{x}\overline{y}} = |\overline{y}|\Delta_{\overline{x}} + |\overline{x}|\Delta_{\overline{y}}. \tag{17}$$

Одовде за максималната релативна грешка добиваме:

$$\delta_{\overline{x}\overline{y}} = \frac{\Delta_{\overline{x}\overline{y}}}{|\overline{x}\overline{y}|} = \frac{|\overline{y}|\Delta_{\overline{x}} + |\overline{x}|\Delta_{\overline{y}}}{|\overline{x}\overline{y}|} = \frac{\Delta_{\overline{x}}}{|\overline{x}|} + \frac{\Delta_{\overline{y}}}{|\overline{y}|},$$

т.е.

$$\delta_{\overline{x}\overline{y}} = \delta_{\overline{x}} + \delta_{\overline{y}}. \tag{18}$$

Ако $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_n$ се приближувања соодветно на a_1, a_2, ..., a_n, со соодветни релативни грешки δ_1, δ_2, ..., δ_n, тогаш аналогно се докажува дека:

$$\delta_{\overline{p}} = \delta_1+\delta_2+ \ldots +\delta_n, \tag{19}$$

каде што $\overline{p} = \overline{a}_1\overline{a}_2\ldots\overline{a}_n$.

Одовде следува дека максималната релативна грешка на производ не може да биде помала од максималната релативна грешка на најмалку точниот множител (во смисла на релативната грешка). Тоа значи, колку и да се точни останатите множители, точноста на производот (во смисла на релативната грешка), не може да се зголеми преку точноста на множителот со најголема релативна грешка. Одовде произлегува следново практично правило: Множителот (множителите, ако ги има повеќе) со најголема релативна грешка (или со најмалку точни цифри) се зема без промена, а останатите множители се заокружуваат на декадни единици чиј ред (разред) е за 1 или 2 понизок од редот на декадната единица на спомнатиот множител. Добиениот производ се заокружува на онолку точни цифри колку што има најмалку точниот множител.

Ако множителите се зададени со иста релативна грешка, тогаш тие се множат без заокружување, а производот се заокружува по желба.

Задача 35. *Да се пресмета производот:*

$$p = 3{,}7 \cdot 45{,}456$$

ако сите цифри на множителите се точни во строга смисла, а потоа да се оценат апсолутната и релативната грешка.

Решение. Применувајќи го погорното правило добиваме:

$$\bar{p} = 3{,}7 \cdot 45{,}46 = 168{,}202,$$

од каде по заокружување имаме

$$p^* = 168{,}2.$$

Според (17) имаме:

$$\Delta_{\bar{p}} = 45{,}46 \cdot 0{,}05 + 3{,}7 \cdot 0{,}0045 = 2{,}28965,$$

$$\Delta_{p^*} = 2{,}28965 + 0{,}002 = 2{,}29165.$$

За релативната грешка, според (18), имаме:

$$\delta_{\bar{p}} = \frac{0{,}05}{3{,}7} + \frac{0{,}0045}{45{,}46} \approx 0{,}013 + 0{,}00009 = 0{,}01309.$$

36. *Пресметај го производот на броевите 2,56 (0,005); 1,2 (0,05) и оцени ги апсолутната и релативната грешка.*

37. *Пресметај го волуменот на една соба ако должината, ширината и висината ѝ се соодветно еднакви на 5,35 (0,04) m; 3,24 (0,02) m и 2,25 (0,02) m. Потоа оцени ги апсолутната и релативната грешка.*

38. *Пресметај го производот:*

$$p = 4{,}7\cdot 0{,}037812$$

и оцени ги апсолутната и релативната грешка ако множителите се точни во строга смисла, вториот множител се заокружи на две децимали, а производот на една децимала.

3°. Делење на приближни броеви

Приделењето на броевите $x = \bar{x} + \varepsilon_1$, $y = \bar{y} + \varepsilon_2$ добиваме дека:

$$\boxed{\frac{x}{y} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} + \frac{\bar{y}\varepsilon_1 - \bar{x}\varepsilon_2}{\bar{y}^2},}$$

од каде што, слично како кај множењето на приближни броеви, за максималната апсолутна грешка на количникот $\bar{x}/\bar{y}$ добиваме:

$$\Delta_{\bar{x}/\bar{y}} = \frac{|\bar{y}|\Delta_{\bar{x}} + |\bar{x}|\Delta_{\bar{y}}}{\bar{y}^2}, \tag{20}$$

каде што $\Delta_{\bar{x}}$ и $\Delta_{\bar{y}}$ се максимални апсолутни грешки, соодветно, на $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Од (20) за максималната релативна грешка на количникот $\bar{x}/\bar{y}$ добиваме:

$$\delta_{\bar{x}/\bar{y}} = \frac{\Delta_{\bar{x}/\bar{y}}}{\left|\frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right|} = \frac{\Delta_{\bar{x}}}{|\bar{x}|} + \frac{\Delta_{\bar{y}}}{|\bar{y}|},$$

т.е.

$$\delta_{\bar{x}/\bar{y}} = \delta_{\bar{x}} + \delta_{\bar{y}}. \tag{21}$$

Формулата (21) ни овозможува при делењето на приближни броеви да постапиме аналогно како при множењето, т.е. да користиме аналогно практично правило.

Задача 39. *Да се пресмета количникот:*

$$q = 3,5 : 1,024735$$

ако деленикот и делителот се точни во строга смисла. Да се оценат апсолутната и релативната грешка на количникот, ако делителот се заокружи на три децимали, а количникот на една децимала.

Решение. Постапувајќи по истото практично правило како кај множењето на приближните броеви, т.е. заокружувајќи го делителот на 3 децимали добиваме:

$$\bar{q} = 3,5 : 1,025 = 3,41463\ldots$$

По заокружувањето на $\bar{q}$ на првата децимала добиваме:

$$q* = 3,4.$$

За апсолутната грешка на $\bar{q}$ по формулата (20) добиваме:

$$\Delta_{\bar{q}} = \frac{3,5\cdot 0,0002655 + 1,025\cdot 0,05}{1,025^2} = 0,487\ldots$$

т.е.

$$\Delta_{\bar{q}} < 0,5,$$

додека

$$\Delta_{q*} = 0,487\ldots + 0,01463 < 0,6, \text{ а}$$

$$\delta_{q*} = \frac{0,6}{3,4} < 0,2.$$

ЗАДАЧИ

40. *Пресметај го количникот* $q = \sqrt{3} : \sqrt{2}$, *ставајќи* $\sqrt{3} \approx \approx 1,7321$; $\sqrt{2} \approx 1,41$ *и оцени ги апсолутната и релативната грешка.*

41. *Пресметај го количникот:*

$$q = 98,45 : 4,28,$$

а потоа оцени ги апсолутната и релативната грешка ако резултатот го заокружиш на две децимали.

42. *ПрименувајЌи ги практичните правила пресметај ја вредноста на изразот:*

$$r = (3,41327 \cdot 0,87631 - 4,6532 \cdot 1,43):3,2,$$

а потоа оцени ги апсолутната и релативната грешка.

6. ТАБЕЛИРАЊЕ НА ФУНКЦИИ

Еден од основните проблеми со кој се среЌаваме при изучувањето на функциите е пресметувањето вредности на дадена функција $y = f(x)$ при зададени вредности на аргументот x. И покрај тоа што изразот $f(x)$ може да биде едноставен, сепак пресметувањето вредности на функцијата може да биде доста сложено и да бара многу труд и време. Од тие причини во практиката се прибегнува кон составување на таблици од вредности на некои функции кои почесто се користат, како на пример $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и др. Тоа се постигнува со табелирање на функциите, за кое овде Ќе зборуваме.

Знаеме дека за да се пресмета вредноста на функцијата $y = f(x)$ за $x = x_o$, треба во изразот за $f(x)$ да се стави x_o на местото на x. Така се добива вредноста $y_o = f(x_o)$.

На пример, ако $y = 2x+3$, а $x_o = -1$, тогаш $y_o=2\cdot(-1)+3 = -2 + 3 = 1$. Ако пак $y = \sqrt{x}$, а $x_0 = 4$, тогаш $y_0=\sqrt{4}=2$ итн.

Забележуваме дека за точни вредности на аргументот добиваме точни вредности на функцијата. Но, тоа не е секогаш така.

На пример, ако е $y = \sqrt{x}$, а $x_o = 2$, тогаш $y_o = \sqrt{2}$. Знаеме дека $\sqrt{2}$ е ирационален број, па затоа неговата вредност може да се пресмета само приближно, а тоа значи дека вредноста на функцијата $y = \sqrt{x}$ за $x_o = 2$ запишана со конечен број цифри претставува приближен број. Ако пак x_o е приближен број, тогаш вредноста на функцијата $y_o = f(x_o)$ е исто така приближен број. Значи, најчесто, вредностите на функциите се приближни броеви.

Нека $y = f(x)$ е дадена функција и $x_o, x_1, \dots, x_n$ се вредности на аргументот x, што се содржат во секој сегмент $[a, b]$, а

$$y_o = f(x_o),\ y_1 = f(x_1),\ \dots,\ y_n = f(x_n)$$

се соодветните вредности на функцијата $f(x)$. Нанесувајќи ги вредностите на аргументот и соодветните вредности на функцијата во една шема од обликот:

x	x_o	x_1	...	x_n
y	y_o	y_1	...	y_n

велиме дека сме извршиле **табелирање** на функцијата $y = f(x)$, односно дека сме составиле **таблица** од вредности на таа функција.

На пример, за функцијата $y = x^2$ ја имаме следнава таблица:

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	...
x^2	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	...

За секоја вредност на аргументот што се содржи во таблицата може да се прочита соодветната вредност на функцијата. Така од горната таблица гледаме дека за $x_o = -\frac{1}{2}$, вредноста на функцијата е $y_o = \frac{1}{4}$, итн.

Задача. *Состави таблица од вредности за функцијата:*

а) n^3,

б) $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$,

в) $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)$,

г) $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$,

каде што n е природен број кој се содржи во сегментот $[1, 10]$.

За полесно составување на таблиците вредностите на аргументот x_o, x_1, ..., x_n се земаат „еднакво оддалечени една од друга, т.е. така да важат равенствата:

$$x_1 - x_o = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h, \tag{1}$$

односно

$$x_1 = x_o + h; \quad x_2 = x_o + 2h; \quad \ldots, \quad x_n = x_o + nh,$$

каде што разликата h се нарекува **чекор** или **нарастување на аргументот**, а често се означува и со Δx. Во таблицата за функцијата $y = x^2$ чекорот е 0,5, т.е. $h = 0,5$.

Исто така, при составувањето и користењето на таблиците треба да се знаат и разликите помеѓу соседните вредности на функцијата, т.е. разликите:

$$\Delta y_o = y_1 - y_o, \; \Delta y_1 = y_2 - y_1, \; \ldots, \; \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

кои се нарекуваат **таблични разлики** или **нарастувања на функцијата**. Сите вредности на функцијата се пресметуваат со иста апсолутна грешка. Така во логаритамските таблици од О. Шлемилх и Ј. Мајцен, кои се добро познати, апсолутната грешка изнесува половина единица од последниот разред, т.е. 0,000005. Затоа апсолутната грешка на табличните разлики ќе биде 0,00001.

7. ЛИНЕАРНА ИНТЕРПОЛАЦИЈА

Секоја таблица, колку и да е опширна, содржи вредности на функцијата само за конечен број вредности на аргументот кои припаѓаат на некој конечен сегмент $[a, b]$. Затоа честопати сме принудени да наоѓаме вредност на функцијата, за некоја вредност на аргументот што не се содржи во таблицата, а притоа да ги користиме само податоците од таблицата. (Тоа често го правиме, на пример, при користењето на логаритамските таблици.) Во тие случаи, помеѓу вредностите на аргументот во таблицата вршиме вметнување или **интерполација** (interpolare на латински значи вметнува или вклопува) на нови вредности.

Од друга страна, пред малку истакнавме дека пресметувањето вредности на некоја функција дури и во случаи кога изразот $f(x)$ е доста едноставен често изискува комплицирани и обемни пресметувања (кои не секогаш точно може да се извршат). Затоа, во практиката, се наметнува потребата од заменување на дадената функција $y = f(x)$ со некоја друга функција, удобна и едноставна за пресметувања, а „доволно блиска" до дадената. Таа операција на заменување на една функција со друга, поедноставна, се нарекува **интерполација**. За таа цел најчесто се користат полиномите.

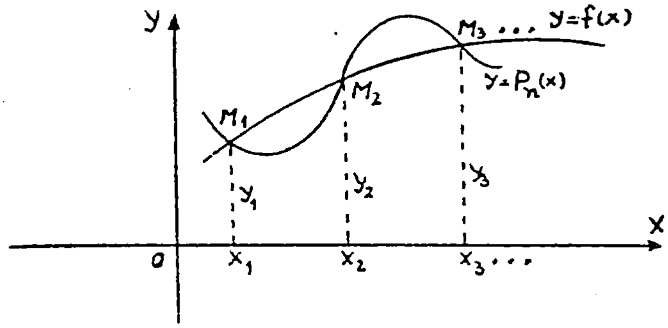
Ако x_o, x_1, ..., x_n се вредности на аргументот x кои припаѓаат на некој сегмент $[a,b]$, а

$$y_o = f(x_o),\ y_1 = f(x_1),\ \dots,\ y_n = f(x_n)$$

се соодветни вредности на функцијата $y = f(x)$, тогаш интерполацијата на функцијата $f(x)$ се состои во изнаоѓање на полином $P_n(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ (со степен не поголем од n), за којшто важат равенствата:

$$P_n(x_o) = y_0,\ P_n(x_1) = y_1,\ \dots,\ P_n(x_n) = y_n.$$

Геометриски тоа значи дека на сегментот $[a,b]$, кој треба да биде колку што е можно помал, графикот на функцијата $f(x)$ е заменет со графикот на полиномот $P_n(x)$ кој поминува низ точките $M_k(x_k,\ y_k)$ $(k=0,1,\dots,n)$.



Цртеж 1

Точките x_0, x_1, ..., x_n се викаат **јазли** на интерполацијата, а полиномот $P_n(x)$ - **интерполационен полином**. Растојанието меѓу два соседни јазли се вика **чекор** на интерполацијата. Ако јазлите се распоредени на еднакви растојанија, т.е. ако важат равенствата (1), тогаш чекорот на интерполацијата е постојан или рамномерен, а во спротивен случај тој е променлив.

Во случај кога интерполацијата се врши со полином од прв степен ($P_1(x) = a_0x + a_1$), тогаш таа се вика **линеарна интерполација**. Линеарната интерполација е наједноставна и најчесто применувана.

Нека е зададена таблица со чекор h и нека за x_o и $x_1 = x_o+h$ од таа таблица вредностите на функцијата $f(x)$ се соодветно $y_0 = f(x_o)$ и $y_1 = f(x_1)$. Нека $x=\overline{x}$ е произволна вредност на аргументот што не се наоѓа во таблицата, а припаѓа на интервалот (x_o, x_1), т.е. $x_o<\overline{x}<x_1$. За пресметување на соодветната вредност на функцијата $y = f(x)$, што ќе ја означиме со $\overline{y}$, т.е. $\overline{y} = f(\overline{x})$, ќе ја примениме линеарната интерполација. За таа цел треба да го определиме интерполациониот полином $P_1(x) = a_0x+ a_1$ којшто ги исполнува условите $P_1(x_o) = y_0$, $P_1(x_1) = y_1$, т.е.

$$\boxed{\begin{aligned} a_0x_o + a_1 &= y_o \\ a_0x_1 + a_1 &= y_1. \end{aligned}} \tag{2}$$

Тогаш бараната вредност $\overline{y}$ на функцијата $f(x)$ ќе биде $\overline{y} \approx P_1(\overline{x})$.

Решавајќи го системот (2) по неопределените коефициенти a_o и a_1 добиваме:

$$a_o = \frac{y_1-y_o}{x_1-x_o}, \quad a_1 = y_o - \frac{y_1-y_o}{x_1-x_o}\cdot x_o,$$

односно

$$P_1(x) = y_o + \frac{y_1-y_o}{x_1-x_o}\cdot(x-x_o).$$

Значи:

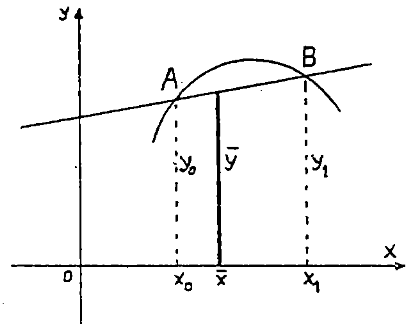
$$\overline{y} \approx y_o + \frac{y_1-y_o}{x_1-x_o}\cdot(\overline{x}-x_o)$$

или

$$\boxed{\overline{y} \approx y_o + \frac{\Delta y_o}{h}\cdot(\overline{x}-x_o)} \tag{3}$$

Величината $\frac{\Delta y_o}{h}\cdot(\bar{x}-x_o)$ се нарекува **поправка.**

Забележуваме дека интерполациониот полином $P_1(x)$ геометриски, во координатен систем xOy, претставува права што врви низ точките $A(x_o, y_o)$ и $B(x_1, y_1)$ (црт. 2). Според тоа, геометриски, линеарната интерполација се состои во замена на графикот на функцијата $f(x)$ што е зафатен помеѓу точките A и B, со соодветниот дел од правата што врви низ тие точки, додека $\bar{y}$ ќе претставува ордината на онаа точка од правата што има апсциса $\bar{x}$.



Цртеж 2

Задача 1. *Да се пресмета lg 45,8746.*

Решение. Ако ставиме:

$$x_o = 45,87$$

$$x_1 = 45,88, \quad x_1 - x_o = h$$

тогаш од логаритамските таблици од О. Шлемилх и Ј. Мајцен, стр. 35, ќе прочитаме:

$$y_0 = lg\ 45,87 = 1,66153$$

$$y_1 = lg\ 45,88 = 1,66162.$$

Значи, $h = 0,01$; $\Delta y_0 = y_1 - y_o = 0,00009$, а $\bar{x} - x_o = 0,0046$.

Применувајќи ја формулата (3) имаме:

$$\bar{y} = lg\ 45,8746 = 1,66153 + \frac{0,00009}{0,01}\cdot 0,0046$$

или

$$lg\ 45,8746 = 1,66153 + 0,0000414 =$$

$$= 1,6615714 \approx 1,66157.$$

Реши ја задачата само со помош на логаритамската таблица и добиениот резултат спореди го со горниот резултат!

Задача 2. *Да се пресмета* $\cos 41^\circ 12'$.

Решение. Ставаме:

$$x_o = 41^0 10'$$

$$x_1 = 41^\circ 20',$$

а потоа од истите логаритамски таблици, стр. 66, добиваме:

$$y_o = \cos 41^\circ 10' = 0,75280$$

$$y_1 = \cos 41^\circ 20' = 0,75088.$$

Потоа пресметуваме:

$$h = x_1 - x_o = 10'; \; \overline{x} - x_o = 2';$$

$$\Delta y_o = y_1 - y_o = -0,00192.$$

Применувајќи ја формулата (3) добиваме:

$$\cos 41^\circ 12' = 0,75280 - 0,00192 \cdot \frac{2'}{10'} =$$

$$= 0,75280 - 0,00038 = 0,75242.$$

Провери го резултатот со помош на логаритамските таблици!

Задача 3. *Да се пресмета* $\sin 38^\circ 44' 52''$.

Решение. Ако ставиме:

$$x_o = 38^0 40'$$

$$x_1 = 38^0 50',$$

тогаш од логаритамските таблици наоѓаме

$$y_o = \sin 38^\circ 40' = 0,62479$$

$$y_1 = \sin 38^\circ 50' = 0,62706,$$

од каде

$$h = x_1 - x_o = 10' = 10 \cdot 60'' = 600''$$

$$\overline{x} - x_o = 4' 52'' = 292''$$

$$\Delta y_o = y_1 - y_0 = 0,00225.$$

Потоа со примена на формулата (3) добиваме:

$$sin\ 38^\circ 44'52" = 0,62479 + 0,00225\cdot\frac{292"}{600"} \approx$$

$$\approx 0,062479 + 0,00225\cdot 0,49 \approx 0,62589.$$

Провери го резултатот со помош на логаритамските таблици!

ЗАДАЧИ

4. *Со помош на линеарна интерполација пресметај ги декадните логаритми од следниве броеви:*

а) 38965;   б) 685673;   в) 3824569;   г) 24,562;

д) 0,030245;   ѓ) 0,00239934.

5. *Со помош на линеарна интерполација пресметај:*

а) $sin\ 41^\circ 43'$;   б) $cos\ 41^\circ 43'$;   в) $tg\ 41^\circ 43'$;

г) $ctg\ 41^\circ 43'$;   д) $sin\ 69^\circ 36'45''$;   ѓ) $ctg\ 64^\circ 27'36''$.

8. ПРЕСМЕТУВАЊЕ ВРЕДНОСТИ НА ПОЛИНОМИ. ХОРНЕРОВА ШЕМА

Знаеме дека полиномите се наједноставни функции, многу погодни за разни испитувања и приближни пресметувања. Сепак, пресметувањето вредности на полиномите за одредени вредности на аргументот може да се усложни во случај кога нивниот степен е голем број, а вредностите на аргументот се децимални броеви. Во таков случај, за да се упростат пресметувањата, пресметувањето на вредноста на полиномот:

$$P(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,\quad n \geq 1,$$

каде што $a_o, a_1, \ldots, a_n$ се реални броеви, за $x = x_o$, се сведува на делење на тој полином со биномот $x - x_o$. При тоа делење се добива количник $P_{n-1}(x)$ (полином од $n - 1$ степен) и остаток R_n (R_n е константа), т.е.

$$P_n(x) = (x - x_o)\cdot P_{n-1}(x) + R_n. \qquad (4)$$

Одовде за $x = x_0$ добиваме $P_n(x_o) = R_n$. Значи, вредноста на полиномот $P_n(x)$ за $x = x_o$ е еднаква на остатокот што се добива при делењето на тој полином со биномот $x - x_o$.

Определувањето на количникот $P_{n-1}(x)$ и остатокот R_n ќе го вршиме шематски, а за полесно да го разбереме ќе тргнеме од полиномот од втор степен $P_2(x) = a_o x^2 + a_1 x + a_2$ и ќе ја определиме неговата вредност за $x = x_o$. По делењето на полиномот $P_2(x)$ со биномот $x - x_o$ добиваме:

$$P_2(x) = (x-x_o)\cdot P_1(x) + R_2, \tag{5}$$

каде што $P_1(x)$ е полином од прв степен, а R_2 е константа.

Ставајќи $P_1(x) = b_o x + b_1$ од (5) добиваме:

$$a_o x^2 + a_1 x + a_2 = (x-x_o)(b_o x + b_1) + R_2,$$

односно

$$a_o x^2 + a_1 x + a_2 = b_o x^2 + (b_1 - b_0 x_0)x + R_2 - b_1 x_o.$$

Изедначувајќи ги коефициентите пред еднаквите степени на x, добиваме:

$$a_o = b_o, \quad a_1 = b_1 - b_0 x_o, \quad a_2 = R_2 - b_1 x_o,$$

односно

$$b_o = a_o, \quad b_1 = a_1 + b_o x_0, \quad R_2 = a_2 + b_1 x_o.$$

Значи:

$$P_2(x_o) = a_2 + b_1 x_o.$$

Овие пресметувања може да се претстават со следнава шема:

	a_o	a_1	a_2
x_o		$b_o x_o$	$b_1 x_o$
Σ	b_o	b_1	R_2

наречена **Хорнерова шема**.

На пример, вредноста на полиномот

$$P_2(x) = 3x^2-5x+7$$

за $x_o = 1,2$ ќе ја добиеме од следнава шема:

	3	-5	7
1,2		3,6	-4,2
Σ	3	-1,4	2,8

Значи, $P_2(1,2) = 2,8$, додека $P_1(x) = 3x - 1,4$.

Во случај на полином од n-ти степен Хорнеровата шема добива облик:

	a_o	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
x_o		$b_o x_o$	$b_1 x_o$	...	$b_{n-2} x_o$	$b_{n-1} x_o$
Σ	b_o	b_1	b_2		b_{n-1}	R_n

каде што b_o, b_1, ..., b_{n-1} се коефициенти на полиномот $P_{n-1}(x)$, т.е.

$$P_{n-1}(x) = b_o x^{n-1}+b_1 x^{n-2}+...+b_{n-2}x+b_{n-1},$$

а

$$R_n = P_n(x_o) = a_n+b_{n-1}x_0.$$

На пример, вредноста на полиномот

$$P_5(x) = 2x^5-5x^4+4x^3-7x+3,$$

за $x_o = 1,5$ се добива од следнава шема:

	2	-5	4	0	-7	3
1,5		3	-3	1,5	2,25	-7,125
Σ	2	-2	1	1,5	-4,25	-4,125

Значи, $P_5(1,5) = -4,125$.

Задача 6. *Со помош на Хорнеровата шема пресметај ги вредностите на дадените полиноми за укажаните вредности на x:*

а) $P_3(x) = x^3+2x^2-7x+4, \quad x = 3,2;$

б) $P_4(x) = x^4+2x^3-3x^2-4x-5, \quad x = 2,1;$

в) $P_7(x) = x^7-7x^5+6x^4+4x^3-x^2-2x-9, \quad x = 2;$

г) $P_3(x) = 3,2x^3-2,5x^2+5,1x+1, \quad x = 4,1;$

д) $P_4(x) = -2,31x^4+3,10x^3-2,80x+5, \quad x = 1,51.$

9. ПРИБЛИЖНО РЕШАВАЊЕ НА РАВЕНКИ

1°. Основни поими и дефиниции

Секоја равенка од една непозната може да се запише во следниов облик:

$$f(x) = 0, \qquad (1)$$

каде $f(x)$ е дадена функција од реалниот аргумент x.

Секој реален број ξ за кој важи равенството $f(\xi) = 0$ се нарекува **решение** или **корен** на равенката (1). Решението на равенката $f(x) = 0$ се нарекува **нула** на функцијата $f(x)$.

Ако функцијата $f(x)$ е полином од n-ти степен, т.е.

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \qquad (2)$$

каде што a_0, a_1, ..., a_n се реални броеви, $a_0 \neq 0$, $n \geq 1$ е природен број, тогаш равенката (1) се нарекува **полиномна**. Така, за $n=1$ се добива линеарната равенка:

$\boxed{a_0x + a_1 = 0,}$ (или полиномна равенка од прв ред);

за $n=2$, квадратната равенка:

$\boxed{a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0,}$ (или полиномна равенка од втор ред);

за n=3, кубната равенка:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \qquad \text{(или полиномна равенка од трет ред)}$$

итн.

За определување на точните реални решенија (до колку постојат) на полиномните равенки од прв, втор, трет и четврти ред, постојат т.н. точни методи кои веќе за равенките од трет и четврти ред се изразуваат со комплицирани формули кои се практично непогодни за извршување на пресметувањата. Затоа, освен во специјални случаи, полиномните равенки од трет и четврти ред се решаваат приближно, т.е. се определуваат само приближни вредности за нивните точни решенија. За полиномните равенки чиј ред е $n \geq 5$ не постојат точни методи, па и тие, освен во специјални случаи се решаваат приближно.

Решавањето на останатите (неполиномните) равенки, во општ случај, е далеку посложено. Затоа и овие равенки најчесто се решаваат приближно. Од друга страна, за многу практични цели е доволно да се знаат само приближните вредности на корените на равенката $f(x) = 0$, со однапред зададена точност. Постојат и други причини кои доведуваат до потребата за приближно решавање на равенки.

Задачата за наоѓање приближно решение на равенка од обликот (1) содржи две етапи:

а) Во првата етапа се бараат доволни услови за равенката (1) да има решение, а потоа се определуваат интервалите (што е можно потесни) во кои таа има единствено решение, т.е. се врши **изолирање** или **локализирање** на корените на равенката (1).

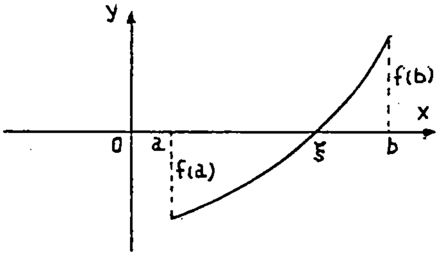
б) Во втората етапа се бараат начини за подобрување на приближното решение, т.е. се врши **уточнување** на приближното решение, со однапред зададена точност.

2°. Изолирање на корените

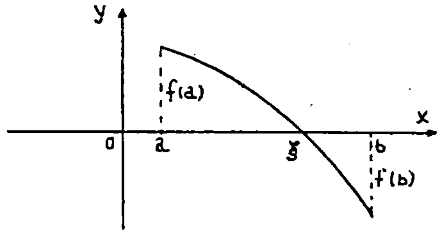
За изолирање на корените на равенката (1) значајна е и корисна следнава теорема:

Ако функцијата $f(x)$ е непрекината на сегментот $[a,b]$ и ако на краиштата од тој сегмент прима вредности различни по знак, т.е. ако $f(a)\cdot f(b) < 0$, тогаш постои барем еден реален број $\xi\in(a,b)$, таков што $f(\xi) = 0$.

Коренот ξ ќе биде единствен на интервалот (a,b) ако $f(x)$ е монотона на тој интервал, т.е. е или растечка, или опаднувачка. На цртежот 3 е прикажана една растечка функција, а на цртежот 4 - опаднувачка.



Цртеж 3



Цртеж 4

На цртежот 3 при преминот од негативни на позитивни вредности за $x = \xi$ функцијата $f(x)$ прима вредност 0, т.е. $f(\xi) = 0$, додека на цртежот 4 при преминот од позитивни на негативни вредности, за $x = \xi$ функцијата $f(x)$, прима вредност 0, т.е. $f(\xi) = 0$.

На пример, за локализирање на корените на равенката

$$f(x) = x^3-6x+2 = 0,$$

ја составуваме следнава приближна таблица:

x	-3	-1	0	1	3
$f(x)$	-7	$+7$	$+2$	-3	$+11$

Од таблицата гледаме дека функцијата $f(x) = x^3-6x+2$ на краиштата од сегментите $[-3,-1]$, $[0,1]$ и $[1,3]$ има различни знаци, па според искажаната теорема дадената равенка има три корени кои се содржат во интервалите:

$$(-3,-1),\ (0,1) \text{ и } (1,3).$$

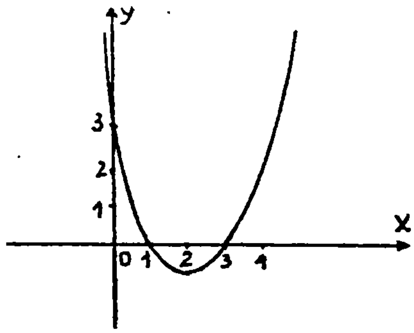
Од цртежите 3 и 4 забележуваме дека коренот ξ на равенката (1) претставува апсциса на пресечната точка на апсцисната оска и графикот на функцијата $f(x)$. Затоа, кога би го знаеле графикот на функцијата $y = f(x)$, би ги имале, барем приближно, и решенијата на равенката $f(x) = 0$. Значи, за определување на интервалите на изолирање на корените на равенката (1) може добро да послужи графикот на $f(x)$ во случај кога можеме да го нацртаме. На пример, од графикот на функцијата:

$$f(x) = x^2-4x+3,$$

црт. 5, се гледа дека корените на равенката

$$f(x) = x^2-4x+3 = 0$$

се 1 и 3, а се локализирани во интервалите (0,2) и (2,4).



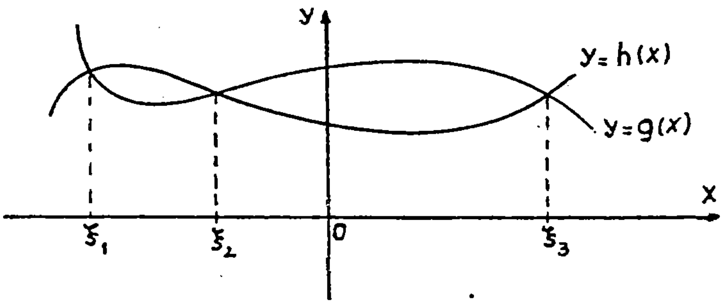
Цртеж 5

Во практиката се покажува згодно равенката $f(x) = 0$ да се претстави во обликот:

$$g(x) = h(x).$$

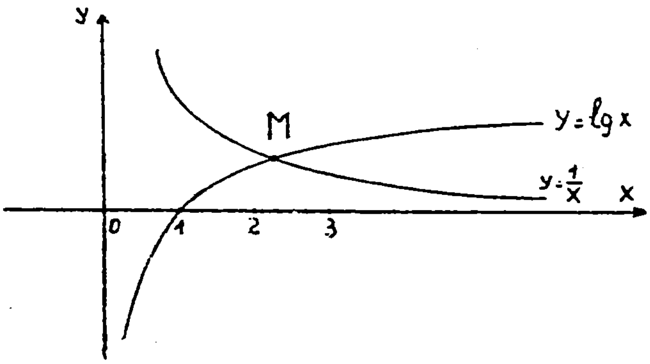
Реалните решенија на оваа равенка, геометриски, претставуваат апсциси на пресечните точки на кривите:

$$y = g(x) \text{ и } y = h(x) \quad (\text{цртеж } 6),$$



Цртеж 6

па и тоа, во некои случаи, може да послужи за локализирање на корените. На пример, претставувајќи ја равенката $f(x) = x\lg x - 1 = 0$, во обликот $\lg x = \frac{1}{x}$, а потоа цртајќи ги графиците на функциите $y = \lg x$, $y = \frac{1}{x}$ за $x > 0$ (црт. 7). Заклучуваме дека дадената равенка има корен $\xi \in (2,3)$ кој претставува апсциса на пресечната точка M на кривите $y = \lg x$ и $y = \frac{1}{x}$.



Цртеж 7

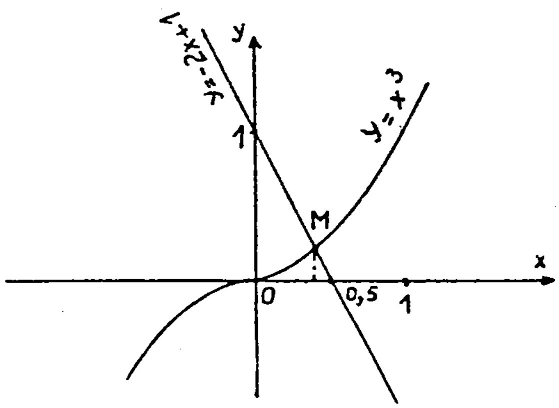
Определувањето на корени на равенката $g(x) = h(x)$ се упростува ако една од функциите $g(x)$ или $h(x)$ е линеарна, т.е. на пример, $h(x) = ax+b$. Во тој случај корените на равенката $g(x) = h(x)$, претставуваат апсциси на пресечните точки на кривата $y = g(x)$ и правата $y = ax+b$. На пример, равенката:

$$f(x) = x^3+2x-1 = 0$$

се претставува во обликот

$$x^3 = -2x+1,$$

а потоа се става $g(x) = x^3$, $h(x) = -2x+1$. По цртање на графиците на функциите $y = x^3$, $y = -2x+1$ (црт. 8) заклучуваме дека дадената равенка има корен $\xi \in (0;0,5)$ кој претставува апсциса на пресечната точка M на кривата $y = x^3$ и правата $y = -2x+1$.



Цртеж 8

Задача 1. *По графички пат изврши локализирање на корените на следниве равенки:*

а) $x^3-3x+1 = 0$;

б) $x^4-x-1 = 0$;

в) $x^3-3x^2-9x+7 = 0$;

г) $x^2-lgx = 0$;

д) $2^x-x-2 = 0$;

ѓ) $x^2-\cos\pi x = 0,\ x>0$;

е) $2^{-x}-2+x^2= 0$;

ж) $\sqrt{x+1} - \frac{1}{x} = 0$;

з) $x^2-\cos x = 0$.

3°. Уточнување на приближните решенија

За уточнување на приближните решенија на равенката $f(x) = 0$, кои се веќе изолирани, постојат повеќе методи. Ние ќе разгледаме само некои (поелементарни) такви методи. Тие обично се нарекуваат итеративни методи. Еден итеративен метод за определување приближно решение на равенката $f(x) = 0$ се состои во тоа што некој еднообразен процес се повторува (се „итерира", од латинскиот збор iteratio што значи повторување). Имено, ако е утврдено дека постои корен ξ на равенката $f(x) = 0$, и ако е извршено неговото изолирање во (α,β), тогаш се почнува со некое **приближување** или **апроксимација** $x_0\in[\alpha,\beta]$ на ξ и користејќи го него се применува некое правило што ќе произведе ново приближување x_1 на ξ. Потоа приближувањето x_1 се користи за добивање на ново приближување x_2 на ξ, по истото правило итн. На тој начин се добиваат приближувањата x_0, x_1, x_2, ..., x_n... Ако x_n тежи кон ξ (пишуваме $x_n \to \xi$) кога n расте неограничено (пишуваме $n \to \infty$), тогаш велиме дека методот **конвергира**. Во спротивно методот **дивергира**.

Процесот обично се завршува тогаш кога две последователни приближувања се доволно блиски, т.е. кога за нашите практични потреби можеме да ги сметаме за еднакви. Притоа, последното приближување се зема за корен на равенката $f(x)=0$.

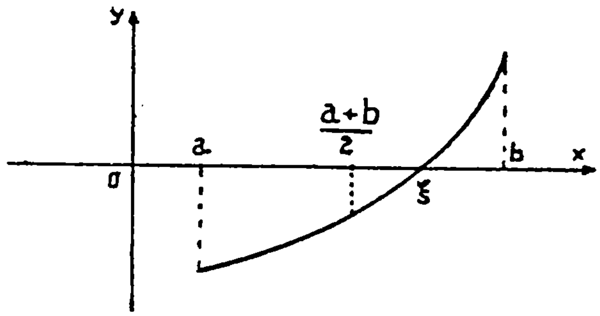
Метод на преполовување

Овој метод е најпрост итеративен метод за приближно решавање на равенки од обликот $f(x) = 0$. Со него истовремено се врши и изолирање на корените.

Нека е дадена равенката $f(x) = 0$ во која функцијата $f(x)$ е непрекината на сегментот $[a,b]$ и нека важи неравенството $f(a)\cdot f(b) < 0$, (на пример е $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$), тоа значи дека равенката има корен во сегментот $[a,b]$.

Сегментот $[a,b]$ го делиме на два еднакви дела:

$$\left[a,\ \frac{a+b}{2}\right],\quad \left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$



Цртеж 9

Ако $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, тогаш $\xi = \frac{a+b}{2}$. Ако пак $f(\frac{a+b}{2}) < 0$, како што е во нашиов случај, тогаш ставаме $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$ и така добиениот сегмент $[a_1, b_1]$ го преполовуваме со точката $x = \frac{a_1+b_1}{2}$. Така ги добиваме сегментите

$$\left[a_1,\ \frac{a_1+b_1}{2}\right],\quad \left[\frac{a_1+b_1}{2},\ b_1\right].$$

Притоа ако е $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$, тогаш $\xi = \frac{a_1+b_1}{2}$. Ако е $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) <$ < 0, тогаш ставаме $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2 = b_1$, ако пак $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) > 0$

ставаме $a_2 = a_1$, $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ и постапката на преполовување ја продолжуваме на сегментот $[a_2, b_2]$. На тој начин ги добиваме сегментите:

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ \dots,\ [a_n, b_n],\ \dots$$

од кои секој следен се содржи во претходниот и за секој од нив важат условите:

$$f(a_n)\cdot f(b_n) < 0,\quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},\ n = 1,\ 2,\ \dots$$

Очигледно, со растење на индексот n сегментите што го содржат коренот ξ сé повеќе се стеснуваат. Конечно, можеме да земеме:

$$\xi \approx \frac{a_n+b_n}{2}.$$

Од начинот на добивањето на средните точки на горните сегменти е јасно дека грешката на n-то приближување (т.е. n-та средна точка) од коренот ξ е помала од $\frac{b-a}{2^n}$, т.е.

$$\left|\xi - \frac{a_n+b_n}{2}\right| < \frac{b-a}{2^n}. \qquad (3)$$

Во практиката процесот на преполовување завршува тогаш кога ќе се добие сегмент на изолација чија должина е помала од однапред даден број $\delta > 0$. Средната точка од последниот сегмент претставува приближна вредност на коренот со апсолутната грешка помала од $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$.

Задача 2. *Со помош на методот на преполовување да се уточни приближната вредност на коренот на равенката:*

$$f(x) = x^3+x^2-3 = 0$$

што се наоѓа во сегментот $[1,\ 2]$ *со точност до* $0,1$.

Решение. Дадената равенка има корен што се наоѓа во сегментот $[1,\ 2]$ бидејќи важи неравенството $f(1)\cdot f(2) = (-1)\cdot 9 < 0$. Од друга страна, бидејќи $\frac{2-1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0,0625 < 0,1$; според (3), заклучуваме дека за бараната точност ни се доволни четири преполовувања. По првото преполовување на сегментот $[1,\ 2]$ ги добиваме сегментите $\left[1,\ \frac{3}{2}\right]$, $\left[\frac{3}{2},\ 2\right]$. Бидејќи $f(1)\cdot f(\frac{3}{2}) = (-1)\cdot\frac{21}{8} < 0$, бараниот корен се наоѓа во сегментот $\left[1,\ \frac{3}{2}\right]$. Со преполовување на овој сегмент ги добиваме сегментите $\left[1,\ \frac{5}{4}\right]$, $\left[\frac{5}{4},\ \frac{3}{2}\right]$, каде точката $x = \frac{5}{4}$ е средна точка. Бидејќи $f(\frac{5}{4}) = \frac{33}{64} > 0$, а $f(1)\cdot f(\frac{5}{4}) < 0$, бараниот корен се наоѓа во сегментот $\left[1,\ \frac{5}{4}\right]$. Преполовувајќи го овој сегмент, ги добиваме сегментите $\left[1,\ \frac{9}{8}\right]$, $\left[\frac{9}{8},\ \frac{5}{4}\right]$ каде точката $x = \frac{9}{8}$ е средна точка. Бидејќи $f(\frac{9}{8}) = -\frac{59}{512} < 0$, а $f(\frac{5}{4})\cdot f(\frac{9}{8}) = \frac{33}{64}\cdot(-\frac{59}{512}) < 0$, заклучуваме дека коренот се наоѓа во сегментот $\left[\frac{9}{8},\ \frac{5}{4}\right]$. Земајќи $\xi \approx \frac{1}{2}\cdot(\frac{9}{8} + \frac{5}{4}) = \frac{19}{16} = 1,1875$, добиваме дека

$$\left|\xi - \frac{19}{16}\right| < \frac{1}{2^4} < 0,1.$$

ЗАДАЧИ

3. *Со методот на преполовување уточни го коренот на равенката:*

$$f(x) = x^4+2x^3-x-1 = 0$$

што се наоѓа во сегментот $[0,\ 1]$ извршувајќи пет преполовувања.

4. *Со методот на преполовување уточни го коренот на равенката:*

$$f(x) = x^3-x-1 = 0$$

што се наоѓа во сегментот $[1,\ 2]$ *со точност до* $0{,}005$.

5. *Со методот на преполовување уточни го коренот на равенката:*

$$f(x) = x^4-3x^2+4x-1 = 0$$

што се наоѓа во сегментот $[0,\ 1]$. *Определи го коренот со пет точни цифри.*

Метод на итерации

Еден од најважните методи за приближно решавање на равенки е **методот на итерации**, кој уште се нарекува **метод на последователни приближувања.**

Равенката $f(x) = 0$ којашто има корен ξ, изолиран во сегментот $[a,b]$, се заменува со еквивалентна равенка од обликот $x = \varphi(x)$. Потоа се избира точка $x_0 \in [a,b]$, (x_0 се нарекува **почетно** или **нулто** приближување на коренот ξ) и се става во $\varphi(x)$ на местото на x. Така се добива бројот $x_1 = \varphi(x_0)$ кој се зема за ново приближување на коренот ξ. Натаму, на местото на x во $\varphi(x)$ се става x_1 и се добива бројот $x_2 = \varphi(x_1)$, кој се зема за ново приближување на коренот ξ. Повторувајќи ја оваа постапка n пати добиваме $x_n=\varphi(x_{n-1})$.

При извесни услови[1] што треба да ги задоволува функцијата $\varphi(x)$ изнесената постапка конвергира кон коренот ξ (т.е. $x_n \to \xi$ кога $n \to \infty$), па ставајќи $\xi \approx x_n$ добиваме приближно решение на равенката $f(x) = 0$ со дадена точност.

Задача 6. *Со помош на методот на итерации да се уточнат приближните вредности на корените на равенката:*

$$f(x) = x^2-5x+2 = 0.$$

Решение. Применувајќи го правилото за решавање на квадратна равенка дознаваме дека дадената равенка има два реални корени:

$$\xi_1 \approx 0{,}438447 \quad \text{и} \quad \xi_2 \approx 4{,}561553.$$

---

1) Условите за конвергенција на методот на итерации можеш да ги најдеш во литературата под бр. [6], [8], [21].

За да го илустрираме методот на итерации за решавање на дадената равенка, претходно ќе извршиме локализирање на корените. За таа цел за функцијата $f(x) = x^2-5x+2$ ја составуваме следнава таблица:

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	-2	-4	-4	-2	2

Од таблицата гледаме дека $f(0)\cdot f(1) < 0$ и $f(4)\cdot f(5) < 0$, а тоа значи дека дадената равенка има 2 корена од кои едниот се наоѓа во сегментот $[0,1]$, а другиот во сегментот $[4,5]$. Потоа дадената равенка ја заменуваме со на неа еквивалентна равенка

$$x = 0,2x^2+0,4 \tag{4}$$

добиена на следниов начин:

Од

$$x^2-5x+2 = 0$$

постапно добиваме:

$$5x = x^2+2$$

$$x = \frac{1}{5}(x^2+2)$$

$$x = 0,2x^2+0,4.$$

Равенката (4) ја решаваме итеративно применувајќи ја формулата:

$$x_n = 0,2x_{n-1}^2 + 0,4; \quad n = 1,\ 2,\ 3,\dots$$

каде што x_n ја означува n-та апроксимација на коренот.

Избираме $x_0 = 0$ како почетно приближување на еден од корените на дадената равенка и го внесуваме во десната страна од погорната формула. Така добиваме:

$$x_1 = 0,2x_0^2 + 0,4 = 0,2\cdot 0^2 + 0,4 = 0,4.$$

Бројот $x_1 = 0,4$ го земаме за ново приближување на коренот. Потоа вредноста $x_1 = 0,4$ ја внесуваме во десната страна од погорната формула и добиваме:

$$x_2 = 0,2x_1^2 + 0,4 = 0,2\cdot 0,4^2 + 0,4 = 0,432$$

итн. На тој начин, постапно добиваме:

$$x_3 = 0,43732$$

$$x_4 = 0,43825$$

$$x_5 = 0,43841$$

$$x_6 = 0,43844$$

$$x_7 = 0,4384461$$

$$x_8 = 0,4384469$$

$$x_9 = 0,4384471.$$

Значи, $\xi_1 \approx x_9$.

Ако избереме $x_o = 1$, аналогно како погоре, добиваме:

$$x_1 = 0,6$$

$$x_2 = 0,472$$

$$x_3 = 0,444556$$

$$x_4 = 0,439526$$

$$x_5 = 0,438637$$

$$x_6 = 0,438480$$

$$x_7 = 0,438453$$

$$x_8 = 0,4384482$$

$$x_9 = 0,4384473.$$

Значи пак се добива $\xi_1 \approx x_9$.

Ако сега x_o го избереме подалеку, т.е. од сегментот [4,5], имено, ако ставиме $x_o = 4$, вршејќи пресметувања по истата формула, постапно добиваме:

$$x_1 = 3,6$$

$$x_2 = 2,992$$

$$x_3 = 2,190413$$

$x_4 = 1,3595816$
$x_5 = 0,769692$
$x_6 = 0,5184852$
$x_7 = 0,4537653$
$x_8 = 0,4411806$
$x_9 = 0,438928$
$x_{10} = 0,438531$
....

Забележуваме дека и во овој случај постапката конвергира кон коренот ξ_1, но сега многу побавно во однос на претходните два случаја.

Ако ставиме $x_o = 5$, аналогно како досега, добиваме $x_1 = 5,4$; $x_2 = 6,232$ итн., што значи дека постапката не конвергира ниту кон ξ_1, ниту кон ξ_2, туку дивергира.

Да забележиме дека постапката ќе биде добро дефинирана, ако вредностите на функцијата $\varphi(x)$ остануваат во сегментот од кој е избрано почетното приближување.

За уточнување на вториот корен ξ_2 дадената равенка ја запишуваме во обликот

$$x = 5 - \frac{2}{x}$$

на следниов начин:

Од равенката

$$x^2 - 5x + 2 = 0,$$

постапно добиваме:

$$x^2 = 5x - 2,$$

$$x = 5 - \frac{2}{x}, \quad x \neq 0.$$

Равенката $x = 5 - \frac{2}{x}$ ја решаваме итеративно применувајќи ја формулата:

$$x_n = 5 - \frac{2}{x_{n-1}}, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

каде што x_n ја означува n-та апроксимација на коренот ξ_2.

Ако избереме $x_o = 5$ и го внесеме во десната страна од горната формула ќе добиеме:

$$x_1 = 5 - \frac{2}{x_0} = 5 - \frac{2}{5} = 5 - 0,4 = 4,6.$$

Внесувајќи ја оваа вредност во десната страна од горната формула добиваме:

$$x_2 = 5 - \frac{2}{x_1} = 5 - \frac{2}{4,6} = 4,565207.$$

Продолжувајќи ја оваа постапка, последователно, добиваме:

$$x_3 = 4,561904; \qquad x_4 = 4,561587;$$

$$x_5 = 4,561556 \quad \text{и} \quad x_6 = 4,561553.$$

Значи, $\xi_2 \approx x_6$.

Ако избереме $x_0 = 4$, аналогно како погоре, добиваме:

$$x_1 = 4,5; \qquad x_2 = 4,5555556;$$

$$x_3 = 4,5609756; \qquad x_4 = 4,5614973;$$

$$x_5 = 4,5615474; \qquad x_6 = 4,5615522;$$

$$x_7 = 4,5615527; \qquad x_8 = 4,561553.$$

Значи, $\xi_2 \approx x_8$.

Избери почетни приближувања надвор од сегментот [4,5] и провери дали конвергира горната постапка!

Забележуваме дека коренот ξ_1 претставува апсциса на пресечната точка на правата $y = x$ и параболата $y = 0,2x^2-4$, додека коренот ξ_2 претставува апсциса на пресечната точка на правата $y = x$ и хиперболата $y = 5 - \frac{2}{x}$.

Исто така од задачава воочуваме дека дадената равенка има две еквивалентни равенки од обликот $x = \varphi(x)$. Поопшто, равенката $f(x) = 0$ може да има повеќе еквивалентни равенки од обликот $x = \varphi(x)$, а само некои од нив се погодни за примена на методот на итерации.

Задача 7. *Равенката* $x^3+x-1000 = 0$ *има корен во сегментот* $[9,10]$. *Запиши ја равенката во еден од следниве облици:*

$$x = 1000 - x^3$$

$$x = \frac{1000}{x^2} - \frac{1}{x}$$

$$x = \sqrt[3]{1000 - x}$$

и примени го методот на итерации за уточнување на коренот задржувајќи пет децимални места во резултатот. Која од горните равенки е најпогодна за примена на методот на итерации?

ЗАДАЧИ

8. *Равенката* $2x = x+2$ *има корен* $\xi = 2$. *Примени го формално методот на итерации пишувајќи ја равенката во еден од облиците:*

$$а)\ x = \frac{x}{2}+1$$

$$б)\ x = 2x-2$$

и избирајќи $x_o = 0$. *Што забележуваш?*

9. *Равенката* $x^3-3x-1 = 0$ *напиши ја во облик* $x = \frac{1}{3}(x^3-1)$ *и примени го методот на итерации избирајќи* $x_o = 0$; $x_o = 1$; *и* $x_o = 2$.

10. *Равенката* $x^3-x-1 = 0$ *има корен* $\xi\in(1,2)$. *Запиши ја во еден од облиците:*

$$а)\ x = x^3-1$$

$$б)\ x = \sqrt[3]{x+1}$$

и примени го методот на итерации избирајќи $x_o\in[1,2]$. *Што воочуваш?*

11. *Применувајќи го методот на итерации реши ги следниве равенки:*

а) $x^3-4x^2+10x-10 = 0$, *ако* $\xi\in(1,5;\ 1,7)$;

б) $x\sqrt{1+x} = 1$;

в) $x\cdot 2^x = 1$;

г) $2,2x-2^x = 0$;

д) $x+\lg x = 0,5$;

ѓ) $x^{\lg x} = -0,125$;

е) $2x-\lg x = 7$.

46

II СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ. ВЕРОЈАТНОСТ

ВОВЕД

Зачетоците на теоријата на веројатност датираат од половината на XVII век. Во преписката на познатите математичари од тоа време Паскал и Ферма, биле разгледувани задачи во врска со игрите на среќа, при што било забележано дека „математичкото" решение на некои задачи не се совпаѓало со резултатите од нивното практично изведување. Од тоа станало јасно дека нешто не е во ред со начинот на решавање на тој вид задачи. Долго време интересот и работата на значаен број математичари бил насочен кон решавање на различни конкретни задачи во врска со игрите на среќа. При крајот на XIX и почетокот на XX век, развојот на природните науки, посебно на физиката и биологијата, довел до сознание дека слични во основа задачи се јавуваат и при набљудувањето на природните појави и процеси. Тоа предизвикало забрзан развој на Теоријата на веројатност и нејзина примена во други области на науката.

Теориските основи на оваа дисциплина, нејзините аксиоми, ги поставил во 1933 година познатиот математичар А. Колмогоров. Оттогаш, Теоријата на веројатност се развива како прва математичка дисциплина, поттикната покрај другото и од потребите на различни области од науката и практиката.

Теоријата на веројатност е математичка дисциплина во која се изградени модели на т.н. случајни појави и процеси и во која се изучуваат поимите и законитостите во врска со нив.

1. ЕКСПЕРИМЕНТИ И НАСТАНИ

Нека е дадено некое множество услови S. Секоја реализација на ова множество услови ќе ја наречеме **опит** или **експеримент** S. Ваквото определување на поимот опит е доволно општо за да одговара, како на пасивните експерименти (кои се одвиваат без влијание и можност на влијание од страна на човекот), така и на активните (кои човекот ги организира и спроведува со одредена цел).

Секој резултат од експериментот S го нарекуваме **настан** што е во врска со експериментот S. Настаните ги означуваме со големите печатни букви од почетокот на латиницата: A, B, C, ... Кратко ќе пишуваме н.A, н.B итн. Според определеноста на настаните со условите S разликуваме два типа на експерименти. Едни, кај кои што множеството услови **еднозначно** определува настан, и други, кај кои исходот не е еднозначно определен, т.е. постојат **повеќе различни исходи**. Од вториот вид се, на пример, експериментите: фрлање монета (или коцка) на рамна површина, проверка на исправноста на 100 производи, набљудување на векот на некој механизам (биолошки или технички), набљудувања од областа на метеорологијата и други. Кај секој од наведените експерименти не можеме со сигурност да кажеме што точно ќе се случи. Навистина, при фрлање монета, сè додека монетата не падне на подлогата, не можеме да кажеме дали ќе биде број или грб. При контролата на 100 производи не можеме со сигурност однапред да тврдиме колку неисправни производи ќе има: 0, 1, 2, ... итн. Исто така не може со сигурност да се предвиди колку време ќе работи некоја машина, колку ќе живее одреден човек, или колкава ќе биде температурата (на воздухот), притисокот и влажноста на одреден локалитет и во одредено време.

Значи, кај експериментите од овој тип појавувањето на настаните е **случајно и не може однапред да се предвиди,**

При подлабоко проучување на природните и општествените појави се забележува дека постојат сосема малку закони што се строго детерминирани и дека најголем дел од експериментите имаат елементи на случајност.

Сепак и кај експериментите со нееднозначно определени исходи, се забележува одредена законитост. На пример: нека е A настанот - „падна грб" при фрлање монета на рамна површина. При едно фрлање на монета не можеме да кажеме кој од двата можни настани ќе се појави. Меѓутоа, ако експериментот го повториме поголем број пати, тогаш со голема сигурност можеме да тврдиме дека приближно половината од фрлањата ќе го имаат како исход н.A. Ако со n го означиме бројот на изведени експерименти, а со $n(A)$ бројот на оние во коишто се појавил настанот A, тогаш познато е дека $\frac{n(A)}{n} \approx 0,5$. Уште нешто повеќе, утврдено е дека, со зголемување на бројот на изведени фрлања на монета бројот $\frac{n(A)}{n}$ сѐ помалку се разликува од 0,5. Така, иако при едно фрлање не може да се предвиди што ќе се случи, за голем број експерименти **постои законитост** во појавувањето на настанот A **и еден број** 0,5, кој е **објективна мерка** на можноста за појавување на настанот A. Законитост од овој тип постои за голем број експерименти и настани во врска со нив. Нека опитот S е повторен n пати и со $n(A)$ да го означиме бројот на опити во кои се појавил н.A. Бројот $\frac{n(A)}{n}$ го нарекуваме **релативна зачестеност** (**фреквенција**) на н.A во n експерименти.

Настанот A во врска со опитот S го нарекуваме случаен настан (с.н.A) ако се исполнети следниве услови:

1°. Опитот S може да се повтори колку што сакаме пати (голем број пати);

2°. Релативните зачестености на настанот A, на секоја од повеќе изведени серии опити S, се броеви кои незначително се разликуваат меѓу себе (т.е. приближно се еднакви).

Релативната фреквенција $\frac{n(A)}{n}$ во една серија опити е **приближна објективна** мерка на можноста за појавување на с.н.A. Меѓутоа, релативните фреквенции за различни серии опити се сепак различни. Затоа, се избира еден реален број, во чија околина се натрупуваат релативните зачестености на настанот A, што се означува со $P(A)$ и се нарекува **веројатност на настанот** A. Ова определување на веројатноста е т.н. **статистичка веројатност**.

Својството 2° на случајните настани се нарекува **статистичка стабилност** (непроменливост) на релативните фреквенции. Условот 1° пак, овозможува проверка на условот 2°.

Во задачите од практиката, случајни настани се настаните за кои се исполнети условите 1° и 2°, а нивните веројатности се определуваат, во општ случај, со статистички методи.

На крајот да разгледаме два специјални настани за секој експеримент S.

Сигурен настан за експериментот S е настанот што се појавува при секоја реализација на S. **Невозможен настан** за експериментот S е настанот што никогаш не се појавува при реализација на S.

Ако се изведени n опити S, тогаш, според определувањето, сигурниот настан ќе се појави n пати, а невозможниот ниеднаш, т.е. 0 пати. Значи, релативната зачестеност на сигурниот настан е 1, а на невозможниот 0. Тоа важи за секоја серија од произволен број експерименти S. Според тоа, за сигурниот настан и невозможниот настан се исполнети условите 1° и 2°, т.е. тие се случајни настани.

2. ПОЛЕ НА СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ

Низ примери на експерименти и настани во врска со нив, и обопштување ќе го опишеме множеството на случајни настани и ќе ги определиме операциите и релациите меѓу нив.

А. МНОЖЕСТВО ЕЛЕМЕНТАРНИ НАСТАНИ. СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ

Ќе разгледаме неколку експерименти и множества на поодделни, поединечни и различни исходи – настани во врска со нив.

1. **експеримент**: Фрлање коцка за играње; **настани**: на горната страна од коцката има 1 точка, 2, 3, 4, 5 и 6 точки.

2. **експеримент**: Набљудување на бројот на исправни производи до појавувањето на првиот неисправен; **настани**: произведени се 0 исправни (т.е. првиот производ е неисправен), произведен е 1 исправен, 2 исправни, ... итн. Теориски е можно постојано да се добиваат исправни производи.

3. **експеримент**: Набљудување на времето на непрекината работа (векот) на некоја машина (живо суштество); **настани**: машината (суштеството) „живее" време t, каде што t е реален број од интервалот $[0,T]$, а T е максималниот „век" на набљудуваната машина (суштество)

Во наведените примери забележуваме дека множествата настани се разликуваат меѓу себе дури и ако ги изоставиме својствата што следуваат од природата на објектите со кои се експериментира. Како множества тие се разликуваат според бројот на елементите. Множеството на настани во врска со првиот експеримент е конечно, во врска со вториот бесконечно – пребројливо, а сите различни поодделни исходи на третиот експеримент се определени со сите реални броеви од интервалот $[0,T]$, а тоа е бесконечно непребројливо множество.

Во разгледаните примери на експерименти, наброените настани го имаат својството, при секое изведување на експериментот да се појавува еден и само еден од нив. И воопшто, за секој експеримент, што можеме да го замислиме или изведеме, постои едно множество на поединечни настани, со особината при секое изведување на тој експеримент да се појавува еден и само еден од тие настани.

Множеството на сите поединечни логични исходи (настани) во врска со еден експеримент го нарекуваме **множество на елементарни настани.** Ќе го означуваме со Ω, а неговите елементи - елементарните настани ќе ги означуваме со ω и индекс или друг знак за разликување на исходите.

За нашите примери ги добиваме следниве множества на елементарни настани:

1. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, каде што ω_i е настанот: на горната страна на коцката има i точки ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

2. $\Omega = \{\omega_0, \dots, \omega_n, \dots\}$, ω_n - произведени се n исправни производи до добивањето на прв неисправен, $n\in\{0\}\cup\mathbb{N}$.

3. $\Omega = \{\omega_t\colon t\in[0,T]\}$, или $\Omega = \{t;\ t\in\mathbb{R},\ t\in[0,T]\} = [0,T]$ (ω_t - машината работи непрекинато време t).

За секој од наведените експерименти да разгледаме и настани што не се елементарни. Така, во врска со првиот експеримент, може да се набљудуваат настаните: A - „ падна" парен број на точки, B - „падна" број на точки делив со 3, C - „падна" непарен број на точки и др. Настанот A ќе се појави ако „паднат" 2 точки, или 4 точки или „паднат" 6 точки. Значи, настанот A е определен со множеството елементарни настани (ел.н.) $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. Аналогно, на настанот B му соодветствува множеството $\{\omega_3, \omega_6\}$, а на настанот C множеството $\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$.

Во врска со вториот опит можеме да ги воочиме настаните: A - произведени се најмалку 10 исправни пред појавувањето на неисправен производ, B - произведени се не повеќе од 15 исправни, C - бројот на исправни производи е меѓу 5 и 10. Соодветните множества на елементарни настани ќе бидат:

$$\{\omega_{10},\omega_{11},\dots\},\quad \{\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_{15}\} \text{ и } \{\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8,\omega_9,\omega_{10}\}.$$

Во врска со третиот експеримент можат да се појават, на пример, настаните: M - машината работи најмногу 1 000 часа, Q - машината работи најмалку 200 часа ($T \geq 200$), K - векот на машината е меѓу 500 и 1 000 часа ($T \geq 1\,000$). Множествата елементарни настани се определени со: [0, 1 000], [200. T] и [500, 1 000] соодветно.

Во примерите, а и за секој експеримент што може да се замисли или изведе, воочуваме дека, секој настан што е во врска со одреден опит е определен со некое подмножество на множеството Ω на елементарни настани.

Затоа, **случајните настани** ги идентификуваме со множества - **подмножества** на соодветното множество Ω.

Ќе велиме дека се појавил настанот A, ако се појавил некој од елементарните настани со кои тој е определен.

Бидејќи при секое изведување на еден експеримент се појавува еден од елементарните настани, а сите се елементи на Ω, најприродно е сигурниот настан да се означува со Ω. На невозможниот настан му соодветствува празно множество $\varnothing$, затоа што не постои ни еден ел.н. што доведува до негово појавување.

Б. ОПЕРАЦИИ И РЕЛАЦИИ ВО МНОЖЕСТВОТО НА СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ

Сите настани што ќе ги разгледуваме во овој наслов ќе сметаме дека се во врска со ист експеримент, т.е. дека се подмножества на исто множество Ω на елементарни настани. Така Ω се јавува во улога на т.н. универзално множество.

За настанот A велиме дека го повлекува настанот B и пишуваме $A \subset B$, ако секогаш кога ќе се појави настанот A се појавува и настанот B. На пример, настанот „ паднаа две точки" го повлекува настанот „паднаа парен број точки" при експериментот фрлање коцка за играње.

Ако настанот A го повлекува настанот B и настанот B го повлекува настанот A, тогаш велиме дека настаните A и B се **еднакви** и пишуваме $A = B$.

Сума $A \cup B$ на настаните A и B е настанот, што се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појави барем еден од тие настани. Тој е определен со множеството елементарни настани, кое што е унија на множествата ел.н. за настанот A и настанот B.

Производ $A \cap B$ на настаните A и B е настанот, што се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појават и двата настани. Тој е определен со множеството елементарни настани, што истовремено ги определуваат и двата настани, т.е. со пресекот на множеството ел.н. за A и множеството ел.н. за B.

Пример 1. *Нека се A, B и C настаните: „падна" парен број на точки, „падна" број на точки делив со три и „падна" непарен број точки, соодветно во опитот фрлање коцка за играње.* Сума на настаните A и B е настанот – „ падна" број на точки делив со 2 или делив со 3, што е определен со множество ел.н. $\{\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_6\}$, а тоа е токму унија намножеството ел.н. за A и B. Сума на настаните A и C е настанот – „падна" парен број на точки или непарен број на точки, а тоа е сигурен настан за овој експеримент, т.е. $A\cup C = \Omega$.

Производ на настаните A и B е настанот – „падна" број на точки делив истовремено со 2 и 3, а тоа значи дека „падналe" 6 точки, т.е. $A\cap B = \{\omega_6\}$. (Производот пак на настаните A и C е очигледно невозможен настан, т.е. $A\cap C = \emptyset$.) Δ

Настаните A и B коишто не можат истовремено да се појават ги нарекуваме **дисјунктни настани** или **несогласни.** Нивниот производ е невозможен настан ($\emptyset$). Вообичаено е сумата на дисјунктни настани да се означува со обичен знак за собирање „+". Така, $A+B$ значи $A\cup B$ кога важи $A\cap B = \emptyset$.

Пример 2. *Монета се фрла четири пати на рамна површина. Со A_i да го означиме настанот „грб падна i пати", $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Настаните A_i се по парови дисјунктни, т.е. $A_i\cap A_j = \emptyset$, за $i\neq j$. Настанот B – „грб падна најмалку трипати се претставува на следниов начин:*

$$B = A_3+A_4,$$

бидејќи B ќе се појави ако грб падне точно трипати, или точно четирипати, т.е. ако се појави барем еден од настаните A_3 и A_4.

Разликата $A\setminus B$ на настаните A и B е настанот што се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појави н.A, а нема да се појави н.B. Нему му соодветствува множеството на ел.н. што го определуваат н.A, но не го определуваат н.B, т.е. множеството разлика на множествата на ел.н. за A и B.

Спротивен настан на настанот A е настанот $\Omega\setminus A$, што ќе го означуваме $\bar{A}$. Тој се појавува секогаш кога не ќе се појави настанот A. Множеството на елементарни настани на $\bar{A}$ е всушност комплемент на множеството ел.н. на A во однос на Ω. За кој било настан A и нему спротивниот $\bar{A}$ важи: $A\cap\bar{A} = \emptyset$ и $A+\bar{A} = \Omega$.

Пример 3. *Нека A, B и C се настаните од пример 1., во врска со опитот фрлање коцка за играње. Настанот $A\setminus B$ е нас-*

танот - падна парен број на точки, но не делив со 3, што е определен со множеството ел.н. $\{\omega_2,\omega_4\}$. $C\setminus B$ *пак, е настанот - падна непарен број на точки, но не делив со 3, т.е.* $C\setminus B = \{\omega_1,\omega_5\}$. *Настаните* A *и* C *се заемно спротивни, т.е.* $\overline{A} = C$ *и* $\overline{C} = A$. △

Нека A_1, A_2, ..., A_n се случајни настани.

Сума на настаните A_1, A_2, ..., A_n е настанот што се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појави барем еден од настаните A_1, A_2, ..., A_n. Го означуваме со $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$ и соодветното множество на елементарните настани е:

$$A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n = \{\omega\,|\,\exists i,\ i=1,2,\ldots,n,\ \omega\in A_i\}.$$

Производ на настаните A_1, A_2, ..., A_n е настанот што се појавува тогаш и само тогаш кога истовремено ќе се појават настаните A_1, A_2, ..., A_n. Го означуваме со $A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n$ и соодветното множество на елементарни настани е:

$$A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n = \{\omega\,|\,\exists i,\ i=1,2,\ldots,n,\ \omega\in A_i\}.$$

Производот на настани ќе го означуваме и без симболот $\cap$, т.е. $A_1\cdot A_2\cdots A_n$.

Нека A_1, A_2, ..., A_n се по парови дисјунктни настани во врска со ист опит S, т.е.

$$A_i\subset\Omega,\ \ i=1,2,\ldots,n \text{ и } A_i\cap A_j=\varnothing,\ \ i\neq j,\ \ i,j=\overline{1,n}.$$

Ако е $M = A_1+A_2+\ldots+A_n$, тогаш велиме дека $A_1,A_2,\ldots,A_n$ е **дисјунктно разложување** на настанот M, или дека M е **дисјунктна сума** на настаните A_1, A_2, ..., A_n. Кратко ќе пишуваме:

$$M = \sum_{k=1}^{n} A_k.$$

Пример 4. *Се фрла монета се́ додека првпат падне грб. Со* A_n *да го означиме настанот - грб падна во* n*-тото по ред фрлање,* $n = 1,2,\ldots$. *Со помош на настаните* A_n *да се претстават настаните:* B_{10} *- експериментот заврши по 10 фрлања на монетата и* D *- експериментот ќе заврши по најмалку 10 фрлања на монетата.*

Решение. Настанот B_{10} ќе се појави, ако во првите девет фрлања паѓа број, а во десеттото падне грб. Тоа значи дека се појавиле истовремено настаните $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ..., $\overline{A}_9$ и A_{10}, т.е.

$$B_{10} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_4 \cdot \overline{A}_5 \cdot \overline{A}_6 \cdot \overline{A}_7 \cdot \overline{A}_8 \cdot \overline{A}_9 \cdot A_{10}.$$

Настанот D ќе се појави ако експериментот заврши по едно фрлање, или по две фрлања, ..., или по десет фрлања, т.е. ако „грб" падне првпат по првото, или второто, ..., или десеттото фрлање. Затоа:

$$D = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_{10}. \quad \Delta$$

[** Множеството настани A_n, $n = 1,2,\ldots$ од тукушто разгледаниот пример е бесконечно-преброиво, така што можеме да определиме и бесконечно-преброива сума и производ на настани. Таква потреба се јавува, на пример, ако треба со помош на настаните B_n, $n\in\mathbb{N}$ да се претстави настанот C – експериментот заврши, или настанот E – експериментот нема да заврши.

Ако е A_1, A_2, ..., бесконечно-преброива низа настани, тогаш нивната сума е настанот:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \mid \exists n,\ n\in\mathbb{N},\ \omega\in A_n\}.$$

Производот на настаните A_1, A_2, ..., е определен со множеството на елементарни настани:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \mid \forall n,\ n\in\mathbb{N},\ \omega\in A_n\}.$$

Пример 5. *Настанот C – експериментот заврши ќе се појави ако во некое од фрлањата на динар падне грб, т.е. ако се појави барем еден од настаните B_1, B_2, ..., што ги има бесконечно многу (теориски постои можност бесконечно многу пати да се фрла динар додека се добие грб). Затоа:*

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Настанот E – експериментот не заврши ќе се појави ако во секое фрлање падне број, т.е. се појави настанот $\overline{A}_n$ за $n=1,2,\ldots$ Затоа:

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n. \quad \Delta$$

**]

Множеството на сите случајни настани во врска со еден експеримент S ќе го означуваме со $\mathcal{F}$. Во множеството $\mathcal{F}$ се дефинирани сума, производ и разлика на настани, и тоа уште ги содржи сигурниот и невозможниот настан.

Сите особини и формули, што важат за операциите со множества, важат и за соодветните операции со случајни настани. Затоа, нема да ги наведеме, а ќе ги користиме, кога е потребно, како познати од досегашното изучување на математиката.

Пример 6. *Опитот се состои во петкратно фрлање на монета ~~едно по~~ друго. Со* A_i *да го означиме настанот: „број падна i-пати", $i=0,1,2,3,4,5$. Настаните A_i се дисјунктни и нивната сума го дава сигурниот настан, т.е. $A_0+A_1+A_2+A_3+A_4+A_5=\Omega$. Значи, настаните A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5 претставуваат едно дисјунктно разложување на сигурниот настан. Ако со 1 го регистрираме паѓањето на број, а со 0 паѓањето на грб, тогаш секој елементарен настан е една подредена петка од 0 и 1. Затоа е $\Omega = \{0,\ 1\}^5$. Подмножествата на елементарни настани, што ги определуваат настаните A_i, $i = 0,1,2,3,4,5$ се:*

$$A_0 = \{(0,0,0,0,0)\},$$

$$A_1 = \{(00001),(00010),(00100),(01000),(10000)\}$$

$$A_2 = \{(00011),(00101),(01001),(10001),(00110),$$
$$(01010),(10010),(01100),(10100),(11000)\},$$

$$A_3 = \{(00111),(01011),(10011),(01101),(10101),$$
$$(11001),(01110),(10110),(11010),(11100)\},$$

$$A_4 = \{(01111),(10111),(11011),(11101),(11110)\},$$

$2^5 = 32$

$$A_5 = \{(11111)\}.$$

Да го означиме со B_k настанот „број првпат падна во k-тото по ред фрлање", $k=1,2,3,4,5$, а со B_6 настанот: „број не падна". Настаните B_k, $k=\overline{1,6}$ се дисјунктни по парови и при секое изведување на експериментот се јавува еден од нив, т.е. $B_1+B_2+B_3+B_4+B_5+B_6 = \Omega$. Заклучуваме дека и овие настани определуваат едно дисјунктно разложување на сигурниот настан. Соодветните подмножества на елементарни настани се:

$$B_1 = \{(10000),(11000),(10100),(10010),(10001),$$
$$(11100),(11010),(11001),(10110),(10101),$$
$$(10011),(11110),(11101),(11011),(10111),$$
$$(11111)\},$$

$B_2 = \{(01000),(01100),(01010),(01001),(01110),$
$(01101),(01011),(01111)\},$

$B_3 = \{(00100),(00110),(00101),(00111)\},$

$B_4 = \{(00010),(00011)\}.$

$B_5 = \{(00001)\},$

$B_6 = \{(00000)\}.$ Δ

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ

1. *На маса се фрлаат коцка, монета од 1 динар и монета од 5 динари, и се забележува вредноста на горната страна на трите објекти. Со множество да се опишат:*

а) *сите можни исходи;*
б) *настанот A: збирот на вредностите е парен;*
в) *настанот B: на сите објекти има непарна вредност;*
г) *настанот C: збирот на вредностите од сите објекти е делив со 3, но не е парен.*

Колкав е бројот на елементите во секое од добиените множества? Каков е односот меѓу настаните?

Решение: *S: фрлањето коцка, монета од 1 динар, монета од 5 динари е експеримент што може да се повторува неограничен број пати.*

Притоа, на коцката се појавува една од шесте можности: се појавиле 1, 2, 3, 4, 5 или 6 точки, а монетите можат да се свртат на страна со број, или на страна со грб.

а) $\Omega = \{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_1\in\{1,2,3,4,5,6\},x_2\in\{1,г\},x_2\in\{1,г\}\}.$

$\Omega = \{(1,1,5),(1,1,г),(1,г,5),(1,г,г),(2,1,5),(2,1,г),$
$(2,г,5),(2,г,г),(3,1,5),(3,1,г),(3,г,5),(3,г,г),$
$(4,1,5),(4,1,г),(4,г,5),(4,г,г),(5,1,5),(5,1,г),$
$(5,г,5),(5,г,г),(6,1,5),(6,1,г),(6,г,5),(6,г,г)\}$

$|\Omega| = 6\cdot 2\cdot 2 = 24;$

$A=\{(1,1,г),(1,г,5),(3,1,г),(3,г,5),(5,1,г),(5,г,5),$
$(2,1,5),(4,1,5),(6,1,5),(2,г,г),(4,г,г),(6,г,г)\}$

$|A| = 12;$

в) *За да се појави на сите три објекти непарна вредност, двете монети треба да бидат свртени на страната со број:*

$B = \{(1,1,5),(3,1,5),(5,1,5)\}$ 1, 5

$|B| = 3$

$B \cap A = \varnothing$, *A и B се дисјунктни настани.* Г

г) $C = \{(2,1,г),(3,г,г),(3,1,5),(4,г,5)\}$

$|C| = 4$

$C \cap A = \varnothing$, *A и C се дисјунктни настани.*

$C \cap B = \{(3,1,5)\}$

2. *Четворица стрелци гаѓаат по еднаш иста цел. Со помош на нивните резултати да се опишат следниве настани:*

а) A: целта е погодена;
б) B: целта е промашена;
в) C: целта ја погодил само првиот;
г) D: целта е само еднаш погодена;
д) E: првиот стрелец ја погодил целта;
ѓ) F: првиот и вториот стрелец постигнале спротивни резултати.

Решение. Експериментот што се набљудува е „гаѓање цел". Можни се исходите:

S_i – i-от стрелец ја погодил целта; $i=1,2,3,4$.

$\overline{S}_i$ – i-от стрелец ја промашил целта; $i=1,2,3,4$.

а) A: целта ја погодил барем еден од стрелците:

$$A = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4.$$

б) B: во сите четири гаѓања е постигнато промашување:

$$B = \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3\overline{S}_4.$$

Настаните A и B се дисјунктни и спротивни:

$$AB = \varnothing,\ A = \overline{B},\ \overline{A} = B,\ A+B = \Omega.$$

в) C: првиот стрелец ја погодил целта, а вториот, третиот и четвртиот ја промашиле:

$$C = S_1\overline{S}_2\overline{S}_3\overline{S}_4.$$

г) D: целта ја погодил или само првиот, или само вториот, или само третиот, или само четвртиот стрелец:

$$D = S_1\overline{S}_2\overline{S}_3\overline{S}_4 + \overline{S}_1S_2\overline{S}_3\overline{S}_4 + \overline{S}_1\overline{S}_2S_3\overline{S}_4 + \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3S_4.$$

д) E: првиот ја погодил целта, а останатите тројца стрелци постигнале погодок или промамашиле:

$$E = (S_1S_2S_3S_4)\cup(S_1S_2S_3\bar{S}_4)\cup(S_1S_2\bar{S}_3S_4)\cup(S_1\bar{S}_2S_3S_4)\cup$$
$$\cup(S_1S_2\bar{S}_3\bar{S}_4)\cup(S_1\bar{S}_2S_3\bar{S}_4)\cup(S_1\bar{S}_2\bar{S}_3S_4)\cup(S_1\bar{S}_2\bar{S}_3\bar{S}_4)$$
$$E = S_1.$$

ѓ) F: првиот погодил, а вториот промашил или првиот промашил, а вториот погодил:

$$F = S_1\bar{S}_2\cup\bar{S}_1S_2.$$

ПЕТ ЗАДАЧИ:

1. На маса се фрлаат три различни коцки. Да се опише:

а) множеството елементарни настани;

б) A: збирот на точките на трите коцки е парен;

в) B: на првите две коцки паднала парна вредност, а на третата непарна;

г) C: на секоја од коцките се појавила различна вредност;

д) D: вредноста на првите две коцки се совпаѓа и е за барем две единици поголема од вредноста на третата;

ѓ) E: на првите две коцки паднала иста вредност;

е) F: збирот на вредностите на првите две коцки е непарен;

ж) G: паднала шестка.

2. Колку елементарни настани содржи секое од множествата опишани во претходната задача?

(216,108,27,120,10,36,168,91)

3. Работна организација има 100 вработени од кои 50 знаат англиски, 40 руски, 25 француски, 20 и англиски и руски, 20 само англиски, 15 само руски, а 5 само француски. Ако познавањето на секој од трите јазици е исход:

а) да се опише множеството елементарни настани;

б) множеството елементарни настани да се претстави со помош на Венов дијаграм;

в) да се утврди колку од вработените ги задоволуваат условите на секој од елементарните настани.

($ARF \to 5$, $A\bar{R}F \to 10$, $\bar{A}RF \to 5$, $AR\bar{F} \to 15$, $\bar{A}\bar{R}F \to 5$,
$\bar{A}R\bar{F} \to 15$, $A\bar{R}\bar{F} \to 20$, $\bar{A}\bar{R}\bar{F} \to 25$).

4. Од Р.О. од задачата 3 се избрани двајца претставници. При колку од можните избори:

а) A: двајцата знаат англиски;
б) B: двајцата знаат само руски;
в) C: барем еден знае англиски;
г) D: ниту еден не знае француски;
д) E: ниту еден не знае само француски.

(1225,105,3725,2775,4465)

5. Од истата Р.О. се избира петчлена делегација. Поколку од потенцијалните делегации:

а) A: само еден знае англиски;
б) B: барем еден знае англиски;
в) C: повеќе од еден знае англиски;
г) D: барем еден знае повеќе од еден јазик;
д) E: секој знае барем два јазика;
ѓ) F: барем еден не знае ниту еден од јазиците;
е) G: четворица знаат повеќе од еден јазик;
ж) H: барем четворица знаат повеќе од еден јазик.

(11515000,73168760,63772520,74962888,
324632,75234390,3403400,6141408).

3. ДЕФИНИЦИЈА НА ВЕРОЈАТНОСТ И СВОЈСТВА

Во претходните лекции беше дадено математичко претставување на произволен опит S и фамилијата на случајни настани во врска со него. Порано пак, установуваме дека за секој случаен настан A може да се определи број $P(A)$, којшто е објективна мерка на можноста за појавување на тој настан. Тоа значи дека постои пресликување од класата $\mathcal{F}$ на случајни настани во множеството на реалните броеви што го нарековме веројатност.

При определувањето на основните својства што треба да ги има функцијата веројатност, дефинирана на фамилијата $\mathcal{F}$ на случајни настани, ќе појдеме од статистичката веројатност (како општ начин за оценка на веројатноста на конкретен настан).

За секој случаен настан A, бројот $n(A)$ на експерименти во кои тој се појавил е ненегативен, заради што релативната зачестеност секогаш е ненегативна, т.е. $\frac{n(A)}{n} \geq 0$. Од ова следува дека:

$$\forall A \in \mathcal{F}, \ P(A) \geq 0. \tag{1}$$

Релативната зачестеност на сигурниот настан е $\frac{n(\Omega)}{n} = \frac{n}{n} = 1$, од што следува:

$$P(\Omega) = 1 \tag{2}$$

Нека се A и B два случајни настани, во врска со ист експеримент S, што не можат истовремено да се појават ($A \cap B = \emptyset$). Во тој случај, бројот на експерименти, од изведени n, во коишто се појавил настанот $A+B$, е еднаков на бројот на експерименти во коишто се појавил само н. A и бројот на експерименти во коишто се појавил само н. B. Така добиваме:

$$\frac{n(A+B)}{n} = \frac{n(A)+n(B)}{n} = \frac{n(A)}{n} + \frac{n(B)}{n}.$$

Истото равенство мора да важи и за соодветните веројатности, а тоа е третото основно својство на веројатноста:

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \tag{3}$$

Дефиниција. *Пресликувањето* $P: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *е веројатност, ако*

P.1. $\forall A \in \mathcal{F}, \ P(A) \geq 0;$
P.2. $P(\Omega) = 1;$
P.3. $P(A+B) = P(A) + P(B).$ □

Тројката $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *се нарекува* **простор на веројатност.**

За да се реши една конкретна задача од областа на Теоријата на веројатноста потребно е, пред сѐ, да се определи соодветниот простор на веројатност.

Пример 1. *Наједноставен простор на веројатност е тривијалниот, чија класа на случајни настани* $\mathcal{F}$ *се состои од* Ω *и* $\emptyset$ – $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$. *Тој го претставува граничниот случај на експеримент со еднозначно определен исход.*

Навистина во тој случај $\mathcal{F}$ е затворена во однос на операциите сума, производ и разлика на настаните од кои што се состои, а веројатноста е определена со $P(\Omega) = 1$ и $P(\emptyset) = 0$. △

Од дефиницијата на веројатноста следуваат низа други својства и формули за пресметување на веројатност на сложени настани.

Теорема 1. *Веројатноста* P *ги има следниве својства:*

а) $P(\emptyset) = 0;$
б) ако $A \subset B$ *тогаш* $P(A) \leq P(B);$
в) $\forall A \in \mathcal{F}, \ 0 \leq P(A) \leq 1.$

Доказ: а) $\Omega = \Omega+\varnothing$, од $P.3$ добиваме $P(\Omega) = P(\Omega) + P(\varnothing)$, а потоа, со примена на $P.2$, $1 = 1+P(\varnothing)$, следува дека $P(\varnothing)=0$.

Интуитивно е јасно дека веројатноста на неможниот настан е секогаш еднаква на нула, а ние тука покажавме како тоа следува од дефиницијата на веројатноста.

б) Користејќи го настанот A ќе го претставиме н.B како дисјунктна сума на два настани на следниов начин:

$$B = A + B\cap\overline{A}.$$

Со примена на $P.3$ добиваме:

$$P(B) = P(A) + P(B\cap\overline{A}),$$

а од $P.1$, т.е. $P(B\cap\overline{A}) \geq 0$ следува

$$P(B) \geq P(A).$$

Ако важи стриктно неравенство, тогаш велиме дека настанот B е **поверојатен** од настанот A.

в) За секој сл.н.A важи $\varnothing\subset A\subset\Omega$. Користејќи го пред малку докажаното неравенство под б), добиваме:

$$P(\varnothing) \leq P(A) \leq P(\Omega),$$

а од докажаното под а) и $P.2$ следува

$$0 \leq P(A) \leq 1. \quad \square$$

Точноста на овие неравенства се утврдува и со статистичката веројатност (имено $0 \leq \dfrac{n(A)}{n} \leq 1$).

Теорема 2. *Веројатноста на спротивниот настан $\overline{A}$ на настанот A е:*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Доказ: $\forall A\in\mathcal{F}$, $A + \overline{A} = \Omega$.

Користејќи го $P.3$, а потоа $P.2$. добиваме:

$$P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega) \quad \text{и} \quad P(A) + P(\overline{A}) = 1,$$

од што следува точноста на формулата за пресметување веројатност на спротивен настан. $\square$

Теорема 3. *За веројатноста на сума од два било кои настани A и B важи:*

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B).$$

Доказ: Ќе ги претставиме настаните $A\cup B$ и B како дисјунктни суми на настани, на следниов начин (сл. 1):

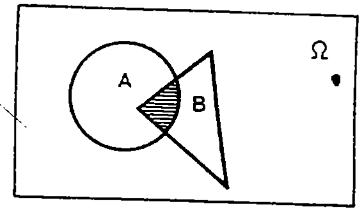
$$A\cup B = A+\overline{A}\cap B, \quad B = A\cap B+\overline{A}\cap B.$$

За нивните веројатности добиваме:

$P(A\cup B) = P(A)+P(\overline{A}\cap B)$ и

$P(B) = P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$.

Ако од првата равенка ја извадиме втората ја добиваме формулата што требаше да се изведе. □



Сл. 1

Теорема 4. *Ако е* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *множество настани, дисјунктни по парови, т.е.* $A_i\cap A_j = \emptyset$, $i\neq j$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, *тогаш*

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Доказ: Доказот ќе го изведеме со потполна математичка индукција по (бројот на собирци) n.

За n=2 формулата е точна по дефиниција.

(И.П): Да претпоставиме дека е таа точна за n=к.

Нека се $A_1,\ldots,A_k,A_{k+1}$ случајни настани дисјунктни по парови. Ако означиме:

$$B = \sum_{i=1}^{n} A_i, \text{ тогаш } \sum_{i=1}^{k+1} A_i = \sum_{i=1}^{k} A_i + A_{k+1} = B + A_{k+1}.$$

Настаните B и A_{k+1} се дисјунктни, имено:

$$B\cap A_{k+1} = \left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right)\cap A_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} (A_i\cap A_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} \emptyset = \emptyset.$$

Затоа:

$$P\left(\sum_{i=1}^{k+1} A_i\right) = P(B+A_{k+1}) \overset{\text{деф}}{=\!=} P(B)+P(A_{k+1}) =$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right)+P(A_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)+P(A_{k+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i). \quad \square$$

Може да се изведе формула и за веројатноста на сума на настани $A_1, A_2, \ldots, A_n$ што не се дисјунктни, која што всушност претставува воопштување на формулата за два настани од Т.3. Таа гласи:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i<j \\ i=1}}^{n-1} P(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i<j<k \\ i=1}}^{n-2} P(A_i \cap A_j \cap A_k) -$$

$$- \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

Точноста на формулата се докажува со помош на математичка индукција.

Пример 2. *Нешто посложен простор на веројатност се добива кога класата $\mathcal{F}$ на случајни настани покрај Ω и $\emptyset$ ги содржи само уште н.A и н.$\overline{A}$. Лесно се проверува дека $\mathcal{F}$ е затворена во однос на воведените операции со настани. Веројатноста, во овој случај, може едноставно да се дефинира, со избор на број p, $0<p<1$, на следниов начин: $P(A) = p$, од што следува $P(\overline{A}) = 1-p$. Ваков простор на веројатност се добива кога во изведениот експеримент нé интересира само појавувањето на еден настан. Од тој вид се на пример експериментите: контрола на производи со настан - производот е дефектен, фрлање коцка за играње со настан - падна парен број точки итн.*

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ

1. *а) Да се пресмета $P(A)$, ако $P(AB)=0,72$ и $P(A\overline{B})=0,18$;*

б) Да се пресмета $P(C\overline{D})$, ако $P(D)=b$, $P(C \cup D)=c$;

в) Да се пресмета $P(\overline{C}\overline{D})$, ако $P(D)=b$, $P(C \cup D)=c$.

Решение:

а) Настанот A може да се претстави како дисјунктна сума на два настани, на следниов начин:

$$A = A\Omega = A(B+\overline{B}) = AB + A\overline{B}.$$

Затоа:

$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}) = 0,9.$$

б) Настанот $C \cup D$ може да се претстави како дисјунктна сума на два настани, на следниов начин:

$$C \cup D = D + C\overline{D}.$$

$P(C\cup D) = P(D) + P(C\overline{D})$

$P(C\overline{D}) = c-b.$

в) Согласно Де Моргановите закони имаме дека:

$\overline{C\cup D} = \overline{C}\cap\overline{D},$

заради што:

$P(\overline{C\cup D}) = P(\overline{C}\cap\overline{D}).$

Освен тоа

$P(\overline{C\cup D}) = 1 - P(C\cup D).$

Така, од двете равенства, добиваме дека:

$P(\overline{C}\cap\overline{D}) = 1 - c.$

2. Да се докаже дека

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

Доказ: Се поаѓа од теоремата 3.

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C) &= P((A\cup B)\cup C) = P(A\cup B) + P(C) - P((A\cup B)C) = \\ &= P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC\cup BC) = \\ &= P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-[P(AC)+P(BC)-P((AC)(BC))] \\ P(A\cup B\cup C) &= P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).\end{aligned}$$

ПЕТ ЗАДАЧИ:

1. A и B се два произволни настани во врска со ист експеримент. Да се пресмета $P(AB)$, ако:

а) $P(A) = 0,5,\ P(B) = 0,5,\ P(A\cup B) = 0,75;$
б) $P(A) = a,\ P(A\backslash B) = b;$
в) $P(A) = a,\ P(B) = b,\ P(\overline{A}\overline{B}) = c.$

2. A, B и C се настани во врска со ист опит. Да се пресметаат:

а) $P(A);$
б) $P(ABC);$

ако $P(A\cup B) = a,\ P(A\cup C) = b,\ P(B\cup C) = c,\ P(AB) = d,$
$P(AC) = e,\ \ P(BC) = f$ и $A\cup B\cup C = \Omega.$

3. $P(\overline{A})=a,\ P(\overline{B})=b,\ P(\overline{C})=c,\ P(\overline{A}\overline{B})=d,\ P(\overline{A}\overline{C})=e,\ P(\overline{B}\overline{C})=f,$ $ABC=\varnothing$. Да се изрази $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$ како функција од a, b, c, d, e и f.

4: *Да се пресмета веројатноста дека настапил точно еден од настаните A, B и C, ако е познато дека:*

$$P(AB) = a,\ P(BC) = b,\ P(AC) = c,\ P(ABC) = d.$$

5. *По пат на математичка индукција по бројот на настаните да се докаже дека:*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = s_1 - s_2 + s_3 - \ldots + (-1)^{n-1} s_n,$$

каде

$$s_1 = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

$$s_2 = P(A_1A_2) + P(A_1A_3) + \ldots + P(A_1A_n) + \ldots + P(A_{n-1}A_n)$$

$$s_3 = P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_2A_4) + \ldots + P(A_{n-2}A_{n-1}A_n)$$

$$\vdots$$

$$s_n = P(A_1A_2A_3 \ldots A_n).$$

4. ДИСКРЕТЕН ПРОСТОР НА ВЕРОЈАТНОСТА

Ќе разгледаме две реализации на простор на веројатност, првата од кои се добива кога множеството елементарни настани е конечно, а втората е определена за бесконечно-преброиво множество елементарни настани.

А. КОНЕЧЕН ПРОСТОР НА ВЕРОЈАТНОСТА. КЛАСИЧНА ШЕМА

Нека имаме множество елементарни настани Ω кое се состои од конечен број елементи. Тоа значи дека, за некое $n \in \mathbb{N}$, Ω може да биде запишано на следниов начин: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Во тој случај класата $\mathcal{F}$ на сите случајни настани се состои од сите подмножества на Ω, т.е. е еднаква на партитивното множество на Ω.

За определување на функцијата - веројатност, во овој случај, се избираат n реални броеви

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,$$

такви што:

$$0 < p_i < 1,\ \ i = \overline{1,n},\ \ p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 \tag{1}$$

Ако случајниот настан A е определен со подмножество на елементарни настани:

$$\{\omega_{i1}, \ \dots, \ \omega_{ik}\},$$

тогаш

$$P(A) = p_{i_1} + \dots + p_{i_k} \tag{2}$$

Условот за збирот на броевите p_i во (1) и формулата (2) кратко ќе ги запишуваме на следниов начин:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \quad \text{и} \quad P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i .$$

Забележуваме дека броевите p_i, $i=\overline{1,n}$, всушност се веројатности на елементарните настани ($P(\omega_i) = p_i$).

Не е тешко да се покаже дека вака дефинираната бројна функција на класата случајни настани $\mathcal{F}$ е веројатност. Навистина:

1° $\forall A \in \mathcal{F}$, $P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i \geq 0$, бидејќи секое $p_i \geq 0$;

2° $P(\Omega) = \sum_{i:\omega_i \in \Omega} p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$;

3° $P(A+B) = \sum_{i:\omega_i \in A+B} p_i = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i + \sum_{i:\omega_i \in B} p_i =$

$= P(A) + P(B)$.

Посебно е значаен специјалниот случај:

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n,$$

кога од условот $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, се добива $p_i = \frac{1}{n}$, $i = \overline{1,n}$. Тогаш веројатностна случајниот настан A, што се состои од m елементарни настани е определена со:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{3}$$

Така добиениот простор на веројатност сенарекува класична шема, а соодветното определување на веројатноста - **класична или психолошка дефиниција на веројатност**. Ова е најстара позната дефиниција, која овозможува, во специјални случаи, да се определи веројатноста на случајни настани и без изведување на експерименти. Од начинот на кој е определена заклучуваме дека класичната дефиниција може да се користи само во случаи кога множеството елементарни настани е **конечно и не постојат објективни причини да сметаме дека некој елементарен настан може почесто да се појавува од друг**. Вообичаено е да се вели дека веројатноста на настанот A е количник на бројот m на **поволни случаи** за настанот A и бројот n на **сите можни случаи**.

Пример 1. *Страните на еден правилен тетраедар се нумерирани со броевите 1, 2, 3 и 4. Тетраедарот се фрла на рамна површина и се набљудува бројот на страната, со која тетраедарот лежи на рамнината. Да се определи веројатноста на настанот A – „падна" парен број, ако: а) тетраедарот е хомоген; б) можноста за „паѓање" на бројот k е пропорционална со k, $k=1,2,3,4$.*

Решение: Најнапред да го определиме просторот на веројатност во едниот и другиот случај. И во двата случаи множеството елементарни настани е конечно, $\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$, ω_k – падна бројот k. Класата на случајни настани се состои од сите подмножества на Ω, а нив ги има $2^4 = 16$.

$$\mathcal{F} = \{\emptyset,\{\omega_1\},\{\omega_2\},\{\omega_3\},\{\omega_4\}, \{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_1,\omega_3\},\{\omega_1,\omega_4\},$$
$$\{\omega_2,\omega_3\},\{\omega_2,\omega_4\},\{\omega_3,\omega_4\},\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\},\{\omega_1,\omega_2,\omega_4\},$$
$$\{\omega_1,\omega_3,\omega_4\},\{\omega_2,\omega_3,\omega_4\},\Omega\},$$

а настанот A е определен со:

$$A = \{\omega_2,\omega_4\}.$$

а) Кога тетраедарот е хомоген сите елементарни настани се еднакво можни, т.е. $p_1=p_2=p_3=p_4=\frac{1}{4}$. Затоа:

$$P(A) = \frac{2}{4} = 0,5.$$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

б) Во овој случај треба да определиме броеви p_1, p_2, p_3, p_4, такви што $p_1:p_2:p_3:p_4 = 1:2:3:4$ и $\sum_{k=1}^{4} p_k = 1$. Од пропорцијата следува $p_k = k\cdot c$, $k=1,2,3,4$, така што имаме:

$$c+2c+3c+4c = 1$$

$$c = 0,1$$

и

$$p_1=0,1, \ p_2=0,2, \ p_3= 0,3, \ p_4=0,4$$

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i = p_2+p_4 = 0,6. \quad \Delta$$

Пример 2. *Од 30 ученици на еден клас, меѓу кои има 12 девојчиња, на случаен начин се избира екипа од 6 ученика. Да се определи веројатноста на настаните, екипата има : A – точно три ученички, B – барем 5 ученички, C – само ученици (машки).*

Решение. Елементарен настан е секој избор на 6 ученици од 30, а нив ги има C_{30}^6.

C_{30}^6

а) $P(A) =$

$\frac{C_{12}^3 \cdot C_{18}^3}{C_{30}^6}$

а) $$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{C_{12}^3 \cdot C_{18}^3}{C_{30}^6};$$

б) Настанот B ќе се појави ако бидат избрани точно 5 или 6 ученички. Затоа:

б) $\frac{C_{12}^5 \cdot C_1 + C_{12}^6}{C_{30}^6}$

$$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{C_{12}^5 \cdot C_{18}^1 + C_{12}^6}{C_{30}^6};$$

в) $\frac{C_{12}^6}{C_{30}^6}$

в) $$P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{C_{18}^6}{C_{30}^6}.$$

Б. ПРЕБРОИВО МНОЖЕСТВО НА ЕЛЕМЕНТАРНИ НАСТАНИ

Кратко ќе се задржиме на определување на простор на веројатноста кога множеството на елементарни настани е бесконечно-пребройво. Во тој случај Ω може да се запише на следниов начин:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\} \quad \text{или} \quad \Omega = \{\omega_n \mid n\in\mathbb{N}\}.$$

Класата $\mathcal{F}$ на случајни настани се состои од сите подмножества на Ω. Во $\mathcal{F}$ се дефинира пребројива сума и пребројив производ на настани.

Веројатноста се определува со избор на реални броеви $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ такви што:

$$0 < p_n < 1, \; n\in\mathbb{N} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1. \tag{1}$$

Веројатноста на случаен настан $A\subset\Omega$ е определена со бројот:

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i\in A} p_i \tag{2}$$

Вака дефинираната функција го има својството:

$$\text{P.3}'. \quad A_n\in\mathcal{F}, \; n=1,2,\ldots, \; P\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Ова својство мора да го има секоја функција дефинирана на класата $\mathcal{F}$ на сл.н. во врска со бесконечно множество на ел.н. за да биде веројатност.

Пример 3. *Експериментот се состои од фрлање монета едно подруго сè додека падне „број". Да се опише соодветниот простор на веројатноста.*

Решение. Овој експеримент може да заврши со едно фрлање динар (ако во првото фрлање падне „број"), со две фрлања (во првото „грб" во второто „број"), итн., општо со n фрлања (во првите $(n-1)$ - „грб", во n-тото - „број"), за секој n. Теориски е можно, при секое наредно фрлање, да се добие „грб" и експериментот да продолжи. Заклучуваме дека множеството на сите можни исходи - елементарни настани е бесконечно и тоа пребројиво. Ако со 0 го означиме појавувањето на „грб", а со 1 на „број", елементарните настани можеме да ги запишеме на следниов начин:

1, 01, 001, 0001, ...,

или

$$\omega_1 = (1), \quad \omega_n = (\underbrace{0,\dots 0}_{n-1},1), \quad n=2,3,\dots$$

Броевите p_n треба да ги избереме така што да важат условите (3), но и да одговараат на конкретниот експеримент.

Бројот p_1 како веројатност на настанот „број падна во првото фрлање" е еднаков на 0,5. $\omega_2 = (0,1)$ е еден од четирите еднакво можни исходи на опитот - фрлање динар двапати едно подруго. Затоа $p_2 = P(\omega_2) = \frac{1}{4}$. Општо ω_n е еден од еднакво можните исходи на опитот фрлање на динар n-пати едно подруго. Елементарните настани се определени со варијации со повторување од класа n од 2 елементи 0 и 1, а нив ги има 2^n. Затоа:

$$p_n = p(\omega_n) = \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Со настаните ω_n, $n \in \mathbb{N}$ се опфатени сите можни исходи на експериментот фрлање динар, се́ додека падне„ број". Од тоа следува дека:

$$\sum_{n \in N} p_n = \sum_{n \in N} \frac{1}{2^n} = \sum_{n:\omega_n \in \Omega} P(\omega_n) = P(\Omega) = 1. \quad \Delta$$

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ

1. *Во една кутија има картички на коишто се запишани броевите 1, 2, 3, 4, 5 и 6. На случаен начин се извлекува по една картичка се забележува бројот и потоа се враќа во кутијата. Забележано е дека бројот k се јавува 2^{k-1} пати почесто отколку бројот 1, k=2,3,4,5,6. Да се определи веројатност на настаните:*

а) извлечена е картичка со непарен број;

б) бројот на извлечената картичка е делив со 3.

Решение:

$$p_k = 2^{k-1}, \quad k=2,3,4,5,6$$

$$1 = p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6 = p_1(1+2+4+8+16+32) = 63p_1$$

$$p_1 = \frac{1}{63},$$

а) $$P(A) = \frac{1+4+16}{63} = \frac{1}{3}.$$

б) $$P(B) = \frac{4+32}{63} = \frac{4}{7}.$$

2. *Шест семејства составени од мајка, татко и три деца се нашле на исто место. Одбрани се сосема произволно: еден татко, една мајка и едно дете. Колкава е веројатноста сите да припаѓаат на исто семејство?*

Решение: *Изборот на татко, мајка и дете претставува експеримент:*

$$\Omega = \{(T_i, M_j, D_k) \mid i,j=1,2,\ldots,6,\ k=1,2,\ldots,18\}$$

$$K(\Omega) = 6\cdot6\cdot18 = 648.$$

Ако децата на i*-тиот татко и* i*-тата мајка се означат како* D_{3i-2}, D_{3i-1}, D_{3i} *каде* $i=1,2,\ldots,6$, *тогаш*

$$A = \{(T_i, M_i, D_{3i-2}), (T_i, M_i, D_{3i-1}), (T_i, M_i, D_{3i}),\ i=1,2,\ldots,6\}.$$

Според класичната дефиниција на веројатноста

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{18}{648} = \frac{1}{36}$$

$$P(A) = 0{,}02(7).$$

3. *Лотарија се состои од 25 лозови што носат 10 награди. Некој купил 6 лоза. Колкава е веројатноста на настаните:*

а) *A: добил 2 награди;*
б) *B: добил барем 4 награди;*
в) *C: не добил ниту една награда?*

Решение.

а) $$P(A) = \frac{C_{10}^{2}\cdot C_{15}^{4}}{C_{25}^{6}} = \frac{\binom{10}{2}\binom{15}{4}}{\binom{25}{6}} = \frac{45\cdot1365}{177100}$$

$$P(A) = \frac{61425}{177100} \approx 0{,}3468;$$

б) $$P(B) = \frac{C_{10}^{4}C_{15}^{2} + C_{10}^{5}C_{15}^{1} + C_{10}^{6}C_{15}^{0}}{C_{25}^{6}} =$$

$$= \frac{\binom{10}{4}\binom{15}{2} + \binom{10}{5}\binom{15}{1} + \binom{10}{6}}{\binom{25}{6}}$$

$$P(B) = \frac{210\cdot 105 + 252\cdot 15 + 210}{177100}$$

$$P(B) = \frac{26040}{177100} \approx 0,1470;$$

в) $$P(C) = \frac{C_{10}^{0}C_{15}^{6}}{C_{25}^{6}} = \frac{\binom{10}{0}\binom{15}{6}}{\binom{25}{6}}$$

$$P(C) = \frac{5005}{177100} \approx 0,0282.$$

4. *Експериментот се состои од последователни фрлања на монета, сѐ додека падне „грб". Соодветниот простор на веројатност е опишан во примерот 3. на стр. 73. Да се определат веројатностите на настаните: а) грб падна првпат во не порано од 10-тото фрлање; б) грб падна првпат во парно по ред фрлање.*

Решение:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}, \quad P(\omega_n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

а) $$A = \{\omega_{10}, \omega_{11}, \ldots\} = \Omega - \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_9\}$$

Затоа:

$$P(A) = 1 - \sum_{n=1}^{9} P(\omega_n) = 1 - \sum_{n=1}^{9} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

$$P(\overline{A}) = \sum_{n=1}^{9}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^9$$

$\frac{1-q^n}{1-q}$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^9;$$

б) $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \ldots\}$

$$P(B) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\omega_{2k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{k} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3},$$

$$P(\overline{B}) = \frac{2}{3}.$$

ЗАДАЧИ

1. *Десет другари се родени во април, но на различен ден. Да се најде веројатноста дека:*

A: сите датуми на раѓање се непарни;

B: точно пет датуми се деливи со 3;

C: пет датуми се парни, пет се непарни, а само еден датум е делив со 10?

$$\left(\frac{1}{10005}, \frac{62016}{476905}, \frac{84}{476905}\right)$$

2. *а) Во броен систем со основа 3 се разгледуваат петцифрени броеви. Колкава е веројатноста дека произволно избран број има за нив кој:*

A: започнува со 0;

B: има 3 нули, од кои две се на краевите;

C: има точно 3 единици?

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{81}, \frac{40}{243}\right)$$

б) Од броен систем со основа 3 се избира произволно n-цифрен број. Колкава е веројатноста дека записот на бројот:

A: започнува со 0;

B: има m+2 нули, од кои две се на краевите;

C: има m единици?

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{\binom{n-2}{m} 2^{n-2}}{3^n}, \frac{\binom{n}{m} 2^{n-m}}{3^n}\right)$$

3. *На колоквиум по физика студентот добил 6 прашања од 20 лекции. Тој немал доволно време, па научил само 16 од нив.*

Во случај ако одговори на помалку од 3 прашања ќе падне. Да се утврди колкава е веројатноста дека:

а) A: сите прашања ги знае;

б) B: ги добил сите прашања што не ги научил;

в) C: го положил колоквиумот? 3, 4, 5, 6

$$\left(\frac{1001}{4845}, \frac{1}{323}, \frac{58}{285}\right)$$

4. *Во една вазна се наоѓаат 20 бели и 15 сини топчиња. Пет пати од неа се извлекува едно топче, се регистрира неговата боја и се враќа назад во садот. Да се утврди колкава е веројатноста дека:*

а) A: во сите обиди е извлечено бело топче;

б) B: бело топче се извлекува почесто отколку сино;

в) C: во првиот и последниот обид е извлечено бело топче;

г) D: во првиот и последниот обид е извлечено бело топче, а во преостанатите три сино.

$$\left(\frac{2024}{21417}, \frac{120043}{191919}, \frac{16}{49}, \frac{432}{16807}\right)$$

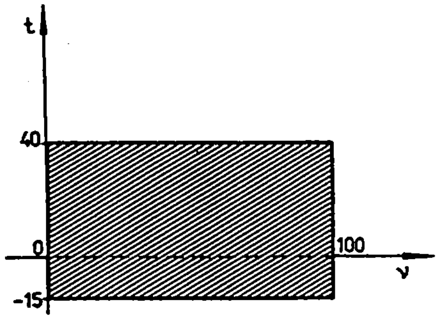
22

5. ГЕОМЕТРИСКА ВЕРОЈАТНОСТ

Во опитот набљудување на времетраењето на непрекината работа на некоја машина, множеството на сите можни исходи - елементарни настани беше определено со сите реални броеви од интервалот $[0,T]$ и може да биде претставено со сите точки од соодветната отсечка на бројната оска (сл. 1).

Сл. 1

На секој исход од опитот - набљудување на температурата и влажноста на воздухот во определена метеоролошка станица му одговара подредена двојка броеви (t,v), каде што t и v се измерената температура и влажноста на воздухот, соодветно. Ако минималната температура за таа област е $-15^{\circ}C$, а максималната $40^{\circ}C$, додека процентот во општ случај прима вредности од 0 до 100, тогаш множеството елементарни настани може да се претстави со множеството точки од координатната рамнина коишто припаѓаат на осенчениот правоаголник на сл. 2. Ако се набљудува истовремено и притисокот на воздухот, тогаш секој елементарен настан е определен со подредена тројка на броеви, а множеството на сите исходи се претставува со тридимензионална фигура. Поточно, во овој случај, тоа ќе биде призма со рабови определени со должините на интервалите на вредностите на трите величини.



Сл. 2

Врз основа на разгледаните примери и на многу други, може да се заклучи дека постојат експерименти, чиишто множества на елементарни настани можат да се претставаат со рамнински или просторни фигури. Во таков случај и случајните настани се определени со фигури, коишто се во состав на фигурата што го претставува Ω. Меѓутоа, нивните веројатност не можат да се определат преку веројатностите на елементарните настани. (*)

Нека сите елементарни настани, според условите на експериментот, се еднакво можни и множеството Ω може да се претстави со фигура од рамнина или простор, со конечна должина, плоштина, односно волумен. Тогаш секој случаен настан $A \subset \Omega$, се претставува со фигура којашто се содржи во фигурата што го претставува Ω и има, исто така, конечна должина, плоштина, односно волумен соодветно. Ако со $m(\Omega)$ ја означиме мерката (должина, плоштина или волумен) на фигурата за Ω, а со $m(A)$ мерката на фигурата за настанот A, тогаш:

$$P(A) = \frac{m(A)}{n(A)} \qquad (1)$$

е геометриска веројатност на настанот A.

Пример 1. *Пристигнувањето на некој брод во пристаништето е еднакво можно во тек на еден час (од 12 до 13 часот).*

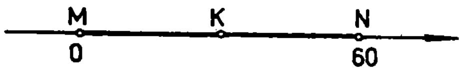
а) Да се определи веројатноста бродот да пристигне најдоцна до 12^{30} *часот;*

б) Колку изнесува веројатноста дека бродот ќе пристигне во 12^{30} *часот?*

Решение: Множеството на сите можни исходи е определено со интервалот $[0,60]$ и му одговара отсечка $\overline{MN}$ со должина 60, ако за единица земеме 1 минута (сл. 3).

Кога множеството на елементарни настани задоволува определени услови, постои можност (формула) за определување на веројатност, на настани од овој вид, и без изведување на експерименти.

а) На настанот A – бродот ќе пристигне во првата половина од времето на чекање, му одговараат точките од отсечката MK, така што:



Сл. 3

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{m(MK)}{m(MN)} = 0,5;$$

б) На настанот B – бродот ќе пристигне во 12^{30} часот, му соодветствува точката K, заради што:

$$P(B) = \frac{m(B)}{m(\Omega)} = \frac{m(K)}{m(\Omega)} = 0,$$

(точка има должина 0);

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1. \quad \Delta$$

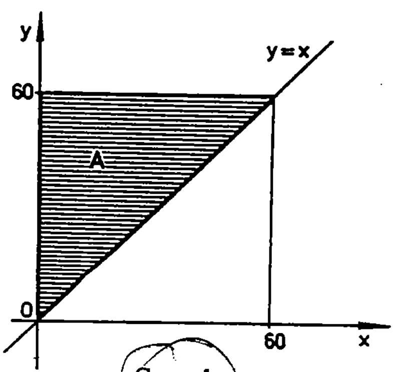
Настанот B не е granted неможен, а има веројатност еднаква на нула, додека $\overline{B}$ има веројатност 1, но не е сигурен настан.

Настанот што не е неможен, а има веројатност еднаква на нула го нарекуваме **скоро невозможен настан**. Настанот B го нарекуваме **скоро сигурен**, ако не е сигурен настан ($B \neq \Omega$), а $P(B) = 1$.

Пример 2. *Двајца пријатели М и К се договориле да се сретнат во тек на еден час на одредено место. Пристигнувањето на пријателите е независно и еднакво можно во тек на еден час.*

а) Да се определи веројатноста дека М ќе пристигне порано од К;

б) Колку изнесува веројатноста дека пријателите ќе се сретнат, ако се договориле оној што ќе стигне прв да го чека другиот 20 минути?



Сл. 4

Решение: Ако со x и y ги означиме времето на пристигнување на M и K соодветно, тогаш секој елементарен настан е претставен со двојка (x,y), $\Omega = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 60,\ 0 \leq y \leq 60\}$, така што множеството елементарни настани е претставено со квадрат (сл. 4) и $m(\Omega) = 60^2$.

а)Со A го означуваме настанот„ M пристигна порано од K". Тогаш:

$$A = \{(x,y) \mid (x,y)\in\Omega,\ x<y\}.$$

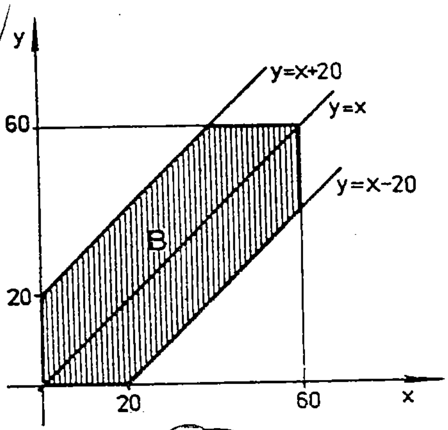
Настанот A е претставен со осенчениот дел од квадратот.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\frac{60^2}{2}}{60^2} = 0{,}5;$$

б) Настанот B ќе се појави ако $|y-x| \le 20$, т.е. е определен со:

$$B = \{(x,y) \mid (x,y)\in\Omega,\ |y-x|\le 20\},$$

$$|y-x| \le 20 \Leftrightarrow \begin{cases} y-x \le 20 \\ y-x \ge -20 \end{cases}$$



Сл. 5

За настанот B ја добиваме фигурата која е осенчена на сл. 5.

$$m(B) = 60^2-40^2 = 2000$$

$$P(B) = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9}$$

$$P(\overline{B}) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}.$$

Поголема е веројатноста да се сретнат отколку да не се сретнат.

Да забележиме дека настанот C - пријателите ќе пристигнат во ист момент е определен со:

$$C = \{(x,y) \mid (x,y)\in\Omega,\ x=y\}$$

и е претставен со отсечката од правата $y = x$ во квадратот $[0,6]\times[0,60]$ (сл. 5). Бидејќи плоштината на отсечка е еднаква на нула, имаме:

$$P(C) = \frac{m(C)}{m(\Omega)} = 0.$$

Така, пак добиваме скоро неможен настан. Настанот C е очигледно можен, но ако вистински точно ги спроведеме условите на задачата, настанот C многу, многу ретко би се појавувал во однос на настаните чија веројатност е различна од нула.

1. *Да се определи веројатноста дека од три отсечки, чијашто должина не надминува 1 m, може да се формира триаголник.*

Решение: *Нека се должините на отсечките означени со x, y, z. Било кои три отсечки за кои важи:*

$$0 \le x \le 1$$

$$0 \le y \le 1$$

$$0 \le z \le 1$$

припаѓаат на множеството можни настани

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$$

$$m(\Omega) = 1\ m^3.$$

Условот што треба да го исполнат три отсечки што формираат триаголник е „Збирот на должините на две страни е поголем од третата". Според тоа:

$$x+y > z \Rightarrow x+y-z > 0 \qquad (1)$$

$$x+z > y \Rightarrow x-y+z > 0 \qquad (2)$$

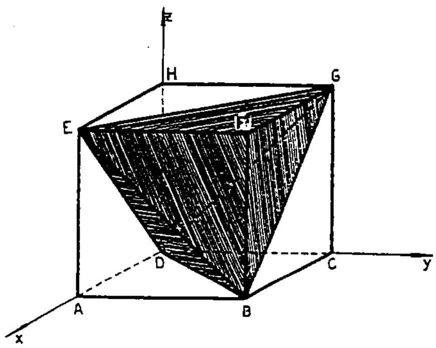
$$y+z > x \Rightarrow -x+y+z > 0 \qquad (3)$$

$$A = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1,\ x+y-z > 0,$$
$$x-y+z > 0,\ -x+y+z > 0\}$$

$$V_{DBGE} = ?$$

$$V_{DBGE} + V_{ABDE} + V_{BCGD} + V_{GHED} = 1\ m^3 \qquad (*)$$

пирамидата ABDE има основа правоаголен триаголник чија плоштина е 0,5 m^2 и висина $\overline{AE} = 1$ m.



Сл. 6

$$V_{ABDE} = \frac{\overline{AD}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AE}}{6} = \frac{1}{6}\ m^3$$

$$V_{BCGD} = \frac{\overline{CB}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{CG}}{6} = \frac{1}{6}\ m^3$$

$$V_{GHED} = \frac{\overline{HG}\cdot\overline{HE}\cdot\overline{HD}}{6} = \frac{1}{6}\ m^3$$

Според (*) $V_{DBGE} = \frac{1}{2}\ m^3$.

Значи,

$$P(A) = \frac{V_{DBGE}}{V(\Omega)} = \frac{\frac{1}{2}\ m^3}{1\ m^3} = \frac{1}{2}.$$

2. ***Случајно се избрани три точки A, B и C од кружница. Колкава е веројатноста дека триаголникот ABC е остроаголен?***

Решение: *Нека е O центарот на кружницата во која е впишан триаголникот. Повлекувајќи ги радиусите OA, OB и OC го разделуваме* $\triangle ABC$ *на три рамнокраки триаголници* $\triangle ABO$, $\triangle BOC$ *и* $\triangle CAO$. *Ги воведуваме ознаките:*

$$x = \sphericalangle AOB$$
$$y = \sphericalangle BOC$$
$$z = \sphericalangle COA,$$

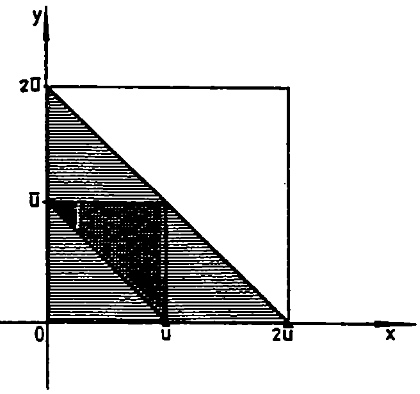
каде $z = 2\pi - x - y$.

Аглите x, y *и* z *го задоволуваат условот:*

$$0 \le x \le 2\pi,\quad 0 \le y \le 2\pi,\quad 0 \le z \le 2\pi,$$

па

$$\Omega = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 2\pi, 0 \le y \le 2\pi, 0 \le x+y \le 2\pi\}.$$



Сл. 7

За да биде $\triangle ABC$ *остроаголен треба да важат условите:*

$$0 \le \sphericalangle CAB \le \frac{\pi}{2},\quad 0 \le \sphericalangle ABC \le \frac{\pi}{2},\quad 0 \le \sphericalangle BCA \le \frac{\pi}{2} \qquad (*)$$

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle CAO + \sphericalangle OAB = \frac{\pi - \sphericalangle COA}{2} + \frac{\pi - \sphericalangle AOB}{2}$$

$$\sphericalangle CAB = \pi - \frac{x+z}{2} = \frac{2\pi - x - z}{2} = \frac{(x+y+z)-x-z}{2} = \frac{y}{2}.$$

Аналогно:

$\sphericalangle ABC = \frac{z}{2}$ и $\sphericalangle BCA = \frac{x}{2}$.

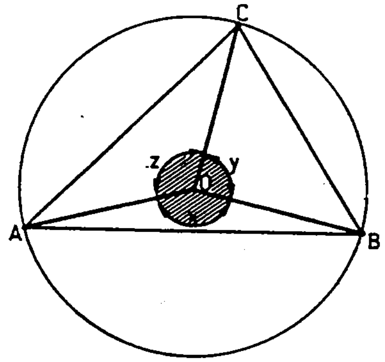
Според тоа, заменувајќи ги аглите во условите (*)

$A=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq\pi, 0\leq y\leq\pi, \pi\leq x+y\leq 2\pi\}$

$$m(\Omega) = \frac{1}{2}(2\pi)^2 = 2\pi^2$$

$$m(A) = \frac{1}{2}\pi^2$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1}{4}.$$



Сл. 8

ЗАДАЧИ

1. *Стапче долго 1 m се крши на едно место. Колкава е веројатноста дека местото на кршење е:*

а) A: поблиску до едниот отколку до другиот крај;
б) B: поблиску до средината отколку до краевите?

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

2. *Стапче долго k метри се крши на две места. Колкава е веројатноста дека од добиените три дела нема да може да се состави триаголник?*

$(\frac{3}{4})$

3. *Избран е еден број меѓу 1 и 2 и друг меѓу 4 и 5. Колкава е веројатноста дека:*

а) A: разликата им е по апсолутна вредност меѓу 1 и 2;
б) B: аритметичката средина им е меѓу 2 и 2,5;
в) C: разликата им е по апсолутна вредност меѓу 1 и 2, а аритметичката средина меѓу 2 и 2,5.

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

6. УСЛОВНА ВЕРОЈАТНОСТ

Нека се A и B два случајни настани во врска со ист опит S. Некогаш се случува информацијата дека се појавил еден од настаните да влијае на можноста за појавување на другиот. Така на пример, информацијата дека времето ќе биде лошо ги намалува шансите за успешно полетување или слетување на авиони, информацијата дека извлечената карта е од црвена боја ги зголемува шансите да биде погодено дека се работи за десетка каро.

Затоа се јавува потреба да се дефинира условна веројатност $P(B/A)$ на настан B, при претпоставка дека се појавил настан A. За да ја определиме условната веројатност, така што да одговара на интуитивното сфаќање и практичното значење, ќе се послужиме со статистичката веројатност.

Нека се изведени n опити, во кои $n(A)$ пати се појавил настанот A, а $n(A\cap B)$ е бројот на опити во коишто се појавиле истовремено н.A и н.B. Бидејќи треба да ја определиме релативната зачестеност на настанот B, при претпоставка дека се појавил настанот A (значи не во сите опити), го формираме количникот $n(A\cap B)/n(A)$. Ако го поделиме именителот и броителот со n, тогаш добиваме:

$$\frac{n(A\cap B)}{n(A)} = \frac{n(A\cap B)/n}{n(A)/n},$$

т.е. количник на релативната зачестеност на н.$A\cap B$ и таа на н.A. Така дојдовме до следнава

Дефиниција: Условна веројатност $P(B/A)$ на настанот B при претпоставка дека се појавил настанот A е бројот определен со:

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)};\quad P(A) \neq 0.$$

Од дефиницијата на условна веројатност следува формула за пресметување веројатност на производ на два настани,

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B/A) \tag{1}$$

Пример 1. *Од шпил (52) карти се извлекуваат на случаен начин, една подруга, две карти. Да се определи веројатноста дека двете извлечени карти се десетки.*

Решение: Означуваме: A_1 - првата извлечена карта е десетка, A_2 - втората извлечена карта е десетка. Треба да се определи $P(A_1 \cap A_2)$.

За определување на $P(A_1)$ и $P(A_2/A_1)$ ја користиме класичната дефиниција на веројатност, затоа што бројот на сите можни исходи е конечен и секој исход е еднакво можен. Така добиваме:

$$P(A_1) = \frac{4}{52}, \quad P(A_2/A_1) = \frac{3}{51} \quad \text{и} \quad P(A_1 \cap A_2) = \frac{4 \cdot 3}{52 \cdot 51}.$$

Веројатноста $P(A_1 \cap A_2)$ може да биде пресметана и директно, без користење на формулата (1), ако како елементарни настани се набљудуваат резултатите од двократното извлекување на карта. Секој исход е варијација без повторување од класа 2 од 52 елементи, така што бројот на сите можни случаи е $n = V_{52}^2 = 52 \cdot 51$. Поволни случаи се оние извлекувања, кои се добиени (формирани) од четирите десетки, а нивниот број е $m = V_4^2 = 4 \cdot 3$. Се разбира, добиваме ист резултат $P(A_1 \cap A_2) = \frac{4 \cdot 3}{52 \cdot 51}$. △

За пресметување на условна веројатност и веројатност на производ на два настани може да се користи дефиницијата, односно формулата (1), а може тоа да се направи и директно, во зависност од тоа што е поедноставно во конкретната задача.

За веројатноста на производ на конечен број настани A_1, A_2, ..., A_n точна е формулата:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)\ldots P(A_n/A_1\ldots A_{n-1}) \qquad (2)$$

Формулата (2) се докажува со помош на математичка индукција. Имено, за $n=2$ се добива формулата (1) која е точна по дефиниција. Да претпоставиме дека формулата (2) е точна за $n=k$. Ќе покажеме дека е точна и за производ на $k+1$ случајни настани A_1, ..., A_k, A_{k+1}. Ако означиме $B = A_1 \cap \ldots \cap A_k$, тогаш:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1}) &= P(B \cap A_{k+1}) = P(B) \cdot P(A_{k+1}/B) = \\ &= P(A_1 \cap \ldots \cap A_k) \cdot P(A_{k+1}/A_1 \cap \ldots \cap A_k) = \\ &= P(A_1)P(A_2/A_1)\ldots P(A_k/A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1})P(A_{k+1}/A_1 \cap \ldots \cap A_k) \end{aligned}$$

Добиваме:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1}) = P(A_1)P(A_2/A_1)\ldots P(A_{k+1}/A_1 \cap \ldots \cap A_k)$$

што е всушност формулата (2) за $n = k+1$.

Пример 2. *Во една кутија има 15 топчиња за тенис. За една игра се земаат 3 топчиња. Да се пресмета веројатноста дека по 5 игри сите топчиња ќе бидат употребени, ако топчињата со кои е играно се враќаат во кутијата.*

Решение. Настанот B – по 5 игри сите топчиња се употребени е еднаков со настанот – за секоја игра се земени нови топчиња. Ако со A_i го означиме настанот – за i-тата по ред игра се земени нови топчиња, $i = 1,2,3,4,5$, тогаш

$$B = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5.$$

Настанот A_1 има веројатност 1, бидејќи во почетокот сите топчиња се нови. Можноста за појавување на останатите настани зависи од тоа дали се појавиле претходните.

При секое поодделно извлекување, бројот на сите можни исходи е еднаков на бројот на сите комбинации од класа 3 од 15 елементи. Бројот пак на поволни случаи ќе биде различен во зависност од тоа колку пати претходно се земени нови топчиња, а ќе биде определен со бројот на комбинации од класа 3 од преостанатите нови топчиња. Условните веројатности се:

$$P(A_2/A_1) = \frac{C_{12}^3}{C_{15}^3} = \frac{V_{12}^3}{V_{15}^3}; \quad P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{C_9^3}{C_{15}^3} = \frac{V_9^3}{V_{15}^3};$$

$$P(A_4/A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{C_6^3}{C_{15}^3} = \frac{V_6^3}{V_{15}^3};$$

$$P(A_5/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{C_3^3}{C_{15}^3} = \frac{V_3^3}{V_{15}^3}.$$

Така се добива дека:

$$P(B) = 1 \cdot \frac{V_{12}^3}{V_{15}^3} \cdot \frac{V_9^3}{V_{15}^3} \cdot \frac{V_6^3}{V_{15}^3} \cdot \frac{V_3^3}{V_{15}^3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(15 \cdot 13 \cdot 13)^4}$$

$$P(B) = \frac{12!}{(15 \cdot 14 \cdot 13)^4}. \quad \triangle$$

U

7. НЕЗАВИСНОСТ НА НАСТАНИ

Ако настанот A не влијае на можноста за појавување на настанот B, т.е. н.B не зависи од н.A, тогаш условната веројатност $P(B/A)$ би требало да биде еднаква на безусловната $P(B)$. Значи, настанот B не зависи од настанот A, ако:

$$P(B/A) = P(B) \tag{1}$$

Нека е исполнет (3) и $P(B) \neq 0$. Тогаш за условната веројатност на н.A при услов н.B имаме:

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\cdot P(B/A)}{P(B)} = P(A).$$

Добиваме дека, ако н.B не зависи од н.A, тогаш и н.A не зависи од н.B, т.е. важи:

$$P(A/B) = P(A). \tag{2}$$

Затоа обично се зборуваза **заемна независност на два случајни настани.** Ако (1) или (2) го примениме на формулата за веројатност на производ на настани добиваме:

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B). \tag{3}$$

Со релацијата (3) најчесто се дефинира независност на два случајни настани.

Дали два случајни настани се независни или не обично се заклучува врз основа на условите на експериментот во кој се јавуваат. Се разбира, постојат задачи во коишто треба да се одговори на прашањето дали се два настани независни или не? Во тој случај, потребно е да се провери дали е исполнет некој од условите (1), (2) или (3).

Пример 1. *Од шпил (52) карти се извлекува една. Ги разгледуваме следниве настани: A - извлечена е„ десетка", B - извлечена е карта со црвена боја, C - извлечена е десетка со црна боја. Дали се независни двојките настани: а) A и B; б) A и C; в) B и C?*

Решение:

а) $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, $P(B) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$,

$$P(A\cap B) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26} \Rightarrow P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B).$$

Настаните A и B се заемно независни.

б) $P(A) = \frac{1}{13}$, $P(C) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$, $P(A \cap C) = P(C) = \frac{1}{26}$

$P(A \cap C) \neq P(A) \cdot P(C)$.

Значи, настаните A и C не се независни. Забележуваме дека $C \subset A$.

в) Настанот $B \cap C$ е неможен настан и затоа $P(B \cap C) = 0$.

$P(B) \neq 0$ и $P(C) \neq 0$, така што $P(B \cap C) \neq P(B) \cdot P(C)$.

Значи, настаните B и C се зависни. △

Теорема 1. *Ако A и B се независни настани, тогаш независни се и настаните $\bar{A}$ и B, A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.*

Доказ: Ќе покажеме дека од независноста на A и B следува независноста на $\bar{A}$ и B, т.е. дека:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B).$$

Настанот B може да се претстави на следниов начин:

$$B = B \cap A + B \cap \bar{A}.$$

Затоа:

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P(B) \cdot P(A) + P(B \cap \bar{A})$$

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(B) \cdot P(A) = P(B)[1 - P(A)] = P(B) \cdot P(\bar{A}).$$

Од докажаното следува дека независноста на настаните A и B ја повлекува независноста и на парот A, $\bar{B}$, а од неговата независност, на аналоген начин, следува и независноста на $\bar{A}$ и $\bar{B}$. □

На крајот ќе дефинираме независност на повеќе од два настани.

Множеството настани $A_1, A_2, \ldots, A_n$ велиме дека е **независно во целина,** ако за секое подмножество со k настани, $k = 2, \ldots, n$, важи:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}) \qquad (4)$$

Ако се настаните $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независни во целина, тогаш се независни и по парови ((4) мора да важи и за $k=2$). Обратното тврдење не е точно, а тоа ќе го покажеме разгледувајќи еден таков случај.

Пример 2. *Страните на еден хомоген тетраедар се обоени така што: едната страна е бела, другата – црвена, третата – сина, а на четвртата ги има сите три бои. Тетраедарот се фрла на рамна површина и се набљудува страната со која лежи на површината. Да ги означиме следниве настани:* A_1 *– страната што се набљудува има бела боја,* A_2 *– страната што се набљудува има црвена боја,* A_3 *– има сина боја. Дали се настаните* A_1, A_2 *и* A_3 *независни по парови и во целина?*

Решение. Тетраедарот е хомоген, така што четирите можни исходи на експериментот се еднакво можни. Од четирите негови страни само една има повеќе од една боја (ги има сите три). Затоа:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}.$$

Бидејќи за секоја двојка од настаните A_1, A_2, A_3 важи $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$, $i \neq j$, $i, j = 1,2,3$, следува дека се тие независни по парови. Бидејќи:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3),$$

заклучуваме дека тие не се независни во целина. △

Пример 3. *Лицата A и B ја играат следната игра: фрлаат еден по друг коцка за играње сè додека првпат падне „шестка". Да се пресмета веројатноста играта да заврши по три фрлања на играчот што ја започнал играта.*

Решение. Да ги означиме со A_i и B_i соодветно, настаните играчот A – доби шестка во i по ред фрлање и играчот B доби шестка во i фрлање. Според условите на задачата заклучуваме дека настаните A_i и B_i, $i=1,2,\ldots$, и на нив спротивните, се независни во целина.

Можноста за добивање „шестка" за секој играч и во секое фрлање е иста (хомогена коцка, шест можни исходи, еден поволен). Затоа:

$$P(A_i) = P(B_i) = \frac{1}{6} \text{ и } P(\overline{A}_i) = P(\overline{B}_i) = \frac{5}{6}, \quad i=1,2,\ldots$$

Ако со C го означиме настанот чијашто веројатност се бара и ако земеме предвид дека играта може да ја почне играчот A или играчот B, тогаш:

$$C = \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2\overline{B}_2A_3 + \overline{B}_1\overline{A}_1\overline{B}_2\overline{A}_2B_3$$

$$P(C) = P(\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2\overline{B}_2A_3) + P(\overline{B}_1\overline{A}_1\overline{B}_2\overline{A}_2B_3) =$$

$$= (\frac{5}{6})^4\cdot\frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^4\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{3}\cdot(\frac{5}{6})^4. \quad \triangle$$

Пример 4. *Познато е дека 80% од производите од одреден вид на некоја фабрика се од I класа, а 20% од II класа. Да се определи веројатноста меѓу 10 земени производи да има барем еден од I класа.*

Решение. Настанот C - од 10 производи, барем еден е од I класа, ќе се појави ако има точно 1 од I класа, или точно 2 од I класа, ..., или 10 од I класа. Со B_o да го означиме настанот - сите производи се од II класа. Тој е спротивен на настанот C. Затоа:

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(B_o).$$

Ако со A_i ги означиме настаните i-от производ е од I класа, тогаш $\overline{A}_i$ е настанот i-тиот производ е од II класа, $i = 1, 2, 3, \ldots, 10$.

$$P(A_i) = 0,8, \; P(\overline{A}_i) = 0,2, \; i=\overline{1,10}$$

$$B_o = \overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{10} = \bigcap_{i=1}^{10}\overline{A}_i, \; P(\bigcap_{i=1}^{10}\overline{A}_i) = (0,2)^{10}$$

$$P(C) = 1 - P(B_o) = 1 - (0,2)^{10}. \quad \triangle$$

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ

1. *Се фрлаат две коцки. Да се определи веројатноста дека:*

а) паднале две петки, ако збирот на вредностите што паднале е делив со 5.

б) паднале две парни вредности, ако збирот на вредностите што паднале е делив со 3.

Решение:

$$\Omega = \{(x,y)\,|\,x,y\in\{1,2,3,4,5,6\}\}, \; |\Omega| = \overline{V}_6^2 = 36$$

Веројатноста на секој елементарен настан е $\frac{1}{36}$.

а) A: паднале две петки;
   B: збирот на вредностите е делив со 5.

$$A = \{(5,5)\} \qquad P(A) = \frac{1}{36}$$

$$B = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}, \qquad P(B) = \frac{1}{12}.$$

Се бара $P(A/B)$.

$$AB = \{(5,5)\}, \qquad P(AB) = \frac{1}{36}$$

$$P(A/B) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{3}.$$

б) C: паднале две парни вредности;
   D: збирот на вредностите е делив со 3.

$$C = \{(x,y)\,|\,x,y\in\{2,4,6\}\}$$

$$|C| = \overline{V}_3^2 = 9, \quad P(C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$D = \{(x,y)\,|\,x,y\in\{1,2,3,4,5,6\},\ x+y=3k,\ k\in\{1,2,3,4\}\}$$

$$D = \{(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(3,3),(3,6),(4,2),(4,5),(5,1),(5,4),(6,3),(6,6)\}$$

$$|D| = 12 \qquad P(D) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$P(C/D) = \frac{P(CD)}{P(D)}$$

$$CD = \{(2,4),(4,2),(6,6)\}$$

$$|CD| = 3 \qquad P(CD) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(C/D) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}.$$

Добиваме дека:

$$P(C) = \frac{1}{4}, \quad P(D) = \frac{1}{3}, \quad P(CD) = \frac{1}{12}.$$

$$P(CD) \equiv P(C)P(D).$$

Настаните се независни.

2. Се фрлаат две коцки. Нека x е вредноста која е регистрирана на првата, а y вредноста регистрирана на втората коцка. Да се покаже дека настаните:

A: x е делив со 2, а y со 3;
B: x е делив со 3, а y со 2;
C: $x+y$ е делив со 2

се независни по парови, но не и во целина.

Решение:

$$A = \{(2,3),(2,6),(4,3),(4,6),(6,3),(6,6)\}$$

$$B = \{(3,2),(3,4),(3,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$$

$$C = \{(x,y)\,|\,x,y\in\{1,3,5\}\vee x,y\in\{2,4,6\}\}$$

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{6} \qquad P(C) = \frac{1}{2}$$

$$AB = \{(6,6)\}, \quad P(AB) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = P(A)P(B) \Rightarrow A \text{ и}$$

B се независни;

$$AC = \{(2,6),(4,6),(6,6)\}, \ P(AC) = \frac{1}{12} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} =$$

$= P(A)P(C) \Rightarrow A$ и C се независни

$$BC = \{(6,2),(6,4),(6,6)\}, \ P(BC) = \frac{1}{12} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} =$$

$= P(B)P(C) \Rightarrow B$ и C се независни

$$ABC = \{(6,6)\} \qquad P(ABC) = \frac{1}{36}$$

$$P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{72}$$

$P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C) \Rightarrow A$, B и C не се независни во целина.

ПЕТ ЗАДАЧИ

1. Од сад со 3 бели, 5 сини и 2 црвени топчиња двајца извлекуваат по едно топче и не го враќаат назад. Се договориле дека оној кој прв ќе извлече бело топче ќе го чести другиот. Ако се извлече црвено топче, тогаш никој нема да чести. Извлекувањата се наизменични. Да се определи веројатноста дека:

а) чести оној кој прв влече;
б) чести оној кој втор влече;
в) не чести никој!

$$\left(\frac{83}{210}, \frac{43}{210}, \frac{2}{5}\right)$$

2. *Од сад со n бели и m сини топчиња се влече едно топче, се регистрира неговата боја и пак се враќа назад. Да се определи веројатноста дека:*

а) во првите пет обиди постојано било извлекувано бело топче;

б) сè до десеттиот обид не е извлечено бело топче;

в) во првите дваесет обиди е извлечено бело топче!

$$\left(\frac{n^5}{(n-m)^5}, \quad \frac{n^9 m}{(n+m)^{10}}, \quad \frac{(n+m)^{20}-m^{20}}{(n+m)^{20}}\right)$$

3. *Од сад со n бели и m сини топчиња ($m \geq n$) n пати се влечат по две топчиња. Колкава е веројатноста дека во сите обиди било извлекувано точно едно бело топче.*

$$\left(\frac{2^n m!\, n!}{(m+n)!}\right)$$

4. *Шахистите A и B се договориле да играат турнир во кој за победа на A му се потребни 12 бода, а на B, 6. Шахистот A е два пати подобар од B. При резултат 8:4 за A, играта била прекината. Играчите се договориле за победник да биде прогласен оној што во продолжението има поголеми шанси за успех. Кој е победник?*

(*B*)

5. *Познато е дека веројатноста близнаци да бидат од ист пол е двапати поголема од веројатноста да бидат од различен пол. Веројатноста да се роди машко дете е 0,51. Колкава е веројатноста дека ако едното е машко, тогаш и другото е машко?*

8. ФОРМУЛА ЗА ПОТПОЛНА ВЕРОЈАТНОСТ. БАЈЕСОВИ ФОРМУЛИ

Определувањето на веројатноста на некој настан е често отежната заради тоа што набљудуваниот настан, на пример *B*, може да се појави само откако ќе се појави еден настан од множеството настани $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$. Да разгледаме една задача:

Пример 1. *Во три на изглед исти кутии има по 10 еднакви по големина и на допир топчиња, и тоа: во едната 3 бели и 7 црни, во другата 4 бели и 6 црни топчиња и во третата 5 бели и 5 црни топчиња. На случаен начин се избира една од кутиите и од неа, без гледање, се земаат 2 топчиња. Да се определи* *веројатноста на настанот B – двете топчиња се бели".*

Решение: На настанот B – извлечени се две бели топчиња, му претходи еден од настаните H_i – избрана е i-та кутија, $i=1,2,3$. Настаните H_1, H_2, H_3 се дисјунктни и нивната сума е еднаква на Ω за опитот избор на кутија. Податоците од задачата ни овозможуваат да ги определиме непосредно веројатностите на H_1, H_2, H_3 и соодветните условни веројатности на B. Имаме:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Во секоја кутија има по 10 топчиња од кои се земаат 2, па бројот на сите можни исходи за секоја кутија ќе биде $C_{10}^2 = 45$. Бројот на поволни случаи за извлекување две бели топчиња од I, II и III кутија се : $m_1 = C_3^2$, $m_2 = C_4^2$ и $m_3 = C_5^2$, соодветно. Така добиваме дека:

$$P(B/H_1) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2},\quad P(B/H_2) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} \text{ и } P(B/H_3) = \frac{C_5^2}{C_{10}^2}.$$

Сега можеме да ги пресметаме и веројатностите:

$$P(B\cap H_1) = P(H_1)P(B/H_1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\cdot 2}{10\cdot 9} = \frac{1}{45}$$

$$P(B\cap H_2) = P(H_2)P(B/H_2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{4\cdot 3}{10\cdot 9} = \frac{2}{45}$$

$$P(B\cap H_3) = P(H_3)P(B/H_3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{5\cdot 4}{10\cdot 9} = \frac{2}{27}.$$

За настанот B важи:

$$B = B\cap\Omega = B\cap(H_1 + H_2 + H_3) = B\cap H_1 + B\cap H_2 + B\cap H_3,$$

заради што:

$$P(B) = P(B\cap H_1) + P(B\cap H_2) + P(B\cap H_3).$$

Така, заменувајќи ги порано најдените веројатности, добиваме дека:

$$P(B) = \frac{1}{45} + \frac{2}{45} + \frac{2}{27} = \frac{1}{135}[3 + 6 + 10] = \frac{19}{135}. \triangle$$

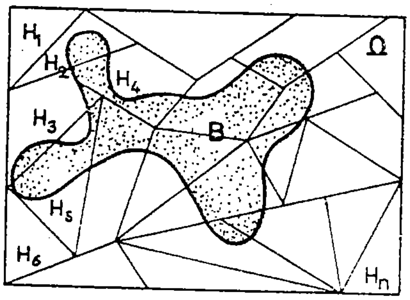
Нека е познато дека се појавил настанот B. Може да се постави прашањето: Колкава е веројатноста дека двете бели топчиња се извлечени од втората кутија? Тоа значи дека се бара $P(H_2/B)$, а за нејзино определување ги имаме сите потребни елементи:

$$P(H_2/B) = \frac{P(B\cap H_2)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{45}}{\frac{19}{135}} = \frac{6}{19}.\ \Delta$$

Теорема 1. *Нека множеството настани H_1, H_2, ..., H_n е дисјунктно разложување на сигурен настан, (т.е. $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$). За секој настан B во врска со истиот експеримент ($B\subset\Omega$) важи:*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(B/H_i).\square \qquad (1)$$

Формулата (1) е т.н. **формула за потполна (тотална) веројатност**. Настаните H_1, H_2, ..., H_n се нарекуваат **хипотези**.



Сл. 9

Доказ: За секој настан B, што е во врска со ист опит со настаните H_1, H_2, ..., H_n, важи:

$$B=B\cap\Omega=B\cap\left(\sum_{i=1}^{n} H_i\right)= \sum_{i=1}^{n} (B\cap H_i),$$

т.е. B се разложува во дисјунктна сума со помош на настаните H_1, H_2, ..., H_n (сл.9). Затоа имаме:

$$P(B) = P\left(\sum_{i=1}^{n} B\cap H_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(B\cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(B/H_i)\ \square$$

При важење на претпоставките од т.1, за секое H_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, добиваме:

$$P(H_j/B) = \frac{P(B\cap H_j)}{P(B)} = \frac{P(H_j)\cdot P(B/H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(B/H_i)} \qquad (2)$$

Формулите (2) познати се како Бајесови формули за **веројатностите на хипотезите**. Тие овозможуваат споредување на хипотезите и наоѓање на највероједатната меѓу нив.

Пример 2. *Во еден склад сместени се истовидни производи од три фабрики A, B и C. Познато е дека 20% од производите се од фабриката A, 30% од фабриката B и 50% од фабриката C. Процентот на дефектни производи во производството на фабриките A, B и C изнесува 4%, 3% и 2%, соодветно. Колкав е процентот на дефектни производи во складот? Која фабрика има најголем процент на дефектни производи во складот?*

Решение: Ако ја имаме предвид статистичката дефиниција на веројатност, тогаш наведените проценти во задачава се податоци за веројатностите на соодветните настани. Ако со M го означиме настанот „случајно избран производ од складот е дефектен", со A, B и C настаните: „производот потекнува од фабриката A", „ производот е од фабриката B", „ производот е од фабриката C", соодветно, тогаш:

$$P(A) = 0,20, \quad P(B) = 0,30 \quad \text{и} \quad P(C) = 0,50.$$

Понатаму, бидејќи 4%, 3% и 2% се процентите на дефектни производи од фабриките A, B и C соодветно, следува дека веројатноста еден производ да биде дефектен, ако е познато дека потекнува од фабриката A, B и C, изнесува 0,04, 0,03 и 0,02, соодветно. Значи:

$$P(M/A) = 0,04, \quad P(M/B) = 0,03, \quad P(M/C) = 0,02.$$

Така за $P(M)$ добиваме:

$$P(M) = 0,2\cdot 0,04 + 0,3\cdot 0,03 + 0,5\cdot 0,02 = 0,027.$$

Според тоа, во складот има 2,7% дефектни производи.

Процентот на производи од секоја фабрика во дефектните го определуваме со помош на следниве условни веројатности:

$$P(A/M) = \frac{0,008}{0,027} \approx 0,30,$$

$$P(B/M) = \frac{0,009}{0,027} \approx 0,33,$$

$$P(C/M) = \frac{0,010}{0,027} \approx 0,37.$$

Меѓу дефектните производи во складот најголем е процентот на производи од фабриката C (≈37% од дефектните се од C).

Формулата за потполна веројатност и Бајесовите формули овозможуваат да се определи општата веројатност на кој било настан B, којшто е резултат на еден од повеќе други настани, како и веројатностите на тие настани, како хипотези за појавување на настанот B.

1. Во класот има 20 момчиња и 15 девојчиња. Десет момчиња имаат кафеави, седум зелени и три сини очи. Десет девојчиња имаат кафеави, две зелени и три сини очи. Случајно е избран еден ученик. Колкава е веројатноста дека:

а) ученикот има сини очи;

б) ученикот има кафеави очи, ако се знае дека е машко;

в) ученикот е машко, ако се знае дека има кафеави очи?

Решение: Се определуваат настаните:

M: избрано е момче, $P(M) = \frac{20}{35}$;

D: избрано е девојче, $P(D) = \frac{15}{35}$;

G: избран е ученик со зелени очи, $P(G/M)=\frac{7}{20}$, $P(G/D)=\frac{2}{15}$;

C: избран е ученик со кафеави очи, $P(C/M)=\frac{10}{20}$, $P(C/D)=\frac{10}{15}$;

B: избран е ученик со сини очи, $P(B/M)=\frac{3}{20}$, $P(B/D)=\frac{3}{15}$;

а) $P(B) = P(M)P(B/M) + P(D)P(B/D)$

$$P(B) = \frac{20}{35}\cdot\frac{3}{20} + \frac{15}{35}\cdot\frac{3}{15} = \frac{6}{35};$$

б) $P(C/M) = \frac{1}{2}$;

в) $P(M/C) = \frac{P(M)P(C/M)}{P(C)}$

$$P(C) = P(M)P(C/M) + P(D)P(D/C) = \frac{20}{35}$$

$$P(M/C) = \frac{\frac{20}{35}\cdot\frac{10}{20}}{\frac{20}{35}} = \frac{1}{2}.$$

2. Од кутија со 5 бели и 5 црни топчиња се влече едно топче, а од кутија со 7 бели и 8 црни две и се префрлаат во трета кутија. Потоа од третата се извлекува едно топче. Колкава е веројатноста дека:

а) од третата кутија е извлечено бело топче;

б) во третата кутија имало три бели топчиња, ако е извлечено бело топче.

Решение:

A: извлечено е бело топче;

B: извлечено е црно топче;

L: *избрана е кутијата со 10 топчиња;*
M: *избрана е кутијата со 15 топчиња.*

Во третата кутија може да има:

H_1: *три бели топчиња;*

H_2: *две бели топчиња;*

H_3: *едно бело топче;*

H_4: *ниедно бело топче.*

а) $$P(H_1) = P(A/L)+P(AA/M) = \frac{C_5^1}{C_{10}^1}\cdot\frac{C_7^2}{C_{15}^2} = \frac{1}{10}$$

$$P(H_2) = P(A/L)P(AB/M) + P(B/L)P(AA/M) =$$

$$= \frac{C_5^1}{C_{10}^1}\cdot\frac{C_7^1C_8^1}{C_{15}^2} + \frac{C_5^1}{C_{10}^1}\cdot\frac{C_7^1}{C_{15}^2} = \frac{11}{30}$$

$$P(H_3) = P(A/L)P(BB/M) + P(B/L)P(AB/M) =$$

$$= \frac{C_5^1}{C_{10}^1}\cdot\frac{C_8^2}{C_{15}^2} + \frac{C_5^1}{C_{10}^1}\cdot\frac{C_7^1C_8^1}{C_{15}^2} = \frac{2}{5}$$

$$P(H_4) = P(B/L)P(BB/M) = \frac{C_5^1}{C_{10}^1}\cdot\frac{C_8^2}{C_{15}^2} = \frac{2}{15}.$$

$$P(A) = P(S_1)P(A/S_1) + P(S_2)P(A/S_2) + P(S_3)P(A/S_3)+$$

$$+ P(S_4)P(S/S_4)$$

$$P(A) = \frac{1}{10}\cdot\frac{3}{3} + \frac{11}{30}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{15}\cdot\frac{0}{3} = \frac{43}{90}.$$

б) $$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{43}{90}} = \frac{9}{43}.$$

ПЕТ ЗАДАЧИ

1. *Веројатноста да се погоди целта е 0,9, а да се пробие, ако е погодена е 0,3. Да се определи веројатноста дека во n обиди целта е погодена.*

$(1-0,73^n)$

2. *На масата се наоѓаат 3 еднакви вазни. Во првата има 2 бели и 3 црни, во втората 6 бели и 2 црни, а во третата 4 бели и 3 црни топчиња. Од случајно избрана вазна се извлекува едно топче. Да се определи веројатноста дека:*

а) извлеченото топче е од првата вазна ако е познато дека е бело;

б) извлеченото бело топче е од првата вазна, ако веројатностите за избор на вазните се 0,1; 0,2 и 0,7, соодветно.

$P(H_1)=0,1$
$P(H_2)=0,2$
$P(H_3)=0,7$

$(\frac{56}{241}, \frac{4}{59})$

3. *Што е поверојатно: од третата вазна е извлечено бело топче или од случајно избрана вазна е избрано бело топче, ако топчињата се влечат од трите вазни од претходната задача, во случајот кога вазните се еднакви.*

4. *Од истите три вазни се зема по едно топче и се префрлува во кутија, а потоа од неа се извлекува едно. Ако е извлечено бело топче, колкава е веројатноста дека од вазните се земени помалку од три бели топчиња ако:*

а) кутијата била празна;

б) во кутијата имало едно бело и едно црно топче?

$(\frac{160}{241}, \frac{285}{381})$

5. *Во електрично коло осигурувачот откажува ако настане:*

1. *куса врска со веројатност 0,5;*
2. *врска со намотките на трансформаторот - 0,6;*
3. *пробивање на кондензатор - 0,7;*
4. *други причини - 0,9.*

Веројатностите за појава на тие настани се 0,35, 0,30, 0,25 и 0,10, соодветно. Ако осигурувачот откажал, колкава е веројатноста на најверојатната причина?

$(\frac{9}{31})$

ВЕЖБИ 7

1. Ученик решава тест кој содржи 20 прашања. За секое прашање во тестот се понудени пет одговори од кои само еден е точен. Ако ученикот не го познава материјалот и одговара на случаен начин, да се определи веројатноста дека:

а) ученикот точно одговорил на едно одредено прашање;
б) ученикот точно одговорил на сите прашања;
в) ученикот точно одговорил на само едно прашање.

Да се најдат веројатностите на истите настани ако ученикот го учел предметот, па за секое прашање може да елиминира три од понудените одговори.

2. Колкава е веројатноста карта извлечена од шпил со 52 карти да биде со срце или да биде со лик?

3. Веројатноста дека денот е облачен е 0,25. Ветровити денови има 73 пати годишно, од кои половината се облачни. Колкава е веројатноста дека денот не е облачен или не е ветровит?

4. Коцка се фрла двапати. Да се определи веројатноста дека барем еднаш се појавиле две точки на горната страна.

5. Од шпил со 52 карти се извлекуваат две. Колкава е веројатноста дека барем една ќе биде со срце?

6. Од шпил со 52 карти се извлекуваат три. Колкава е веројатноста дека барем една не е со срце?

7. Колкава е веројатноста дека при извлекување 5 карти од шпил со 52 карти, три карти се десетки?

8. Една фабрика за трикотажа изработува производи од кои 5% се со недостаток. Колкава е веројатноста 3 случајно одбрани производи да бидат исправни?

9. На масата има 3 на изглед еднакви вазни. Во првата има 2 бели и 1 сино, во втората 3 бели и 1 црно, а во третата 2 бели и 2 црвени топчиња. Од случајно избрана вазна случајно е избрано едно топче. Колкава е веројатноста топчето да биде бело?

10. Во една фабрика се произведуваат ист тип производи во 3 хали. Во првата хала се изработува 25%, во втората 30%, а во третата 45% од целокупниот асортиман. Процентот неисправни артикли изнесува 4%, 3% и 2% соодветно. Колкава е веројатноста случајно избран производ да биде исправен?

11. Двајца стрелци, независно еден од друг, стрелаат по еднаш во иста цел. Првиот погодува во 80%, а вториот во 40%

од обидите. По стрелањето е утврдено дека целта е еднаш погодена. Колкава е веројатноста дека првиот погодил?

12. Од три еднакви пумпи за гуми случајно е избрана една и со неа се напумпани гумите на велосипед. Веројатноста дека првата пумпа нема да работи е 0,25, за втората веројатноста на отказ е 0,15, а за третата 0,95. Која пумпа е најверојатно употребена? Колкава е веројатноста за нејзината употреба?

$$P(A) = \frac{C_{52}^{14} + C_{52}^{12}}{52}$$

III. СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

1. ДЕФИНИЦИЈА И ПРИМЕРИ

Еден од најважните поими во теоријата на веројатноста е поимот случајна променлива. При одредено испитување, резултатите на експериментите обично ги регистрираме со вредностите на некоја од величините што ја карактеризираат набљудуваната појава. Така, на пример, при метеоролошките испитувања, секој ден и во одредено време, се регистрираат вредности на повеќе величини: температура и влажност на воздухот, притисок, присуство на разни гасови и др.

Ако секој исход на даден експеримент се регистрира со соодветната вредност на одредена величина, тогаш за секој експеримент се добива определено множество на реални броеви. На тој начин множеството на елементарни настани се пресликува во одредено множество на реални броеви. Притоа, настаните „величината прима определена вредност x" се очигледно случајни настани. Затоа овие величини ги нарекуваме случајни променливи. Ќе разгледаме неколку примери на експерименти и случајни променливи што можат да бидат определени во врска со нив.

Пример 1. За опитот „фрлање коцка за играње" множеството на елементарни настани е $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Во врска со него можеме да ја набљудуваме величината X – број на точки на горната страна од коцката. Таа е определена со пресликувањето $f(\omega_i)=i$, $i=\overline{1,6}$, кое множеството Ω го пресликува во множеството реални броеви $\{1,2,3,4,5,6\}$. Настаните определени со вредностите на оваа величина очигледно се случајни настани и се појавуваат со одредена веројатност.

Во врска со истиот експеримент може да се определи величина Y, со пресликувањето $f(\omega_{2k})=1$, $f(\omega_{2k-1})=0$, $k=1,2,3$. На тој начин множеството Ω се пресликува во $\{0,1\}$, при што:

$$P(Y=0)=P\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}=0,5, \qquad P(Y=1\}=P\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}=0,5.$$

Според определувањето, величината Y го регистрира појавувањето на парен број точки на коцката.

Пример 2. *За експериментот„ набљудување на времето на пристигнување на брод во пристаниште", при претпоставка дека неговото пристигнување е еднакво можно во тек на еден час, множеството елементарни настани се состоеше од сите* ω_t *- бродот пристигна во моментот* t, $t\in[0,60]$. *Веројатноста може да се определи со примена на геометриската дефиниција на веројатност.* Во овој случај најприродно е да се набљудува величината T - време на пристигнување на бродот, која се добива со пресликувањето $f(\omega_t) = t$. Притоа, Ω се пресликува во множеството $[0,60]$ - интервал на реални броеви. За разлика од претходниот пример, настаните одредени со поодделните вредности на оваа величина се скоро неможни (како што веќе покажавме во примерот 1 од точка 5).

Затоа, при изучувањето на величините определени на множеството на елементарни настани, ќе користиме настани определени со интервали на реални броеви. Се покажало дека најпогодно е интервалите да бидат од обликот $(-\infty,x)$, $x\in\mathbb{R}$, т.е. да се користат настаните„ величината прима вредност во интервалот $(-\infty,x)$".

Спроведената дискусија не доведува до следнава

Дефиниција: *Случајна променлива, определена на просторот на веројатност* $(\Omega,\mathcal{F},P)$, *е пресликување* $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$, *такво што, настанот „* $f(\omega)$ *прима вредност во интервалот* $(-\infty,x)$" *е случаен настан за секој* $x\in\mathbb{R}$, *т.е.*

$$\{\omega\in\Omega \mid f(\omega) < x\}\in\mathcal{F}, \ \forall x\in\mathbb{R}.\square$$

Случајните променливи ќе ги означуваме со големите печатни букви од крајот на латиницата: X, Y, Z, U, V итн. и ќе користиме кратенка сл.п.

Настанот $\{\omega \mid f(\omega) < x\}$ ќе го запишуваме и на следниве начини:

$$\{X\in(-\infty,x)\} = \{X < x\}.$$

Множеството на вредности што може да ги прима една случајна променлива X, т.е. множеството на реални броеви што се добива како слика на Ω при соодветното пресликување, ќе го наречеме множество на можни вредности на X и ќе го означуваме со $\mathbb{R}_x$.

Пример 3. *Во примерот 1 имавме сл.п.* X *определена со множество на вредности* $\mathbb{R}_x = \{1,2,3,4,5,6\}$ *и веројатности*

$P\{X=k\} = P\{\omega_k\} = \frac{1}{6}$, $k=\overline{1,6}$. *Случајната променлива* Y *е определена со* $\mathbb{R}_y = \{0,1\}$ *и* $P\{Y=0\} = P\{Y=1\} = 0,5$.

Пример 4. *Петдинарка се фрла три пати едно по друго. Да се опишат величините:* X *- број на петки во трите фрлања;* Y *- реден број на првото паѓање петка.*

Решение. Множеството Ω се состои од сите подредени тројки составени од симболите 0 и 5 и има 8 елементи, коишто се еднакво можни. Затоа $P(\omega_i) = \frac{1}{8}$, $i = \overline{1,8}$.

а) $\mathbb{R}_x = \{0,1,2,3\}$.

Веројатностите на поодделните вредности ќе бидат:

$$P\{X=0\} = P\{(0,0,0)\} = \frac{1}{8}$$

$$P\{X=1\} = P\{(5,0,0),(0,5,0),(0,0,5)\} = \frac{3}{8}$$

$$P\{X=2\} = P\{(5,5,0),(5,0,5),(0,5,5)\} = \frac{3}{8}$$

$$P\{X=3\} = P\{(5,5,5)\} = \frac{1}{8}.$$

б) $\mathbb{R}_y = \{0,1,2,3\}$, $\{Y=0\}$ - петка не падна.

$$P\{Y=0\} = P\{(0,0,0)\} = \frac{1}{8}$$

$$P\{Y=1\} = P\{(5,0,0),(5,5,0),(5,0,5),(5,5,5)\} = \frac{4}{8}$$

$$P\{Y=2\} = P\{(0,5,0),(0,5,5)\} = \frac{2}{8}$$

$$P\{Y=3\} = P\{(0,0,5)\} = \frac{1}{8}.$$

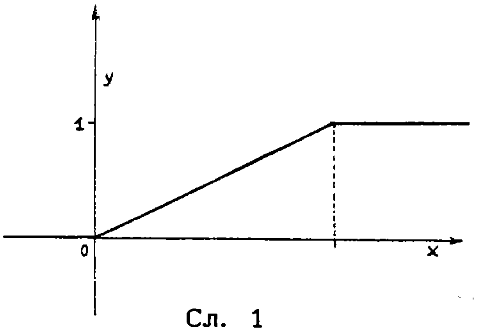
Пример 5. *Во примерот 2 сл.п.* T *- време на пристигнување на бродот има множество можни решенија* $\mathbb{R}_T = [0,60]$, *при што* $P\{T=t\} = 0$, *за секоја вредност на* t. *Да ги разгледаме настаните од видот* $\{T < x\}$, $x\in\mathbb{R}$.

За $x \le 0$, $\{T < x\} = \varnothing$ и $P\{T < x\} = 0$.

Ако $x\in(0,60]$, веројатноста на настанот $\{T < x\}$ може да се одреди со геометриска дефиниција. Имено, бидејќи $\{T < x\} = \{T\in(0,x)\}$ добиваме:

$$P\{T < x\} = \frac{m(0,x)}{m[0,60]} = \frac{x}{60}.$$

Ако $x > 60$, тогаш настанот $\{T < x\}$ е сигурен настан, бидејќи времето на пристигнување на бродот е, во секој случај, не поголемо од 60 минути. Затоа $P\{T < x\} = 1$.



Сл. 1

На овој начин добиваме една функција:

$$P\{T<x\} = \begin{cases} 0, & x\leq 0 \\ \dfrac{x}{60}, & 0<x\leq 60 \\ 1, & x>60 \end{cases}$$

чиј график е даден на сл. 1. Δ

Нека X е случајна променлива дефинирана на $(\Omega,\mathcal{F},P)$, и a и b реални броеви такви што $a<b$. Настаните $\{X < a\}$ и $\{X < b\}$ по дефиниција се случајни настани од $\mathcal{F}$. Настанот $\{X \geq a\}$, како спротивен на $\{X < a\}$, исто така е случаен настан што припаѓа на $\mathcal{F}$. Затоа:

$$\{X \geq a\}\cap\{X < b\} = \{a \leq X < b\}\in\mathcal{F}.$$

Освен тоа се покажува дека за секоја случајна променлива, определена на даден простор на веројатност $(\Omega,\mathcal{F},P)$, настаните $\{X = a\}$, $a\in\mathbb{R}$ се случајни настани од $\mathcal{F}$.

Според сето ова, ако на просторот $(\Omega,\mathcal{F},P)$ е дефинирана сл.п. X, тогаш на фамилијата $\mathcal{F}$ на случајни настани и припаѓаат настаните од облик $\{X < a\}$, $\{X\in[a,b)\}$, $\{X = a\}$ за кои било $a,b\in\mathbb{R}$.

2. ФУНКЦИЈА НА РАСПРЕДЕЛБА

Во оваа точка ќе определиме функција со која на единствен начин може да биде зададена секоја случајна променлива.

Дефиниција: *За случајната променлива X, дефинирана на просторот на веројатност $(\Omega,\mathcal{F},P)$, функцијата:*

$$F_X(x) = P\{X<x\},\ x\in\mathbb{R}$$

се нарекува функција на распределба на веројатностите на X.

За $F(x)$ се користи кратенката ф.р. и пократко се вика функција на распределба.

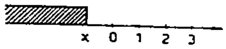
Пример 1. *Да се определи функцијата на распределба на случајната променлива Y - реден број на прво паѓање на 5 во три последователни фрлања на петдинарката (пример 4 од 1.).*

Решение. Сл.п. Y е определена со: $\mathbb{R}_y=\{0,1,2,3\}$.

$$P\{Y=0\} = \frac{1}{8}, \quad P\{Y=1\} = \frac{1}{2}, \quad P\{Y=2\} = \frac{1}{4}, \quad P\{Y=3\} = \frac{1}{8}.$$

Затоа:

за $x\le 0$, $F(x)=P\{Y\in(-\infty,x)\cap\mathbb{R}_y\} = P\{Y\in\emptyset\} = 0$



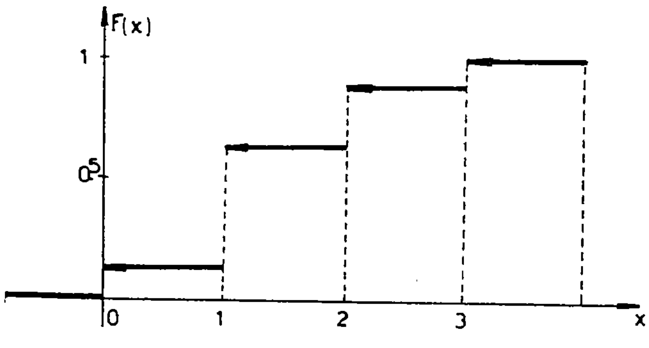
за $0<x\le 1$, $F(x)=P\{Y\in(-\infty,x)\cap\mathbb{R}_y\} = P\{Y\in\{0\}\} = \frac{1}{8}$

за $1<x\le 2$, $F(x)=P\{Y\in(-\infty,x)\cap\mathbb{R}_4\} = P\{Y\in\{0,1\}\} = \frac{5}{8}$

за $2<x\le 3$, $F(x)=P\{Y\in(-\infty,x)\cap\mathbb{R}_4\} = P\{Y\in\{0,1,2\}\} = \frac{7}{8}$

за $x>3$, $F(x)=P\{Y\in(-\infty,x)\cap\mathbb{R}_y\} = P\{Y\in\mathbb{R}_y\} = 1$

Графикот на добиената функција на распределба е даден на сл. 2, при што на ординатната оска е избрана поголема единица отколку на апсцисната оска.



Сл. 2

Пример 2. *Функцијата, добиена во примерот 5 од претходната лекција (1.), е функција на распределба на случајната променлива T - време на пристигнување на бродот.*

Теорема 1. *За да веројатноста случајна променлива X прима вредности од интервал $[a,b)$, $a<b$ важи:*

$$P\{X\in[a,b)\} = F_X(b) - F_X(a).\square \tag{1}$$

Доказ: За кои било a и b, такви што $a < b$ важи:

$$(-\infty,b) = (-\infty,a)\cup[a,b),$$

$$\{X\in(-\infty,b)\} = \{X\in(-\infty,a)\} + \{X\in[a,b)\},$$

т.е.

$$\{X < b\} = \{X < a\} + \{a \le X < b\}.$$

За веројатностите добиваме:

$$P\{X<b\} = P\{X<a\} + P\{a\le X<b\},$$

а од тоа и од дефиницијата на ф.р. следува

$$P\{X\in[a,b)\} = F_X(b) - F_X(a) \text{ ш.т.д.}\square$$

Релацијата (1) овозможува пресметување на веројатности на настани во врска со одредена сл.п. преку вредностите на нејзината ф.р.

Теорема 2. *Секоја функција на распределба ги има следниве особини:*

а) $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$;

б) $0 \le F(x) \le 1.\square$

Доказ:

а) Бидејќи $x_1 < x_2$ следува дека н. $\{X < x_1\}$ го повлекува н. $\{X < x_2\}$, а според особината б) од Т.1, за веројатностите имаме:

$$\{X<x_1\}\subset\{X<x_2\} \Rightarrow P\{X<x_1\}\le P\{X<x_2\}.$$

Применувајќи ја дефиницијата на функција на распределба, добиваме:

$$F(x_1) \le F(x_2).$$

б) Неравенствата следуваат направо од дефиницијата на ф.р. како веројатност.$\square$

Особината под а) значи дека функцијата на распределба е неопаѓачка функција (расте или е константна), додека б) значи дека е таа ограничена. Така, за секој реален број x помал или еднаков на најмалата од можните вредности на сл.п., $F(x) = 0$, а за секој x поголем од најголемата можна вредност на сл. п., $F(x)=1$.

Пример 3*. *Пријателите А и В се договориле да се сретнат во одреден ден и на одредено место меѓу 17 и 18 часот. Пристигнувањето на пријателите е еднакво можно во секој момент во текот на договорениот час. Да се опише случајната променлива Т – време на чекање на првопристигнатиот пријател.*

Решение: Да го означиме со x времето на пристигнување на A, а со y времето на пристигнување на B. Множеството на сите можни исходи на експериментот, определен со договорот за среќавање, е определено со:

$$\Omega = \{(x,y)\,|\,0\le x\le 60,\ 0\le y\le 60\}.$$

Ако се x и y времињата на пристигнување на A и B, тогаш сл. п. T прима вредност $|x-y|$. Множеството од можни вредности на T е $\mathbb{R}_T = [0,60]$. Функцијата на распределба на T ќе биде:

$$F_T(t) = P\{T<t\} = P\{(x,y)\,|\,|x-y|<t\},\ t\in\mathbb{R}.$$

Во примерот 2 (II, 5) веќе определивме веројатност на настан од овој вид, за $t=20$. За која било вредност t, $t\in[0,60]$, веројатноста на $\{T<t\}$ ќе ја определиме со иста постапка. На настанот:

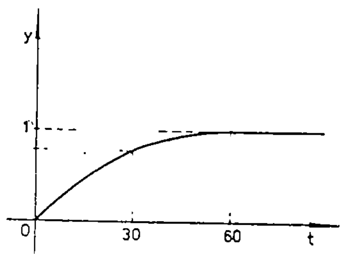
$$A_t = \{(x,y)\,|\,|x-y|<t,\ 0\le x,\ y\le 60\}$$

му одговара делот од квадратот што е осенчен (сл. 3). Имено, од $|x-y| < t$ се добива системот неравенки:

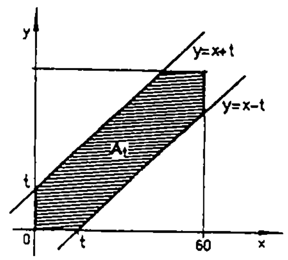
$$\begin{cases} x-y < t \\ x-y > -t, \end{cases}$$

чие решение се точките од осенчената фигура A_t. Затоа користејќи ја геометриската дефиниција на веројатност, за секое $t\in[0,60]$,

$$P(A_t) = \frac{m(A_t)}{m(\Omega)} = \frac{60^2-(60-t)^2}{60^2}$$



Сл. 3



Сл. 4

Така, за функцијата на распределба на T добиваме:

$F(t)=0$, за $t\leq 0$ (времето на чекање е ненегативно),

$F(t) = 1 - (1 - \frac{t}{60})^2$, за $t\in(0,60]$

$F(t) = 1$, за $t \geq 60$.

Значи:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t\leq 0 \\ \frac{t}{30} - \frac{t^2}{60}, & t\in(0,60] \\ 1, & t\geq 60 \end{cases}$$

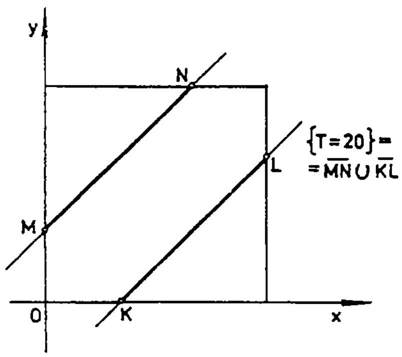
и е претставена на сл. 4.Δ

Пример 4. *Колкава е веројатноста првопристигнатиот пријател да чека: а) точно 20 минути; б) од 20 до 40 минути?*

Решение: а) Настанот $\{T=20\}$ е определен со множеството двојки (x,y) за кои $|x-y| = 20$ и $(x,y)\in\Omega$. Соодветните точки се наоѓаат на правите $y = x-20$ и $y = x+20$ во квадратот со кој е определено Ω. Плоштината на фигурата што се состои од две отсечки е еднаква на нула, од каде што $P\{T=20\} = 0$. Забележуваме дека за секој $t\in[0,60]$, $P\{T=t\} = 0$.

б) Веројатноста на $\{20 < T \leq 40\}$ ја определуваме со помош на функцијата на распределба $F_T(t)$,

$$P\{T\in(20,40]\} = F_T(40) - F_T(20) = \frac{8}{9} - \frac{5}{9} = \frac{1}{3}.$$



Сл. 5

За интервалот $(0,20]$ добиваме $P\{T\in(0,20)\} = \frac{5}{9}$, а за $(40,60]$, $P\{T\in(40,60]\} = \frac{1}{9}$.Δ

3. СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ ОД ДИСКРЕТЕН ТИП

Низ примерите што досега ги разгледавме воочивме два типа на случајни променливи: едни, чиешто множество вредности е дискретно (конечно или бесконечно) и за секој $x_i \in \mathbb{R}_X$, $P\{X=x_i\} \neq 0$ и други, чиешто множество вредности е некој интервал од реални броеви и за кои $P\{X=x\} = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Дефиниција: *Случајната променлива X е од* **дискретен тип**, *ако постои дискретно множество* $\mathbb{R}_X \subset \mathbb{R}$, *такво што* $P\{X \in \mathbb{R}_X\} = 1$.□

Случајните променливи од дискретен тип обично се задаваат со множеството можни вредности $\mathbb{R}_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и низа реални броеви p_1, p_2, ..., $0 < p_i < 1$ и $\sum_i p_i = 1$, такви што $P\{X=x_i\} = p_i$.

Множеството $\mathbb{R}_X$ и низата броеви p_i, $i=1,2,\ldots$, го определуваат **законот на распределба на веројатностите** на сл. п. X.

Распределбата на веројатностите на дискретна случајна променлива може да се толкува како распределба на маса или плоштина, со големина 1, во преброиво многу точки x_1, x_2, x_3, ..., така што на точката x_i ѝ припаѓа маса, односно плоштина p_i, $i=1,2,\ldots$ Графички, во координатен систем таа обично се претставува со низа отсечки, нормални на апсцисната оска, поставени во точките x_1, x_2, ..., со должини p_1, p_2, ..., соодветно. Распределбата на веројатностите може да се претстави и со низа правоаголници, со основа 1, чиишто средини се во точките x_i и имаат висини p_i. На тој начин квадрат со плоштина 1 се разделува на правоаголници со страни 1 и p_i, $i=1,2,\ldots$ кои се распоредуваат во точките x_i, $i=1,2,\ldots$

Пример 1. *Распределбата на веројатностите на случајните променливи X - број на 5 и Y - реден број на фрлање во кое прв пат паднала петка, при три фрлања на петдинарка, прикажани се на сликите 5а и 5б соодветно (Пример 4, 1).*

Пример 2. *Една игра се состои од фрлање на монета додека падне „број", но не повеќе од пет пати. Ако во првото фрлање падне „број", се добива 10 динари, а за успех во секое наредно фрлање 2 динари помалку. Да се опише случајната променлива Y - добивка во играта.*

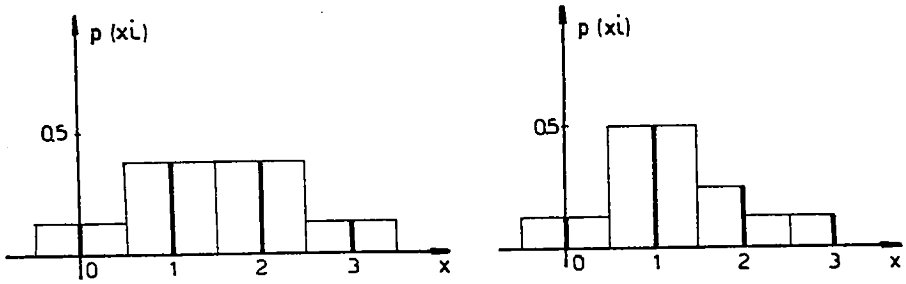
Решение: Случајната променлива Y може да прими вредност

10, 8, 6, 4, 2 и 0 според тоа дали е постигнат успех во првото, второто, третото, четвртото, петтото фрлање или број воопшто не паднал. Ако со A_i го означиме настанот – падна број во i-то фрлање, тогаш од независноста на настаните A_i и $\overline{A}_i$, $i=1,2,3,4,5$, во целина и $P(A_i) = P(\overline{A}_i) = 0,5$, $i = \overline{1,5}$, следува:

$P\{Y=10\}=P(A_1)=0,5;$ $\qquad P\{Y=4\}=P(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap A_4)=0,5^4;$

$P\{Y=8\}=P(\overline{A}_1\cap A_2)=0,5^2;$ $\qquad P\{Y=2\}=P(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_4\cap A_5)=0,5^5;$

$P\{Y=6\}=P(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap A_3)=0,5^3;$ $\qquad P\{Y=2\}=P(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_4\cap\overline{A}_5)=0,5^5.$



а) б)

Сл. 6

Случајната променлива Y е определена со множеството вредности $\mathbb{R}_Y = \{0,2,4,6,8,10\}$ и веројатностите:

$$P\{Y=0\} = 0,5^5 \text{ и } P\{Y=k\} = 0,5^{6-k/2},\ k=2,4,6,8,10.$$

Функцијата на распределба ќе биде:

за $x\leq 0$, $F(x)=0$,

за $0<x\leq 2$, $F(x)=P\{Y\in(-\infty,x)\cap\mathbb{R}_Y\}=P\{Y\in\{0\}\}=0,5^5$,

за $2<x\leq 4$, $F(x)=P\{Y\in(-\infty,x)\cap\mathbb{R}_Y\}=P\{Y\in\{0,2\}\}=2\cdot 0,5^5=0,5^4$,

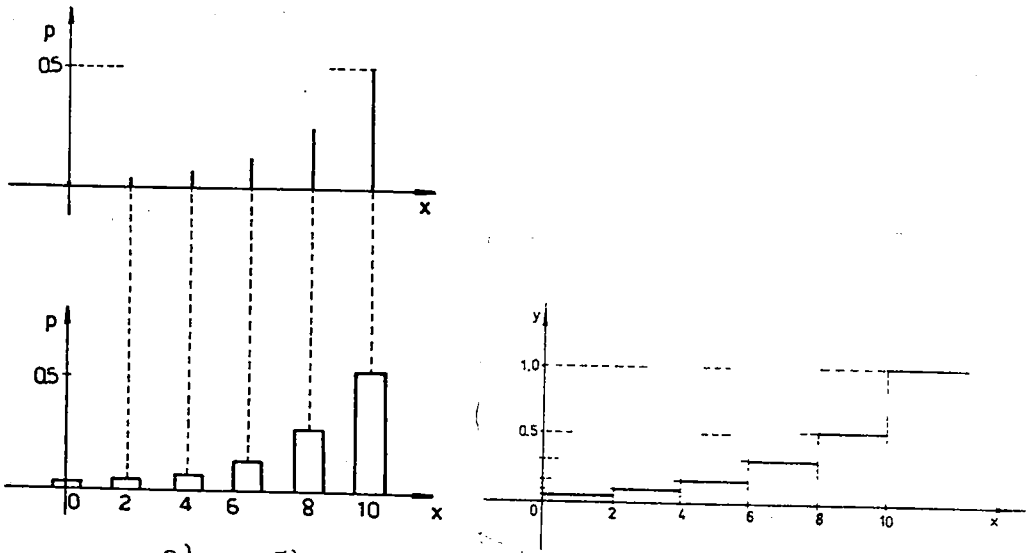
за $4<x\leq 6$, $F(x)=P\{Y\in(-\infty,x)\cap\mathbb{R}_Y\}=P\{Y\in\{0,2,4\}\}=0,5^4+0,5^4=0,5^3$,

за $6<x\leq 8$, $F(x)=P\{Y\in(-\infty,x)\cap\mathbb{R}_Y\}=P\{Y\in\{0,2,4,6\}\}=0,5^3+0,5^3=0,5^2$,

за $8<x\leq 10$, $F(x)=P\{Y\in\{0,2,4,6,8\}=0,5^2+0,5^2=0,5$,

за $x>10$, $F(x)=P\{Y\in\mathbb{R}_Y\}=P\{\Omega\}=1$.

Двата начини за претставување на распределбата на веројатностите и функцијата на распределба на Y дадени се на сл. 7а, 7б и 7в соодветно.



а) б) в)

Сл. 7

Во општ случај функцијата на распределба на случајна променлива Y со множество вредности $\mathbb{R}_Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ е определена на следниов начин:

$$F_Y(x) = \sum_{i: y_i < x} P\{Y=y_i\}, \quad x\in\mathbb{R},$$

каде што сумирањето се врши по сите оние i за коишто вредностите y_i се помали од x. Ако Y прима n различни вредности и ги подредиме по големина: $y_{(1)} < y_{(2)} < \ldots < y_{(n)}$, тогаш за

$$x\in(y_{(k)}, y_{(k+1)}], \quad F(x)=\sum_{i=1}^{k} P\{Y=y_{(i)}\}=F(y_{(k+1)}), \quad k=1,2,\ldots,n-1.$$

Така, заедно со $F(x) = 0$ за $x\le y_{(1)}$ и $F(x)=1$, за $x>y_{(n)}$ добиваме $n+1$ различни вредности на $F_Y(x)$.

Функцијата на распределба на дискретна случајна променлива со конечно множество вредности е прекината во точките определени со множеството можни вредности. Во секоја таква точка ф.р. расте со скок еднаков на веројатноста на таа вредност. Значи во точката $y_k\in\mathbb{R}_Y$ има скок еднаков на $P\{Y=y_k\}$.

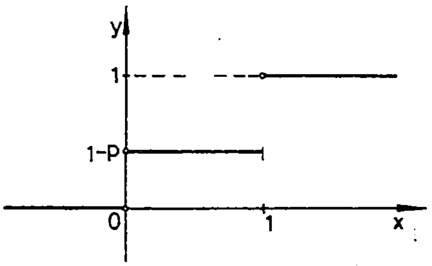
Да забележиме уште дека, вредноста на ф.р. $F_Y(x)$ во одредена точка можеме да ја толкуваме како сума на плоштините на правоаголниците, определени со распределбата, за коишто $y_i<x$. $P\{Y\in[a,b)\}$ може да се толкува како плоштина на оние правоаголници чии средини y_i на основите се содржат во $[a,b)$.

4. ПРИМЕРИ НА СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ ОД ДИСКРЕТЕН ТИП

Ќе се запознаеме со некои од најважните и најчесто користените случајни променливи од дискретен тип.

1°. Индикатор на настан A

Ова е наједноставната случајна променлива, се означува со I_A и се дефинира на следниов начин:



Сл. 8

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega\notin A \\ 1, & \omega\in A. \end{cases}$$

Ако $P(A)=p$, тогаш:

$P\{I_A=1\}=P(A)=p$,

$P\{I_A=0\}=P(A)=1-p$,

или запишано во едно:

$$P\{I_A=k\} = p^k(1-p)^{1-k}, \quad k = 0,\ 1.$$

Нејзината функција на распределба гласи:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 1-p, & 0<x\le 1 \\ 1, & x>1. \end{cases}$$

Така, за секој сл.н. A, може да се дефинира случајна променлива индикатор на н. A.

2°. Биномна распределба $\mathcal{B}(n,p)$

Случајната променлива X има биномна распределба со параметри n и p, ако има распределба на веројатностите:

$$P\{X=k\} = \binom{n}{k} p^{k}(1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,\dots,n,$$

каде што $0<p<1$ и n е определен природен број.

Нека A е настан во врска со опит S и $P(A) = p$. Серијата од n независни и еднакви експерименти S, во коишто се набљудува само појавувањето или не на настанот A, се нарекува **Бернулиева шема** од n експерименти за настанот A. Величината - број на експерименти, од Бернулиевата шема со n експерименти, во кои се појавил настанот A, има биномна распределба со параметри n и p.

Веројатностите $P\{X=k\}$ се означуваат со $P_n(k)$. Нивната сума треба да е еднаква на 1. Навистина:

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = [p+(1-p)]^n = 1$$

при што, кај вториот знак за равенство, ја применивме Биномната формула.

Оваа распределба се користи во сите области на науката и практиката, секогаш кога се изведуваат исти експерименти, или се набљудува иста величина.

3°. Геометриска распределба

Случајната променлива X има геометриска распределба, ако распределбата на веројатности е зададена со

$$P\{X=n\} = P(1-p)^{n}, \quad n\in\{0,1,2,\dots\}.$$

Нека е A настан во врска со опитот S и $P(A) = p$. Случајната променлива „број на изведени опити S до првото појавување на настанот A" кога S се повторува колку што е потребно пати, има геометриска распределба. Од тој вид е случајната променлива - број на изведени фрлања на динар додека падне „петка".

Ако случајната променлива X, со геометриска распределба, прима вредности од конечно множество, т.е. се изведуваат најмногу одреден број n на експерименти, тогаш $\mathbb{R}_X=\{0,1,\dots,n+1\}$.

$$P\{X=k\} = p(1-p)^k \text{ за } 0\le k\le n-2.$$

Сл. п. X ќе прими вредност n, т.е. ќе бидат изведени n опити, ако во првите $n-1$ не се појавил н. A. Затоа:

$$P\{X=n\} = (1-p)^{n-1}.$$

4°. Поасонова распределба

Една од најзначајните распределби, според нејзината примена, е т.н. Поасонова распределба. Таа се среќава како распределба на број на радиоактивни честици емитувани за одредено време, број на земјотреси, сообраќајни незгоди, телефонски повици во една централа, за одредено време и воопшто како распределба на број на појавувања на т.н. **ретки настани.**

Множеството на можни вредности на оваа случајна променлива е $\mathbb{R}_X = \{0,1,2,3,\dots\} = \{0\}\cup\mathbb{N}$, а веројатностите се:

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k\in\mathbb{R}_X,$$

каде што λ е позитивна константа - **параметар на распределбата.**

Бидејќи $\{0\}\cup\mathbb{N}$ е множеството на сите можни вредности на ова сл. п. за нејзините веројатности важи:

$$\sum_{k\in\mathbb{R}_X} P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = 1.$$

Пример 3. *Бројот на повиците во одреден интервал во една централа е случајна променлива со Поасонова распределба со параметар $\lambda=2$. Да се определи веројатноста а) во одреден интервал да има точно 5 повици, б) да има повеќе од 5 повици.*

Решение:

а) $P\{x=5\} = \dfrac{2^5}{5!}e^{-2}$,

б) Со B да го означиме настанот „има повеќе од 5 повици". Спротивниот настан $\overline{B}$ - бројот на повици е помал или еднаков на 5 ќе се појави ако има 0, или 1, или 2, или 3, или 4, или 5 повици, т.е.

$$\overline{B} = \{X=0\} + \{X=1\} + \{X=2\} + \{X=3\} + \{X=4\} + \{X=5\}$$

$$P(\overline{B}) = \sum_{k=0}^{5} P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{5} \frac{2^k}{k!}e^{-2},$$

така што:

$$P(B) = 1-P(\overline{B}) = 1 - \sum_{k=0}^{5} \frac{2^k}{k!}e^{-2}.$$

Постојат таблици во кои за дадени вредности на λ и k може да се прочита $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, а за λ и m дадени се вредностите на $\sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ

1. *Веројатноста да се погоди целта во еден обид е 0,7. Цената на едно стрелање е 1 000 динари. Се пука сѐ додека целта не падне. Ако падне ќе се оствари добивка од 5 000 динари. Гаѓањата се независни. Да се претставаат следниве случајни променливи:*

а) X: број на гаѓања, ако гаѓањата завршат по 5. обид;

б) Y: финансиски ефект, ако играчот пред да почне да стрела имал 5 000 динари, а не може да гаѓа на вересија;

в) Z: број на гаѓања, ако се гаѓа неограничен број пати.

Решение: *Се дефинираат настаните:*

A: целта е погодена во еден обид

B_i*: извршени се* i *гаѓања*

$P(A) = 0,7$

$P(B_1) = P(A) = 0,7$

$P(B_2) = P(\overline{A}A) = 0,3\cdot 0,7 = 0,21$

$P(B_3) = P(\overline{A}\overline{A}A) = 0,3^2\cdot 0,7 = 0,063$

$P(B_4) = P(\overline{A}\overline{A}\overline{A}A) = 0,3^3\cdot 0,7 = 0,0189$

a) $P(X=1) = P(B_1) = 0,7$

$P(X=2) = P(B_2) = 0,21$

$P(X=3) = P(B_3) = 0,063$

$P(X=4) = P(B_4) = 0,0189$

$P(X=5) = P(\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}) = 0,3^4 = 0,0081$

$$X: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0,7 & 0,21 & 0,063 & 0,0189 & 0,0081 \end{bmatrix}$$

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5) = 1.$

б) Ако целта е погодена во првиот обид финансискиот ефект е 5000–1000 = 4000 динари. Нека е Y_i: добивка ако целта е погодена дури во i-тиот обид.

$Y_1 = 4000$

$Y_2 = 3000$

$Y_3 = 2000$

$Y_4 = 1000$

$Y_5 = 0$

Y ги прима вредностите -5000, 0, 1000, 2000, 3000 и 4000.

$P(Y=-5000) = P(\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}) = 0,00243$

$P(Y=0) = P(\overline{A}\overline{A}\overline{A}\overline{A}A) = 0,00567$

$P(Y=1000) = P(B_4)$

$P(Y=2000) = P(B_3)$

$P(Y=3000) = P(B_2)$

$P(Y=4000) = P(B_1)$

$$Y: \begin{bmatrix} -5000 & 0 & 1000 & 2000 & 3000 & 4000 \\ 0,00243 & 0,00567 & 0,0189 & 0,063 & 0,21 & 0,7 \end{bmatrix}$$

в) Ако гаѓањата се изведуваат неограничен број пати тогаш:

$$P(B_i) = P(\underbrace{\bar{A}\ldots\bar{A}}_{i-1}A) = 0,3^{i-1}0,7, \quad i\in\mathbb{N}$$

Распределбата на случајната променлива Z е:

$$Z: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ 0,7 & 0,3\cdot 0,7 & 0,3^2\cdot 0,7 & \ldots & 0,3^{n-1}\cdot 0,7 & \ldots \end{bmatrix}$$

$$P(Z=1)+P(Z=2)+\ldots+P(Z=n)+\ldots=0,7[1+0,3+0,3^3+\ldots+0,3^{n-1}+\ldots]$$

$$P(Z=1)+P(Z=2)+\ldots P(Z=n)+\ldots = 0,7\cdot\frac{1}{1-0,3} = 1.$$

При собирањето се користи формулата:

$$a^0 + a^1 + a^2 + \ldots + a^n + \ldots = \frac{1}{1-a} \qquad (**)$$

каде $|a| < 1$.

2. Познато е дека веројатноста да се роди машко дете е 0,51. Да се најдат законот на распределба и да се претстави експлицитно и графички функцијата на распределба на случајната променлива X - бројот на машки деца во семејство со 5 деца.

Решение: Во произволно семејство со 5 деца може да има најмалку 0, а најмногу 5 машки деца.

A: детето е машко $\quad P(A) = 0,51$

Да го разгледаме специјалниот случај кога семејството има 3 машки деца. Меѓу петте деца, машки можат да бидат првите три, првите две и четвртото, првите две и петтото итн., последните три деца. Три машки деца од пет деца можат да бидат родени (според редоследот) на:

$$C_5^3 = \binom{5}{3} = 10 \text{ начини.}$$

Раѓањето на машки и женски деца е независно. Затоа веројатноста дека точно три од пет деца се машки е:

$$C_5^3\cdot 0,51^3\cdot 0,49^2 = 10\cdot 0,51^3\cdot 0,49^2 = 0,3185$$

X: број на машки деца во петчлено семејство.

$P(X=i)=C_5^i p^i q^{5-i}$, каде $i=0,\ldots,5$, $p=P(A)=0,51$, $q=1-p=P(A)$

$$X: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0,0282 & 0,1470 & 0,3061 & 0,3185 & 0,1657 & 0,0345 \end{bmatrix}$$

Според дефиницијата на функција на распределба $F(x) = P\{X<x\}$, *имаме:*

за $x \le 0$, $F(x)=0$,

за $0<x\le 1$, $F(x)=P\{X=0\}=0,0282$,

за $1<x\le 2$, $F(x)=P\{X=0\}+P\{X=1\}=0,1752$,

за $2<x\le 3$, $F(x)=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}= 0,4813$,

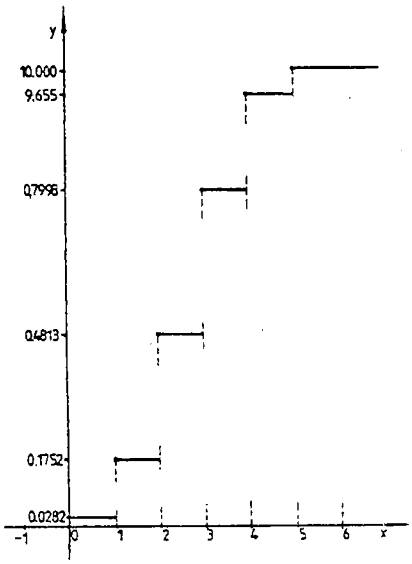
за $3<x\le 4$, $F(x)=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}=0,7998$,

за $4<x\le 5$, $F(x)=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}+P\{X=4\}=0,9655$,

за $x>5$, $F(x)=P\{X\in\{0,1,2,3,4,5\}\}=1$.

Да ја претставиме функцијата графички. Таа има прекин во вид на скок во точките 0, 1, 2, 3, 4 и 5 (сл. 9).

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 0,0282, & 0<x\le 1 \\ 0,1752, & 1<x\le 2 \\ 0,4813, & 2<x\le 3 \\ 0,7998, & 3<x\le 4 \\ 0,9655, & 4<x\le 5 \\ 1, & x>5 \end{cases}$$



Сл. 9

ПЕТ ЗАДАЧИ

1. *Се фрлаат две коцки и се набљудува збирот на вредностите на двете коцки само во случаите кога и на двете се појавува парен број точки. Да се опише со законот и со функцијата на распределба случајната променлива X - збир на точките што паднале на коцките.*

2. *Во еден сад има 8 бели и 4 црни топчиња. Се извлекуваат три и се утврдува бројот на белите топчиња меѓу нив. Да се опише случајната променлива X - број на белите топчиња.*

3. *Случајната променлива X ги прима вредностите 0, 1, 2, 3, 4 и 5 со веројатности:*

$$f(i) = P(X=i) = \frac{2^i}{i!}a, \text{ каде } a\geq 0, \ i=0,\dots,5.$$

Да се определи, за кое a функцијата f(i) е закон на распределба на веројатностите на случајна променлива.

4. *Случајната променлива X има функција на распределба:*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x\leq -2 \\ 0,2 & -2<x\leq 1 \\ 0,5 & 1<x\leq 2 \\ 0,6 & 2<x\leq 4 \\ 0,8 & 4<x\leq 7 \\ 1, & x>7 \end{cases}$$

Да се определи законот на распределба на веројатностите.

5. *Случајната променлива X е зададена со функцијата на распределба:*

$$F_X(x) = \begin{cases} ((a+b)/10)^2 & x\leq 2 \\ ((2a+b)/10)^2 & 2<x\leq 3 \\ ((3a+b)/10)^2 & 3<x\leq 4 \\ ((4a+b)/10)^2 & 4<x\leq 5 \\ ((5a+b)/10)^2 & 5<x\leq 5 \\ ((6a+b)/10)^2 & x>6 \end{cases}$$

За кои вредности на a и b, $F_X(x)$ е функција на распределба? Да се определи законот на распределба на веројатностите.

5. СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ ОД НЕПРЕКИНАТ ТИП

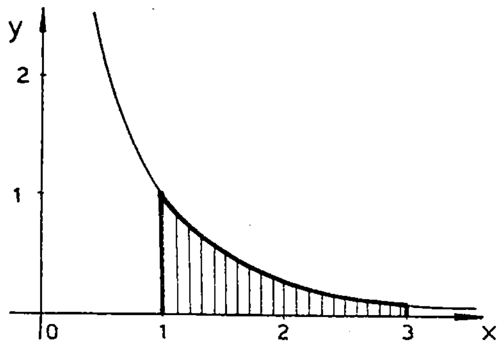
Разгледувајќи порано (во III 2) примери на случајни променливи, видовме дека оние, чиешто множество на можни вредности е интервал од реални броеви и $P\{X=x\}=0$, $\forall x\in\mathbb{R}_X$, не можат да бидат опишани (определени) со веројатностите на поодделни вредности, па затоа се разгледуваат настани од обликот $\{X<x\}$ или $\{a\le X<b\}$.

Пред да ги разгледаме подетално случајните променливи од овој тип, ќе се договориме за тоа што ќе подразбираме под плоштина на т.н. криволиниски трапез.

Нека $\varphi(x)$ е ненегативна и непрекината функција на интервалот (a,b) (каде што може да биде $a=-\infty$ или $b=\infty$).

Криволиниски трапез на функцијата $\varphi(x)$ на интервалот $[c,d]$, $a<c<d<b$ е фигурата (во xOy рамнината) образувана од графикот на функцијата $\varphi(x)$, x-оската и ординатите $x=c$ и $x=d$.

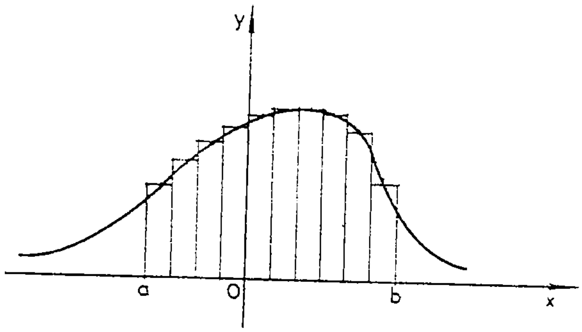
Пример 1. *Функцијата* $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *е ненегативна и непрекината на* $(0,\infty)$. *Нејзиниот график (за* $x>0$*) и криволиниски трапез на интервалот* $[1,3]$ *претставени се на сл. 10.*



Сл. 10

Плоштина на криволинискиот трапез на функцијата $\varphi(x)$ на интервал $[c,d]$, се определува со постапка аналогна, на пример, на таа за определување на плоштина на круг. Во овој случај отсечката $[c,d]$ ја делиме со точките $c=x_o<x_1<\ldots<x_n=d$ на n еднакви делови. Ја наоѓаме средината на секоја од отсечките (интервалите) $[x_i,x_{i+1}]$ и ја определуваме соодветната вредност на $\varphi(x)$. Конструираме правоаголници на секој од

интервалите, со основа еднаква на нивната должина $(\frac{d-c}{n})$ и висина еднаква на вредноста на функцијата $\varphi(x)$ во средната точка (сл. 11). Така добиената фигура го покрива криволинискиот трапез со едредени отстапувања. Нејзината плоштина е една оценка на плоштината на криволинискиот трапез.



Сл. 11

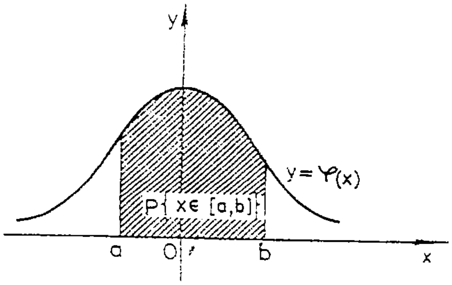
Ако се зголеми бројот на делбените точки x_i, тогаш фигурата составена од правоаголници помалку ќе отстапува од криволинискиот трапез. Плоштините на фигурите од правоаголници конструирани на интервалот $[c,d]$ зависат од бројот n на делбени точки. Така се формира низа S_n од плоштини, чијашто гранична вредност, кога $n \to \infty$, ако постои, е плоштина на криволинискиот трапез на функцијата $\varphi(x)$ на интервалот $[c,d]$, или во граници од c до d.

Дефиниција. *Случајната променлива X е од непрекинат тип, ако постои ненегативна функција $\phi_X(x)$, таква што $P\{X\in[a,b]\}$ е еднаква на плоштината на криволинискиот трапез на функцијата $\phi(x)$ во граници од a до b.*

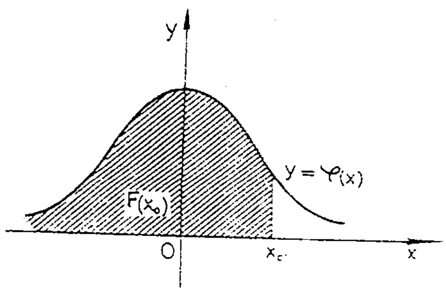
Функцијата $\phi_X(x)$ ја нарекуваме **густина на распределба** на веројатностите на случајната променлива X, или кратко **густина на распределба** (г.р.).

Бидејќи за случајните променливи од непрекинат тип важи $P\{X=x\}=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, имаме (сл. 12a):

$$P\{X\in[a,b)\} = P\{X\in[a,b]\} = P\{X\in(a,b]\} = P\{X\in(a,b)\}.$$



Сл. 12 a)

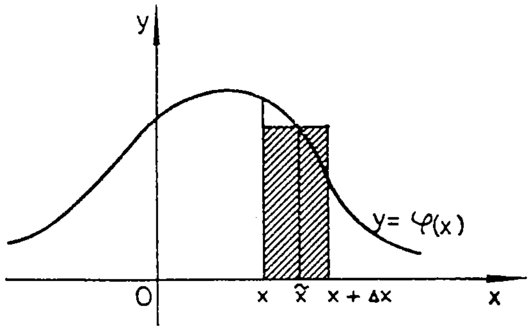


Сл. 12 б)

Од дефиницијата на функција на распределба следува дека, за определено x_o $F(x_o)$ е еднаква на плоштината на фигурата ограничена со апсцисната оска, ординатата $x=x_o$ и графикот на густината на распределба (сл. 12 б).

Од особината $F(\infty) = P\{X<\infty\} = P\{X\in(-\infty,\infty)\} = P(\Omega)=1$ следува дека, плоштината што ја заградува графикот на густината на распределба и x-оската, во граници определени со множеството на можни вредности на X, е еднаква на 1.

Ова ни овозможува, распределбата на случајна променлива од непрекинат тип да ја толкуваме како распределба на маса, со големина 1, на интервал определен со множеството на можни вредности, така што таа е „разлеана" на фигурата ограничена со кривата $y=\phi(x)$ и x-оската, во граници определени со $\mathbb{R}_X$.



Сл. 13

Забелешка: Нека $x\in\mathbb{R}_X$, $\Delta x>0$, $P\{X\in[x,x+\Delta x)\}=F(x+\Delta x)-F(x)$ ја дава распределбата на веројатности на интервали со должина Δx.

Веројатноста

$P\{X\in[x,x+\Delta x)\}$

можеме да ја определиме приближно со:

$$\phi(x)\cdot\Delta x \text{ или } \phi(x+\Delta x)\cdot\Delta x,$$

но може да се најде $\tilde{x}\in(x,x+\Delta x)$, така што:

$$P\{X\in(x,x+\Delta x)\} = \phi(\tilde{x})\cdot\Delta x \quad \text{(сл. 13)}.$$

Величината $\dfrac{P\{X\in[x,x+\Delta x)\}}{\Delta x}$ ја определува средната густина на распределба на веројатностите на интервалите со должина Δx. Кога Δx се намалува неограничено, ја добиваме вредноста $\phi(x)$ на функцијата која, сега е јасно зошто, ја нарековме густина на распределба. Таа истовремено ја дава и брзината на промената на $F(x)$.

6. ПРИМЕРИ НА СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ ОД НЕПРЕКИНАТ ТИП

1°. Рамномерна распределба

Случајната променлива X има рамномерна распределба на интервалот (a,b), $a<b$, ако има густина на распределба:

$$\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{за } x\in[a,b] \\ 0, & \text{за } x\notin[a,b] \end{cases}$$

Тоа е распределба на случајна променлива со множество на можни вредности $\mathbb{R}_X = [a,b]$ при што сите вредности се еднакво можни. Затоа со примена на геометриската веројатност се добива дека за $x\in[a,b]$:

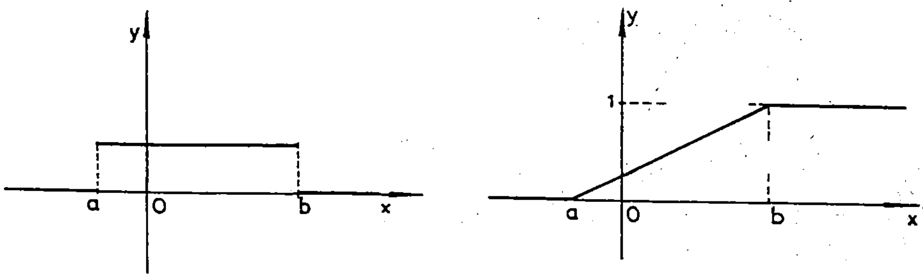
$$F(x) = P\{X\in(-\infty,x)\} = P\{X\in(-\infty,x)\cap[a,b]\} =$$

$$= P\{X\in[a,x]\} = \frac{m[a,x]}{m[a,b]} = \frac{x-a}{b-a}.$$

За $x < a$, $F(x) = P\{X<x\} = 0$, бидејќи X не може да прими вредности помали од a. За $x > b$, $F(x) = P\{X<x\} = 1$, бидејќи сите можни вредности на X се помали од b. Според тоа:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{за } x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{за } x\in[a,b] \\ 1, & \text{за } x>b, \end{cases}$$

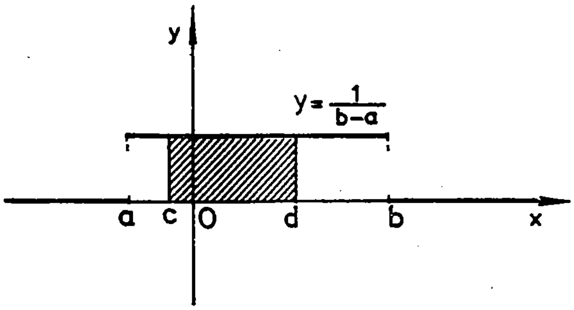
а графиците на $f(x)$ и $F(x)$ дадени се на сликата 14.



Сл. 14

За сл. п. X со рамномерна распределба едноставно се добива $P\{X\in[c,d]\}$, $c,d\in[a,b]$ и функцијата на распределба. Во овој случај криволинискиот трапез е правоаголник со основа $d-c$ и висина $\frac{1}{b-a}$ (сл. 15), така што:

$$P\{X\in[c,d]\} = \frac{d-c}{b-a}.$$



Сл. 15

Рамномерната распределба се јавува како распределба на различни величини: должина на време на чекање, должина на траење на некои операции, момент на појавување на различни природни и технички појави, грешки на заокружување на броевите кај сметачките машини и др. Така, на пример, ако се врши заокружување до една децимала, тогаш величината „грешка на заокружување" е сл. п. со рамномерна распределба на интервалот $[-0,05,\ 0,05]$.

Г** 2°. Експоненцијална распределба

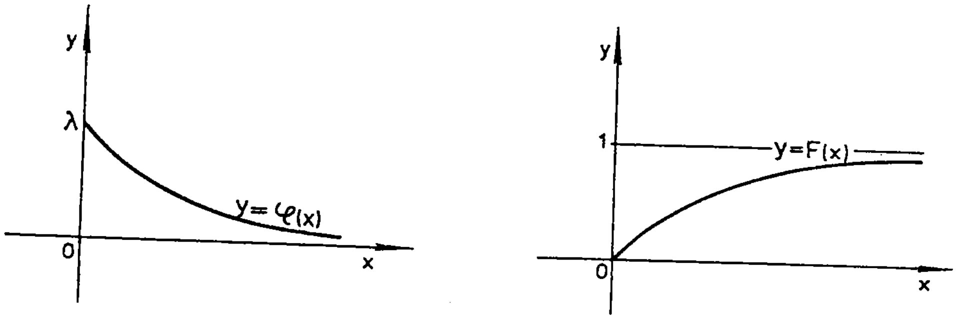
Случајната променлива X определена со густина на распределба:

$$\phi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}, \quad \lambda > 0,$$

каде што λ е позитивна константа - параметар на распределбата, велиме дека има експоненцијална распределба. Множеството на можни вредности е $\mathbb{R}_X = (0,\infty)$, а функцијата на распределба е определена со:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{за } x\leq 0 \\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{за } x>0. \end{cases}$$

Графиците на функциите $\Phi(x)$ и $F(x)$ се дадени на сл. 16.



Сл. 16

Експоненцијална распределба имаат низа величини што се јавуваат во природните, техничките, социјалните и економските процеси. Експоненцијална распределба имаат, на пример, величините: „век" на механизам (биолошки или технички), време на радиоактивно распаѓање, време меѓу појавата на два земјотреси, време меѓу последователни телефонски повици, последователно пристигнување на транспортни средства и др.

Експоненцијалната распределба е врзана со Поасоновата распределба. Ако е X сл. п. - број на појавување на настан A за одреден интервал на време, која има Поасонова распределба, тогаш сл. п. Y - должина на интервалот меѓу последователно појавување на н. A има експоненцијална распределба со ист параметар. **]

3°. Нормална распределба $N(a,\sigma)$

Случајната променлива X има нормална распределба ако е определена со густина на распределба:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty<x<\infty.$$

Множеството на можни вредности на оваа случајна промен-

9*

лива е целото множество на реални броеви, a е произволна константа, а σ е позитивна константа.

Нека е r кој било позитивен реален број. Ако ги определиме вредностите на функцијата $\phi(x)$ за $x=a+r$ и $x=a-r$, добиваме:

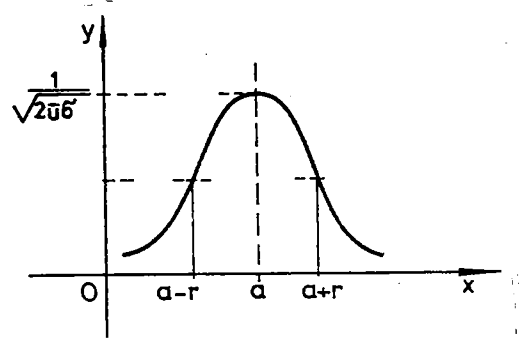
$$\varphi(a-r) = \varphi(a+r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

што следува дека правата $x=a$ е оска на симетрија на графикот на функцијата $y=\varphi(x)$.

Функцијата $\varphi(x)$ има најголема вредност за $x=a$

$$\varphi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

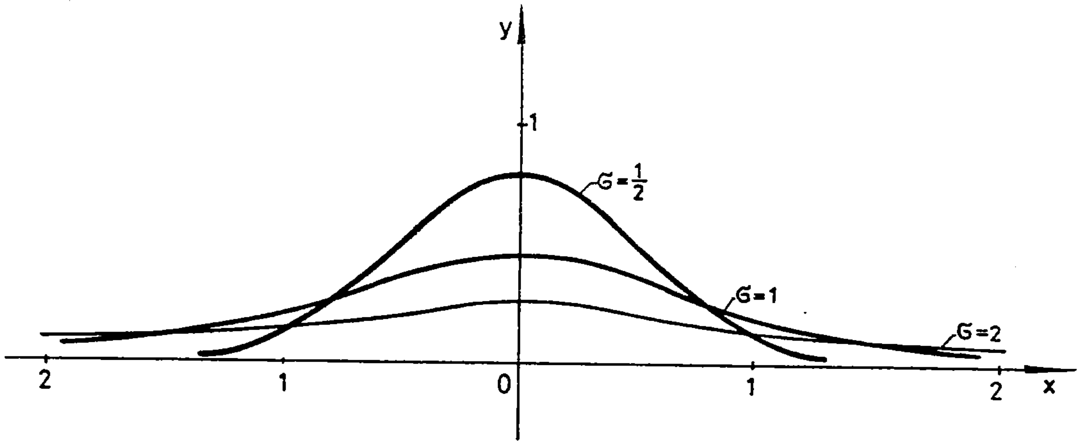
Забележуваме дека $\varphi(a)$ е обратно пропорционална со σ. Типичен график на функцијата $\varphi(x)$ (за $a>0$) даден е на сл. 17.



Сл. 17

На сл. 18 се дадени графиците на г.р. за различни вредности на σ, и $a=0$. Во специјалниот случај $a=0$, $\sigma=1$ се добива т.н. нормирана нормална распределба со густина:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty<x<\infty.$$

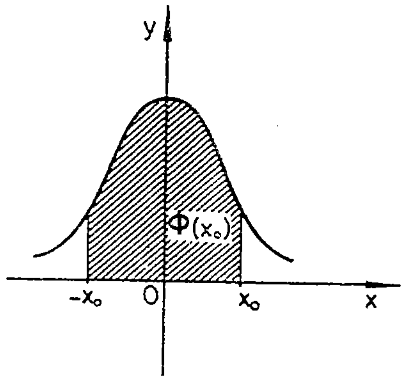


Сл. 18

За распределбата $N(0,1)$ постојат таблици на функцијата $\varphi_o(x)$ и функцијата:

$$\Phi(z) = P\{X\in[-z,z]\}, \quad z\geq 0,$$

кадешто X е сл. п. со распределба $N(0,1)$. Согласно на толкувањето на веројатноста како плоштина, $\Phi(z)$ ја определува плоштината на криволинискиот трапез на функцијата $y=\varphi_o(x)$ на интервалот $[-z,z]$ (сл. 19).



Сл. 19

Со помош на оваа таблица можат да се определат веројатностите на различни настани за случајна променлива со распределба $N(0,1)$.

Така, на пример, за функцијата на распределба добиваме:

$$x>0, \quad F(x) = P\{X\in(-\infty,x)\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(x) = \frac{1}{2}(1+\Phi(x)),$$

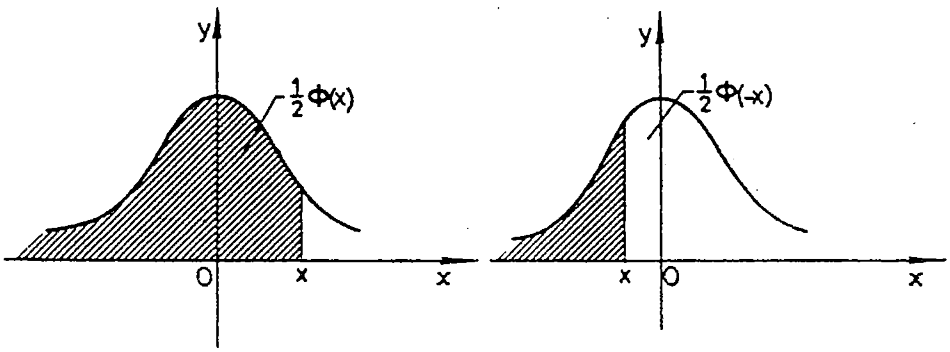
(сл. 20 а)

$$x<0, \quad F(x) = P\{X\in(-\infty,x)\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi(-x) = \frac{1}{2}(1-\Phi(-x)),$$

(сл. 20 б). При тоа го користевме фактот:

$$P\{X\in(-x,0)\} = P\{X\in(0,x)\} = \frac{1}{2}\Phi(x).$$

Функциите $\varphi_o(x)$ и $\Phi(x)$ се табелирани само за $x\geq 0$, затоа што $\varphi_o(-x) = \Phi(X)$, додека за примената на $\Phi(x)$ доволни се само вредностите за позитивни x.



Сл. 20

Така, на пример:

1°. $\varphi_o(1,33) = 0,16474$, $\varphi_o(-2,15) = \varphi_o(2,15)=0,03955$

2°. $\Phi(1,64) = 0,9$, $\Phi(1,96) = 0,95$.

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ

1. *Случајната променлива X е зададена со законот:*

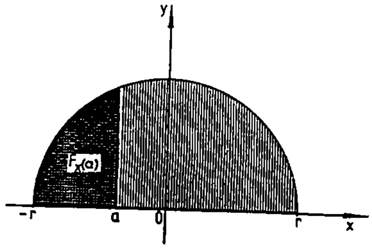
$$p(x) = \begin{cases} \sqrt{r^2-x^2}, & -r\leq x\leq r \\ 0, & x>r \text{ или } x<-r. \end{cases}$$

Да се определи:

а) за кое r, p(x) е густина на распределба?

б) колкава е вредностана $F(0)$ и $F(1)$?

Решение. *Во интервалот $[-r,\ r]$ функцијата $p(x)$ го претставува горниот дел од кружницата чиј центар е во $(0,0)$, а радиусот е r. Имено, ако означиме $y=p(x)$, за $x\in[-r,\ r]$, тогаш $y=\sqrt{r^2-x^2}$, т.е. $x^2+y^2=r^2$ за $y\geq 0$.*



Сл. 21

а) Условот да биде $p(x)$ густина на распределба е плоштината ограничена од кривата $y=p(x)$ и x-оската е 1.

$$\frac{1}{2}r^2\pi = 1 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi} \approx 0,8.$$

б) $$F(0) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}r^2\pi\right] = \frac{1}{2}$$

$$F(1) = 1,\ бидејќи\ 1 > \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi}.$$

2. *Еден систем работи со иста брзина на временски интервали од 1 до 2 часот и од 4 до 5 часот, а со два пати поголема во интервалот од 2 до 4 часот. Да се претстават графички:*

а) *густината на распределба и*

б) *функцијата на распределба*

на случајната величина која ја опишува брзината на системот, ако до 1 часот и по 5 часот системот не работи.

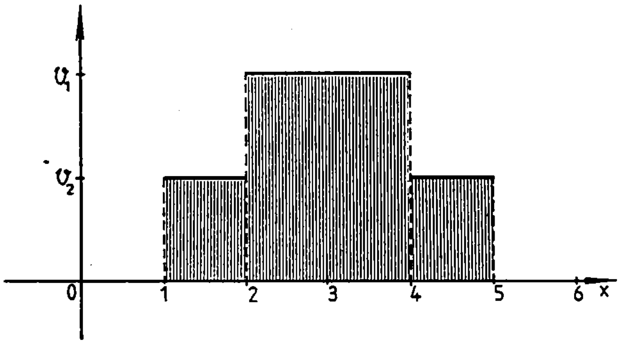
а)

$$p(x) = \begin{cases} v & t\in[1,2)\quad [4,5] \\ 2v & t\in[2,4] \\ 0 & t\in[1,5] \end{cases}$$

плоштината под кривата е $P_\ell = 1\cdot v+2\cdot 2v+1\cdot v = 1$

Константата V *е* $\frac{1}{6}$.

$$p(x) = \begin{cases} 1/6 & t\in[1,2) \quad [4,5] \\ 2/6 & t\in[2,4) \\ 0 & t\in[1,5] \end{cases}$$



Сл. 22

$F(x) = 0$ за $x\le 1$

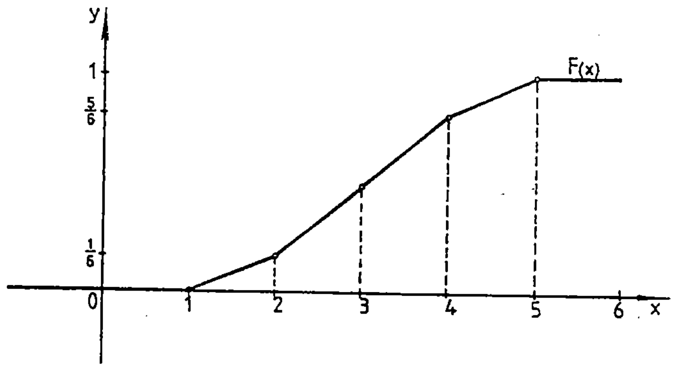
$F(x) = (x-1)\frac{1}{6}$ ако $x\in(1,2]$

$F(x) = \frac{1}{6}+\frac{2}{6}(x-2)$ ако $x\in(2,4]$

$F(x) = \frac{1}{6}+\frac{4}{6}+\frac{1}{6}(x-4)$ ако $x\in(4,5]$

$F(x) = 1$ за $x>5$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x\le 1 \\ \frac{x}{6} - \frac{1}{6} & 1<x\le 2 \\ \frac{x}{3} - \frac{1}{2} & 2<x\le 4 \\ \frac{x}{6} + \frac{1}{6} & 4<x\le 5 \\ 1 & x>5 \end{cases}$$



Сл. 23

7. ДВОДИМЕНЗИОНАЛНИ СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

Веќе утврдивме дека во низа експерименти е можно на секој елементарен настан да му се придружат два или повеќе реални броеви, како што се вредности на две или повеќе карактеристики на појавата што се набљудува. При секое посериозно испитување на некоја појава потребно е истовремено набљудување на повеќе величини, за да се утврди дали се тие меѓусебе зависни, а потоа да се определи и видот на зависноста.

Поради тоа е неопходно да се разгледува заедничката распределба на величините што можат да се сметаат за случајни променливи. Ќе се задржиме подетално само на т.н. дводимензионални случајни променливи.

А. ДЕФИНИЦИЈА И ПРИМЕРИ

Дефиниција: *Подредената двојка (X,Y), каде што X и Y се случајни променливи, дефинирани на ист простор на веројатност $(\Omega,\mathcal{F},P)$, се нарекува дводимензионална случајна променлива или дводимензионален случаен вектор.* □

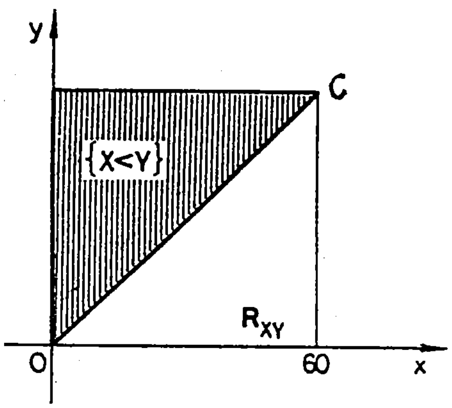
За случаен вектор (X,Y) ќе користиме кратенка сл.в. (X,Y).

Вредноста на сл.в. (X,Y) се подредени двојки реални броеви (x,y), т.е. елементи на $\mathbb{R}^2$. Множеството на можни вредности на сл.в. (X,Y) ќе го означуваме со $\mathbb{R}_{XY}$.

Пример 1. *Во врска со задачата за средба на пријателите А и В може да се дефинираат случајни променливи X - време на пристигнување на А и Y - време на пристигнување на В. Множеството елементарни настани беше определено со* $\{(x,y)\mid 0\le x\le 60,\ 0\le y\le 60\}$. *Според условите на задачата, секоја од променливите X и Y има рамномерна распределба на* $[0,60]$, *а сл.в.* (X,Y) *има множество на можни вредности* $\mathbb{R}_{XY}=[0,60]\times[0,60]$. *Веројатноста на една одредена вредност* (x,y) *на сл.в.* (X,Y) *можеме да ја одредиме со геометриската дефиниција:*

$$P\{(X,Y) = (x,y)\} = P\{X=x,Y=y\} = \frac{m(x,y)}{m(\mathbb{R}_{XY})} = 0.$$

Според тоа разгледуваниот настан е скоро невозможен.



Сл. 24

Настанот „пријателот A дојде порано од B", е определен со сите двојки (x,y) за кои $x<y$. Затоа $P\{(x,y)\mid(x,y)\in\mathbb{R}_{XY},\ x<y\} = P\{X<Y\} = 0,5$ (сл. 24). Настанот „пријателите стигнале во исто време" е определена со множеството:

$$\{(x,y)\mid(x,y)\in\mathbb{R},\ x=y\} = \overline{OC}.$$

$$P\{X=Y\} = \frac{m(\overline{OC})}{m(\mathbb{R}_{XY})} = 0.$$

Плоштината на отсечка е еднаква на 0, па настанот $\{X=Y\}$ е скоро невозможен. Δ

Пример 2. *Експериментот се состои во фрлање едно подруго монета и тетраедар чии страни се означени со броевите 0, 0, 1 и 2, при што се набљудува страната со која тетраедарот лежи на рамнината. Можеме да дефинираме две случајни променливи: X - индикатор на настанот „падна број" на динарот, Y - бројот на страната со која тетраедарот лежи на рамнината.* (X,Y) *е случаен вектор со множество вредности* $\mathbb{R}_{XY} = \{0,1\}\times\{0,1,2\}$, *при што, бидејќи резултатите од фрлањето на динарот и тетраедарот се заемно независни:*

ТАБЕЛА 1

X \ Y	0	1	2
0	0,25	0,125	0,125
1	0,25	0,125	0,125

$$P\{(X,Y)=(i,k)\}=P(\{X=i\}\cap\{Y=k\})= \\ = P\{X=i\}\cdot P\{Y=k\}$$

за секое $(i,k)\in\mathbb{R}_{XY}$. Поаѓајќи $P\{X=0\} = P\{X=1\} = 0,5$ и $P\{Y=0\}=0,5$, $P\{Y=1\}=P\{Y=2\}=0,25$ ја добиваме табелата 1.

Случајните вектори, во општ случај, се задаваат со заедничка функција на распределба на веројатностите.

Дефиниција: *Функцијата на распределба $F(x,y)$ на дводимензионалниот случаен вектор (X,Y), дефиниран на $(\Omega,\mathcal{F},P)$, е определена со:*

$$F(x,y) = P(\{X<x\}\cap\{Y<y\}),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2. \ \square$$

При запишувањето на функцијата $F(x,y)$ обично се изоставуваат заградите и симболот $\cap$, т.е. се пишува:

$$F(x,y) = P\{X<x,\ Y<y\}.$$

Ако се случајните променливи X и Y од дискретен тип, тогаш и сл.в. (X,Y) е од дискретен тип. Случаен вектор од дискретен тип е наполно определен со множеството на можни вредности $\mathbb{R}_{XY}$ и веројатностите:

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p(x_i,y_j),\ (x_i,y_j)\in\mathbb{R}_{XY};\ \sum_i\sum_j p(x_i,y_j)=1 \qquad (1)$$

Веројатностите (1) и $\mathbb{R}_{XY}$ ја определуваат распределбата на веројатностите на сл.в. (X,Y). Во овој случај, распределбата на веројатностите може да се толкува како распределба на маса со големина 1 на координатната рамнина xOy, така што, во точката (x_i,y_j) има маса $p(x_i,y_j)$, $(x_i,y_j)\in\mathbb{R}_{XY}$. Така за сл.в. (X,Y) од пример 2: претставувањето на распределбата е прикажана на сл. 25 (на два начини: со распределба на отсечки со должини $p(x_i,y_j)$ 25 а и призми со волумени $p(x_i,y_j)$ 25 б во точки x_i, y_j соодветно).

Пример 3. *Да се најде функцијата на распределба на сл.в. (X,Y) од примерот 2.*

Решение.

1° Кога е $x\le 0$ или $y\le 0$, настанот $\{X<x\}=\varnothing$ или $\{Y<y\}=\varnothing$ соодветно, така што:

$x \leq 0 \vee y \leq 0, \quad F(x, y) = P\{X<x, Y<y\} = P(\emptyset) = 0.$

2° За $0 \leq x \leq 1$, $\{X<x\} = \{X=0\}$, имаме:

$0<y\leq 1, \quad F(x,y) = P\{X=0,\ Y=0\} = 0{,}25$

$1<y\leq 2, \quad F(x,y) = P\{X=0,\ Y\in\{0,1\}\} = 0{,}25+0{,}125 = 0{,}375$

$y>2, \quad F(x,y) = P\{X=0,\ Y\in\{0,1,2\}\} = 0{,}375+0{,}125 = 0{,}5.$

3° За $x>1$, $\{X<x\} = \{X\in\{0,1\}\} = \Omega$, имаме:

$F(x,y) = P\{\Omega, Y<y\} = P\{Y<y\} = F_Y(y)$

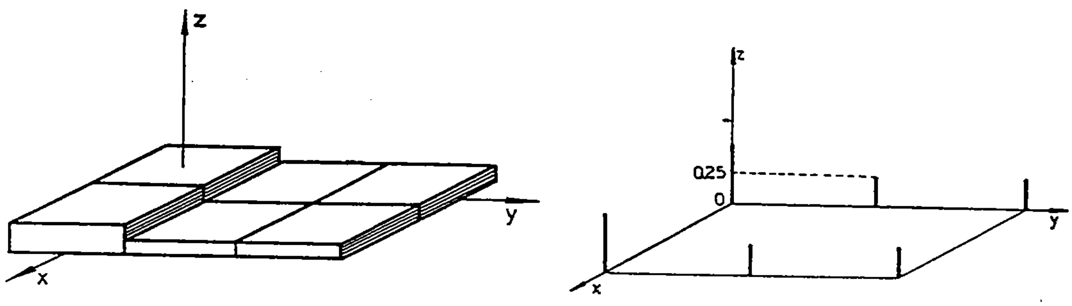
$0<y\leq 1, \quad F(x,y) = P\{Y=0\} = 0{,}5$

$1<y\leq 2, \quad F(x,y) = P\{Y\in\{0,1\}\} = 0{,}5+0{,}25 = 0{,}75$

и $y>2, \quad F(x,y) = P\{Y\in\{0,1,2\}\} = 1.$

Да забележиме дека за $y>2$, $\{Y<y\} = \Omega$, така што:

$$F(x,y) = P\{X<x,\ Y<y\} = P\{X<x, \Omega\} = P\{X<x\} = F_X(x).$$



Сл. 25

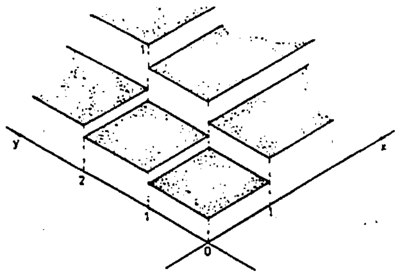
Добиените вредности ги запишуваме прегледно во таблица (Табела 2).

ТАБЕЛА 2

X \ Y	≤0	≤1	≤2	>2
≤0	0	0	0	0
≤1	0	0,250	0,375	0,500
>1	0	0,500	0,750	1,00

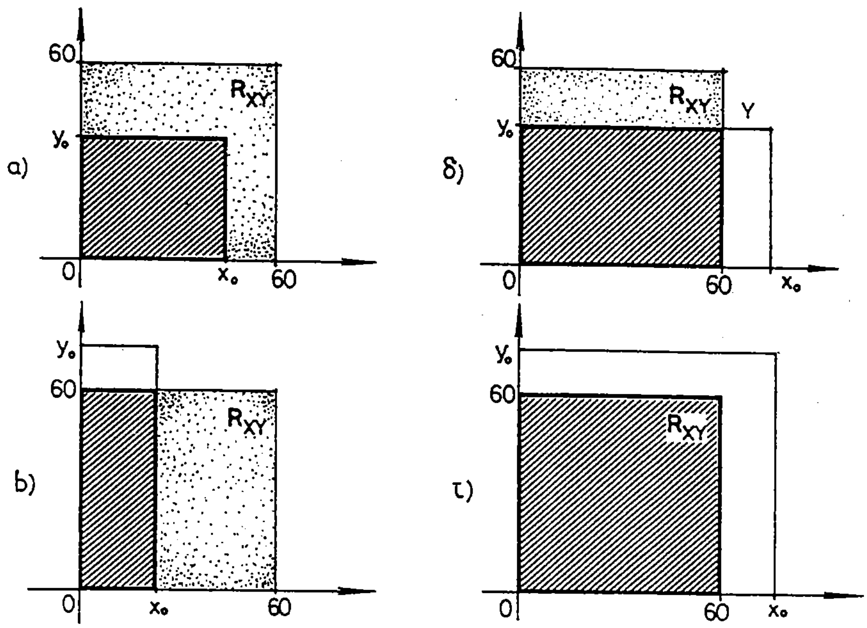
На сл. 26 графички е прикажана функцијата $F(x, y)$.

Пример 4. *Да ја определиме функцијата на распределба на сл.в. (X,Y) од пример 1.*



Сл. 26

Решение: Ако е $x \le 0$, или $y \le 0$, тогаш $F(x,y) = 0$ (времето на пристигнување не може да биде негативно). Различните можности за вредности на (x,y) во останатите случаи графички се прикажани на сл. 27. Осенчен е делот од квадратот, што е покриен со настанот $\{X<x_o\}\cap\{Y<y_o\}$, за избраните вредности x_o, y_o.



Сл. 27

1° За $(x,y)\in \mathbb{R}_{XY}$ (сл. 27 а)

$$F(x,y) = P\{X\in[0,x],\ Y\in[0,y]\} = \frac{m([0,x]\times[0,y])}{m([0,60]\times[0,60])}$$

$$F(x,y) = \frac{x\cdot y}{60^2},\quad 0<x,\ y\le 60.$$

2°. За $x>60$, $0<y\le 60$ (сл. 27 б)

$$F(x,y) = P\{X\in[0,60],\ Y\in[0,y]\} = \frac{60\cdot y}{60^2},$$

$$F(x,y) = \frac{y}{60},\ x>60,\ 0\le y\le 60.$$

3°. За $y>60$, $0<x\le 60$ (сл. 25 в)

$$F(x,y) = P\{X\in[0,x],\ Y\in[0,60]\} = \frac{x\cdot 60}{60^2}$$

$$F(x,y) = \frac{x}{60},\ 0<x\le 60,\ y>60.$$

4°. За $x>60$ и $y>60$ (сл. 27 г)

$$F(x,y) = 1. \quad \Delta$$

Ако случајните променливи X и Y се од непрекинат тип, тогаш и сл.в. (X,Y) е од непрекинат тип. Таков е сл.в (X,Y) од примерот 4. Случајните вектори од непрекинат тип не можат да бидат зададени со веројатностите $P\{X=x_i,\ Y=y_j\}$, бидејќи сите тие се еднакви на нула. Затоа, како и за еднодимензионалните случајни променливи од непрекинат тип, се определува густина на распределба на веројатностите $\phi(x,y)$.

Така, сл.в. (X,Y) од пример 4 има т.н. **рамномерна распределба** на квадратот $[0,60]\times[0,60]$ со густина на распределба:

$$\phi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{60^2}, & (x,y)\in[0,60]\times[0,60] \\ 0, & \text{во останатите случаи.} \end{cases}$$

Рамномерната распределба на дводимензионален случаен вектор може да се дефинира на секоја рамнинска фигура со конечна плоштина. Ако фигурата G има плоштина $m(G)$, тогаш:

$$\phi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{m(G)}, & (x,y)\in G \\ 0, & (x,y)\notin G \end{cases}$$

е г.р. на сл.в. (X,Y). На пример, ако G е круг со центар во координатниот почеток и радиус R, тогаш сл. в. (X,Y) со рамномерна распределба на кругот, има густина:

$$\phi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{R^2\pi}, & x^2+y^2 \le R^2 \\ 0, & x^2+y^2 > R^2. \end{cases}$$

Ќе ја спомeнеме уште дводимензионалната нормална распределба, која се означува со $N(a,b,\sigma_1,\sigma_2,\rho)$. Таа зависи од пет параметри, од кои: a, b се произволни константи, σ_1 и σ_2 позитивни константи, а ρ е константа за која важи $|\rho|<1$. Параметрите a и b имаат аналогна улога на параметарот a во распределбата $N(a,\sigma)$, а σ_1 и σ_2 имаат аналогно значење со σ во распределбата $N(a,\sigma)$.

Б. МАРГИНАЛНИ РАСПРЕДЕЛБИ

Нека (X,Y) е случаен вектор со функција на распределба $F(x,y)$. Функцијата на распределба на секоја од случајните променливи X и Y може да се добие од $F(x,y)$ на следниов начин:

1° За секој y_o поголем од најголемата можна вредност на Y и произволно определен x имаме:

$$F(x,y_o) = P\{X<x, Y<y_o\} = P(\{X<x\cap\Omega) = P\{X<x\} = F_X(x);$$

2° За секој x_o поголем од најголемата можна вредност на X и произволно определен y имаме:

$$F(x_o,y) = P\{X<x_o, Y<y\} = P(\{Y<y\cap\Omega) = P\{Y<y\} = F_Y(y).$$

Бидејќи најголемата можна вредност на различни случајни променливи е различна, правилата за определување на одделните функции на распределба се запишуваат симболично на следниов начин:

$$F_X(x) = F(x,\infty), \quad F_Y(y) = F(\infty,y).$$

Вака добиените функции на распределба ги нарекуваме **маргинални функции** на распределба на случајните променливи X и Y соодветно.

Во пример 3 $F_Y(y)$ е определено со последната редица во табелата, а $F_X(x)$ со последната колона.

Во пример 4, добиваме:

$$\text{за } y>60,\ F(x,y) = F_X(x) = \begin{cases} 0, & x\leq 0 \\ \frac{x}{60}, & 0<x\leq 60 \\ 1, & x>60 \end{cases}$$

$$\text{за } x>60,\ F(x,y) = F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y\leq 0 \\ \frac{y}{60}, & 0<y\leq 60 \\ 1, & y>60. \end{cases}$$

Заклѕчуваме дека X и Y имаат рамномерна распределба на [0,60].

Нека е (X,Y) случаен вектор од дискретен тип со множество вредности $\mathbb{R}_{XY}$ и веројатности $p(x_i,y_j)$. Ако $\mathbb{R}_X$ и $\mathbb{R}_Y$ се множествата на можни вредности на X и Y, соодветно, тогаш:

$$\sum_{j:y_j\in\mathbb{R}_Y} p(x_i,y_j) = \sum_{j:y_j\in\mathbb{R}_Y} P\{X=x_i, Y=y_j\} = p\{X=x_i, Y\in\mathbb{R}_Y\} =$$

$$= P(\{X=x_i\}\cap\Omega) = P\{X=x_i\},\ x_i\in\mathbb{R}_X;$$

$$\sum_{i:x_i\in\mathbb{R}_X} p(x_i,y_j) = \sum_{i:y_i\in\mathbb{R}_X} P\{X=x_i, Y=y_j\} = p\{X\in\mathbb{R}_X\}\cap\{Y=y_j\}=$$

$$= P(\Omega\cap\{Y=y_j\}) = P\{Y=y_j\},\ y_j\in\mathbb{R}_Y.$$

Така се добива распределбата на веројатности на X и Y одделно. Овие распределби се нарекуваат **маргинални распределби**. Значи:

$$\begin{aligned} P\{X=x_i\} &= \sum_{j:y_j\in\mathbb{R}_Y} p(x_i,y_j),\ x_i\in\mathbb{R}_X \\ P\{Y=y_j\} &= \sum_{i:x_i\in\mathbb{R}_X} p(x_i,y_j),\ y_j\in\mathbb{R}_Y. \end{aligned} \tag{2}$$

Пример 5. *Набљудувана е работата на една машина, во чие производство се јавуваат дефекти од два вида. Во табелата 3 дадени се релативните честоти на бројот на дефекти X и Y од I и II вид соодветно, во текот на еден ден.*

Да се определат маргиналните распределби на X и Y.

ТАБЕЛА 3

Y \ X	0	1	2	3	Σ
0	0,12	0,10	0,08	0,10	0,40
1	0,09	0,10	0,06	0,05	0,30
2	0,06	0,07	0,04	0,03	0,20
3	0,03	0,03	0,02	0,02	0,10
Σ	0,30	0,30	0,20	0,20	1,00

Табелата е проширена со уште една колона и една редица во кои се внесуваат суми.

Според формулите (2) добиваме:

$$P\{X=0\} = \sum_{j=0}^{3} p(0,j) = 0,12+0,09+0,06+0,03 = 0,30$$

$$P\{X=1\} = \sum_{j=0}^{3} p(1,j) = 0,10+0,10+0,07+0,03 = 0,30$$

$$P\{X=2\} = \sum_{j=0}^{3} p(2,j) = 0,08+0,06+0,04+0,02 = 0,20$$

$$P\{X=3\} = \sum_{j=0}^{3} p(3,j) = 0,10+0,05+0,03+0,02 = 0,20$$

Добиените вредности се вредностите од последната редица.

Маргиналната распределба на Y ќе биде:

$$P\{Y=0\} = \sum_{i=1}^{3} p(i,0) = 0,40 \qquad P\{Y=1\} = \sum_{i=1}^{3} p(i,1) = 0,30$$

$$P\{Y=2\} = \sum_{i=1}^{3} p(i,2) = 0,20 \qquad P\{Y=3\} = \sum_{i=1}^{3} p(i,3) = 0,10,$$

а тоа се вредностите од последната колона. $\triangle$

За случаен вектор (X,Y) од непрекинат тип маргиналните густини на распределба можат да се добијат од маргиналните функции на распределба со користење на посложен математички апарат.

В. НЕЗАВИСНОСТ НА СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

Сега можеме да се осврнеме на прашањето за **зависност и независност** на случајни променливи поставено во почетокот на 5.

Независноста на случајни променливи ќе ја определиме во согласност со дефиницијата за независност на случајни настани.

Дефиниција: *За случајните променливи X и Y, кои определуваат случаен вектор (X,Y), велиме дека се независно распределени, ако за секој $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ настаните $\{X<x\}$ и $\{Y<y\}$ се независни.*

Од условот за независност на два настани го добиваме равенството:

$$P(\{X<x\}\cap\{Y<y\}) = P\{X<x\}P\{Y<y\}$$

во коешто од левата страна е функцијата на распределба на сл.в. (X,Y), а од десната е производот на функциите на распределба на сл.п.-и X и Y соодветно. Значи X и Y се независни распределени, ако:

$$F(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y). \qquad (1)$$

Ако сл.в. (X,Y) е од дискретен тип, тогаш условот за независност може да се запише на следниов начин:

$$P(\{X=x_i\}\cap\{Y=y_j\}) = P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},\ \ \forall(x_i,y_j)\in\mathbb{R}_{XY}. \qquad (2)$$

Пример 6. *Дали случајните променливи X и Y од примерот 5 се независно распределени?*

Решение. За негативен одговор доволно е да најдеме една двојка (x_i,y_j) за која не е исполнет условот (2)

$$P\{X=1, Y=0\}=0,10 \quad \text{и} \quad P\{X=1\}P\{Y=0\}=0,3\cdot 0,4=0,12$$

се различни, па заклучуваме дека X и Y не се независно распределени. Δ

За случајните променливи од непрекинат тип условот за независност може да се изрази преку густините на распределба на следниов начин:

$$\phi_X(x,y) = \phi_X(x)\cdot\phi_Y(y). \tag{3}$$

Пример 7. *Да се провери дали случајните променливи X и Y од пример 4 се независно распределени.*

Решение. Како што утврдивме порано и двете случајни променливи имаат рамномерна распределба. Ако $x\notin[0,60]$ или $y\notin[0,60]$, тогаш $\phi(x,y)=0$, но притоа $\phi_X(x)=0$ или $\phi_Y(y)=0$, па важи: $\phi(x,y) = \phi_X(x)\cdot\phi_Y(y)$.

Во спротивен случај, кога $(x,y)\in[0,60]\times[0,60]$ $\phi(x,y) = \dfrac{1}{60^2}$, $\phi_X(x) = \phi_Y(y) = \dfrac{1}{60}$, така што пак е исполнето $\phi(x,y) = \phi_X(x)\cdot\phi_Y(y)$.

Според тоа, случајните променливи X и Y се независно распределени. Δ

Пример 8. *Ако случајниот вектор (X,Y) има нормална распределба со параметри $(a,b,\sigma_X,\sigma_Y,\rho)$, тогаш маргиналните распределби на X и Y се $N(a,\sigma_X)$ и $N(b,\sigma_Y)$, соодветно.*

Од условот за независност:

$$\phi(x,y) = \phi_X(x)\cdot\phi_Y(y)$$

добиваме дека $\phi(x,y)$ е функција во која ρ не се јавува, т.е. $\rho=0$. Се покажува, со посложен математички апарат, дека $\rho=0$ е потребен и доволен услов за независност на две случајни променливи со овој тип на распределба. За значењето на ρ ќе зборуваме подоцна, кога ќе видиме како овој параметар ја одразува зависноста на две случајни променливи со нормална распределба. Δ

Нека X_1, X_2, ..., X_n се случајни променливи дефинирани на просторот на веројатност (Ω, F, P). Подредената n-торка

$$(X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n)$$

ја нарекуваме n-димензионален случаен вектор или n-димензионална случајна променлива.

Вредностите на случајниот вектор $(X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n)$ се подредени n-ки реални броеви $(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$, т.е. се елементи на $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}$.

Случајниот вектор $(X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n)$ се задава со заедничка функција на распределба определена како веројатност на настани од обликот:

$$\{X_1<x_1\}\cap\{X_2<x_2\}\cap\dots\cap\{X_n<x_n\},\ \ \forall(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Случајните променливи $X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n$ се независно распределени ако, за секоја n-ка реални броеви $(x_1,x_2,\dots,x_n)$, настаните

$$\{X_1<x_1\},\ \{X_2<x_2\},\ \dots,\ \{X_n<x_n\}$$

во целина се независни.

8. ФУНКЦИИ ОД СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

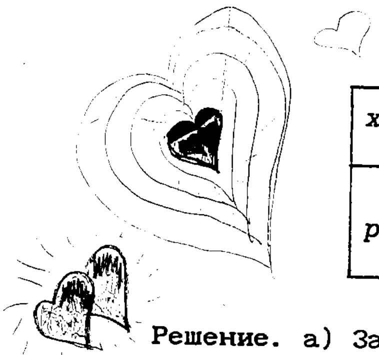
Во низа задачи од теоријата и практиката потребно е да се изучуваат величини, кои што се функции од други величини, што можат да се сметаат за случајни променливи.

Така, на пример, времето на чекање на првопристигнатиот пријател е функција од времињата на пристигнување на секој од нив. Различни величини во организацијата на сообраќајот се функции од должината на интервалот меѓу две последователни пристигнувања на возила или од бројот на патници. Добивката остварена со продажба на одредени производи е функција, покрај другото, и од случајни величини во врска со производството (на пример, број на прекини во работата) и добиениот квалитет (класа).

9:30 - 10:00

Функциите од случајни променливи, кои се од практичен интерес и кои ќе бидат тука разгледувани, се и самите случајни променливи. Затоа се поставува задачата: ако е позната распределбата на некои случајни променливи, да се определи распределбата на одредена функција од нив.

Пример 1. *Законот на распределба на веројатностите на сл.п. X - број на петки во четири фрлања на петдинарка, даден е во табелата 1 (X има B(4, 0,5)). Да се најдат законите на распределба на веројатностите на случајните променливи* $Y=X-2$, $Z=(X-2)^2$.



ТАБЕЛА 1

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Решение. а) За секоја вредност на X од R_X определуваме вредност на Y. Така се добива

$$\mathbb{R}_Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

Соодветните веројатности ќе бидат:

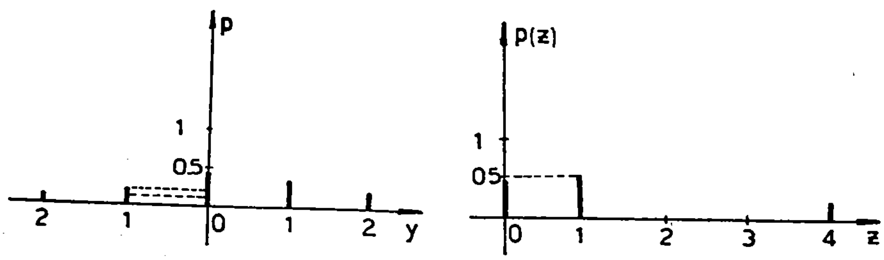
$$P\{Y=-2\} = P\{X=0\} = \frac{1}{16}, \quad P\{Y=-1\} = P\{X=1\} = \frac{1}{4},$$

$$P\{Y=0\} = P\{X=2\} = \frac{3}{8}, \quad P\{Y=1\} = P\{X=3\} = \frac{1}{4},$$

$$P\{Y=2\} = P\{X=4\} = \frac{1}{16}.$$

Законот на распределба е прикажан на сл. 28 а).

Забележуваме дека е симетрична во однос на ордината.



Сл. 28

б) За $Z = (X-2)^2 = Y^2$

$$\mathbb{R}_Z = \{0,\ 1,\ 4\}$$?

$$P\{Z=0\} = P\{Y=0\} = \frac{3}{8}$$

$$P\{Z=1\} = P\{Y=1\} + P\{Y=-1\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0,5}$$

$$P\{Z=4\} = P\{Y=2\} + P\{Y=-2\} = \frac{1}{8}$$

претставен на сл. 28 б).

Пример 2. *Да се најде распределбата на случајните променливи а) Z - збир на цифрите, U - производ на цифрите, што паднале при фрлање на динар и тетраедар, чии страни се нумерирани со броевите 0, 0, 1 и 2.*

Решение: Распределбата на сл. в. (X,Y) ја најдовме при решавање на пример 2 од 7А (табела 4).

ТАБЕЛА 4

X \ Y	0	1	2
0	0,250	0,125	0,125
1	0,250	0,125	0,125

а) Множеството на можни вредности на $Z = X+Y$ е:

$$\mathbb{R}_Z = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}.$$

Да ги определиме уште веројатностите $P\{Z=z_i\}$:

$$P\{Z=0\}=P\{X+Y=0\}=P\{X=0,Y=0\}=0,250$$

$$P\{Z=1\}=P\{X+Y=1\}=P\{X=0,\ Y=1\}+P\{X=1,\ Y=0\}=0,\ 125+0,250=0,375$$

$$P\{Z=2\}=P\{X+Y=2\}=P\{X=0,\ Y=2\}+P\{X=1,\ Y=1\}=0,\ 125+0,\ 125=0,250$$

$$P\{Z=3\}=P\{X+Y=3\}=P\{X=1,\ Y=2\}=0,\ 125.$$

б) Множеството на можни вредности на $U=XY$ е $\mathbb{R}_U=\{0,1,2\}$, а веројатностите ќе бидат:

$$P\{U=0\}=P\{X\cdot Y=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}+P\{X=0,Y=2\}+$$
$$+P\{X=1,Y=0\}=0,250+0,125+0,125+0,250=0,750$$

$$P\{U=1\}=P\{X\cdot Y=1\}=P\{X=1,Y=1\}=0,125$$

$$P\{U=2\}=P\{X\cdot Y=2\}=P\{X=1,Y=2\}=0,125. \quad \Delta$$

Ако X е сл.п. од дискретен тип со множество вредности $\mathbb{R}_X$, тогаш распределбата на сл.п. $Y=g(x)$ се определува, така што, прво ќе се најде множеството на сите можни вредности

$$\mathbb{R}_Y = \{y \mid y=g(x_k),\ x_k\in\mathbb{R}_X\},$$

а потоа веројатностите:

$$P\{Y=y_i\} = \sum_{k:\,g(x_k)=y_i} P\{X=x_k\},\quad y_i\in\mathbb{R}_Y, \tag{2}$$

т.е. се собираат сите $P\{X=x_k\}$ за x_k такви што $y_i=g(x_k)$.

Нека е (X,Y) случаен вектор од дискретен тип, со множество на можни вредности $\mathbb{R}_{XY}$, и $g(x,y)$ пресликување од $\mathbb{R}^2$ во $\mathbb{R}$. Распределбата на сл.п. $Z=g(X,Y)$ се определува така што, прво ќе се најде множеството на можни вредности на Z, $\mathbb{R}_Z=\{z \mid g(x_i,y_j)=z,\ (x_i,y_j)\in\mathbb{R}_{XY}\}$. Да го означиме со A_k подмножеството на $\mathbb{R}_{XY}$ што се состои од оние двојки (x_i,y_j) за кои $g(x_i,y_j)=z_k$, $z_k\in\mathbb{R}_Z$. Тогаш:

$$P\{Z=z_k\} = \sum_{(x_i,y_j)\in A_k} P\{X=x_i,Y=y_j\},\quad z_k\in\mathbb{R}_Z. \tag{3}$$

Пример 3. *Нека X и Y се случајните променливи број на дефекти од I и II вид соодветно во еднодневна работа на машината од примерот 5 од 5.Б. Вкупните трошоци за отстранување на двата вида дефекти се определени со функцијата $g(x,y)=x+y^2$ од бројот на дефекти. Да се најде законот на распределба на веројатностите на така добиената случајна променлива.*

Решение: Според условите на задачата треба да ја најдеме распределбата на сл. п. $Z=X+Y^2$. Затоа прво ќе ја најдеме распределбата на Y^2.

Од таблицата на распределбата на веројатностите на сл. в. (X,Y), порано ги добивме маргиналните распределби на X и Y (табела 5).

ТАБЕЛА 5

k	$P\{X=k\}$	$P\{Y=k\}$
0	0,3	0,4
1	0,3	0,3
2	0,2	0,2
3	0,2	0,1

$$U = Y^2,\quad \mathbb{R}_U = \{0,\ 1,\ 4,\ 9\}$$

$$P\{U=0\} = P\{Y=0\} = 0,4$$

$$P\{U=1\} = P\{Y=1\} = 0,3$$

$$P\{U=4\} = P\{Y=2\} = 0,2$$

$$P\{U=9\} = P\{Y=3\} = 0,1$$

За Z добиваме $\mathbb{R}_Z = \{0,1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12\}$

$$P\{Z=0\}=P\{X=0,Y^2=0\}=p(0,0)=0,12$$

$$P\{Z=1\}=P\{X=0,Y^2=1\}+P\{X=1,Y^2=0\}=p(0,1)+p(1,0)=0,09+0,10=0,19$$

$$P\{Z=2\}=P\{X=1,Y^2=1\}+P\{X=2,Y^2=0\}=p(1,1)+p(2,0)=0,10+0,08=0,18$$

$$P\{Z=3\}=P\{X=2,Y^2=1\}+P\{X=3,Y^2=0\}=p(2,1)+p(3,0)=0,06+0,10=0,16$$

$$P\{Z=4\}=P\{X=3,Y^2=1\}+P\{X=0,Y^2=4\}=p(3,1)+p(0,2)=0,05+0,06=0,11$$

$$P\{Z=5\}=P\{X=1,Y^2=4\}=p(1,2)=0,07$$

$$P\{Z=6\}=P\{X=2,Y^2=4\}=p(2,2)=0,04$$

$$P\{Z=7\}=P\{X=3,Y^2=4\}=p(3,2)=0,03$$

$$P\{Z=9\}=P\{X=0,Y^2=9\}=p(0,3)=0,03$$

$P\{Z=10\}=P\{X=1,Y^2=9\}=p(1,3)=0,03$

$P\{Z=11\}=P\{X=2,Y^2=9\}=p(2,3)=0,02$

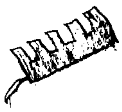
$P\{Z=12\}=P\{X=3,Y^2=9\}=p(3,3)=0,02.$ Δ

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ

1. *Случајната променлива X ги прима вредностите 2, 3, 4 и 5, а променливата Y вредностите -1, 1 и 3. Законот на распределба на веројатностите во точките од множеството $\{(x,y)| x\in\{2,3,4,5\},\ y\in\{-1,1,3\}\}$ е даден со следнава шема:*

Y \ X	2	3	4	5	Σ
-1	1/60	3/60	4/60	7/60	15/60
1	2/60	6/60	8/60	14/60	30/60
3	2/60	1/60	3/60	9/60	15/60
X: Σ	5/60	10/60	15/60	30/60	1

Да се определат:



а) $p(x_i),\ x_i\in\mathbb{R}_X$;

б) $p(y_j),\ y_j\in\mathbb{R}_Y$;

в) *Дали се X и Y независни?*

г) $F_{X,Y}(x,y)$?

Решение:

а) $P(X=2)=P((X=2),(Y=-1))+P(X=2,Y=1)+P(X=2,Y=3)$

$$P(X=2) = \frac{1}{60} + \frac{2}{60} + \frac{2}{60} = \frac{1}{12}.$$

Аналогно се добива дека:

$$P(X=3)=\frac{1}{6},\quad P(X=4) = \frac{1}{4},\quad P(X=5) = \frac{1}{2}.$$

$$X: \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

б) $P(Y=1)=P(X=2,Y=1)+P(X=3,Y=1)+P(X=4,Y=1)+P(X=5,Y=1)$

$$Y: \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

в) Случајните променливи X и Y се независни ако

$$P(X=x,Y=y) = P(X=x)\cdot P(Y=y),$$

за сите можни вредности што ги примаат X и Y:

$$P(X=2,Y=-1) = \frac{1}{60}, \quad P(X=2) = \frac{1}{12}, \quad P(Y=-1) = \frac{1}{4}$$

$$P(X=2,Y=-1) \neq P(X=2)P(Y=-1).$$

Според тоа X и Y не се независни.

? г) $F_{X,Y}(x,y) = P(X<x,Y<y)$

$$F_{X,Y}(2,y) = P(X<2,Y<y) = 0 \text{ за } y\in\mathbb{R}$$

$$F_{X,Y}(x,-1) = P(X<x,Y<-1) = 0 \text{ за } x\in\mathbb{R}$$

За вредностите на $x>2$ и $y>-1$, на пример $x=4$, $y=3$ важи:

$$F_{X,Y}(4,3) = P(X<4,Y<3) = P(X=2,Y=-1)+P(X=2,Y=1)+$$
$$+ P(X=3,Y=-1)+P(X=3,Y=1)$$

$F_{X,Y}(4,3)$ се добива со собирање на веројатностите кои се наоѓаат се до вредноста X=4 (лево од неа) и се до вредноста Y=3 (над неа) без нив

$$F_{X,Y}(6,10) = P(X<6,Y<10) = 1.$$

Y \ X	x≤2	2<x≤3	3<x≤4	4<x≤5	x>5
y≤−1	0	0	0	0	0
−1<y≤1	0	1/60	4/60	8/60	15/60
1<y≤3	0	3/60	12/60	24/60	45/60
y>3	0	5/60	15/60	30/60	1

2. *Случајниот вектор (X,Y) е зададен со функцијата на распределба:*

Y \ X	x≤1	1<x≤3	3<x≤5	x>5
y≤1	0	0	0	0
1<y≤4	0	1/40	1/10	1/4
4<y≤7	0	3/40	3/10	3/4
y>7	0	1/10	17/40	1

Да се определат:

а) Законот на распределба на веројатностите;

б) $F_X(x)$ и $F_Y(y)$;

в) Дали се X и Y независни?

Решение:

а) $1/40 = P(X=1,Y=1)$

$$1/10 = P(X=1,Y=1)+P(X=3,Y=1) \Rightarrow P(X=3,Y=1) = \frac{3}{40}$$

$$3/4 = P(X=1,Y=1)+P(X=3,Y=1)+P(X=5,Y=1)+P(X=1,Y=4)+ + P(X=3,Y=4)+P(X=5,Y=4)$$

$$P(X=5,Y=4) = \frac{3}{4} + \frac{1}{10} - (\frac{1}{4} + \frac{3}{10}) = \frac{12}{40}$$

Y \ X	1	3	5
1	1/40	3/40	3/20
4	1/20	3/20	3/10
7	1/40	1/10	1/8

$$X: \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1/10 & 13/40 & 23/40 \end{bmatrix}$$

$$Y: \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

б)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x\le 1 \\ 1/10, & 1<x\le 3 \\ 17/40, & 3<x\le 5; \\ 1, & x>5 \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y\le 1 \\ 1/4, & 1<y\le 4 \\ 3/4, & 4<y\le 7 \\ 1, & y>7 \end{cases}$$

Забележуваме дека функциите на распределба на X (Y) се кријат во последната редица (колона) на $F_{X,Y}$.

в) $P(X=1,Y=1)=\frac{1}{40}$, $P(X=1)=\frac{1}{10}$, $P(Y=1)=\frac{1}{4}$, $(1,1)=P_X(1)P_Y(1)$

$P(X=1,Y=4)=\frac{1}{20}$, $P(X=1)=\frac{1}{10}$, $P(Y=4)=\frac{1}{2}$, $(1,4)=P_X(1)P_Y(4)$

$P(X=3,Y=1)=\frac{3}{40}$, $P(X=3)=\frac{13}{40}$, $P(Y=1)=\frac{1}{4}$

X и Y не се независни.

I love you

ВЕЖБИ

1. Две деца фрлаат две коцки и го набљудуваат збирот на точките при секое фрлање. Да се најде распределбата на реализираниот збир.

2. Автомобил се движи по пат на кој има 4 семафори. Секој од нив дозволува поминување во 60% од времето. Да се опише случајната променлива која го означува бројот на семафорите покрај кои поминал автомобилот сѐ до првото застанување.

3. Се испитува исправноста на 10 производи. Веројатноста дека секој од нив е дефектен е 0,1.

а) Да се најде распределбата на сл.п. - број на исправни производи;

б) Кој е најверојатниот број исправни производи;

в) Да се најде распределбата на сл.п. - број на дефектни производи;

г) Колкава е веројатноста дека барем 4 производи меѓу испитуваните се дефектни?

4. Случајната променлива X има густина на распределба:

$$p(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{во спротивно} \end{cases}$$

Да се најде функцијата на распределба на X.

5. Случајната променлива X има густина на распределба:

$$p(x) = \begin{cases} x/10, & -4 \le x \le 6 \\ 0, & \text{во спротивно} \end{cases}$$

Да се определат:

а) $P(X \le 4)$;

б) $P(X < 5)$;

в) $P(4,5 \le X \le 5,5)$;

г) $P(-2 \le X \le 5)$;

д) Функцијата на распределба $F(x)$.

6. Даден е законот на дводимензионалната случајна променлива (X,Y) со таблицава:

Y \ X	1	2	3	4
−1	3/40	1/40	5/40	2/40
1	7/40	4/40	1/40	1/40
3	0/40	2/40	8/40	6/40

Да се определат:

а) Функцијата на распределба на (X,Y);

б) $P(X<4, Y<3)$, $P(X<4, Y>1)$;

в) $P(X<4)$, $P(Y<3)$;

г) Дали се X и Y независни случајни променливи?

13

IV. БРОЈНИ КАРАКТЕРИСТИКИ НА СЛУЧАЈНИТЕ ПРОМЕНЛИВИ

Во задачите од теоријата и практиката, во кои се користат моделите на теоријата на веројатноста, распределбите на величините што се од интерес и веројатностите на настаните најчесто не се познати. Затоа, обично се изведуваат експерименти и врз основа на добиените податоци се оценуваат веројатностите и распределбите.

Во низа задачи не е потребна целосна оценка на распределбата или нејзиниот тип е познат од теоријата и поранешните испитувања, па е доволно да бидат оценети само некои бројни карактеристики. Притоа најчесто се определуваат карактеристиките што ја даваат очекуваната или средна вредност на набљудуваната величина и отстапувањето на вредностите на таа величина од нејзината средна вредност.

1. МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКУВАЊЕ

А. ДЕФИНИЦИЈА И ПРИМЕРИ

Нека сл. п. X има множество на вредности

$$\mathbb{R}_X=\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$$

и нека се изведени голем број N на набљудувања на X. Притоа нека $n_1,n_2,\ldots,n_k$ се честотите на вредностите $x_1,x_2,\ldots,x_k$, соодветно. Ако е потребно, врз база на сите добиени вредности, да избереме и пресметаме еден број, со кој што ќе ја претставиме сл. п. X, тогаш една од можностите е, тоа да биде аритметичката средина на добиените вредности:

$$\bar{x}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_kx_k}{N}$$

Ако е бројот N голем, тогаш според статистичката дефиниција на веројатност, бројот n_i/N како релативна фреквенција на вредноста x_i, т.е. релативна фреквенција на настанот $\{X=x_i\}$ е приближно еднаков на $P\{X=x_i\}$. Затоа:

$$\overline{x} = \frac{n_1}{N}x_1+\ldots+\frac{n_k}{N}x_k \approx x_1P\{X=x_1\}+\ldots+x_kP\{X=x_k\}.$$

Бројот $x_1P\{X=x_1\}+x_2P\{X=x_2\}+\ldots+x_kP\{X=x_k\}$ го нарекуваме **математичко очекување** на случајната променлива X и го означуваме со EX.

Дефиниција: *Математичко очекување на случајната променлива X:*

а) со конечно множество на вредности $\mathbb{R}_X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ *и веројатности* $P\{X=x_i\}=p_i$ *е бројот*

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_iP\{X=x_i\} = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i;$$

б) со преброиво (бесконечно) множество вредности $\mathbb{R}_X=\{x_n|x_n\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}\}$ *и веројатности* $P\{X=x_n\}=p_n$, *е бројот*

$$EX = \sum_{n=1}^{\infty} x_nP\{X=x_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} x_np_n$$

ако $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|p_n$ *има конечна вредност.*

Пример 1. *Случајната променлива X - број на петки во четири фрлања на петдинарка има распределба дадена во табелата 1. Да се определи математичкото очекување на случајните променливи:* X, Y=X-2, Z=(X-2)^2.

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

Решение.

а) $$\Sigma X = 0\cdot\frac{1}{16} + 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{3}{8} + 3\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{16} = 2;$$

б) За сл. п. Y порано ја најдовме распределбата (пример 1. (III.6)), така што

$$EY = -2\cdot\frac{1}{16} - 1\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{3}{8} + 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{16} = 0.$$

в) Распределбата на Z е исто така најдена во примерот 1 (III.6.). Затоа:

$$EZ = 0\cdot\frac{3}{8} + 1\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{8} = 1.$$

Да забележиме дека при четири фрлања на монета, се очекува два пати да падне петка, што е во согласност со добиената вредност на EX. △

Пример 2. *Да најдеме математичко очекување на случајната променлива Z – вкупни трошоци за отстранување на прекините во работата на една машина од примерот 3 (III.6.).*

Решение:

$$\begin{aligned} EZ &= 0\cdot 0,12+1\cdot 0,19+2\cdot 0,18+3\cdot 0,16+4\cdot 0,11+5\cdot 0,07 + \\ &+ 6\cdot 0,04+7\cdot 0,03+9\cdot 0,03+10\cdot 0,03+11\cdot 0,02+12\cdot 0,02= \\ &= 3,30. \end{aligned}$$

Во овој случај EZ ги дава очекуваните трошоци или просечни трошоци на еднодневно одржување на машините. △

Математичкото очекување на случајна променлива од непрекинат тип е еднакво на алгебарската вредност на плоштината на фигурата заградена со графикот на функцијата $y=x\phi(x)$, x-оската и ординатите во крајните точки на множеството на можни вредности на сл. п. X.

За $x<0$, $x\varphi(x)$ има негативна вредност, па затоа плоштината на тој дел од фигурата (што се наоѓа под x-оската) се зема со негативен знак.

Забелешка: За случајните променливи од непрекинат тип математичкото очекување може и да не постои.

Ќе пресметаме математичко очекување на три случајни променливи, по една од секој тип:

Пример 3: *За случајната променлива индикатор на настан A, со $P(A)=p$, добиваме:*

$$EI_A = 0\cdot(1-p) + 1\cdot p = p$$

$$EI_A = P(A). \quad \Delta$$

Пример 4: *Математичкото очекување на случајна променлива со Поасонова распределба $P(\lambda)$ ќе биде:*

$$EX = 0\cdot P\{X=0\}+1\cdot P\{X=1\}+\ldots+k\cdot P\{X=k\}+\ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Бидејќи првиот собирок е еднаков на нула, имаме:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k(k-1)!}e^{-\lambda} = \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda\left[\frac{\lambda}{0!}e^{-\lambda} + \frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda} +\ldots+ \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} +\ldots\right].$$

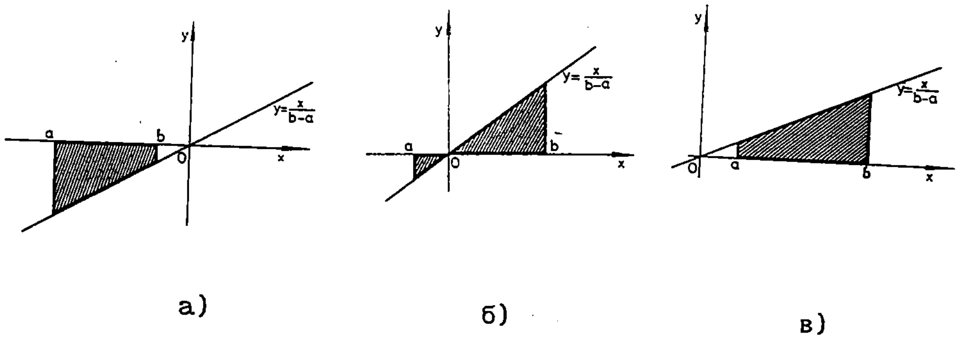
Изразот во заградите е збир на веројатностите за сите вредности на сл.п. со Поасонова распределба, па затоа има вредност еден. Така добивме дека математичкото очекување е еднакво на единствениот параметар на распределбата λ,

$$EX = \lambda. \quad \Delta$$

Пример 5. *За да го најдеме математичкото очекување на случајна променлива со рамномерна распределба на интервал (a,b), треба да ја нацртаме фигурата ограничена со графикот на функцијата $y=x\phi(x)$, x-оската и ординатите $x=a$ и $x=b$. Бидејќи, густината на распределба е определена со:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x\in(a,b) \\ 0, & x\notin(a,b). \end{cases}$$

Функцијата е $y = \frac{x}{b-a}$. За различните можни случаи на положба на интервалот (a,b), во однос на координатниот почеток се добиваат следниве фигури (сл. 1).



Сл. 1

а) За случајот $a<b\leq 0$, треба да се определи плоштината на трапез, па:

$$EX = \frac{\frac{-a}{b-a} + \frac{-b}{b-a}}{2}(b-a) = \frac{a+b}{2}, \qquad \text{(сл. 1 а))}$$

б) За случајот $a<0<b$ имаме два триаголници:

$$EX = -\frac{1}{2}\cdot\frac{-a}{b-a}(-a) + \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{b-a}b = \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}, \quad \text{(сл. 1 б))}$$

в) За случајот $0<a<b$ имаме повторно трапез:

$$EX = \frac{\frac{a}{b-a} + \frac{b}{b-a}}{2}(b-a) = \frac{a+b}{2}, \qquad \text{(сл. 1 в))}$$

Значи во секој случај:

$$EX = \frac{a+b}{2},$$

т.е. математичкото очекување е еднакво на средината на интервалот на можни вредности.

Б. СВОЈСТВА НА МАТЕМАТИЧКОТО ОЧЕКУВАЊЕ

Ќе наведеме неколку својства на математичкото очекување што ја олеснуваат примената на оваа бројна карактеристика и пресметувањето на математичкото очекување на посложени случајни променливи.

Теорема 1. *Математичкото очекување ги има следниве својства:*

а) $EC = C$; C - константа;

б) $E(CX) = CEX$;

в) Ако постојат EX и EY, тогаш $E(X+Y) = EX+EY$;

г) Ако случајните променливи X и Y се независно распределени и постојат EX и EY, тогаш:

$$E(X\cdot Y) = EX\cdot EY.$$

Доказ: Ќе дадеме доказ само за случајни променливи од дискретен тип.

а) Секоја константа може да се смета за случајна променлива којашто има само една вредност C и $P\{X=C\}=1$. Затоа:

$$EX = C\cdot P\{X=C\} = C\cdot 1 = C.$$

б) Нека X е сл.п. со множество на можни вредности $\mathbb{R}_X$. Пресликувањето $x\to Cx$, определува множество на можни вредности на сл.п. $Y=CX$, $\mathbb{R}_Y=\{y_i\,|\,y_i=Cx_i,\ x_i\in\mathbb{R}_X\}$. Настаните $\{X=x_i\}$ и $\{Y=y_i\}$ се еднакви, па затоа $P\{X=x_i\} = P\{Y=y_i\}$. Од ова следува дека:

$$EY = \sum_i y_i\cdot P\{Y=y_i\} = \sum_i Cx_i\cdot P\{X=x_i\} = C\sum_i x_i\cdot P\{X=x_i\} =$$
$$= CEX.$$

в) Нека (X,Y) е случаен вектор со множество на вредности $\mathbb{R}_{XY}=\{(x_i,y_j)\,|\,x_i\in\mathbb{R}_X,\ y_j\in\mathbb{R}_Y\}$. Маргиналните распределби на X и Y се, соодветно,

$$P\{X=x_i\} = \sum_{y_j\in\mathbb{R}_Y} P\{X=x_i,Y=y_j\} = \sum_{y_j\in\mathbb{R}_Y} p(x_i,y_j),\quad x_i\in\mathbb{R}_X$$

$$P\{Y=y_j\} = \sum_{x_i\in\mathbb{R}_X} P\{X=x_i,Y=y_j\} = \sum_{x_i\in\mathbb{R}_X} p(x_i,y_j),\quad y_j\in\mathbb{R}_Y.$$

Математичките очекувања на X и Y постојат. Така:

$$EX+EY = \sum_i x_i \cdot P\{X=x_i\} + \sum_j y_j \cdot P\{Y=y_j\} =$$

$$= \sum_i x_i \cdot \sum_j p(x_i,y_j) + \sum_j y_j \cdot \sum_i p(x_i,y_j) =$$

$$= \sum_i \sum_j x_i \cdot p(x_i,y_j) + \sum_i \sum_j y_i \cdot p(x_i,y_j) =$$

$$= \sum_i \sum_j (x_i+y_j) \cdot p(x_i,y_j).$$

Ако е $Z = X+Y$, а $z_{ij} = x_i+y_j$, тогаш множеството на можни вредности на Z се состои од броевите z_{ij} добиени за сите можни двојки (x_i,y_j). Затоа последната двојна сума е математичко очекување на сл. п. Z,

$$\sum_i \sum_j (x_i+y_j) \cdot P\{X=x_i, Y=y_j\} = E(X+Y).$$

г) Нека X и Y се независно распределени случајни променливи, т.е. точно е:

$$P\{X=x_i, Y=y_j\} = P\{X=x_i\} \cdot P\{Y=y_j\}, \quad \forall (x_i,y_j) \in \mathbb{R}_{XY}$$

$$EX \cdot EY = (\sum_i x_i \cdot P\{X=x_i\}) \cdot (\sum_j y_j \cdot P\{Y=y_j\}) =$$

$$= \sum_i \sum_j x_i \cdot y_j \cdot P\{X=x_i\} \cdot P\{Y=y_j\} =$$

$$= \sum_i \sum_j (x_i \cdot y_j) \cdot P\{X=x_i, Y=y_j\} =$$

$$= E(X \cdot Y).$$

Последното равенство е точно бидејќи се врши сумирање на сите можни производи на вредности на едната и другата случајна променлива, помножени со припадните веројатности. Сите можни производи $x_i y_j$ и соодветните веројатности $P\{X=x_i, Y=y_j\}$ ја определуваат распределбата на веројатностите на случајната променлива $Z = X \cdot Y$. □

Како обопштување на својствата б) и в) се добива следново својство:

Ако X_1, X_2, ..., X_n се случајни променливи со математички очекувања $EX_1, EX_2, \ldots, EX_n$, и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ константи, тогаш:

$$E(c_1X_1+c_2X_2+\ldots+c_nX_n) = c_1EX_1+c_2EX_2+\ldots+c_nEX_n. \quad (1)$$

Точноста на равенството се докажува со математичка индукција и користење на својствата б) и в).

Нека е X дискретна случајна променлива и $g: x \to g(x)$ пресликување од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$. Тогаш се покажува дека:

$$Eg(X) = \sum_{x_i \in \mathbb{R}_X} g(x) \cdot P\{X=x_i\}. \quad (2)$$

Исто така, ако е (X,Y) случаен вектор од дискретен тип со множество вредности

$$\mathbb{R}_{XY}=\{(x_i,y_j)\,|\,x_i\in\mathbb{R}_X,\ y_j\in\mathbb{R}_Y\} \text{ и } g: (x,y)\to g(x,y)$$

пресликување од $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$, тогаш:

$$Eg(X,Y) = \sum_{(x_i,y_j)\in\mathbb{R}_{XY}} g(x_i,y_j)\cdot P\{X=x_i, Y=y_j\}. \quad (3)$$

Пример 6. *Ако X и Y се случајните променливи цифра регистрирана при фрлање на динар и тетраедар, соодветно, со заедничка распределба дадена во табелата 2, да се најде математичко очекување на а) X+Y, б) X·Y, в) Y^2.*

ТАБЕЛА 2.

X \ Y	0	1	2	$P\{X=x_i\}$
0	0,250	0,125	0,125	0,5
0	0,250	0,125	0,125	0,5
$P\{Y=y_j\}$	0,50	0,25	0,25	

Решение: а) Според решението добиено во примерот 2, (III.8.) $Z = X+Y$ има распределба:

$$P\{Z=0\} = 0,250; \; P\{Z=1\} = 0,375;$$

$$P\{Z=2\} = 0,250; \; P\{Z=3\} = 0,125,$$

за која се добива

$$EZ = 1,25.$$

На друг начин:

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= (0+0)0,250 + (0+1)0,125 + (0+2)0,125 + \\ &+ (1+0)0,250 + (1+1)0,125 + (1+2)0,125 = \\ &= 0,125 + 0,250 + 0,250 + 0,250 + 0,375 = \\ &= 1,25 \end{aligned}$$

или

$$EX = 0\cdot 0,5 + 1\cdot 0,5 = 0,5$$

$$EY = 0\cdot 0,5 + 1\cdot 0,25 + 2\cdot 0,25 = 0,75$$

$$EX + EY = 1,25.$$

б) Од условите на задачата X и Y се независно распределени. Нека $U = X\cdot Y$, тогаш: $P\{U=0\} = 0,75$, $P\{U=1\} = 0,125$ и $P\{U=2\} = 0,125$.

$$EU = 0\cdot 0,75 + 1\cdot 0,125 + 2\cdot 0,125 = 0,375$$

$$EX\cdot EY = 0,5\cdot 0,75 = 0,375$$

$$\begin{aligned} E(X\cdot Y) &= (0,0)0,250 + (0,1)0,125 + (0,2)0,125 + \\ &+ (1,0)0,250 + (1,1)0,125 + (1,2)0,125 = \\ &= 0,375. \end{aligned}$$

в) Распределбата на Y^2 гласи:

$$P\{Y^2=0\} = 0,50, \; P\{Y^2=1\} = 0,25, \text{ и } P\{Y^2=4\} = 0,25,$$

така што

$$EY^2 = 0\cdot 0,50 + 1\cdot 0,25 + 4\cdot 0,25 = 1,25.$$

На друг начин ќе имаме:

$$EY^2 = \sum_{y_i\in\mathbb{R}_y} y_i^2\cdot P\{Y=y_i\} = 0^2\cdot 0,50 + 1^2\cdot 0,25 +$$

$$+ 2^2\cdot 0,25 = 1,25.$$

Пример 7. *Да се определи математичкото очекување на случајна променлива со биномна распределба $\mathcal{B}(n,p)$.*

Решение. Нека на секој експеримент од бернулиевата шема, со параметри n и p, му придружиме случајна променлива индикатор на настанот A, што се набљудува. Така се добиваат n случајни променливи I_1, $I_2, \ldots$, I_n, кои се независно и еднакво распределени: $I_k = I_A$, $k = 1,2,\ldots,n$. Согласно својството (1) на математичкото очекување имаме:

$$EY_n = E(I_1 + I_2 + \ldots + I_n) = EI_1 + EI_2 + \ldots + EI_n .$$

При тоа:

$$EI_k = EI_A = P(A) = p,$$

така што:

$$EY_n = n \cdot p. \quad \Delta$$

Добиениот резултат се совпаѓа со толкувањето на математичкото очекување како очекувана или просечна вредност на набљудуваната величина. Навистина, ако се изведени n експерименти и во секој од нив со иста веројатност p може да се појави настанот A, тогаш очекуваме, во $n \cdot p$ од изведените експерименти тој и да се појави.

Ако случајната променлива X има нормална распределба со параметри (a,σ), тогаш се покажува дека:

$$EX = a,$$

што одговара на толкувањето на математичкото очекување како средна вредност на случајната променлива. Имено, утврдивме дека $x = a$ е оска на симетрија на густината на распределбата $N(a,\sigma)$.

Да напоменеме дека во задачите од практиката, за реални обележја, што се третираат како случајни променливи, математичкото очекување е просечна или очекувана вредност.

1. *На писмената работа по математика во класовите* III^1 *и* III^2 *се постигнати следниве резултати:*

оценка / клас	1	2	3	4	5
III^1	6	5	8	5	6
III^2	6	11	3	7	8

Да се определи математичкото очекување на случајните променливи X и Y што ги опишуваат оценките во првиот и вториот клас, соодветно.

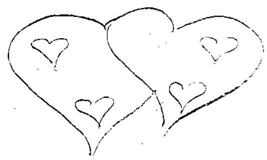
Решение: Во класот III^1 има 30, а во III^2 35 ученици.

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{6}{30} & \frac{5}{30} & \frac{8}{30} & \frac{5}{30} & \frac{6}{30} \end{pmatrix}$$

$$EX = 1\cdot\frac{6}{30} + 2\cdot\frac{5}{30} + 3\cdot\frac{8}{30} + 4\cdot\frac{5}{30} + 5\cdot\frac{6}{30}$$

$$EX = \frac{6+10+24+20+30}{30}$$

$$EX = 3$$



$$Y: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{6}{35} & \frac{11}{35} & \frac{3}{35} & \frac{7}{35} & \frac{8}{35} \end{pmatrix}$$

$$EY = 1\cdot\frac{6}{35} + 2\cdot\frac{11}{35} + 3\cdot\frac{3}{35} + 4\cdot\frac{7}{35} + 5\cdot\frac{8}{35}$$

$$EY = \frac{6+22+9+28+40}{35}$$

$$EY = 3$$

Резултатите постигнати во двата класа се еднакви од аспект на средната вредност.

2 *Да се определи математичкото очекување на случајната променлива X распределена според биномниот закон* $B(5;0,4)$.

Решение: *X има $B(n,p)$ распределба ако:*

$$P\{x=k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k=0,\dots,n.$$

Во овој случај имаме:

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0,6^5 & 5\cdot 0,6^4\cdot 0,4 & 10\cdot 0,6^3\cdot 0,4^2 & 10\cdot 0,6^2\cdot 0,4^3 & 5\cdot 0,6\cdot 0,4^4 & 0,4^4 \end{pmatrix}$$

$$EX = 5\cdot 0,6^4\cdot 0,4+2\cdot 10\cdot 0,6^3\cdot 0,4^2+3\cdot 10\cdot 0,6^2\cdot 0,4^3+4\cdot 5\cdot 0,6\cdot 0,4^4+ \\ + 5\cdot 0,4^4$$

$$EX = 0,4(0,648 + 1,728 + 1,728 + 0,768 + 0,128)$$

$$EX = 0,4\cdot 5$$

$$EX = 2.$$

ПЕТ ЗАДАЧИ

1. *Да се определат математичките очекувања на случајните променливи дефинирани во решената задача 1.*

(1,4251; 3574,9; 1,4285714)

2. *Случајната променлива X е дадена со законот:*

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x\in[1,e] \\ 0, & x\notin[1,e] \end{cases}$$

Да се определи математичкото очекување EX.

(e−1)

3. *Да се определи вредноста на a и EX за случајната променлива X дадена со:*

$$p(x) = \begin{cases} \frac{a}{3}, & x\in[-1,1] \\ \frac{a}{2}, & x\in(1,5] \\ 0, & x\notin[-1,5] \end{cases}$$

(0,375; 2,355)

4. *Да се докаже дека ако X прима само цели ненегативни вредности, тогаш:*

$$EX = P(X\geq 1) + P(X\geq 2) + \ldots + P(X\geq k) + \ldots,$$

т.е.

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X\geq k).$$

5. *Случајната променлива X ги прима вредностите 0, 1, 2, ..., n со веројатности:*

$$P(X=0) = a$$

$$P\{x=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k=1,\ldots,n-1$$

$$P(X=n) = b.$$

Познато е дека EX = np+1. Да се определат вредностите на a и b како функција од p.

$$\left(a=(1-p)^n-\frac{1}{n}, \quad b=p^n+\frac{1}{n}\right)$$

2. ДИСПЕРЗИЈА

А. ДЕФИНИЦИЈА И ПРИМЕРИ

Математичкото очекување, како просечна вредност на набљудуваното обележје X, или точна вредност на мерената (оценуваната) величина, дава прва и нужна информација за распределбата на соодветната случајна променлива. Меѓутоа, и во наједноставни задачи од теоријата и практиката таа информација може да се покаже недоволна. Најчесто е потребен барем учте податокот за тоа колку вредностите на случајната променлива отстапуваат од просечната (точната) вредност.

На пример: при контрола на истородни производи од два типа машини, со мерење на одредена димензија на производите, добиена е иста просечна вредност. Меѓутоа, големината на интервалот во кој се наоѓаат вредностите на димензијата за производите од првиот тип машини е двапати поголема од таа за производите од вториот тип машини. Оваа информација ни овозможува да донесеме заклучок дека, иако и на двете машини се добиваат производи чија просечна димензија е иста, кај вториот тип машини има помало отстапување од просекот, а тоа значи помала грешка и постабилен процес на производство. Затоа им се дава предност на производите од вториот тип машини. Од два ученика, кои што имаат ист просечен успех или оценка по одреден предмет за подобар се смета ученикот чиј просечен успех или оценка е резултат на воедначени (скоро константни) оценки, а не оној, кај кој успехот варира.

Бројна карактеристика која најдобро го одразува отстапувањето на вредностите на случајната променлива од нејзиното математичко очекување е дисперзијата.

Дефиниција: *Дисперзија на случајната променлива X со математичко очекување EX е бројот:*

$$DX = E(X-EX)^2. \tag{1}$$

Според дефиницијата, дисперзијата е средна вредност на квадратите на отстапувањата на вредностите на сл.п. од нејзиното математичко очекување.

За пресметување на дисперзијата често се користи и формулата:

$$DX = EX^2 - (EX)^2. \tag{2}$$

Таа се изведува на следниов начин:

$$\begin{aligned} DX &= E(X-EX)^2 = E[X^2-2EX\cdot X+(EX)^2] = \\ &= EX^2-E(2EX\cdot X) + E(EX)^2 = EX^2-2EX\cdot EX + (EX)^2 = \\ &= EX^2 - (EX)^2. \end{aligned}$$

Според она што порано беше речено за начинот за пресметување на математичкото очекување на случајни променливи, следува дека дисперзијата на сл.п. X, со распределба на веројатностите $P\{X=x_i\} = p_i$, $x_i \in \mathbb{R}_X$, е бројот:

$$DX = \sum_{i:\, x_i \in \mathbb{R}_X} (x_i-EX)^2 \cdot P\{X=x_i\}, \tag{1'}$$

односно:

$$DX = \sum_{i:\, x_i \in \mathbb{R}_X} x_i^2 \cdot P\{X=x_i\} - (EX)^2. \tag{2'}$$

Дисперзијата на случајни променливи од непрекинат тип е определена како плоштина на соодветна фигура.

Пример 1. *Случајните променливи X и Y зададени се со табелата на веројатности $P\{X=x_i\}$ и $P\{Y=y_j\}$, (X и Y - број на дефекти на машината од I и II вид соодветно) (таб. 3). Да се пресмета дисперзијата на сл.п. X и сл.п. Y.*

ТАБЕЛА 3

x_i / y_i	0	1	2	3
$P\{X=x_i\}$	0,30	0,30	0,20	0,20
$P\{Y=y_j\}$	0,40	0,30	0,20	0,10

Решение:

$$EX = 0\cdot 0,3 + 1\cdot 0,3 + 2\cdot 0,2 + 3\cdot 0,2$$

$$EX = 1,3$$

$$EX^2 = 0\cdot 0,3 + 1\cdot 0,3 + 4\cdot 0,2 + 9\cdot 0,2$$

$$EX^2 = 2,9.$$

$$DX = 2,9 - (1,3)^2 = 1,21$$

$$EY = 0\cdot 0,4 + 1\cdot 0,3 + 2\cdot 0,2 + 3\cdot 0,1 = 1,00$$

$$EY^2 = 0\cdot 0,4 + 1\cdot 0,3 + 4\cdot 0,2 + 9\cdot 0,1 = 2,00$$

$$DY = 2 - 1 = 1$$

Добиваме дека во просек почести се дефектите на I вид и дека нивниот број повеќе варира отколку бројот на дефекти од II вид.

Пример 2. *За случајната променлива индикатор на настан A имаме:*

$$DI_A = EI_A^2 - (EI_A)^2,$$

$$EI_A^2 = 0\cdot(1-p) + 1\cdot p = p$$

$$DI_A = p - p^2 = p(1-p) = p\cdot q.$$

Добиваме:

$$DI_A = p(1-p). \quad \triangle$$

Најголема можна вредност на DI_A се добива за $p = \frac{1}{2}$, т.е. за еднакво можни исходи A и $\bar{A}$. (Ова се утврдува лесно, ако се набљудува дисперзијата како квадратна функција $y=x-x^2$ чиј максимум е во темето на соодветната парабола.)

Пример 3. *За Поасоновата распределба $p(\lambda)$ имаме:*

$$EX^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P\{X=k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P\{X=k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} [(k-1)+1] \frac{\lambda^k}{(k-1)!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda \left[\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} \right] =$$

$$= \lambda \left[(0 \cdot \frac{\lambda^0}{0!} + 1 \cdot \frac{\lambda^1}{1!} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} + \ldots) + \right.$$

$$\left. + (\frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} + \ldots) \right] =$$

$$= \lambda \left[\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right] = \lambda(EX+1)$$

Бидејќи $EX=\lambda$, следува $EX^2=\lambda^2+\lambda$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = (\lambda^2+\lambda) - \lambda^2 = \lambda.$$

Добивме дека за распределбата $P(\lambda)$

$$DX = EX = \lambda.$$

Овој факт се користи за проверка на претпоставката дека одредена величина има Поасонова распределба. Δ

Се покажува дека дисперзијата на случајна променлива X со рамномерна распределба на $[a,b]$ е:

$$DX = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Така, на пример, ако X е грешка што се прави при сумирање со заокружување на една децимала, тогаш $\mathbb{R}_X=[-0,05,0,05]$, така што:

$$EX = 0, \quad DX = \frac{(0,1)^2}{12} = 0,008.$$

Дисперзијата на случајна променлива X со распределба $N(a,\sigma^2)$ е:

$$DX = \sigma^2.$$

Тоа одговара на толкувањето на дисперзијата како мерка за отстапувањето (расејувањето) на вредностите на сл. п. X од нејзината средна вредност, а и порано воочената зависност на обликот на графикот на густината на распределба од параметарот σ. Имено, забележуваме дека за помали вредности на σ се добива поголема вредност на максимумот $\varphi(a)$ и графикот на функцијата $y=\varphi(x)$ е пострм во околината на $x=a$, така што поголем дел од „масата" - веројатност е распределена во околината на $x=a$.

Б. СВОЈСТВА НА ДИСПЕРЗИЈАТА

Ќе разгледаме некои својства на дисперзијата, што овозможуваат поедноставна примена и пресметување на оваа бројна карактеристика за посложени случајни променливи.

Теорема 1. *Дисперзијата ги има следниве својства:*

(а) $DX \geq 0$; $DX = 0 \Leftrightarrow P\{X=C\}=1$;

(б) Ако е C константа и X сл.п. со дисперзија DX тогаш:

$$D(CX) = C^2DX;$$

(в) Ако X и Y се независно распределени со дисперзии DX и DY, тогаш:

$$D(X+Y) = DX + DY.$$

Доказ. Ќе го изведеме користејќи ги својствата на математичкото очекување.

а) Ако е $P\{X=C\} = 1 \Rightarrow EX = C$, $EX^2 = C^2$, $DX = 0$. Нека е:

$$DX = 0 \Rightarrow E(X-EX)^2 = 0 \Rightarrow (X-EX) = 0 \Rightarrow X = EX = C.$$

б) $D(CX) = E(CX)^2-[E(CX)]^2 = E(C^2X^2)-(CEX)^2 =$
$= C^2EX^2-C^2(EX)^2 = C^2[EX^2-(EX)^2] = C^2DX.$

в) $D(X+Y) = E[(X+Y)-E(X+Y)]^2 = E[(X-EX)+(Y-EY)]^2 =$
$= E(X-EX)^2 + E(Y-EY)^2 + 2E[(X-EX)(Y-EY)]$

$$E[(X-EX)(Y-EY)] = E(XY-EX\cdot Y-EY\cdot X+EX\cdot EY) =$$
$$= E(XY)-EX\cdot EY-EY\cdot EX+EX\cdot EY = E(XY)-EX\cdot EY.$$

Бидејќи, по услов сл.п. X и Y се независно распределени, $E(XY) = EX\cdot EY$, така што:

$$D(X+Y) = DX + DY. \quad \square$$

Како воопштување на б) и в) се добива

$$D(c_1X_1+c_2X_2+\ldots+c_kX_k) = c_1^2DX_1 + c_2^2DX_2 +\ldots+ c_k^2DX_k, \quad (3)$$

каде што $c_1, c_2,\ldots,c_k$ се константи.

Пример 4. *Да се најде дисперзијата на случајна променлива со распределба* $\mathcal{B}(n,p)$.

Решение:

$$Y_n = I_1 + I_2 +\ldots+ I_n, \quad I_k = I_A$$

$$DI_k = DI_A = p(1-p) = p\cdot q, \quad I_k \text{ се независни.}$$

Затоа важи:

$$DY_n = DI_1 + DI_2 +\ldots+ DI_n = nDI_A = n\cdot p\cdot q$$

$$DY_n = npq. \quad \triangle .$$

3. НОРМИРАЊЕ НА СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ

Дефиниција: *Случајна променлива X со EX=0 и DX=1 ја нарекуваме нормирана случајна променлива.* $\square$

Пример 1. Случајната променлива X со распределба $N(0,1)$ е нормирана случајна променлива, бидејќи $EX=a=0$, $DX=\sigma^2=1$.

Теорема 2. *Ако случајната променлива X има математичко очекување EX и дисперзија DX, тогаш:*

$$\overset{*}{X} = \frac{X-EX}{\sqrt{DX}}$$

е нормирана случајна променлива.

Доказ.

$$E\overset{*}{X} = E\left[\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}\right] = \frac{1}{\sqrt{DX}}E(X-EX) = \frac{1}{\sqrt{DX}}(EX-EX) = 0$$

$$D\overset{*}{X} = E\overset{*}{X}{}^2-(E\overset{*}{X})^2 = E\overset{*}{X}{}^2 = E\left[\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}\right]^2 = \frac{1}{DX}E(X-EX)^2$$

$$D\overset{*}{X} = \frac{1}{DX}\cdot DX = 1. \quad \square$$

Случајната променлива $\overset{*}{X}$ се нарекува **нормиран** или **стандардизиран** облик на сл. п. X, а постапката за добивање на $\overset{*}{X}$ од X се нарекува **нормирање** или стандаризирање.

Случајните променливи се нормираат за да можат да се споредуваат распределби со различни вредности на EX и DX и за да се доведат во облик што овозможува користење на таблици на функции за стандардни распределби.

Пример 2. *Нека сл. п. X има распределба $N(0,1)$. Да се најде распределбата на случајната променлива $Y = \sigma X + a$, EY и DY.*

Решение:

$$F_Y(x) = P\{Y<x\} = P\{\sigma X+a<x\} = P\{\sigma X<x-a\} = P\{X<\frac{x-a}{\sigma}\}.$$

Значи добиваме:

$$F_Y(x) = F_X\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \tag{4}$$

т.е. Y има нормална распределба:

$$EY = E(\sigma X+a) = \sigma EX+a = a$$

$$DY = D(\sigma X+a) = \sigma^2 DX = \sigma^2.$$

Распределбата на Y е $N(a,\sigma)$.

Релацијата (4) овозможува определување на веројатностите во врска со произволна нормална распределба, со помош на таблицата на функцијата $\phi(x)$ за $N(0,1)$ распределбата. Со $F_N(x)$ ќе ја означиме функцијата на распределбата $N(0,1)$.

Ако Y има распределба $N(a,\sigma)$ тогаш:

$$F_Y(x) = F_N(\frac{x-a}{\sigma}),$$

и

$$P\{x_1<Y<x_2\} = F_N\left[\frac{x_2-a}{\sigma}\right] - F_N\left[\frac{x_1-a}{\sigma}\right].$$

На пример, за $x_1 = a-\sigma$, $x_2 = a+\sigma$, добиваме:

$$P\{a-\sigma<Y<a+\sigma\} = P\{-\sigma<Y-a<\sigma\} = P\{|Y-a|<\sigma\} =$$

$$= F_N(1)-F_N(-1) = \frac{1}{2}[1+\phi(1)]-\frac{1}{2}[1-\phi(1)]$$

$$P\{|Y-a|<\sigma\} = \phi(1) = 0,68269.$$

На ист начин се добива:

$$P\{|Y-a|<2\sigma\} = \phi(2) = 0,95450,$$

$$P\{|Y-a|<3\sigma\} = \phi(3) = 0,99730.$$

Вредностите на функцијата $\phi(x)$ се читаат во таблицата I.

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ

1. *Да се определат дисперзиите на оценките во класовите* III^1 *и* III^2 *од РЕШЕНИ ЗАДАЧИ 1 од (IV,1).*

Решение:

$$X:\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6/30 & 5/30 & 8/30 & 5/30 & 6/30 \end{bmatrix} \qquad EX = 3.$$

I начин: *Според дефиницијата* $DX = E(X-EX)^2$. *Тоа значи дека треба да се определи законот по кој се распределени случајните променливи:*

$$X_1 = X-3 \text{ и}$$

$$X_2 = X_1^2.$$

Ако наместо оценките од 1 до 5 се користат оценките од

−2 до 2, тогаш со истиот критериум на оценување учениците кои добиле оценка 4 со новите ознаки добиваат оценка 1. Значи: оценката се менува, но не и бројот на учениците кои ја добиле:

$$X_1: \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{6}{30} & \frac{5}{30} & \frac{8}{30} & \frac{5}{30} & \frac{6}{30} \end{bmatrix}$$

Ако оценката 2 се квадрира, тогаш бројот на ученици кои добиле оценка 0^2 останува ист со бројот на оние кои добиле оценка 0; $(-1)^2 = 1^2 = 1$.

Сите кои добиле оценка −1 или 1 при квадрирањето на оценките добиваат оценка 1. Вкупно десетмина од 30 го задоволуваат тој услов.

Квадратот на новата оценка е 4 кај 6+6 = 12 ученици.

$$X_2: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{8}{30} & \frac{10}{30} & \frac{12}{30} \end{bmatrix}$$

$$DX = EX = 0\cdot\frac{8}{30} + 1\cdot\frac{10}{30} + 4\cdot\frac{12}{30}$$

$$DX = \frac{58}{30} = \frac{29}{15} = 1,9333.$$

II начин: Како последица на дефиницијата се добива:

$$DX = EX^2 - (EX)^2.$$

По дискусијата од претходниот случај нема да биде тешко да се определи законот според кој е распределена променливата X^2.

$$X^2: \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ \frac{6}{30} & \frac{5}{30} & \frac{8}{30} & \frac{5}{30} & \frac{6}{30} \end{bmatrix}$$

$$EX^2 = 1^2\cdot\frac{6}{30} + 2^2\cdot\frac{5}{30} + 3^2\cdot\frac{8}{30} + 4^2\cdot\frac{5}{30} + 5^2\cdot\frac{6}{30}$$

$$EX^2 = \frac{6+20+72+80+150}{30} = \frac{328}{30} = \frac{164}{15}$$

$$DX = \frac{164}{15} - (EX)^2 = \frac{164}{15} - 3^2$$

$$DX = \frac{29}{15} = 1,9333.$$

Резултатите се совпаѓаат.

$$Y: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{6}{35} & \frac{11}{35} & \frac{3}{35} & \frac{7}{35} & \frac{8}{35} \end{bmatrix}, \quad EY = 3$$

$$EY^2 = \frac{6}{35} + 4\cdot\frac{11}{35} + 9\cdot\frac{3}{35} + 16\cdot\frac{7}{35} + 25\cdot\frac{8}{35}$$

$$EY^2 = \frac{389}{35}; \qquad DY = \frac{389}{35} - 9 = \frac{74}{35} = 2,1143.$$

Забележуваме дека случајните променливи имаат еднакви средни вредности, но,

$$DX < DY.$$

Тоа значи дека вредностите на Y се порасфрлени отколку вредностите на X, па класот III^2 *има понерамномерен успех од* III^1.

2. *Да се определат EY, EZ, DY и DZ, ако:*

$$Y: \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ \frac{6}{30} & \frac{5}{30} & \frac{8}{30} & \frac{5}{30} & \frac{6}{30} \end{bmatrix}$$

$$Z: \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 \\ \frac{6}{30} & \frac{5}{30} & \frac{8}{30} & \frac{5}{30} & \frac{6}{30} \end{bmatrix}$$

Решение:

$$EY = \frac{2\cdot 6+4\cdot 5+6\cdot 8+8\cdot 5+10\cdot 6}{30} = 6$$

$$EZ = \frac{0,1\cdot 6+0,2\cdot 5+0,3\cdot 8+0,4\cdot 5+0,5\cdot 6}{30} = 0,3$$

$$EY^2 = \frac{2^2\cdot 6+4^2\cdot 5+6^2\cdot 8+8^2\cdot 5+10^2\cdot 6}{30} = \frac{124}{3}$$

$$DY = \frac{1312}{30} - 36 = \frac{116}{15} = 7,7333$$

$$EZ^2 = \frac{0,1^2 \cdot 6 + 0,2^2 \cdot 5 + 0,3^2 \cdot 8 + 0,4^2 \cdot 5 + 0,5^2 \cdot 6}{30} = \frac{328}{30} =$$

$$= \frac{164}{15}$$

$$DZ = \frac{164}{1\ 500} - \frac{9}{100} = \frac{29}{1\ 500} = 0,0193$$

Забележуваме дека Y ги прима двојните вредности на X со истите веројатности како во претходната задача:

$$Y = 2X, \qquad Z = 0,1 \cdot X$$

Да утврдиме во каков однос се математичките очекувања и дисперзиите на Y и Z во однос на X.

$$Y = 2X$$

$$EX = 3,\ EY = 6 \Rightarrow EY = 2 \cdot EX$$

$$DX = \frac{29}{15},\ DY = \frac{116}{15} \Rightarrow DY = 4 \cdot DX$$

$$Z = 0,1 \cdot X$$

$$EX = 3,\ EZ = 0,3 \Rightarrow EZ = 0,1EX$$

$$DX = \frac{29}{16},\ DZ = \frac{29}{1500} \Rightarrow DZ = 0,01DX.$$

Добиеното е во согласност со својството:

$Y = kX$, *каде* $k \in \mathbb{R}$, *тогаш*

$$EY = kEX,\ DY = k^2DX.$$

3. *Да се нормираат случајните променливи X и Y зададени со:*

$$X: \begin{pmatrix} 1000 & 1200 & 1400 & 1600 & 1800 & 2000 \\ 4/30 & 9/30 & 2/30 & 5/30 & 3/30 & 7/30 \end{pmatrix}$$

$$Y: \begin{pmatrix} 0,01 & 0,02 & 0,03 & 0,04 & 0,05 & 0,06 \\ 2/15 & 3/10 & 1/15 & 1/6 & 1/10 & 7/30 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\overset{*}{X} = \frac{X-EX}{\sqrt{DX}}$$

$$EX = 1500. \quad EX^2 = 2,380000, \quad DX = 130000, \quad \sigma_X = 100\sqrt{13}$$

Случајната променлива X има математичко очекување 1500, а вредностите се расеани со дисперзија 130 000, т.е. стандардна девијација $\sigma_X = DX = 100\sqrt{13}$.

Ако X прима вредност 1 400, тогаш нормираната случајна променлива прима вредност $(1400-1500):100\sqrt{13} = \frac{\sqrt{13}}{13}$ со веројатност $\frac{2}{30}$.

$$\overset{*}{X}: \begin{bmatrix} -\frac{5\sqrt{13}}{13} & -\frac{3\sqrt{13}}{13} & -\frac{\sqrt{13}}{13} & \frac{\sqrt{13}}{13} & \frac{3\sqrt{13}}{13} & \frac{5\sqrt{13}}{13} \\ 4/30 & 9/30 & 2/30 & 5/30 & 3/30 & 7/30 \end{bmatrix}$$

$$\overset{*}{Y} = \frac{Y-EY}{Y}$$

$$EY = 0,035, \quad EY^2 = 0,00155, \quad DY = 0,000325, \quad \sigma_Y = 0,005\sqrt{13}$$

$$\overset{*}{Y}: \begin{bmatrix} -\frac{5\sqrt{13}}{13} & -\frac{3\sqrt{13}}{13} & -\frac{\sqrt{13}}{13} & \frac{\sqrt{13}}{13} & \frac{3\sqrt{13}}{13} & \frac{5\sqrt{13}}{13} \\ 4/30 & 9/30 & 2/30 & 5/30 & 3/30 & 7/30 \end{bmatrix}$$

$$\overset{*}{X} = \overset{*}{Y}, \quad E\overset{*}{X} = 0, \quad D\overset{*}{X} = 1.$$

ПЕТ ЗАДАЧИ

1. *Случајните променливи X и Y се независни.*

$$X: \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{bmatrix}; \qquad Y: \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0,6 & 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Да се најдат законите по кои се распределени случајните променливи:

$$Z = X+Y \quad \text{и} \quad T = X-Y$$

и да се споредат: а) EZ и ET со EX и EY; б) DZ и DT со DX и DY.

2. *Случајните променливи X и Y се независни.*

$$X: \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{bmatrix}; \quad Y: \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Да се најдат распределбите на $Z = X - \frac{1}{2}Y$ *и* $T = XY$ *и да се споредат: а) EZ и ET со EX и EY; б) DZ и DT со DX и DY.*

3. *Случајниот вектор (X,Y) е зададен со шемата.*

Y \ X	−1	0	1
−1	0,1	0,5	0,1
0	0,15	0,15	0,2
1	0,05	0,1	0,1

Да се најде законот по кој е распределена сл.п. Z = X+Y и да се споредат: а) EZ со EX и EY; б) DZ со DX и DY.

4. *Случајниот вектор (X,Y) е зададен со шемата.*

Y \ X	−1	0	1
−1	0,1	0,1	0,1
0	0,15	0,05	0,1
1	0,15	0,1	0,15

Да се најде законот законот на распределба на п. Z=X+Y и да се споредат: а) EZ со EX и EY; б) DZ со DX и DY.

5. *Случајната променлива X има распределба:*

$$p(x) = \begin{cases} 1/x, & x \in [1,e] \\ 0, & x \notin [1,e] \end{cases}$$

Да се пресметаат EX и DX.

4. КОЕФИЦИЕНТ НА КОРЕЛАЦИЈА

Во лекцијата III.7. веќе зборувавме за зависност и независност на случајни променливи. Во задачите од теоријата и практиката најчесто се разгледува можноста за приближно оценување на зависноста на две или повеќе величини со линеарна функција. Причините за тоа лежат во фактот дека такви зависности се чести и добивањето на соодветна оценка е најлесно.

Бројна карактеристика која ја одразува јачината на линеарната зависност на две случајни променливи X и Y е **коефициентот на корелација** $\rho(X,Y)$, кој се дефинира со:

$$\rho(X,Y) = E(\overset{*}{X}\cdot\overset{*}{Y}). \tag{1}$$

Коефициентот на корелација е математичко очекување на производот на $\overset{*}{X}$ и $\overset{*}{Y}$ добиени со нормирање на сл.п. X и Y.

$\rho(X,Y)$ може да биде запишан и на друг начин, имено,

$$\rho(X,Y) = E\left[\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}\cdot\frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}\right] = \frac{E[(X-EX)(Y-EY)]}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}} \tag{2}$$

или

$$\rho(X,Y) = \frac{E(XY)-EX\cdot EY}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}} \tag{3}$$

Пример 1. *Да се определи коефициентот на корелација на случајните променливи X и Y дадени со следнава таблица на распределба на веројатности.*

Y Y	0	1	2	P{Y=j}
1	0,10	0,05	0,05	0,2
2	0,10	0,10	0,10	0,3
3	0,10	0,15	0,25	0,5
P{X=i}	0,3	0,3	0,4	1,0

Решение:

$$EX = 0\cdot 0,3 + 1\cdot 0,3 + 2\cdot 0,4 = 1,1$$

$$EX^2 = 0\cdot 0,3 + 1\cdot 0,3 + 4\cdot 0,4 = 1,9$$

$$EY = 1\cdot 0,2 + 2\cdot 0,3 + 3\cdot 0,5 = 2,3$$

$$EY^2 = 1\cdot 0,2 + 4\cdot 0,3 + 9\cdot 0,5 = 5,9$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= 0\cdot 1\cdot p(0,1) + 0\cdot 2p(0,2) + 0\cdot 3p(0,3) + \\ &\quad + 1\cdot 1\cdot p(1,1) + 1\cdot 2p(1,2) + 1\cdot 3p(1,3) + \\ &\quad + 2\cdot 1\cdot p(2,1) + 2\cdot 2p(2,2) + 2\cdot 3p(2,3) = \\ &= 1\cdot 0,05 + 2\cdot 0,1 + 3\cdot 0,15 + 2\cdot 0,05 + \\ &\quad + 4\cdot 0,1 + 6\cdot 0,25 = 2,7 \end{aligned}$$

$$DX = 1,9 - (1,1)^2 = 0,69, \quad DY = 5,9 - (2,3) = 0,61$$

$$E(XY) - EX\cdot EY = 2,7 - 1,1\cdot 2,3 = 0,17$$

$$\rho(X,Y) = \frac{0,17}{\sqrt{69}\cdot\sqrt{61}} = 0,0026. \quad \triangle$$

Теорема 1. *Коефициентот на корелација ги има следниве својства:*

а) $|\rho(X,Y)| \le 1$;

б) Ако се X *и* Y *независно распределени, тогаш* $\rho(X,Y)=0$;

в) $|\rho(X,Y)| = 1$ *ако и само ако* $P\{Y=aX+b\} = 1$.

Доказ: а) Ако е $\rho(X,Y)>0$ ќе ја разгледуваме случајната променлива $\overset{*}{X}-\overset{*}{Y}$, а ако е $\rho(X,Y)<0$ - случајната променлива $\overset{*}{X}+\overset{*}{Y}$. Да ја побараме дисперзијата на $\overset{*}{X}-\overset{*}{Y}$, односно $\overset{*}{X}+\overset{*}{Y}$.

$$\begin{aligned} D(\overset{*}{X}\pm\overset{*}{Y}) &= E(\overset{*}{X}\pm\overset{*}{Y})^2 - [E(\overset{*}{X}\pm\overset{*}{Y})]^2 = E(\overset{*}{X}{}^2\pm 2\overset{*}{X}\overset{*}{Y}+\overset{*}{Y}{}^2) = \\ &= E\overset{*}{X}{}^2 \pm 2E(\overset{*}{X}\cdot\overset{*}{Y}) + E\overset{*}{Y}{}^2. \end{aligned}$$

$\overset{*}{X}$ и $\overset{*}{Y}$ се нормирани случајни променливи, а тоа значи дека $E\overset{*}{X} = E\overset{*}{Y} = 0$, $D\overset{*}{X} = E\overset{*}{X}{}^2 = 1$, $D\overset{*}{Y} = E\overset{*}{Y}{}^2 = 1$. Затоа,

$$D(\overset{*}{X}\pm\overset{*}{Y}) = 2\pm 2\rho(X,Y) = 2(1\pm\rho(X,Y)).$$

Дисперзијата е секогаш ненегативна, од што следува дека

$$1\pm\rho(X,Y) \geq 0.$$

а) Ако е $\rho(X,Y) < 0$, тогаш $1+\rho(X,Y) \geq 0$, така што

$$-1 \leq \rho(X,Y) < 0;$$

б) Ако е $\rho(X,Y) \geq 0$, тогаш $1-\rho(X,Y) \geq 0$, така што

$$0 \leq \rho(X,Y) \leq 1.$$

Со тоа докажавме дека $|\rho(X,Y)| \leq 1$.

в) Ако се случајните променливи X и Y независно распределени, тогаш:

$$E(XY)-EX\cdot EY = 0 \Rightarrow \rho(X,Y) = 0.$$

Обратното тврдење во општ случај не е точно.

г) Нека е $Y = aX+b$. Тогаш:

$$EY = aEX+b \Rightarrow Y-EY = a(X-EX),\ DY = a^2DX$$

$$E[(X-EX)(Y-EY)] = E[(X-EX)a(X-EX)] = aE(X-EX)^2 =$$

$$= aDX$$

$$\rho(X,Y) = \frac{aDX}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{a^2DX}} = \frac{a}{|a|}.$$

Добивме дека, за $a>0$, $\rho(X,Y) = 1$, а при $a<0$, $\rho(X,Y) = -1$, т.е. $|\rho(X,Y)| = 1$.

Нека $|\rho(X,Y)| = 1$. Ако е $\rho(X,Y) = -1$, тогаш:

$$D(\overset{*}{X}+\overset{*}{Y}) = 2(1+\rho(X,Y)) = 0 \Rightarrow \overset{*}{X}+\overset{*}{Y} = C,\ C - \text{константа}.$$

Ако е $\rho(X,Y) = 1$, тогаш:

$$D(\overset{*}{X}-\overset{*}{Y}) = 2(1-\rho(X,Y)) = 0 \Rightarrow \overset{*}{X}-\overset{*}{Y} = C,\ C - \text{константа}.$$

Добиваме дека меѓу X и Y постои функционална зависност која е линеарна. Δ

Пример 2. *Даден е случаен вектор (X,Y) со таблицата на веројатности. Да се определи $\rho(X,Y)$ и да се одговори дали се X и Y независни случајни променливи.*

Y \ X	-1	0	1	
-2	0,10	0,20	0,10	0,40
0	0,05	0,10	0,05	0,20
2	0,15	0,10	0,15	0,40
	0,30	0,40	0,30	1,00

Решение: $EX = EY = 0$

$$DX = EX^2 = 1\cdot 0,3 + 0\cdot 0,4 + 1\cdot 0,3 = 0,6$$

$$DY = EY^2 = 4\cdot 0,4 + 0\cdot 0,2 + 4\cdot 0,4 = 0,8$$

$$E(XY) = (-1)(-2)\cdot 0,1 + (-2)\cdot 1\cdot 0,1 + \\ + 2(-1)\cdot 0,15 + 1\cdot 2\cdot 0,15 = \\ = 0,2-0,2-0,3+0,3 = 0$$

$$E(XY)-EX\cdot EY = 0 \Rightarrow \rho(X,Y) = 0$$

Меѓутоа, не се независни бидејќи, на пример,

$$P\{X=-1, Y=-2\} \neq P\{X=-1\}\cdot P\{Y=-2\}. \quad \triangle$$

Случајните променливи, чиј коефициент на корелација е еднаков на нула, велиме дека не се **корелирани**, или дека **не се во корелација**.

Ако случајниот вектор (X,Y) има нормална распределба, тогаш коефициентот на корелација $\rho(X,Y)$ е еднаков на петтиот параметар ρ. За случајните вектори (X,Y) со нормална распределба, $\rho(X,Y) = 0$ е потребен и доволен услов за независност на случајните променливи X и Y.

1. *Случајните променливи:*

$$X:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ и } Y:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/6 & 1/4 & 1/3 \end{pmatrix}$$

се независни. Да се определи законот на распределба на случајната променлива променлива XY и да се определи коефициентот на корелација на X и Y.

Решение: *При множењето на вредностите на X со вредностите на Y можат да се добијат само вредностите −2, −1, 0, 1 и 2.*

$$P(XY=-2) = P(X=-1,Y=2) + P(X=1,Y=-2)$$

Со оглед на тоа дека X и Y се независни:

$$P(X=-1,Y=2) = P(X=-1)P(Y=2) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{18}$$

$$P(X=1,Y=-2) = P(X=1)P(Y=-2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$P(XY=-2) = \frac{1}{18} + \frac{1}{8} = \frac{13}{72}$$

$$P(XY=-1) = P(X=-1,Y=1) + P(X=1,Y=-1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{8}$$

$$P(XY=1) = P(X=-1,Y=-1) + P(X=1,Y=1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{11}{72}$$

$$P(XY=0) = P(X=0)[P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=1)+P(X=2)]$$

$$P(XY=0) \equiv P(X=0) = \frac{1}{3}$$

Да извршиме проверка дали збирот на вака добиените веројатности е 1.

$$\frac{13}{72} + \frac{1}{8} + \frac{11}{72} + \frac{5}{24} + \frac{1}{3} = \frac{13+9+11+15+24}{72} = 1$$

$$\text{Значи: } XY:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 13/72 & 1/8 & 1/3 & 11/72 & 5/24 \end{pmatrix}$$

$$EX = -1\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \qquad EY = -2\cdot\frac{1}{4}-1\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$E(XY) = -2\cdot\frac{13}{72} - 1\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{11}{72} + 2\cdot\frac{5}{24} = \frac{1}{12}$$

$$K_{XY} = E(XY) - EX \cdot EY = 0;$$

$$\rho_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}}$$

Бидејќи $DX \neq 0$ *и* $DY \neq 0$

$$\rho_{XY} = 0$$

Величината $K_{XY} = E(XY) - EXEY$ *е 0, па според тоа и нивниот коефициент на корелација е исто така 0.*

Со овој пример потврдено е правилото дека: Ако две случајни променливи се независни, тогаш се некорелирани.

2. *Да се пресмета* ρ_{XY} *за случајните променливи X и Y зададени со шемава:*

Y \ X	−1	0	1
−2	3/40	7/40	0/40
−1	1/40	4/40	2/40
1	5/40	1/40	8/40
2	2/40	1/40	6/40

Дали се X и Y независни?

Решение:

$$P(X=-1, Y=-2) = \frac{3}{40},\ P(X=-1) = \frac{11}{40},\ P(Y=-2) = \frac{1}{40}$$

$P(X=-1, Y=-2) \neq P(X=-1)P(Y=-2)$, *па X и Y се зависни.*

$$P(XY=-2) = P(X=-1, Y=2) + P(X=1, Y=-2) = \frac{2}{40} + \frac{0}{40} = \frac{1}{20}$$

$$P(XY=2) = P(X=-1, Y=-2) + P(X=1, Y=2) = \frac{3}{40} + \frac{6}{40} = \frac{9}{40}$$

$$XY: \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{20} & \frac{7}{40} & \frac{13}{40} & \frac{9}{40} & \frac{9}{40} \end{pmatrix}$$

$$X: \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{11}{40} & \frac{13}{40} & \frac{16}{40} \end{bmatrix}; \qquad Y: \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{10}{40} & \frac{7}{40} & \frac{14}{40} & \frac{9}{40} \end{bmatrix}.$$

Да ја пресметаме прво величината $K(X,Y)$:

$$E(XY) = \frac{2}{5}, \quad EX = \frac{1}{8}, \quad EY = \frac{1}{8}$$

$$K_{XY} = \frac{2}{5} - \frac{1}{64} = \frac{123}{320}.$$

Бидејќи не е нула, продолжуваме:

$$DX = \frac{27}{40} - \frac{1}{64} = \frac{211}{320} \qquad DY = \frac{97}{40} - \frac{1}{64} = \frac{771}{320}$$

$$DX \cdot DY = \frac{211}{320} \cdot \frac{771}{320} = \frac{162681}{320^2}$$

$$\sqrt{DX \cdot DY} \approx \frac{403,3}{320} \approx 1,26$$

$$\rho_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sqrt{DX \cdot DY}} = \frac{123/320}{\frac{\sqrt{162681}}{320}} = \frac{123}{\sqrt{162681}} \approx 0,3$$

Случајните променливи X и Y се зависни и корелирани.

3. *Да се утврди дали се случајните променливи X и Y независни и да се пресмета нивниот коефициент на корелација.*

Y \ X	1	2	3
−4	0,25	0,05	0,10
0	0,10	0,05	0,15
7	0,15	0,10	0,05

Решение:

$$X: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \end{bmatrix} \qquad EX = 1,8$$

$$Y: \begin{bmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{bmatrix} \qquad EY = 0,5$$

$$XY: \begin{bmatrix} -12 & -8 & -4 & 0 & 7 & 14 & 21 \\ 0,10 & 0,05 & 0,25 & 0,30 & 0,15 & 0,10 & 0,05 \end{bmatrix}$$

$E(XY) = 0,9$

$K_{XY} = 0,9-1,8\cdot 0,5 = 0$ $\quad$ *X и Y се некорелирани.*

$P(X=1,Y=-4) = 0,25 \neq 0,5\cdot 0,4 = P(X=1)P(Y=-4)$, *и се зависни. Ова е потврда дека некорелираноста не повлекува независност.*

V. ГРАНИЧНИ ТЕОРЕМИ

1. ЗАКОН НА ГОЛЕМИТЕ БРОЕВИ

А. МАСОВНИТЕ ПОЈАВИ И ЗАКОНОТ НА ГОЛЕМИТЕ БРОЕВИ

Уште од почетокот, при воведувањето на поимот случаен настан, беше нагласено дека, при изведување на само еден експеримент, за случајните настани во врска со него, однапред, може да се каже само дека можат да се појават или да не се појават. Законитост во појавувањето на некој настан може да се установи, во општ случај, само ако се изведат голем број експерименти, т.е. во така наречени **масовни појави.**

Во такви услови од посебно значење се настаните што имаат веројатност блиска до 1 и настаните чија веројатност е блиска до 0. Првите настани скоро секогаш се појавуваат, а вторите се појавуваат многу ретко. Тоа дозволува, настаните со многу мала веројатност да се сметаат во практиката за невозможни, а тие со веројатност блиска до 1 за практично сигурни.

Така, покрај сигурниот и невозможниот настан, скоро сигурниот и скоро невозможниот настан, во практиката се јавува **практично сигурен** и **практично невозможен настан.** Притоа, природно се поставува прашањето колкава треба да биде веројатноста на еден настан, па тој да се смета за практично сигурен, односно практично невозможен. Еднозначен одговор на тоа прашање не постои, бидејќи во практиката одговорот зависи од значењето на настанот и последиците од неговото прогласување за практично сигурен, односно практично невозможен.

На пример, ако во производството на некој производ за широка потрошувачка, што не е многу скап, веројатноста за отстапување од стандардите за помалку од 5% е 0,01, таквата грешка може да се занемари и соодветниот настан да се смета за практично неможен. Меѓутоа, ако при изградбата на некој голем објект (мост, брана), за што се потребни големи материјални средства и човечки труд, веројатноста за попуштање на објектот изнесува 0,01, тој настан не би смеело да се смета за практично невозможен, бидејќи занемарувањето на таа можност е сврзана со тешки последици по животот на луѓето и со голема материјална штета. Поради практичното значење на настаните со веројатност блиска до 0 или 1, во теоријата на веројатноста се разгледуваат условите што треба да бидат исполнети за појавување на такви настани.

Нека во голем број експерименти се одредува вредноста на некоја величина. Добиените резултати обично не се еднакви меѓу себе. Ако имаме n експерименти и на секој му придружиме една случајна променлива X_i - вредност на набљудуваната величина во i-от експеримент, $i=\overline{1,n}$, тогаш, во една серија од n експерименти, добиваме n броеви x_1, $x_2, \dots,$ x_n, коишто се вредности на соодветните случајни променливи. Бројот

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n)$$

е аритметичка средина на броевите $x_1, x_2, \dots, x_n$. Многу одамна е забележано дека и покрај тоа што резултатите на поодделните експерименти (мерења) од една серија или повеќе серии, значително се разликуваат, нивните аритметички средини многу помалку се менуваат, т.е. покажуваат многу поголема **стабилност.**

И уште нешто повеќе: утврдено е дека со зголемување на бројот на експериментите (собирци), добиените аритметички средини сé помалку се разликуваат меѓу себе, т.е. примаат вредности што се сé поблиску до одредена константа. Законитоста од овој вид се нарекува **закон на големите броеви.**

Во теоријата на веројатноста забележаната законитост може да се искаже на следниов начин: Настанот „апсолутната вредност на разликата меѓу аритметичката средина на голем број набљудувања и одредена константа е помала од број $\varepsilon>0$", е практично сигурен настан.

Б. НЕРАВЕНСТВО НА ЧЕБИШЕВ

Ќе формулираме и ќе докажеме две теореми што ќе ни бидат потребни за докажување на една теорема во врска со Законот на големите броеви.

Теорема 1. *Ако случајната променлива X е ненегативна и постои EX, тогаш за кој било број $\varepsilon>0$ важи:*

$$P\{X\geq\varepsilon\} \leq \frac{EX}{\varepsilon}. \tag{1}$$

Доказ. Од практични причини доказот ќе го спроведиме за случајни променливи од дискретен тип:

$$EX = \sum_{k:x_k \in \mathbb{R}_X} x_k P\{X=x_k\} = \sum_{k:x_k<\varepsilon} x_k P\{X=x_k\} +$$

$$+ \sum_{k:x_k \geq \varepsilon} x_k P\{X=x_k\} \geq \sum_{k:x_k \geq \varepsilon} x_k P\{X=x_k\} \geq$$

$$\geq \sum_{k:x_k \geq \varepsilon} \varepsilon P\{X=x_k\} = \varepsilon \sum_{k:x_k \geq \varepsilon} P\{X=x_k\}$$

Последното неравенство е точно бидејќи сите x_k се замении со ε, а сумирањето се извршува само по оние k за кои $x_k \geq \varepsilon$. Збирот на сите веројатности $P\{X=x_k\}$ за $x_k \geq \varepsilon$ е еднаков на веројатноста на настанот $P\{X \geq \varepsilon\}$. Така добиваме дека:

$$EX \geq \varepsilon P\{X \geq \varepsilon\}.$$

Точноста на теоремата за случајни променливи од непрекинат тип може да се објасни со помош на толкувањето на математичкото очекување и веројатноста како плоштини на соодветни фигури. □

Теорема 2. *(Неравенство на Чебишев). Ако случајната променлива X има математичко очекување EX и дисперзија DX, тогаш за кое било $\varepsilon>0$ точно е:*

$$P\{|X-EX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}. \qquad (2)$$

Доказ. Настаните:

$$\{|X-EX| \geq \varepsilon\} \text{ и } \{(X-EX)^2 \geq \varepsilon^2\}$$

се еднакви и затоа $P\{|X-EX| \geq \varepsilon\} = P\{(X-EX)^2 \geq \varepsilon^2\}$.

Случајната променлива $Y = (X-EX)^2$ е ненегативна и има математичко очекување:

$$EY = E(X-EX)^2 = DX,$$

(според условите на теоремава). Заклучуваме дека за сл.п. Y се исполнети условите од теоремата 1. Затоа:

$$P\{Y \geq \varepsilon^2\} \leq \frac{EY}{\varepsilon^2}, \text{ т.е. } P\{|X-EX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DY}{\varepsilon^2}. \quad \square$$

Оваа теорема овозможува оценка на веројатноста на отстапувањето на сл.п. X од нејзиното математичко очекување. Оценките што се добиваат со неравенството на Чебишев се доста груби.

В. ЗАКОН НА ГОЛЕМИТЕ БРОЕВИ

Ќе се запознаеме со една од теоремите што ги даваат условите за важење на законот на големите броеви.

Нека се случајните променливи $X_1, X_2, \dots, X_n$, независно распределени. За секоја од нив нека постои математичко очекување, дисперзија и константа C, таква што $DX_i \le C$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ја разгледуваме аритметичката средина на $X_1, \dots, X_n$

$$Y_n = \frac{1}{n}(X_1+X_2+\dots+X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i .$$

Математичкото очекување и дисперзијата на Y_n се:

$$EY_n = E(\frac{1}{n}(X_1+\dots+X_n)) = \frac{1}{n}(EX_1+\dots+EX_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i$$

$$DY_n = D(\frac{1}{n}(X_1+\dots+X_n)) = \frac{1}{n^2}(DX_1+\dots+DX_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i$$

и имаат конечни вредности. Освен тоа, заради $DX_i \le C$, $i = 1, 2, \dots, n$, важи:

$$DY_n \le \frac{1}{n^2}nC = \frac{C}{n}.$$

За случајната променлива Y_n се исполнети условите на теоремата 2. Затоа, за кое било $\varepsilon>0$, исполнето е неравенството на Чебишев и во овој случај гласи:

$$P\{|Y_n-EY_n|\ge\varepsilon\} \le \frac{C}{n\varepsilon^2}. \qquad (1)$$

Ако земеме поголем број n на случајни променливи, со порано наведените својства, тогаш при дадени C и $\varepsilon>0$, веројатноста на настанот $\{|Y_n-EY_n|\ge\varepsilon\}$ се намалува и се приближува кон нулата. Настанот $\{|Y_n - EY_n| \geq \varepsilon\}$, за голем број на случајни променливи X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, е практично невозможен настан, а нему спротивниот настан $\{|Y_n - EY_n| < \varepsilon\}$ е практично сигурен настан. Ако Y_n го изразиме преку X_i, $i = \overline{1, n}$, добиваме:

$$P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i| \geq \varepsilon\} \leq \frac{C}{n\varepsilon^2}. \tag{2}$$

Бидејќи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C}{n\varepsilon^2} = 0,$$

следува дека:

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i| \geq \varepsilon\} = 0 \tag{3}$$

За случајните променливи $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ велиме дека важи **законот на големите броеви**, ако за произволно $\varepsilon > 0$ важи (3).

Спроведената дискусија може да се резимира во вид на теорема.

Теорема (на Чебишев). *Ако случајните променливи X_1, X_2, X_3, ..., X_n, ... се независно распределени со математички очекувања EX_i и дисперзии $DX_i \leq C$, $i = 1, 2, \ldots$ (C -константа), тогаш за нив важи законот на големите броеви.* □

Пример 1. *Потребно е да се оцени величината a. За таа цел се изведени 100 независни и еднакво точни мерења со грешка не поголема од 0,2. а) Да се оцени веројатноста - аритметичката средина на резултатите од мерењето да се разликува од оценуваната величина, по апсолутна вредност, за повеќе од 0,05; б) колку мерења ќе треба да се извршат, ако е потребно да се добие оценка, која се разликува од a, по апсолутна вредност, за помалку од 0,02, со веројатност не помала од 0,90?*

Решение: На секое мерење му придружуваме по една случајна променлива, при што добиваме 100 случајни променливи. Тие се (според условите на задачата) независно распределени, нивното математичко очекување треба да биде еднакво на a, дисперзијата, како квадрат на отстапувањата од точната вредност, е ограничена со $0,2^2$, т.е.

$$EX_i = a \quad \text{и} \quad DX_i \le 0,04, \quad i=1,\dots,100.$$

а) За аритметичката средина на X_i, $i=\overline{1,100}$ добиваме:

$$EY_{100} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} EX_i = a,$$

$$DY_{100} = \frac{1}{100^2}\sum_{i=1}^{100} DX_i \le \frac{0,04}{100} = 4\cdot 10^{-4}$$

Затоа:

$$P\{|Y_{100}-EY_{100}|\ge 0,05\} = P\{|Y_{100}-a|\ge 0,05\} \le \frac{4\cdot 10^{-4}}{(0,05)^2}$$

$$P\{|Y_{100}-a|\ge 0,05\} \le 0,16.$$

б) Треба да се определи n, така што:

$$P\{|Y_n-a| < 0,02\} > 0,90 \qquad (*)$$

$$P\{|Y_n-a| \ge 0,02\} \le \frac{0,04}{n(0,02)^2}$$

Од неравенството (*), следува дека

$$P\{|Y_n-a| \ge 0,02\} \le 0,10,$$

така што

$$\frac{0,04}{n(0,02)^2} \le 0,10 \quad \text{и} \quad n \ge 1000.$$

Добивме дека треба да се изведат најмалку 1000 мерења. Δ

Пример 2. *Веројатноста на настанот A се оценува со релативната зачестеност на настанот A во серија од 100 независни и еднакви експерименти. а) Колкава е веројатноста дека добиената оценка ќе се разликува од $P(A)$ за повеќе од 0,1? Колку експерименти треба да се изведат, за да бидеме сигурни,* *со веројатност поголема од 0,95, дека апсолутната вредност на разликата меѓу P(A) и оценката ќе биде помала од 0,05?*

Решение: Во секој од стоте експерименти дефинираме случајна променлива I_A - индикатор на настанот A. Според условите на задачата тие се независно и еднакво распределени и $EX_k = EI_A = P(A)$, $DX_k = DI_A = P(A)(1-P(A))$, $k=\overline{1,n}$. Кога ја разгледувавме случајната променлива I_A утврдивме дека $DI_A \leq \frac{1}{4}$.

Да означиме $Y_{100} = \frac{1}{100}\sum_{k=1}^{n} X_k$, тогаш:

$$EY_{100} = \frac{1}{100}\sum_{k=1}^{n} EX_k = P(A)$$

$$DY_{100} = \frac{1}{100^2}\sum_{k=1}^{n} DX_k = \frac{1}{100}P(A)P(\overline{A})$$

$$DY_{100} \leq \frac{1}{400}.$$

Затоа:

а) $$P\{|Y_{100}-P(A)|\geq 0,1\} \leq \frac{1}{400\cdot 0,01}$$

$$P\{|Y_{100}-P(A)|\geq 0,1\} \leq 0,25.$$

$Y_{100} = \frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} I_k$ е релативна фреквенција на настанот A во 100 експерименти, бидејќи е количник на случајната променлива $\sum_{k=1}^{100} I_k$ - број на појавувања на н. A во 100 експерименти (со распределба $B(100,P(A))$) и бројот на изведени експерименти.

б) Треба да го определиме n така што да важи:

$$P\{|Y_n-P(A)| < 0,05\} > 0,95.$$

За спротивниот настан имаме:

$$P\{|Y_n-P(A)| \geq 0,05\} \leq 0,05,$$

а според неравенството на Чебишев:

$$P\{|Y_n - P(A)| \geq 0,05\} \leq \frac{0,25}{n(0,05)^2}.$$

Од наведените неравенства добиваме:

$$\frac{0,25}{n(0,05)^2} \leq 0,05,$$

т.е.

$$n \geq 2000. \quad \Delta$$

Како што веќе рековме, оценките што се добиваат со неравенството на Чебишев се доста груби. Меѓутоа, значаен е фактот дека, со голем број набљудувања, аритметичката средина, односно релативната зачестеност, е оценка на точната или просечна вредност на обележјето, односно веројатноста на настанот што се набљудува, со сакана точност $\varepsilon>0$ и сигурност α.

Теоремата ја оправдува, и теориски, практиката непознатата величина да се одредува како аритметичка средина на повеќе набљудувања (мерења), а веројатноста да се определува со помош на релативна зачестеност.

2. ЦЕНТРАЛНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА

Во времето на брзиот развој на Теоријата на веројатноста, предизвикан од изучувањето во природните науки, посебно во биологијата и физиката, било забележано дека, низа величини и карактеристики на природните процеси и објекти, имаат распределби, коишто можат добро да се опишат со нормалната распределба.

Освен тоа, било забележано дека во Бернулиевата шема, за вредноста на $p=P(A)$ блиску до 0,5 и голем број n на експерименти, полигонот на распределбата на веројатностите на случајната променлива X - број на појавувања на настанот A определува точки од кривата на густината на нормалната распределба.

Во 1733 година Муавр ја извел функцијата на густината на нормалната распределба од биномната распределба кога n е голем број. Врската меѓу биномната и нормалната распределба ја изучувал и Лаплас, така што, теоремата која ја утврдува можноста на приближно определување на веројатностите од биномната распределба преку веројатностите на нормалната распределба носи назив Теорема на Муавр-Лаплас. Оваа можност е позната како **нормална апроксимација**.

Ако Y_n е случајна променлива со $\mathcal{B}(n,p)$ распределба, $np\geq$ ≥ 10 и $n\geq 100$, а Z случајна променлива со $N(0,1)$ распределба, тогаш:

$$P\{\overset{*}{Y}\in(a,b)\} \approx P\{Z\in(a,b)\}. \tag{1}$$

Да го запишеме (1) преку Y_n.

Бидејќи

$$EY_n = np, \quad DY_n = npq, \quad \overset{*}{Y} = \frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}}$$

За $0\leq k<m\leq n$ имаме:

$$P\{k\leq Y_n\leq m\} = p\left\{\frac{k-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{Y_n-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right\} =$$

$$= P\{\overset{*}{Y}_n\in[a,b]\}, \quad a = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \quad b = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Ако го земеме предвид (1), добиваме дека:

$$P\{k \leq Y_n \leq m\} \approx P\{Z\in[a,b]\}.$$

Случајната променлива Y_n со $\mathcal{B}(n,p)$ распределба, може да се претстави како сума на n независни и еднакво распределени случајни променливи X_i, $i=1,\ldots,n$, секоја од кои е индикатор на настанот A со $P(A) = p$. Значи имаме:

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad EY_n = \sum_{i=1}^{n} EX_i, \quad DY_n = \sum_{i=1}^{n} DX_i,$$

така што $\overset{*}{Y}_n$ го добива обликот:

$$\overset{*}{Y}_n = \frac{\sum_i X_i - \sum_i EX_i}{\sqrt{\sum_i DX_i}}.$$

Y_n^* е нормирана сума на независно и еднакво распределени случајни променливи по законот $P\{X=0\} = 1-p$, $P\{X=1\} = p$.

Природно, со време, се поставило прашањето: дали релација од обликот (1) важи само за нормирана сума на индикатори на ист настан A. Се покажало дека таква законитост важи во многу поопшти случаи.

Теорема во којашто се определуваат условите, при коишто распределбата на нормирана сума на случајни променливи, за голем број на собирци, може приближно да се определи со нормална распределба $N(0,1)$, се нарекува **централна гранична теорема.**

Како последица на една од тие теореми ја имаме следнава можност:

Ако се случајните променливи X_1, $X_2, \ldots$, X_n независно и еднакво распределени со математичко очекување $EX_i = a$ и дисперзија $DX_i = \sigma^2$, $i = 1, 2, \ldots$, тогаш за голем број n точно е :

$$P\left\{ a \le \frac{\Sigma X_i - na}{\sqrt{n\sigma^2}} \le b \right\} \approx P\{Z\in[a,b]\},$$

каде што Z е случајна променлива со $N(0,1)$ распределба.

Пример 1. *Монета се фрла 400 пати. а) Да се оцени веројатноста дека бројот на паѓање „ петка" ќе се разликува од очекуваниот број на појавување на тој настан, за помалку од 20, по апсолутна вредност. б) Колку фрлања треба да се извршат за да бидеме сигурни, со веројатност 0,95, дека бројот на појавување на „петка" ќе се разликува од очекуваниот број за помалку од 10.*

Решение. $n = 400$, $p = q = 0,5$.

а) Се бара $P\{|Y_n - 400\cdot 0,5| < 20\}$

$$P\{|Y_{400} - 200| < 20\} = P\left\{ \left|\frac{Y_{400} - 200}{\sqrt{400\cdot 0,5^2}}\right| < \frac{20}{10} \right\} =$$

$$= P\{|Y_{400}^*| < 2\} \approx P\{|Z| < 2\} = \phi(2) = 0,95450.$$

б) Треба да се определи n, така што:

$$P\{|Y_n - n\cdot 0,5| \le 10\} = 0,95 \qquad (*)$$

$$DY_n = n\cdot(0,5)^2$$

$$P\{|Y_n - n\cdot 0,5| \le 10\} = P\left\{ \frac{|Y_n - n\cdot 0,5|}{0,5\sqrt{n}} \le \frac{10}{0,5\sqrt{n}} \right\} =$$

$$= P\left\{ |\overset{*}{Y_n}| \le \frac{20}{\sqrt{n}} \right\} \approx P\left\{ |Z| \le \frac{20}{\sqrt{n}} \right\}.$$

Од (*) следува дека N треба да биде такво што:

$$P\left\{ |Z| \le \frac{20}{\sqrt{n}} \right\} = \phi\left[\frac{20}{\sqrt{n}} \right] = 0,95.$$

Во таблицата на функцијата $\varphi(x)$, наоѓаме дека:

$$\phi(1,96) = 0,95,$$

од што следува дека,

$$\frac{20}{\sqrt{n}} = 1,96 \Rightarrow n = 104. \quad \Delta$$

Пример 2. *На случаен начин и независно се запишуваат 100 едноцифрени броеви. а) Да се пресмета веројатноста дека нивната сума ќе биде меѓу 400 и 550. б) Колкава најмногу, со веројатност 0,80, ќе биде апсолутната вредност на отстапувањето на сума од 160 едноцифрени броеви од нејзината очекувана вредност?*

Решение: Имаме експеримент - избор на едноцифрен број, којшто може да се опише со случајна променлива X чиешто множество на вредности $\mathbb{R}_X=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и $P\{X=k\} = \frac{1}{10}$, $k\in\mathbb{R}_X$. Експериментот се повторува 100 пати. Со X_i да ја означиме случајната променлива на i-от експеримент, $i=\overline{1,100}$. Случајните променливи X_i се независни и еднакво распределени со математичко очекување и дисперзија:

$$EX_i = EX = \sum_{k=0}^{9} k\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{10}\cdot\frac{9\cdot 10}{2} = 4,5$$

$$DX_i = DX = EX^2-(EX)^2 = \sum_{k=0}^{9} k^2\cdot\frac{1}{10} - (4,5)^2 =$$

$$= \frac{285}{10} - 20,25 = 8,25.$$

За нормирање на $Y_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$, потребни се EY_{100} и DY_{100}

$$EY_{100} = \sum_{i=1}^{100} EX_i = 100\cdot EX = 450;$$

$$DY_{100} = \sum_{i=1}^{100} DX_i = 100\cdot DX = 825,$$

а) $$P\{400 \le Y_{100} \le 550\} = P\left\{\frac{400-450}{\sqrt{825}} \le \overset{*}{Y}_{100} < \frac{550-450}{\sqrt{825}}\right\} =$$

$$= P\left\{-\frac{50}{28,7} \le \overset{*}{Y}_{100} \le \frac{100}{28,7}\right\} = P\{-1,74 \le \overset{*}{Y}_{100} \le 3,48\} \approx$$

$$\approx P_N\{-1,74 \le Z \le 3,48\} = F_N(3,48) - F_N(-1,74) =$$

$$= \frac{1}{2}[\phi(3,48) + \phi(1,74)] = \frac{1}{2}[0,99950+0,91814] =$$

$$= 0,95882.$$

Од добиениот резултат следува заклучок, со веројатност 0,96, приближно, можеме да тврдиме дека, сумата на сто случајно избрани броеви ќе биде меѓу 400 и 550. Ако изведеме повеќе серии на избори од по 100 броеви, тогаш приближно 96% од добиените суми ќе бидат во интервалот [400, 550].

б) Треба да се определи k, така што:

$$P\{|Y_{160}-EY_{160}| \le k\} = 0,80$$

$$EY_{160} = 160\cdot EX = 160\cdot 4\cdot 5 = 720$$

$$DY_{160} = 160\cdot DX = 160\cdot 8\cdot 25 = 1320.$$

$$\sqrt{DY_{160}} = 36,33.$$

$$P\{|Y_{160} - EY_{160}| \le k\} = P\left\{\frac{|Y_{160}-720|}{36,33} \le \frac{k}{36,33}\right\} \approx$$

$$\approx P_N\left(|Z| \le \frac{k}{36,33}\right) = \phi\left(\frac{k}{36,33}\right).$$

k треба да го определиме од равенката:

$$\phi\left(\frac{k}{36,33}\right) = 0,80.$$

Во таблицата на функцијата $\phi(x)$, наоѓаме дека $\phi(1,28) = 0,79945 \approx 0,80$

$$\frac{k}{36,33} = 1,28 \Rightarrow k = 46,5.$$

Бидејќи се собираат цели броеви, k=46, а тоа значи дека:

$$P\left\{|\sum_{i=1}^{160} X_i - 720| \le 46\right\} < 0,80,$$

односно

$$P\left\{674 \le \sum_{i=1}^{160} X_i \le 766\right\} < 0,80. \quad \Delta$$

Пример 3. (Обопштување на примерот 2.). *Нека* $X_1,\dots,X_n$ *се независни и еднакво распределени случајни променливи со* $EX_i = a$ *и* $DX_i = \sigma^2$, $i=1,\dots,n$. *Да се оцени веројатноста на отстапувањето на нивната аритметичка средина од очекуваната вредност (математичко очекување), за помалку од* k *по апсолутна вредност.*

Решение: Да означиме $Y_n = \frac{1}{n}(X_1+\dots+X_n)$. Нејзината очекувана вредност и дисперзија ќе бидат:

$$EY_n = \frac{1}{n}(EX_1+\ldots+EX_n) = a$$

$$DY_n = \frac{1}{n^2}(DX_1+\ldots+DX_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Воочуваме дека математичкото очекување на аритметичката средина е еднакво на математичкото очекување на еден собирок, а дисперзијата е n пати помала од дисперзијата на еден собирок. Бараната веројатност е:

$$P\{|Y_n - EY_n| \leq k\} = P\left\{\frac{|Y_n - a|}{\sigma}\sqrt{n} \leq \frac{k\sqrt{n}}{\sigma}\right\} \approx$$

$$\approx P_N\{|Z| \leq \frac{k\sqrt{n}}{\sigma}\} = \phi(\frac{k\sqrt{n}}{\sigma}). \quad \Delta$$

Од ова следува дека, распределбата на аритметичката средина на независни и еднакво распределени случајни променливи $X_1,\ldots,X_n$, може приближно да се определи со нормална распределба. Притоа, распределбата на нормираната сума се определува приближно со $N(0,1)$ распределбата. Од тоа следува дека за $EX_i = a$ и $DX_i = \sigma^2$, Y_n може да се претстави на следниов начин:

$$Y_n = \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}}Y_n + a,$$

а распределбата приближно да се определи со $N(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ распределбата. Значајно е дека ова тврдење е точно за која било распределба на случајните променливи X.

За голем број n ќе означуваме:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \approx N(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}), \text{ кога } EX_i = a,\ DX_i = \sigma^2$$

и ќе велиме дека аритметичката средина, за голем број собирци има приближно нормална распределба со параметри a и $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

ВЕЖБИ

1. Случајната променлива X го опишува збирот на точките при фрлање две коцки. Да се спореди веројатноста на настаните:

а) $2 < X < 12$;

б) $4 < X < 10$;

в) $4 \leq X \leq 10$;

г) $6 \leq X \leq 8$;

добиена со неравенството на Чебишев со точната веројатност.

2. Да се оцени веројатноста дека при фрлање 10 коцки, збирот на точките ќе отстапува од 35 по апсолутна вредност за повеќе од 12 единици.

3. Колку пати треба да се фрли една коцка за да може со веројатност поголема од:

а) 0,95;

б) 0,99,

да се тврди дека аритметичката средина е во интервалот (3,4; 3,6).

4. Една фабрика за сијалици произведува 98% исправни и 2% неисправни производи. Во самопослугата нарачале 100 сијалици. Колкава е веројатноста дека меѓу нив:

а) 2 се неисправни;

б) барем 2 се неисправни;

в) бројот на неисправните е меѓу 2 и 6.

5. При производство на чипови 10% отпаѓа на шкарт. Секој неисправен чип го чини производителот 2 000 динари. Да се определи веројатноста дека при производство на 100 чипови производителот на шкарт губи:

а) помалку од 6 000 динари;

б) барем 6 000 динари;

в) меѓу 2 000 и 12 000 динари.

6. Оценето е дека 2% дискети од типот 3M имаат грешка во магнетниот материјал. Да се оцени колкава е веројатноста дека меѓу случајно избрани 1000 дискети од тој тип:

а) 990 се исправни;

б) барем 100 се неисправни;

в) бројот на исправни дискети е меѓу 950 и 990.

7. *Дали за независните случајни променливи чиј закон е даден со:*

$$X_k:\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1/4 & 1/2 & 1/4\end{pmatrix},\ k\in\mathbb{N}$$

важи законот на големите броеви. Во случај на потврден одговор да се определи колку случајни променливи дава аритметичката средина која отстапува од нулата за помалку од 0,1 единици со веројатност која надминува 0,95.

8. *За проценка на вредноста на величината често се зема аритметичката средина. Колкава е веројатноста, при 1 000 мерења, грешката што се појавува во аритметичката средина да биде помала од 0,005 при заокружување на резултатот на 4 децимали.*

9. *Во процесот на собирање на броеви, во секој чекор збирот се заокружува на една децимала.*

а) Да се оцени веројатноста дека при собирање на 145 броеви, апсолутната грешка на вкупната грешка ќе биде помала од 2.

б) Колку броеви најмногу можат да се соберат, за да, со веројатност 0,95, бидеме сигурни дека апсолутната вредност на вкупната грешка ќе биде помала од 2?

в) Колкава ќе биде, со веројатност 0,90, апсолутната вредност на вкупната грешка, при собирањето на 290 броеви?

$\hat{F}(x) = \frac{n(x)}{n}$

VI ПОПУЛАЦИЈА И ПРИМЕРОК. БРОЈНИ КАРАКТЕРИСТИКИ

СТАТИСТИКА

[redacted]

Нека е потребно да се испита некое множество од еднородни објекти во однос на една или повеќе квалитативни или квантитативни карактеристики. На пример, на множеството кое се состои од едночасовно производство на сијалици може да се испитува величината „време на непрекината работа" или „број на дефектни сијалици". На множеството јаболка од определено стопанство и во определена година можат да се набљудуваат повеќе карактеристики, како на пример: тежина на јаболката, процент на вода, процент на шеќер. На множеството ученици од определено училиште од интерес е да се испитуваат, поодделно, или истовремено, различни карактеристики, како на пример: пол, висина, тежина, успех по одделни предмети, број на изостаноци и др. Забележуваме дека секоја од наведените карактеристики е променлива на множеството од испитувани објекти и нејзината вредност за определен објект не може точно и однапред да се предвиди.

[redacted]

Во наведените примери имавме: популација „едночасовно производство на сијалици" со обележја време на работа" и „број на дефектни сијалици"; популација едногодишен род на јаболка во определено стопанство", со обележја: „принос", „процент на вода", „процент на шеќер во плодот" и популација „ученици од определено училиште" со обележја: висина", тежина", „успех", „број на изостаноци" и др.

Популацијата е основен поим во статистиката. Тој не се дефинира, а уште се нарекува и основно множество. Популацијата секогаш ќе ја означуваме со [redacted] затоа што таа всушност е множеството на сите можни исходи (елементарни настани) во врска со опитот„ испитување на популацијата со земање на еден елемент".

[redacted]

Распределбата на обележјето-случајна променлива е најчесто непозната или делумно позната. Испитувањата што се вршат на популацијата, во термини на теоријата на веројатноста, имаат за цел: наоѓање на непознатата распределба, нејзини бројни карактеристики, параметри, проверка на различни претпоставки за распределбата итн.

Точно и комплетно определување на распределбата на обележјето X е најчесто невозможно, затоа што тоа бара извршување на испитувања на сите елементи од популацијата. Во практиката тоа многу ретко се прави затоа што, на пример, популацијата содржи голем број на елементи, испитувањето на секој елемент може да биде сврзано со неговото оштетување, уништување или, општо, испитувањето на сите елементи да биде многу скапо или да нема смисла од различни причини.

[redacted] како: пол, боја на очи, народност, квалитет; [redacted] како на пример: висина, тежина, број на дефектни производи, време на непрекината работа, успех по одреден предмет итн. [redacted] На пример, дефектен производ да се означи со 1, а добар со 0; за означување на бојата на очите или народност се воведуваат онолку броеви колку што постојат различни можности итн.

[redacted] (како и случајните променливи). Примери на [redacted] се: [redacted] дефектни производи во испитувана серија, [redacted] изостаноци на еден ученик или клас, број на сообраќајни несреќи во текот на еден ден (и во одредено место) и др; а [redacted] се на пример: [redacted] живот" на некој механизам, [redacted] на некоја операција, димензија на одреден вид производи, температура на воздухот и др.

[redacted]

[redacted] или статистичко множество (с.м.). Со набљудување на дискретно обележје се добива т.н. [redacted] а при набљудување на непрекинато обележје - [redacted](континуирано) [redacted] Ако за елементите од популацијата се регистрираат вредностите на [redacted] тогаш имаме [redacted], а ако истовремено се регистрираат вредностите на [redacted]..., тогаш добиваме т.н. [redacted]

Такво е на пример множеството од подредени четворки од броеви, каде што на прво место е запишана должината, на второ - ширината, на трето - висината и на четврто место - времето на траење на некој вид производи; или множеството што се добива кога за секој ученик ќе се регистрира успехот по секој предмет; за секоја крава од одредено стопанство ќе се регистрира староста, бројот на телињата, млечноста и некои димензии.

[redacted]

Во математичката статистика постојат методи за собирање и обработка на статистичките податоци и анализа на добиените резултати, што овозможуваат, врз основа на податоци за дел од популацијата, да се донесат заклучоци, кои, со определена веројатност, важат за целата популација. Зошто велиме дека важат со одредена веројатност? Затоа што обележјата се случајни променливи, а резултатите од набљудувањата се случајни настани. Така, добиените величини, функции и решенија се оценки на параметри, распределби и решенија за приоритет на една претпоставка, кои се сигурни и важат за целата популација со одредена веројатност.

[redacted] или мостра. [redacted] Основно барање кое треба да го задоволува [redacted] е тој да биде [redacted] т.е. [redacted] да биде минимодел на истата. Тоа ќе се постичне ако, изборот на елементи за примерокот е таков што, секој елемент од популацијата има еднакви шанси да биде избран. Значи, [redacted]. [redacted]к.

Нека на популацијата Ω се набљудува обележјето X. Со X_1 да ја означиме случајната променлива „вредност на X во првото набљудување", со X_2 сл.п. „вредност на X во второто набљудување",..., со X_n – сл.п. „вредност на обележјето X во n-тото по ред набљудување". Вредностите на случајните променливи X_1, X_2,...,X_n се добиваат така што во серии од по n експерименти се регистрираат вредности на исто обележје X, при што, експериментите се еднакви и независни. Затоа, случајните променливи X_1, X_2,...,X_n се независни и еднакво распределени, со распределба на обележјето X.

[redacted] За случајните променливи X_1, X_2,..., X_n се користи уште и називот **n-независни набљудувања на X.**

Кога ќе земеме определен (конкретен) примерок од популацијата и ќе ги регистрираме вредностите на испитуваното обележле, тогаш добиваме низа броеви или симболи x_1, x_2,..., x_n, каде што x_i е вредност (реализација) на сл.п. X_i, i = 1, 2,..., n. [redacted]

Коментар: За одредена задача, едно множество статистички податоци може да се смета дека е реализација на обележјето X за целата популација, а во друга задача дека е реализација на примерок за тоа обележје. Така на пример, податоците за успехот на учениците по предметот „Основи на математиката и информатиката" од математичко информатичката струка при УСО „Р.Ј.Корчагин" во учебната 1986/87 година е реализација на тоа обележје за популацијата на учениците од споменатата струка, училиште и година. Меѓутоа, тие податоци се реализација на примерок за истото обележје за популацијата на ученици опфатени со математичко информатичката струка во Републиката, во наведената година, или воопшто од постоењето на математичко информатичката струка до денес.

Величините, функциите и решенијата, добиени врз основа на податоците за целата популација, даваат точни вредности на непознати параметри, точни распределби, и конечни заклучоци. Меѓутоа, бидејќи ретко кога е можно и препорачливо да се испитува целата популација, задачите се решаваат со оценки и функции добиени врз основа на податоци од примерок. Затоа тие оценки и решенија можат и да се менуваат (со промена на примерокот).

[redacted]

При теориското изучување на поимите и методите на математичката статистика секогаш се работи со примерокот X_1, X_2, ...,.X_n за обележје X како низа случајни променливи. Кога се решава задача за некоја конкретна популација, тогаш за пресметувањата и решенијата ја користиме реализацијата на примерокот.

Во статистика, при оценување на непознатите параметри, распределби и донесување на одлуки, се користат различни функции од примерокот. Функциите што се користат во статистичките методи, како функции од случајните променливи X_1, X_2, ..., X_n што го образуваат примерокот, се исто така случајни променливи.

[redacted] Секоја реализација на примерок за обележје X определува една реализација (вредност) на статистиката U. Секоја добиена реализација u на U е една од можните вредности на таа случајна променлива. За правилно решавање на задачите и користење на статистиките, неопходно е да се познаваат нивните распределби.

Статистиките што се користат во задачите за оценување се нарекуваат [redacted] Називот **статистика** е вообичаен за функциите од примерокот во задачите сврзани со донесување одлука за точност на една од повеќе претпоставки.

[redacted] кои се аналогни на функции и бројни карактеристики дефинирани во теоријата на веројатноста. Такви на пример се: функцијата на распределба на примерокот, распределба на веројатностите на примерокот, аритметичка средина и дисперзија, мода, медијана и др. Со нивни реализации се оценуваат соодветните функции и параметри на распределбата на испитуваното обележје. Со помош пак, на величини формирани со порано наведените оценки, се проверуваат различни претпоставки за популацијата.

[redacted]

Прв чекор во обработката на податоците од примерокот е нивно подредување, групирање, таблично и графичко претставување. Тоа е основа за понатамошна анализа на статистичките податоци, а пред се за добивање прва информација за обликот на распределбата на набљудуваното обележје.

Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е реализација на примерок за обележјето X и нека во него има k различни вредности ($k \le n$). Различните вредности од примерокот ги подредуваме по големина и добиваме низа:

$$x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_k,$$

на т.н. [redacted] ($x'_i < x'_j$, за $i<j$). Да го означиме со n_i бројот на вредности во примерокот еднакви со x'_i, $i=1,2,\ldots,k$.

Низата подредени двојки (x'_i, n_i), $i=1,2,\ldots,k$ се нарекува распределба на честотите на примерокот. Количникот n_i/n е релативна зачестеност на варијантата x'_i, а низата двојки $(x'_i, n_i/n)$ ја определува распределбата на релативните зачестености на примерокот.

Нека е x кој било реален број и со $n(x)$ да го означиме бројот на податоците од примерокот, што имаат вредност помала од x. [redacted]

[redacted] (1)

[redacted] или функција на распределба на примерокот.

Ако е најдена распределбата на честотите на примерокот, тогаш емпириската функција на распределба се определува на следниов начин: прво, јасно е дека за секој реален број x, помал или еднаков на најмалиот од примерокот, $n(x)=0$, и затоа $F_n(x)=0$. Значи, имаме:

за $x \le x'$, $\quad n(x) = 0, \quad F_n(x) = 0$, а потоа

за $x'_1 < x \le x'_2$, $\quad n(x) = n_1, \quad F_n(x) = \dfrac{n_1}{n}$,

$\vdots$

за $x'_r < x \le x'_{r+1}$, $\quad n(x) = \sum_{i=1}^{r} n_i, \quad F_n(x) = \sum_{i=1}^{r} \dfrac{n_1}{n}$,

$\vdots$

$$\text{за } x>x'_k, \qquad n(x) = \sum_{i=1}^{k} n_i = n, \qquad F_n(x) = 1.$$

[redacted] Затоа, таа се нарекува уште и распределба на [redacted]

[redacted]

Во координатен систем точките (x'_i, n_i), $i = \overline{1,k}$, поврзани последователно со отсечки, определуваат [redacted], а точките $(x'_i, n_i/n)$ [redacted] Додека точките $(x'_i, n(x'_i))$ поврзани последователно со отсечки образуваат т.н. [redacted] Графичкото претставување на емпириската функција на распределба може да се даде со графикот на функцијата $y=F_n(x)$, или пак, со полигонот на кумулативни релативни фреквенции.

Пример 1. *Во една продавница, во еден ден, се продадени 50 ~~чифта~~ машки чевли од следниве големини:*

41	39	41	36	41	39	40	42	41	40
40	38	41	42	39	40	43	40	42	41
39	42	43	41	40	38	42	40	41	43
41	40	38	42	42	43	37	42	43	41
40	42	37	41	41	43	~~41~~ 39	44	40	41

Да се најдат распределбите на примерокот и графички да се претстават.

Решение: Во овој случај имаме реализација на примерок со обем 50 за обележјето X „големина на машки чевли продадени во еден ден во одредена продавница". Примерокот има девет различни вредности - варијанти:

36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44.

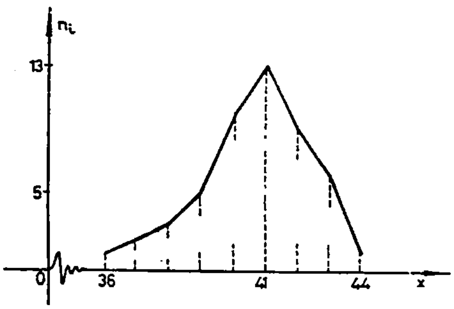
По пребројувањето и определувањето на зачестеноста на секоја варијанта ја составуваме табелата на распределбите на примерокот.

ТАБЕЛА 1

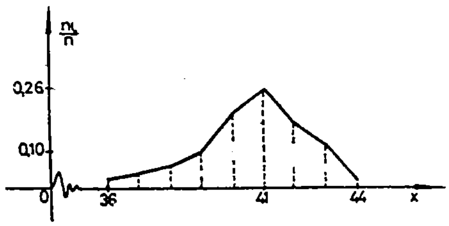
x'_i	36	37	38	39	49	41	42	43	44	Σ
n_i	1	2	3	5	10	13	9	6	1	50
n_i/n	0,02	0,04	0,06	0,10	0,20	0,26	0,18	0,12	0,02	1,0
$F_n(x)$	0	0,02	0,06	0,12	0,22	0,42	0,68	0,86	0,88	1,0
Интер.	≤36	(3637]	(3738]	(3839]	(3940]	(4041]	(4142]	(4243]	(4344]	>44

Во последната редица од табелата дадени се интервалите за x на кои емпириската ф.р. ја има вредноста наведена во претходната редица.

Полигоните на честотите и релативните честоти се прикажани на сл. 1 и сл. 2, соодветно.

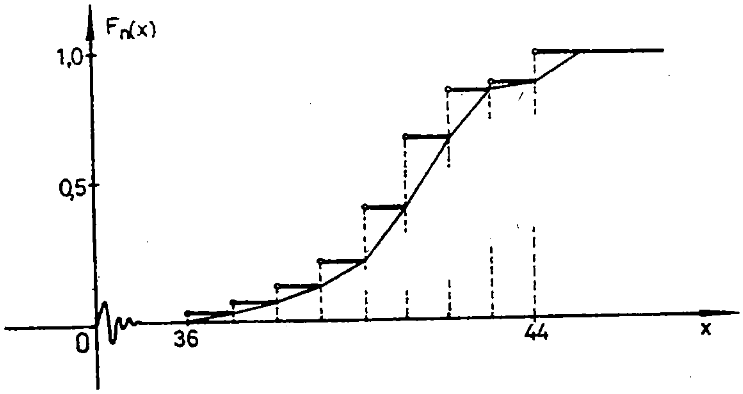


Сл. 1



Сл. 2

На сл. 3 графички е прикажана емпириската функција на распределба преку графикот на функцијата $y=F_n(x)$ и полигонот на кумулативни релативни честоти.



Сл. 3

Од распределбата на релативните честоти можеме да заклучиме, дека најмногу се продаваат чевли бр. 41, а 46% од продадените се чевли со големина од броевите 40 и 41.

Пример 2. *Изведени се мерења на дијаметарот на 150 производи од ист вид. Податоците се дадени во следнава табела.*

ТАБЕЛА 2

47	41	42	40	39	34	48	40	32	41	32	39	45	34	40	46	34	40	46	30	36	41	46	51	35
48	42	43	44	40	39	32	42	34	42	34	40	46	35	41	48	35	41	47	31	37	42	47	52	36
49	43	34	42	41	40	34	43	35	43	35	41	48	36	42	49	36	42	48	32	38	43	48	31	37
50	44	42	43	42	42	35	44	37	44	36	42	49	37	43	50	37	43	49	33	39	44	49	32	38
51	45	43	34	44	43	37	45	39	45	37	43	32	38	44	32	38	44	50	34	40	45	50	33	39
52	46	39	34	48	44	39	48	40	48	38	44	33	39	45	33	39	45	27	35	25	27	30	34	40

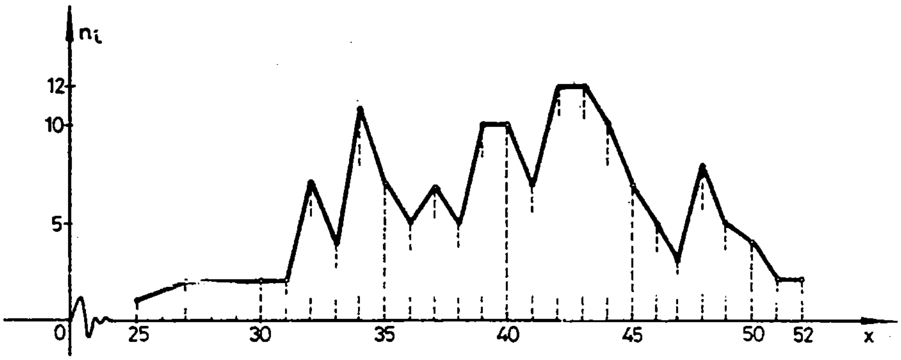
Да се најдат распределбите на примерокот и графички да се прикажат.

Решение: Распределбата на зачестености на различните вредност во примерокот дадена е во табелата 3.

ТАБЕЛА 3

x'_i		25	27	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
n_i		1	2	2	2	7	4	11	7	5	7	5	10
x'_i	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
n_i	10	7	12	12	10	7	5	3	8	5	4	2	2

Соодветниот полигон е претставен на сл. 4.



Сл. 4

Се добива прилично искршена, неправилна крива, од која тешко би можело да се воочи некоја законитост (правило), во појавувањето на вредностите и нивните честоти. Затоа, [redacted] Од таков тип се секогаш податоците за обележја кои се од непрекинат тип, како на пример: време, должина, отстапување на одредени димензии од стандарди во производството итн.

Бројот на интервалите во кои се врши групирањето, зависи од обемот на примерокот, од интервалот во кој се наоѓаат податоците, од видот на испитуваното обележје и целта на статистичкото испитување.

Еднозначен одговор на прашањето колкав треба да биде бројот r на интервали не постои. При даден обем n на примерокот, бројот r на интервали може да биде определен по една од формулите:

$$[redacted]\ r \approx 1+3,211\log n, \quad r \approx 5\log n.$$

Интервалите треба да бидат со иста должина, затоа што во спротивно се јавуваат тешкотии при пресметувањето на бројните карактеристики. Долната граница на првиот интервал и горната граница на последниот интервал се избираат така што да не се совпаѓаат со најмалата, односно најголемата вредност добиена во примерокот, освен во случаи кога тие се истовремено најмала, односно најголема можна вредност на испитуваното обележје.

Ако некои од податоците се совпаѓаат со границите на внатрешните интервали, тогаш половина од таквите податоци можеме да ги сместиме во претходниот интервал, а половина во следниот, или пак сите да ги сместиме во едниот или другиот интервал. Правилото за кое еднаш ќе се одлучиме, треба да се применува за сите интервали.

За нашиот пример, од формулите за бројот на интервали, ги добиваме овие вредности:

r=12, r=8 и r=11, соодветно.

Бидејќи должината на интервалот во кој се јавуваат вредностите е 52-25 = 27, а за да ги избегнеме 25 и 52 како граници на интервали, правиме проширување на интервалот, така што да биде (23,5; 53,5) со должина 30. Ќе ги групираме податоците најнапред во 10 интервали со должина од 3 единици. Така ја добиваме табелата 4. Во неа како претставник на секој интервал ја земаме неговата средина.

ТАБЕЛА 4 x_i n_i $\frac{n_i}{n}$

Реден број	Интервал	Средина	Честота	Релативна честота
1	23,5-26,5	25	1	0,007
2	26,5-29,5	28	2	0,013
3	29,5-32,5	31	11	0,073
4	32,5-35,5	34	22	0,147
5	35,5-38,5	37	17	0,113
6	38,5-41,5	40	27	0,180
7	41,5-44,5	43	34	0,227
8	44,5-47,5	46	15	0,100
9	47,5-50,5	49	17	0,113
10	50,5-53,5	52	4	0,100
Σ			150	1,000

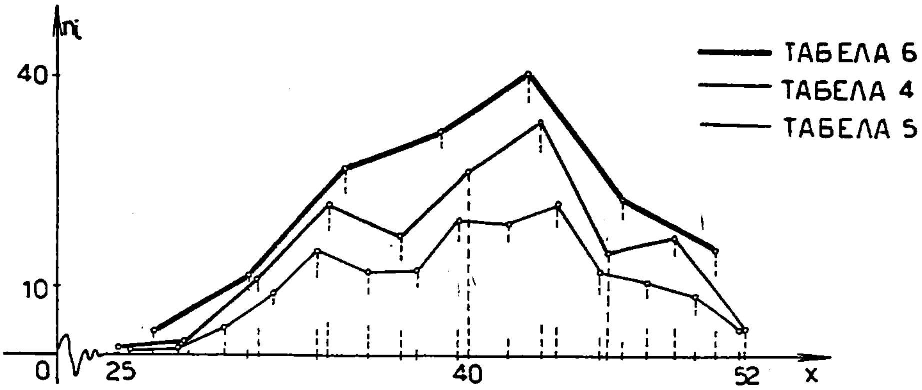
За да илустрираме како бројот на интервалите влијае на информацијата која се добива од распределбата на честотите, ќе извршиме групирање во интервали со должина $h=2$ и $h=4$ (табела 5, табела 6).

ТАБЕЛА 5

Реден број	Интервал	Сред.	Чест.
1	24,5-26,5	25,5	1
2	26,5-28,5	27,5	1
3	28,5-30,5	29,5	4
4	30,5-32,5	31,5	9
5	32,5-34,5	33,5	15
6	34,5-36,5	35,5	12
7	36,5-38,5	37,5	12
8	38,5-40,5	39,5	20
9	40,5-42,5	41,5	19
10	42,5 44,5	43,5	22
11	44,5-46,5	45,5	12
12	46,5-48,5	47,5	11
13	48,5-50,5	49,5	9
14	50,5-52,5	51,5	4

ТАБЕЛА 6

Реден број	Интервал	Сред.	Чест.
1	24,5-28,5	26,5	3
2	28,5-32,5	30,5	11
3	32,5-36,5	34,5	27
4	36,5-40,5	38,5	32
5	40,5-44,5	42,5	41
6	44,5-48,5	46,5	23
7	48,5-52,5	50,5	13



Сл. 5

На сл. 5 нацртани се полигоните на распределбите на честотите при групирање на податоците според табелите 4, 5 и 6. Како што се гледа на сл. 5 при голем број интервали, не се добива јасна претстава за типот на распределбата на набљудуваното обележје. Од друга страна, не е ниту добро да се врши групирање во мал број на интервали, затоа што, во тој случај, полигонот ќе се изглади и се губат карактеристиките на распределбата.

Распределбата на примерок, кај којшто е извршено групирање во интервали, почесто графички се претставува со т.н. **хистограма**. Хистограмата на распределбата $(x_i, n_i/n)$, $i=\overline{1,r}$, каде што x_i се средините на интервалите со должина h; се состои од r правоаголници со основа h и висина n_i/nh, конструирани соодветно на интервалите со средина x_i. При вакво определување на висините, збирот на плоштините на сите правоаголници од кои се состои хистограмата е еднаков на 1. Навистина:

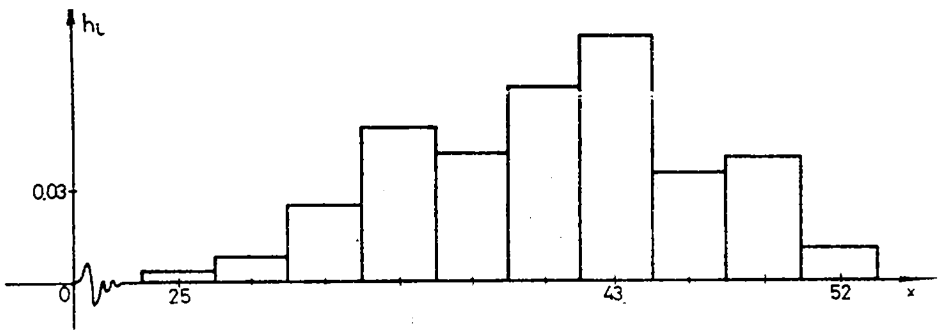
$$\sum_{i=1}^{r} p_i = \sum_{i=1}^{r} h\frac{n_i}{nh} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i = \frac{n}{n} = 1.$$

Така, хистограмата на релативните зачестености е една графичка оценка на густината на распределба на испитуваното обележје. Хистограмите на честотите и кумулативните релативни честоти се добиваат со конструирање на правоаголници чии висини се пропорционални на вредноста на величината што се претставува.

За разгледуваниот пример ги добиваме следниве табели и хистограми:

ТАБЕЛА 7

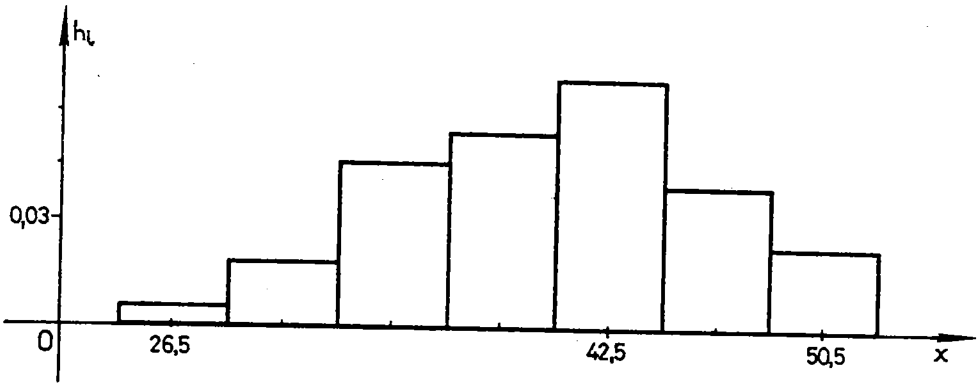
x_i	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52
h_i	0,0038	0,007	0,024	0,049	0,038	0,060	0,076	0,038	0,038	0,009



Сл. 6

ТАБЕЛА 8

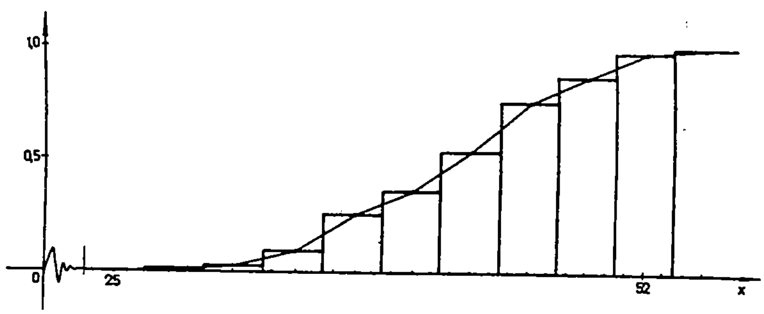
x_i	26,5	30,5	34,5	38,5	42,5	46,5	50,5
h_i	0,005	0,018	0,045	0,053	0,068	0,038	0,022



Сл. 7

ТАБЕЛА 9

x_i	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	>52
$\frac{n(x_i)}{n}$	0	0,007	0,020	0,093	0,240	0,353	0,533	0,760	0,860	0,973	1,0



Сл. 8

Често се случува резултатите од испитувањето на определено обележје да не бидат точно регистрирани, туку само да биде назначено во кој интервал припаѓаат. Таква постапка се применува кога не е можно вредноста на обележјето точно да се регистрира или за испитувањето не се битни точните вредности, туку само нивната распределба по интервали. Од тие причини потребно е да се знае како се претставуваат и обработуваат групираните податоци.

ПЕТ ЗАДАЧИ

1. *Семејството Петровски го сочинуваат таткото Т, мајката М и децата А, Б, В и Г. Да се определат сите можни четиричлени групи од семејството.*

2. *Во вашиот клас се набљудува средниот успех по предметот математика. За таа цел се избираат 10 ученици. На колку различни начини може да се изврши изборот?*

3. *Се набљудува температурата што е измерена во 14 часот во текот на месец март. Случајно се избрани 20 дена во кои температурите изнесуваат:*

ТАБЕЛА А

12	15	10	8	12
6	3	17	5	10
14	8	12	3	5
5	3	5	8	15

степени Целзиусови

Да се претстават графички: честотите, релативните честоти и емпириската функција на распределба на примерокот.

4. *Во набљудуван временски интервал во пристаништето А пристигнале 185 бродови. Во 67 од случаите растојанието меѓу пристигнувањето два последователни брода било пократко од 4 часа, во 43 случаи е меѓу 4 и 8 часа, во 30 меѓу 8 и 12 часа, во 18 меѓу 12 и 16 часа, во 11 меѓу 16 и 20 часа, во 7 меѓу 20 и 24 часа, во 5 меѓу 24 и 28, а во преостанатите 4 меѓу 28 и 32 часа. Графички да се претстават: честотите, релативните честоти и емпириската функција на распределба на примерокот.*

5. *Случајно се избрани 50 датотеки сместени на дискот на еден сметач. Меморискиот простор резервиран за секоја од нив изнесува:*

ТАБЕЛА Б

28	426	31	45	26	514	12	4	291	16
152	163	12	7	6	4	9	57	312	461
231	15	19	241	232	12	216	81	22	14
24	13	116	319	51	42	61	432	219	11
20	24	308	5	2	1	3	18	6	42

Да се групираат податоците во: а) 7 интервали; б) 10 интервали и да се прикажат хистограмите на релативните честоти.

5. АРИТМЕТИЧКА СРЕДИНА НА ПРИМЕРОКОТ

По изработувањето на распределбите на примерокот за испитуваното обележје и донесување на заклучок за обликот на неговата распределба, се пристапува кон пресметување на различни средни вредности на примерокот. Најчесто применувана средна вредност е аритметичката средина.

А. ДЕФИНИЦИЈА И ПРИМЕРИ

Аритметичка средина на реализиран примерок $x_1, x_2, \ldots, x_n$, со обем n, за обележје X е бројот:

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (1)$$

Ако е изработена распределбата на честотите на примерокот (x'_i, n_i), $i=\overline{1,k}$, тогаш формулата (1) го добива обликот:

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x'_i \qquad (2)$$

Во понатамошниот текст за варијантите и воопшто за вредностите на примерокот ќе користиме иста ознака, x_i, а ќе ги разликуваме според тоа колкав е нивниот број, т.е. според тоа дали горната граница на сумирањето е n или помала од n.

Развојот и распространетоста на техничките средства за пресметување многу ја олеснија макотрпната работа во врска со обработката на статистичките податоци. Со два примери ќе покажеме како се пресметува аритметичка средина на негрупирани и групирани податоци.

Пример 3. *Набљудувана е работата на комплекс електромотори и за таа цел регистриран е бројот на резервни делови употребени за време на работата на 59 електромотори. Добиените податоци дадени се во табелата 10, каде што во првите две колони е изработена распределбата на честоти за обележјето X - број на искористени резервни делови. n_i е бројот на електромотори за кои се искористени x_i делови. Во случај кога нема можност да се користи сметач, наједноставно е покрај колоните со вредност x_i и n_i да се пополни колона со нивните производи $n_i \cdot x_i$, $i=\overline{1,k}$. Сумата на добиените вредности поделена со n ја дава аритметичката средина. Во нашата задача добиваме:*

x_i	n_i	$n_i x_i$
0	3	0
1	17	7
2	10	20
3	18	54
4	12	48
5	7	35
6	2	12
Σ	59	176

ТАБЕЛА 10

$$\bar{x} = \frac{176}{59} = 2,98$$

$$\bar{x} \approx 3.$$

Според тоа, за работата на овој тип електромотори употребени се просечно по три резервни делови за мотор. Тоа овозможува планирање на количеството на соодветните резервни делови. △

Ако податоците се групирани во интервали, тогаш пресметувањата се извршуваат со вредностите x_i, што ги одредуваат нивните средини, откако на нив ќе се изврши одредена трансформација. Имено, се избира еден од интервалите за т.н. нулти интервал, неговата средина се означува со x_o и ако ширината на интервалите е h, за секое x_i се пресметува:

$$d_i = \frac{x_i - x_o}{h}, \quad i=1,2,\ldots,r. \qquad (3)$$

Така добиените вредности се последователни цели броеви, а за нултиот интервал $d=0$. Затоа, за нулти интервал обично се зема интервалот со најмногу податоци, или оној што се наоѓа на средина. Сето тоа многу ги олеснува пресметувањата.

Во тој случај формулата за аритметичка средина добива друг облик. Имено, од (3) добиваме:

$$x_i = x_o + hd_i, \quad i=1,2,\dots,r,$$

и потоа:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i(x_o+hd_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i x_o + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i hd_i =$$

$$= x_o\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i + \frac{h}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i d_i = x_o + hd.$$

Значи за n податоци групирани во r интервали со должина h и распределба (x_i, n_i), $i=\overline{1,r}$, аритметичката средина се пресметува со формулата:

$$\bar{x}_n = x_o + \frac{h}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i d_i. \tag{4}$$

За пресметување на $\bar{x}$ табелата за распределба на честоти се дополнува со колона на вредностите d_i и $n_i d_i$.

Пример 4. *Ќе пресметаме аритметичка средина за податоците од примерот 2, користејќи ја табелата 4, за која $r = 10$, $h = 3$*

ТАБЕЛА 11

x_i	n_i	d_i	$n_i d_i$
25	1	-5	-5
28	2	-4	-8
31	11	-3	-33
34	22	-2	-44
37	17	-1	-17
40	27	0	0
43	34	1	34
46	15	2	30
49	17	3	51
51	4	4	16
Σ	150		24

Бидејќи со најголема честота е седмиот интервал, а средни интервали се петтиот и шестиот, за нулти интервал ќе го избереме шестиот кој има поголема честота. Затоа вредностите d_i се пресметуваат по формулата:

$$d_i = \frac{x_i - 40}{3}, \quad i=1,\dots,10.$$

Ја пополнуваме таблицата и преметуваме:

$$\bar{x} = 40 + \frac{24}{150} = 40,16.$$

Просечната вредност на обележјето е приближно 40 единици.

Точната вредност на $\bar{x}$ пресметана од податоците во табелата 3 (пр. 2, 4) е 40,42. Пресметаната вредност 40,16 незначително се разликува од точната. Опишаната постапка значајно ги олеснува пресметувањата, ако се има предвид дека за точно пресметување е потребно да се внесат 150 податоци, кога се користи сметач, а и фактот дека не секогаш сме во можност да го користиме. Δ

Трансформацијата на податоците, определена со (3), се користи и при обработка на податоци што не се групирани во интервали. Имено, ако вредностите на варијантите се разликуваат последователно за иста константа h $(x_{i+1}-x_i=h, i=1,\ldots, k-1)$, тогаш се избира погодна вредност за x_o, се трансформираат варијантите x_i по формулата (3) и се пресметува $\bar{x}$ по формулата (4).

Ако пак варијантите не се на исто растојание, тогаш се избира x_0, се извршува трансформација по формулата (3), но со h=1. Така се добива:

$$\bar{x} = x_o + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i-x_o) \qquad (5)$$

На овој начин се избегнува работата со големи броеви, а добиената вредност за $\bar{x}$ се совпаѓа со точната

ТАБЕЛА 12

x_i	n_i	d_i	$n_i d_i$
0	3	-3	-9
1	7	-2	-14
2	10	-1	-10
3	18	0	0
4	12	1	12
5	7	2	14
6	2	3	6
Σ	59		-1

ТАБЕЛА 13

x_i	n_i	d_i	$n_i d_i$
36	1	-5	-5
37	2	-4	-8
38	3	-3	-9
39	5	-2	-10
40	10	-1	-10
41	13	0	0
42	9	1	9
43	6	2	12
44	1	3	3
Σ	50		-18

Така за податоците од примерот 3, ја добиваме табелата 12, и пресметуваме:

$$\overline{x} = 3 + \frac{(-1)}{59}$$

$$\overline{x} = 3 - 0,0169$$

$$\overline{x} = 2,983$$

За податоците од примерот 1, ја добиваме табелата 13 и пресметуваме:

$$\overline{x} = 41 + \frac{(-18)}{150}$$

$$\overline{x} = 41 - 0,36$$

$$\overline{x} = 40,64 \approx 41$$

Б. СВОЈСТВА НА АРИТМЕТИЧКАТА СРЕДИНА

Ќе ја разгледаме аритметичката средина на примерокот за произволно обележје X, нејзините својства како бројна карактеристика на примерокот и како оценка на параметри во распределбата на тоа обележје.

Теорема. *Аритметичката средина на примерок* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *ги има следниве својства:*

а) $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = 0;$

б) Ако $a \le x_i < b,\ i=\overline{1,m}$, *тогаш е и* $a \le \overline{x} \le b;$

в) $\sum_{i=1}^{n} (x_i - c)^2 \ge \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2,\ c \in \mathbb{R};$

г) Ако $\overline{x}$ *и* $\overline{y}$ *се аритметички средини на податоците* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *и* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *соодветно, тогаш аритметичката средина на двете низи податоци е:*

$$\frac{n\overline{x}+m\overline{y}}{n+m}.$$

Доказ:

а) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n}x_i - \sum_{i=1}^{n}\bar{x} = \sum_{i=1}^{n}x_i - n\bar{x} = n\bar{x}-n\bar{x} = 0.$

б) $x_i \geq a \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a = a$

$x_i \leq b \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b = b,$

со што е докажано дека $a\leq\bar{x}\leq b$.

в) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-C)^2 = \sum_{i=1}^{n}[(x_i-\bar{x}+\bar{x}-C)^2] =$

$$= \sum_{i=1}^{n}[(x_i-\bar{x})^2+2(\bar{x}-C)(x_i-\bar{x})+(\bar{x}-C)^2] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+2(\bar{x}-C)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})+n(\bar{x}-C)^2,$$

Втората сума $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\right)$ според а) е еднаква на 0.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-C)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-C)^2 \geq \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.$$

г) Ако означиме $z_i=x_i$, $1\leq i\leq n$ и $z_{n+j}=y_j$, $1\leq j\leq m$, тогаш

$$\bar{z} = \frac{1}{n+m}\sum_{k=1}^{n+m}z_k = \frac{1}{n+m}\left[\sum_{k=1}^{n}z_k + \sum_{k=1}^{m}z_{n+k}\right] =$$

$$= \frac{1}{n+m}\sum_{i=1}^{n}x_i + \frac{1}{n+m}\sum_{j=1}^{m}y_j = \frac{n\bar{x}}{n+m} + \frac{m\bar{y}}{n+m}.$$

Својството а) се користи за проверка дали е точно пресметана аритметичката средина; б) покажува во кои граници мора да се наоѓа таа; неравенството в) покажува дека сумата на квадратите на отстапувањето на податоците од некоја константа C е најмало ако $C=\bar{x}$. Формулата г) може да се воопшти за повеќе од два примероци. Имено, ако врз основа на n_1 податоци за обележје X е пресметана аритметичка средина $\bar{x}_{(2)}, \ldots,$ и со n_k податоци за истото обележје аритметичката средина $\bar{x}_{(k)}$, тогаш аритметичката средина на сите податоци се определува по формулата:

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_{(1)}+n_2\bar{x}_{(2)}+\ldots n_k\bar{x}_{(k)}}{n_1+n_2+\ldots+n_k}.$$

Таа ни овозможува пресметување на аритметичката средина на повеќе серии податоци за исто обележје, ако сме ги запамтиле само обемот на примерокот и аритметичката средина за секоја серија и не ослободува од чување на сите податоци за оваа цел.

Аритметичката средина на реализиран примерок $x_1, \ldots, x_n$ за обележјето X е една од можните вредности на статистиката

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

каде што X_1, X_2, ..., X_n се независни и еднакво распределени сл.п. како и обележјето X. Ако X има математичко очекување и дисперзија, а во задачите од практиката, тоа е секогаш случај, тогаш:

$$E\bar{X}_n = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{1}{n}\cdot nEX = EX \tag{6}$$

и

$$D\bar{X}_n = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{1}{n^2}\cdot nDX = \frac{DX}{n}. \tag{7}$$

Затоа, вредностите на статистиката $\bar{X}_n$ имаат центар на распределбата (средна вредност) еднаква на математичкото очекување на обележјето што се испитува. Дисперзијата, како мерка за отстапувањето на вредностите на $\bar{X}_n$ од EX, е n-пати помала од дисперзијата на обележјето X.

За сл.п. X_1, $X_2, \dots, X_n$ од примерокот се исполнети условите за важење на законот на големите броеви, а тоа значи дека, за кое било $\varepsilon>0$, постои доволно големо n, такво што настанот:

$$\{|\overline{X}_n - EX| < \varepsilon\}$$

е практично сигурен настан. Затоа вредностите на статистиката $\overline{X}_n$ се користат за оценување на математичкото очекување на испитуваното обележје X.

Освен тоа, $\overline{X}_n$ може да биде запишано на следниов начин:

$$\overline{X}_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n},$$

т.е. како сума на сл.п. за кои се исполнети условите на централната гранична теорема. Од тоа следува дека, за голем број на собирци (голем обем на примерокот), распределбата на $\overline{X}_n$ е приближно еднаква на нормална распределба со параметри $E\overline{X}_n$ и $D\overline{X}_n$, кои се определени со (6) и (7). Затоа веројатностите во врска со $\overline{X}_n$ можат да се определат приближно со распределбата $N(EX, DX/n)$. Тоа кусо ќе го запишеме на следниов начин:

$$\overline{X}_n \sim N(EX, DX/n).$$

Стандардизираниот облик на $\overline{X}_n$,

$$\overline{X}_n^* = \frac{\overline{X}_n - EX}{\sqrt{DX}}\sqrt{n}$$

има приближно распределба $N(0,1)$ за голем обем n на примерокот. Ова е едно од најважните својства на $\overline{X}_n$, кое овозможува нејзина широка примена во задачите за оценување и одлучување.

ПЕТ ЗАДАЧИ:

1. *Во три групи е мерена висината на учениците од еден клас. Добиени се следниве податоци:*

I:	168	190	184	172	158	166		
II:	194	167	164	175	181			
III:	181	185	192	203	194	187	179	180

Да се пресмета средната висина во секоја група и во целиот клас.

(173; 176,2; 187,625; 180)

2. *Колкава е просечната температура во месец март според податоците од табелата 8 (зад.3 (1)).*

(8,8°C)

3. *Да се пресмета просечната обемност на датотеките дадени во табелата 9 (зад.5, (1)) во случај на обработка на податоците во:*

а) 7 интервали;

б) 10 интервали.

Која вредност е поблиска до точната?

(121,5; 114,4; втората)

4. *Дадена е низата податоци:*

23 26 18 41 32 16 15 19 28 32

Да се пресмета:

а) $\bar{x}$;

б) Секоја од вредностите да се зголеми за 15 и да се пресмета аритметичката средина на новата низа;

в) Како ќе се променат аритметичките средини на двете низи ако секој податок се подели со 5?

(25; 40; 25:5 и 40:5)

5. *Да се пресмета аритметичката средина на податоците од задачата 4, со помош на формулата (5), земајќи:*

а) $x_o = 28$, *б)* $x_o = 25$.

6. ДИСПЕРЗИЈА НА ПРИМЕРОКОТ

Покрај аритметичката средина што го определува центарот на распределбата на обележјето како просечна вредност, неопходно е да се има и информација за расејувањето и отстапувањето на податоците од избраната средина.

Имено, многу често се случува две обележја да имаат приближно иста средна вредност, а да примаат вредности на различни интервали по положба и должина, или пак, и кога се определени на исто множество, кај едната да бидат почести вредностите околу средината, а кај другата оние од краевите.

Пример 5. *Извршена е контрола на 25 производи од ист вид во две фабрики, A и B, при што е мерено отстапувањето на одредена димензија од стандардите. Така се добиени следниве податоци (таб. 14). Кои производи се подобри?*

ТАБЕЛА 14

x_i	-6	-4	-2	0	2	4	6
n_i^A	1	2	4	8	5	3	2
n_i^B	2	3	4	4	5	4	3

Решение: Од податоците се гледа дека кај производите од фабриката *B* почесто се јавуваат поголеми отстапувања отколку кај производите од фабриката *A*. За аритметичките средини добиваме

$$\bar{x}_A = 0,48 \text{ и } \bar{x}_B = 0,48 \text{ соодветно,}$$

додека најчеста вредност на примерокот од фабриката *A* е 0, а од фабриката *B* е 2. Според честотите на поголемите отстапувања може да донесеме заклучок дека подобро е производството на фабриката *A*.

Наједноставна мерка за распростирање на вредностите на едно обележје, добиена врз основа на примерокот, е **интервалот на варијација** што се означува со I.

Ако $x_{(1)}$ е најмалата од вредностите во примерокот, а $x_{(n)}$ најголемата, тогаш:

$$\boxed{I = x_{(n)} - x_{(1)}.} \qquad (13)$$

Таа не го одразува отстапувањето на вредностите во примерокот од средината.

Бројна карактеристика на примерокот, која е мерка за отстапувањето на податоците од нивната аритметичка средина е дисперзијата на примерокот. **Дисперзија** s^2 на примерокот x_1, $x_2, \ldots, x_n$ е бројот:

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.} \tag{14}$$

Ако е најдена распределбата на честотите на примерокот тогаш формулата (14) го добива следниов вид:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i-\bar{x})^2. \tag{14'}$$

За пресметување на дисперзијата почесто се користи друга формула, која се изведува на следниов начин:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2-2\bar{x}^2+\bar{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\bar{x}^2.$$

Добивме дека:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\bar{x}^2. \tag{15}$$

На аналоген начин од формулата (14') се добива:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2-\bar{x}^2. \tag{15'}$$

Квадратниот корен од дисперзијата се нарекува **стандардна девијација** на примерокот.

Пример 6. *Да се пресмета дисперзијата на податоците од примерот 5.*

Решение: Потребните пресметувања извршени се во следниве две табели:

A:

x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
-6	1	-6	36
-4	2	-8	32
-2	4	-8	16
0	8	0	0
2	5	10	20
4	3	12	48
6	2	12	72
Σ	25	12	224

B:

x_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
-6	2	-12	72
-4	3	-12	48
-2	4	-8	16
0	4	0	0
2	5	10	20
4	4	16	64
6	3	18	108
Σ	25	12	328

$$s_A^2 = \frac{224}{25} - (0,48)^2; \qquad s_B^2 = \frac{328}{25} - (0,48)^2;$$

$$s_A^2 = 9,33. \qquad s_B^2 = 13,66. \quad \triangle$$

Ако податоците се групирани во интервали, тогаш за претставник на сите вредности од еден интервал, се зема неговата средина, а дисперзијата се пресметува како дисперзија на примерок со распределба на честоти (x_i, n_i), $i = \overline{1,r}$. Вредностите:

$$x_i = x_o + hd_i, \quad i = \overline{1,r}, \quad \text{и} \quad \bar{x} = x_o + h\bar{d}$$

ги заменуваме во формулата (15), при што имаме:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i[(x_o+hd_i) - (x_o + h\bar{d})]^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i[h(d_i-\bar{d})]^2 = \frac{h^2}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i(d_i-\bar{d})^2.$$

Формулата за дисперзија на групирани податоци со примена на трансформацијата $d_i = (x_i-x_o)/h$ гласи:

$$s^2 = h^2\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i d_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i d_i\right)^2\right] \qquad (16)$$

Пример 7. *Ќе ја пресметаме дисперзијата за податоците од примерот 2.*

n_i	d_i	$n_i d_i$	$n_i d_i^2$
1	-5	-5	25
2	-4	-8	32
11	-3	-33	99
22	-2	-44	88
17	-1	-17	17
27	0	0	0
34	1	34	34
15	2	30	60
17	3	51	153
4	4	16	64
Σ		24	572

Решение: Потребните пресметувања извршени се во таблицата, при што на колоните со вредности n_i, d_i и $n_i d_i$ им е придружена колона со вредности $n_i d_i^2$.

$$s^2 = 3^2 \cdot \left[\frac{1}{150} 572 - \left(\frac{24}{150} \right)^2 \right]$$

$$s^2 = 9 \cdot (3{,}8133 - 0{,}0256)$$

$$s^2 = 34{,}09.$$

Стандардната девијација е:

$$s = \sqrt{34{,}09} = 5{,}83. \quad \Delta$$

При пресметување на дисперзијата врз основа на групирани податоци добиената вредност не е точна, заради тоа што сите вредности од еден интервал се заменуваат со неговата средина.

За оценување на дисперзијата на испитуваното обележје X со помош на примерок, покрај дисперзијата определена со (14) се користи т.н. поправена дисперзија, определена со:

$$\boxed{\bar{s}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.} \tag{17}$$

Дисперзиите s^2 и $\bar{s}^2$ се сврзани со следнава релација:

$$\bar{s}^2 = \frac{n}{n-1}s^2. \tag{18}$$

Оценките на дисперзијата на испитуваното обележје добиени со $\bar{s}^2$, во просек, се подобри отколку оние добиени со s^2. Имено, распределбата на вредностите $\bar{s}^2$ има средна вредност еднаква на дисперзијата на испитуваното обележје. За голем примерок разликата меѓу s^2 и $\bar{s}^2$ е незначителна. Затоа за мали вредности на n при оценување на дисперзијата се користи $\bar{s}^2$, а за големи може да се користи и величината s^2.

Пример 8. *За податоците од примерот 3 ќе извршиме пресметување на дисперзијата на два начина: обично, и со примена на трансформација на податоците* $d_i = x_i - x_o$*, каде што* x_o *е поволно избран број (*x_o *се нарекува привремена работна средина).*

x_i	n_i	n_ix_i	$n_ix_i^2$
0	3	0	0
1	7	7	7
2	10	20	40
3	18	54	162
4	12	48	192
5	7	35	175
6	2	12	72
Σ	59	176	648

n_i	d_i	n_id_i	$n_id_i^2$
3	-3	-9	27
7	-2	-14	28
10	-1	-10	10
18	0	0	0
12	1	12	12
7	2	14	28
2	3	6	18
59		-1	123

Решение: Според првата табела:

$$s^2 = \frac{648}{59} - (2,983)^2; \; s^2 = 2,085,$$

а од втората табела имаме:

$$s^2 = \frac{123}{59} - \left(\frac{1}{59}\right)^2; \; s^2 = 2,085; \; s = 1,688. \quad \triangle$$

Коефициент на варијација CV на примерокот со аритметичка средина $\bar{x}$ и стандардна девијација s е бројот дефиниран со:

$$\boxed{CV = \frac{s}{\bar{x}}.} \tag{19}$$

CV може да се изразува и во проценти:

$$\boxed{CV = 100 \cdot \frac{s}{\bar{x}} \%.}$$

За податоците од примерот 3 добиваме:

$$CV = \frac{1,688}{2,983} = 0,566, \text{ или } CV = 56,6\%,$$

а за податоците од примерот 2 добиваме:

$$CV = \frac{5,77}{40,16} = 0,144, \text{ или } CV = 14,4\%.$$

Коефициентот на варијација е мерка за релативното отстапување и служи за споредување на обележјата што се изразуваат во различни единици.

ПЕТ ЗАДАЧИ:

1. *Земени се по 10 автомобилски гуми од производството на две фабрики и тестиран е нивниот век на траење. Од која фабрика е подобро да се купува, ако со гумите се поминати:*

I: *42 48 65 36 12 51 47 80 26 63*

II: *34 26 79 15 14 98 69 87 18 60 (во 1 000 km)*

$(\bar{x}'_{10} = \bar{x}''_{10} = 50\ 000$ km, $s'_{10} < s''_{10}$,

$s'_{10} = 14\ 859$ km, $s''_{10} = 30\ 851$ km).

2. *Да се пресметаат дисперзиите и коефициентите на варијација на податоците од табелите А и В (зад. 3 и зад. 5, стр. 211 и стр. 212).*

$$(\bar{x}_{20} = 8,8;\ s_{20} = 10,71;\ CV = 121,7\%;$$

$$\bar{x}_{50} = 121,5;\ s_{50} = 134,69;\ CV = 110,86\%)$$

3. *Дадена е низата податоци:*

A: 23 26 18 41 32 16 15 19 28 32

а) Низата В се добива кога секој податок ќе се зголеми за 15.

б) Со делење на податоците од низите А и В со 5 се добиваат низите C и D.

Да се пресметаат дисперзиите и коефициентите на варијација на низите податоци А, В, С и D. Каков е нивниот однос?

$$(s_A = s_B = 7,96 = 5s_c = 5s_D;$$

$$CV_A = CV_B = 31,85\% > 19,91\% = CV_B = CV_D)$$

4. *Да се споредат вредностите на дисперзијата на податоците:*

26	28	41	36	29	54	18	29
16	24	32	42	27	37	23	45
35	31	22	34	48	25	38	47

при обработка во 5 интервали со и без Шепардовата корекција.

$$(s^2_{24} = 92,6875;\ s^2_u = 90,54;\ \tilde{s}^2 = 85,23)$$

5. *Да се спореди хомогеноста на податоците дадени со својата средина и дисперзија:*

$$\bar{x}_A = 100, \qquad s^2_A = 6\ 400,$$

$$\bar{x}_B = 0, \qquad s^2_B = 100.$$

(Податоците се неспоредливи, бидејќи не може да се пресмета коефициентот на варијација за податоците В.)

7. НОРМИРАЊЕ НА ПОДАТОЦИТЕ

За случајната променлива X со математичко очекување EX и дисперзија DX:

$$\overset{*}{X} = \frac{X-EX}{\sqrt{DX}},$$

ја нарековме нормиран или стандаризиран облик на сл.п. X. Притоа $E\overset{*}{X} = 0$ и $D\overset{*}{X} = 1$.

Во задачите за одлучување често е потребно да се споредуваат обележја изразени со величини од различен ред. Во таков случај основните бројни карактеристики и распределбите не можат да се споредуваат непосредно. Освен тоа, за користење на таблиците за различни распределби, податоците најчесто треба да се трансформираат на соодветен начин.

Нека x_1, $x_2, \dots,$ x_n е примерок за обележјето X со аритметичка средина $\bar{x}$ и дисперзија s^2. Трансформацијата:

$$z_i = \frac{x_i-\bar{x}}{s}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

се нарекува нормирање или стандардизација на податоците.

Аритметичката средина $\bar{z}$ и дисперзијата s_z^2 на стандардизираните податоци ќе бидат:

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i-\bar{x}}{s} = \frac{1}{ns}\sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x}) = 0$$

$$s_z^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (z_i-\bar{z})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \frac{1}{ns^2}\sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2 = 1$$

Значи, аритметичката средина и дисперзијата на нормирани податоци се $\bar{z} = 0$ и $s_z^2 = 1$.

Од ова следува дека, ако имаме податоци за повеќе случајни променливи тогаш распределбите на соодветните стандардизирани податоци имаат иста средна вредност и средно квадратно отстапување - дисперзија. Освен тоа, во случај кога се претпоставува дека испитуваното обележје X има нормална распределба, со стандардизација на податоците се овозможува лесно споредување на емпириската распределба со $N(0,1)$ распределбата, за која постојат таблици.

Ако се споредуваат две обележја, тогаш најдобро е да се споредуваат распределбите на релативните зачестености на нормираните податоци и тие графички да се прикажат истовремено во ист координатен систем.

Пример 9. *Да извршиме нормирање на податоците од примерот 3.*

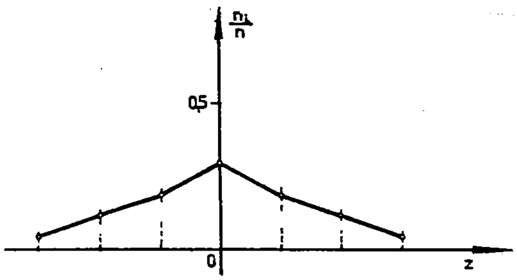
x_i	$x_i-\bar{x}$	z_i	n_i/n
0	-3	-1,78	0,051
1	-2	-1,19	0,119
2	-1	-0,59	0,168
3	0	0,00	0,305
4	1	0,59	0,203
5	2	1,19	0,119
6	3	1,78	0,034
Σ			1,000

Беа пресметани:

$\bar{x} = 2,98 \approx 3$ и

$s = 1,688$.

За да го олесниме пресметувањето на нормираните податоци, работиме со $\bar{x} = 3$ (сл. 1).



Сл. 1

Пример 10. *Да ги споредиме распределбите на димензиите на два вида производи, врз основа на два примероци, од кои едниот е примерокот од примерот 2 (4), а вториот е даден со табелата 15.*

ТАБЕЛА 15

x_i	n_i	x_i	n_i
244	4	251	33
245	6	252	41
246	11	253	17
247	16	254	14
248	14	255	11
249	42	256	8
250	56		

Решение: За првиот примерок имавме точна вредност на $\bar{x} = 40,42$ и $s = 5,71$, а за вториот примерок се пресметува:

$\bar{x} = 250,2$

и $s = 2,53$.

Резултатите од пресметувањата се дадени во двете следни табели, при што за примерот 2 е користена распределбата во 14 интервали со должина $h = 2$.

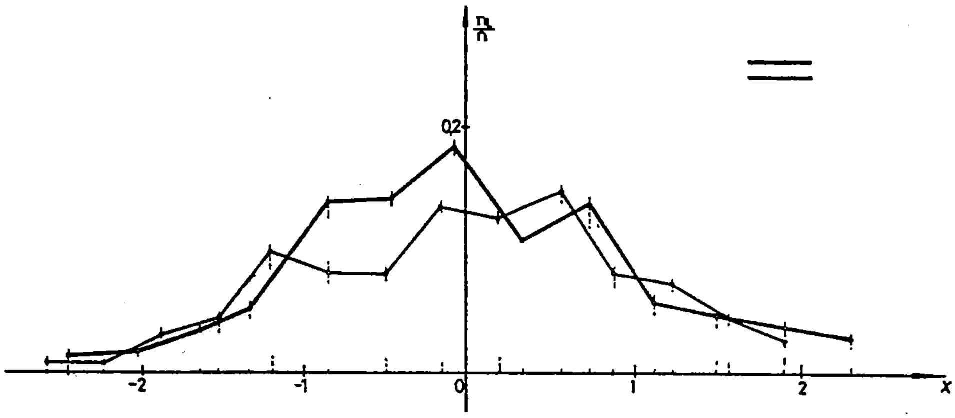
ТАБЕЛА C

x_i	$x_i-\bar{x}$	z_i	n_i/n
25,5	-14,92	-2,60	0,007
27,5	-12,92	-2,25	0,007
29,5	-10,92	-1,90	0,027
31,5	-8,92	-1,55	0,060
33,5	-6,92	-1,20	0,100
35,5	-4,92	-0,86	0,080
37,5	-2,92	-0,51	0,080
39,5	0,92	-0,16	0,133
41,5	1,08	0,19	0,127
43,5	3,08	0,54	0,147
45,5	5,08	0,88	0,080
47,5	7,08	1,23	0,073
49,5	9,08	1,58	0,060
51,5	11,08	1,93	0,027

ТАБЕЛА D

x_i	$x_i-\bar{x}$	z_i	n_i/n
244	-6,2	-2,45	0,0133
245	-5,2	-2,05	0,0167
246	-4,2	-1,66	0,0367
247	-3,2	-1,26	0,0533
248	-2,2	-0,86	0,1400
249	-1,2	-0,47	0,1400
250	-0,2	-0,08	0,1867
251	0,8	0,32	0,1100
252	1,8	0,72	0,1367
253	2,8	1,11	0,0567
254	3,8	1,50	0,0467
255	4,8	1,90	0,0367
256	5,8	2,30	0,0267

Полигоните на релативните честоти прикажани се на сл. 2



Сл. 2

ВЕЖБИ

1. *Бројот на дефектните производи во 36 контроли на 10 производи изнесува:*

0	0	1	0	2	0	0	0	0	2	0	0
1	2	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	3	1	0	0	1	0	1	0	1	1

а) Да се најдат распределбите на релативните честоти и емпириската функција на распределба и да се конструираат соодветните полигони;

б) Да се пресметаат аритметичката средина и дисперзијата на примерокот.

2. *Брзината на автомобилите на некој дел од патот изнесува:*

51	51	39	25	51	53	52	44	51	40
33	58	50	46	45	56	38	56	60	51
65	37	53	64	58	57	44	45	39	52
40	45	46	51	46	48	55	69	54	53

а) Да се пресметаат точната аритметичка средина, дисперзијата на примерокот и коефициентот на варијација;

б) Да се конструираат хистограми на честотите и кумулативните честоти;

в) Да се пресметаат аритметичката средина и дисперзијата на примерокот според добиената табела при интервалната обработка и

г) Да се споредат резултатите добиени на двата начини.

3. *Податоците од претходната задача да се групираат во 8 групи од по пет последователни податоци (на пример,* I: *51, 51, 39, 25, 51;* II: *53, 52, 44, 51, 40 итн.).*

а) Да се пресмета аритметичката средина во секоја група;

б) Да се пресметаат аритметичката средина, дисперзијата и коефициентот на варијација на осумте добиени аритметички средини; и

в) Да се споредат добиените вредности со точните добиени во претходната задача.

4. *Мерен е напонот на електричната мрежа (во волти). Добиени се следниве податоци:*

217	218	219	217	218	220	220	219	220	221
218	219	220	218	217	220	219	221	221	220
220	216	220	219	220	218	222	219	219	220

а) Да се пресметаат просечниот напон во мрежата и дисперзијата;

б) Да се оцени просечниот пораст на напонот;

в) Кој напон е најчест во мрежата?

5. *Должината на работа на 30 електрични светилки изнесува (во 1 000 часови):*

5,1	5,6	6,9	3,1	5,6	4,9	5,1	5,3	7,4	5,1
6,3	4,8	5,3	5,1	6,4	5,0	5,9	8,4	5,5	8,2
5,5	7,2	7,0	5,4	5,1	7,7	9,0	6,2	7,3	5,8

а) Да се нацртаат хистограмите на честотите и кумулативните честоти за примерокот;

б) Да се нормираат податоците;

в) Колкав е коефициентот на варијација на нормираниот примерок?

6. *Се набљудуваат светилки произведени во две фабрики во однос на часовите на горење. Добиени се резултатите*

X (0–100; 100–200; 200–300;...; 900–1 000)

n_{1i} (1, 3, 6, 17, 24, 15, 6, 3, 0, 0)

n_{2i} (3, 5, 9, 9, 19, 14, 6, 4, 4, 2),

каде n_{1i} и n_{2i} се соодветниот број светилки. Која фабрика има подобро производство?

7. *Да се пресметаат просечната, најверојатната и средишната вредност на бројот на дефектните производи од задачата 1.*

8. *Колкави се модата и медијаната на брзината на автомобилот разгледуван во задачата 2?*

9. *Да се пресметаат и споредат средната вредност, најчестата вредност и средината на податоците од задачата 5.*

10. *Во еден погон се вработени 10 работници на ист вид задачи. Времето потребно за производство на единица производ е дадено во табелата:*

18 24 27 12 36 54 16 48 18 36 (минути).

Колку време во просек е потребно за да се произведе единица артикл?

11. *Еден автомобил минал 50 km со просечна брзина од 25 km/h, 200 km со брзина од 40 km/h и на крајот 90 km со брзина од 30 km/h. Колку километри минувал автомобилот просечно во тек на еден час? За колку минути просечно минувал 1 km?*

VII ПРОВЕРКА НА СТАТИСТИЧКИ ХИПОТЕЗИ

1. ХИПОТЕЗИ И ГРЕШКИ

Една од најважните задачи на статистиката е определување на методи за проверка на точноста на различни претпоставки за популацијата.

На пример, при испитувањето на нов лек на група од n пациенти, регистрирано е подобрување кај k пациенти. Ако релативната честота $\frac{k}{n}$ е поголема отколку при лекувањето со стариот лек, се поставува прашањето: дали можеме веднаш да го прогласиме новиот лек за значајно подобар? Уште посложена е задачата, ако треба да се споредуваат повеќе лекови. Се поставува прашањето: колку поголем треба да биде процентот на извлекувани со еден лек од другите за да заклучиме дека е тој подобар од другите лекови. Понатаму, откако сме донесле определено решение, потребно е да се процени колкава е можноста (веројатноста) дека сме згрешиле? Исти прашања во суштина се јавуваат и во случај кога, на пример, се испитува која доза од одредено вештачко ѓубре, или кој вид од повеќе ѓубрива дава најдобар резултат; или кога треба да се одговори дали одредена нова технологија дава производи со подобар квалитет, дали производството не некоја машина ги задоволува стандардите?

Бидејќи најголем дел од различните настани може да се сметаат за случајни, а набљудуваните обележја за случајни променливи, секоја претпоставка за нив може да се искаже како претпоставка за веројатностите на настаните и распределбите на обележјата. Во наведените примери ги имаме следниве претпоставки: настанот „пациентот е излекуван со новиот лек" има поголема веројатност отколку настанот „пациентот е излекуван со стариот лек", просечната вредност (математичкото очекување) на приносот при употреба на одредена доза на вештачко ѓубре е поголема отколку при употреба на други дози (видови); карактеристиките на производството имаат просечна вредност (EX) и грешка (DX) определена со стандардите, или бројот на дефектите во текот на производството има Поасонова распределба.

[redacted]

[redacted]

Проверката на статистичките хипотези се извршува со помош на различни величини кои се вредности на одредени функции од примерокот, што ги нарековме статистики. Статистиката која се користи за спроведување на определен тест се нарекува **тест-статистика.**

Во практиката, задачите за одлучување, која од две или повеќе претпоставки е точна, можат да се сведат на задачи за само две претпоставки. Заклучоците и одлуките се донесуваат врз основа на резултатите од експерименти, значи врз основа на појавување на одредени случајни настани. Затоа може да се случи, со одредена веројатност, да бидат донесени и погрешни решенија. Најчесто меѓу хипотезите постои една, која помалку сме склони да ја отфрлиме како неточна, затоа што нејзиното погрешно отфрлање е сврзано со потешки последици отколку отфрлањето на другите хипотези. На пример, при проверувањето на исправноста на еден мост, или друг покрупен градежен објект, се поставуваат две хипотези: мостот (објектот) е исправен (сигурен) и мостот не е исправен. Погрешното отфрлање на претпоставката „мостот не е исправен" може да има за последица и човечки жртви, покрај материјалната штета предизвикана со попуштањето на објектот. При донесувањето на спротивна одлука, т.е. прогласување на објектот за неисправен, кога всушност е исправен, би биле потрошени само поголеми материјални средства, но секако штетата е помала отколку во претходниот случај.

[redacted]

Во практиката за нулта хипотеза обично се избира онаа претпоставка којашто ја одразува состојбата до изведувањето на последното испитување или одговара на постојните стандарди.

Отфрлањето на нултата хипотеза, кога е таа точна, се нарекува **грешка од прв тип**, а погрешното отфрлање на алтернативата е **грешка од втор тип**.

Бидејќи решението за точноста на една од хипотезите се донесува врз основа на резултатите од експерименти, т.е. врз основа на реализација на примерок за обележје X, што, всушност определува некој случаен настан, следува дека со секое решение е поврзана одредена веројатност.

Така, веројатноста да ја отфрлиме хипотезата H_o, кога е таа точна, се нарекува **веројатност на грешка од прв тип** и се означува со α, а веројатноста да ја отфрлиме алтернативата H_1, кога е точна, се нарекува **веројатност на грешка од втор тип** и се бележи со β.

Природно е да се настојува и двата вида грешки да се прават што поретко, т.е. веројатностите α и β да бидат што помали. Меѓутоа, ако се намалува можноста за отфрлање на хипотезата H_o, тогаш се зголемува можноста таа да биде прифатена за точна, кога всушност не е точна (а тоа е грешка од втор тип). Обично се постапува на тој начин, што се определува најголемата дозволена вредност на α (веројатноста на полошата грешка), а потоа се избира критериум, кој ја задоволува избраната вредност на α и обезбедува најмала можна вредност на β.

Најголемата дозволена вредност на веројатноста на грешка од прв тип се нарекува [redacted] на тестот и се означува, исто така, со [redacted] Тоа обично е еднакво на 0,05, 0,01, 0,005 или 0,001. Проверка на статистичка хипотеза (тестирање) при ниво на значајност α = 0,05 значи дека, во најмногу 5 до 100 случаеви, при утврдена постапка, може да се случи да ја отфрлиме H_o, кога е таа точна. Веројатноста на правилно отфрлање на хипотезата H_o, т.е. прифаќање на H_1, кога е таа точна, се нарекува [redacted] а се означува [redacted] Кога е точна алтернативата, може да се донесат две решенија: H_1 се отфрла (со веројатност β) и H_1 се прифаќа (со веројатност p). Затоа за p и β важи:

$$p + \beta = 1.$$

Во табелата 1 дадени се веројатностите на решенијата во зависност од точноста на хипотезите.

Прв чекор при проверката на нулта хипотеза наспроти алтернативна, со ниво на значајност α, е избор на [redacted]. Нејзиниот облик зависи од хипотезите што се проверуваат. Така, на пример, ако се проверува хипотеза за обликот на распределбата на некое обележје, тогаш се користи статистика која ја содржи емпириската функција на распределба; проверката на хипотеза за веројатност се извршува со статистика , којашто ја содржи релативната зачестеност на соодветниот настан; хипотезите за математичко очекување се проверуваат со статистики формирани со аритметичката средина итн.

ТАБЕЛА 1

Точна е \ Решение	се отфрла	се прифаќа
H_o	α грешка	$1-\alpha$ правилно
H_1	β грешка	p правилно

Тест - статистиката Z - како сл.п. прима вредности од множеството на реални броеви. Затоа можат да се определат множества $B\subset\mathbb{R}$, така што, кога Z ќе прими вредност од B, се донесува решение да се отфрли хипотезата H_o, со веројатност на грешка од прв тип не поголема од α. Овој услов за множествата B може да се запише на следниов начин:

$$P\{Z\in B/H_o\} \le \alpha. \tag{1}$$

Множеството $B\subset\mathbb{R}$ за кое е исполнет условот (1) се нарекува **област на отфрлање** на хипотезата H_o, или **критичен домен** за H_o при ниво на значајност α.

Ако меѓу критичните домени, за одредено ниво на значајност α постои критичен домен $B*$, кој има најмала веројатност β на грешка од втор тип, т.е. најголема моќ, тогаш тој се нарекува **оптимален критичен домен**, или **најмоќен критичен домен** за хипотезата H_o, при ниво на значајност α. Значи за $B*$ покрај (1) точни се и следниве неравенства:

$$P\{Z\notin B*/H_1\} \le P\{Z\notin B/H_1\} \tag{2}$$

$$P\{Z\in B*/H_1\} \ge P\{Z\in B/H_1\} \tag{3}$$

за секој B за кој важи (1).

По изборот на критичен домен B, најмоќен ако постои, или добар по некои други својства, се зема примерок за кој се пресметува вредноста z на статистиката Z.

Ако добиената вредност $z \in B$, тогаш хипотезата H_o се отфрла, со веројатност на грешка од прв вид помала од α. Во спротивен случај, ако $z \notin B$, тогаш хипотезата H_o не се отфрла и се вели дека, врз основа на изведените испитувања, нема причини H_o да се отфрли при даденото ниво на значајност α.

Пример 1. *Меѓу неколку кутии во коишто има жетони, има една кутија со дефектни жетони. Познато е дека исправните жетони се хомогени, па со иста веројатност паѓа „грб" и „број" а додека за дефектните веројатноста да падне „грб" е 0,3, а „број" 0,7. Со фрлање на 6 жетони да се утврди составот на една случајно избрана кутија. Критериумот да се определи така што за нулта хипотеза се зема хипотезата: жетоните се исправни, со α=0,02 и α=0,11.*

Решение: Во врска со експериментот: фрлање на 6 жетони на рамна површина, може да се дефинира случајна променлива X - број на жетони што паднале со бројка од горната страна. Оваа сл.п. има биномна распределба, така што задачата за проверка на содржината на кутијата станува задача за проверка на хипотезата H_o: X има $\mathcal{B}(6;0,5)$ распределба наспроти алтернативата H_1: X има $\mathcal{B}(6;0,7)$ распределба. Овие две распределби се определени со следниов начин:

ТАБЕЛА 2

K	H_o	H_1
0	0,01562	0,00073
1	0,09375	0,01020
2	0,23438	0,05953
3	0,31250	0,18522
4	0,23438	0,32435
5	0,09375	0,30252
6	0,01562	0,11765

$$H_o:\ P\{X=k\} = \binom{6}{k}\cdot 0,5^6 \quad \text{и}$$

$$H_1:\ P\{X=k\} = \binom{6}{k}\cdot 0,7^k\cdot 0,3^{6-k}, \qquad k=0,1,2,3,4,5,6,$$

а пресметаните веројатности дадени се во табелата 2.

За α=0,02, критични домени се множествата $B_o=\{0\}$ и $B_6=\{6\}$, затоа што:

$$P\{X\in B_o/H_o\} = P\{X\in B_6/H_o\} = 0,01562 < 0,02.$$

Бидејќи $P\{X\in B_6/H_1\} = 0,11765$, $P\{X\in B_o/H_1\} = 0,00073$ критичниот домен B_6 е подобар.

Така, ако при решавање на поставената задача, дозволуваме кутија со исправни жетони да се прогласи за кутија со неисправни жетони, со веројатност не поголема од 0,02, тогаш го избираме критичниот домен B_6, т.е. решаваме дека кутијата содржи неисправни жетони, само ако при фрлање на 6 жетони 6-пати се појави бројка.

За ниво на значајност $\alpha=0,11$ критични домени се множествата $B_1=\{0,1\}$ и $B_2=\{5,6\}$, бидејќи:

$$P\{X\in B_1/H_o\} = P\{X\in B_2/H_o\} = 0,109 < 0,11.$$

Моќта на овие критични домени е:

$$P\{X\in B_2/H_1\} = 0,42 \text{ и } P\{X\in B_1/H_1\} = 0,11,$$

затоа критичниот домен B_2 е подобар. Во овој случај донесуваме решение дека кутијата содржи дефектни жетони секогаш кога, при фрлање на 6 жетони, бројка ќе падне 5 или 6 пати.Δ

Во овој пример добиените критични домени имаат мала моќ, т.е. голема веројатност на грешка од втор тип, што може да биде поправено со зголемување на бројот на испитувани жетони (обем на примерокот).

Пример 2. *Со статистичка обработка на сите одиграни кола во играта лото, констатирано е дека веројатностите за појавување на броевите 1, 2, ..., 39 имаат распределба определена со:*

$$P\{X=x\} = \begin{cases} 0,10 & x\in\{1,2,3,4\} \\ 0,05 & x\in\{5,6,7,8,9,10\} \\ 0,30/29 & x\in\{11,12,...,39\} \end{cases}$$

Се проверува хипотезата дека извлекувањето е регуларно, наспроти тврдењето дека подлежи на досега манифестираниот закон со грешка од прв вид: $\alpha=0,10$ и $\alpha=0,15$.

а) Дали е $B=\{1,2,3\}$ критичен домен?

б) Да се определи максималниот број елементи во критичните домени.

в) Кои критични домени се оптимални?

Решение: За $\alpha=0,10$ ја проверуваме хипотезата

$$H_o:\ P\{X=x\} = \frac{1}{39} \quad x\in\{1,2,3,4\}$$

во однос на алтернативата

$$H_1:\ P_1\{X=x\} = \begin{cases} 0,10 & x\in\{1,2,3,4\} \\ 0,05 & x\in\{5,6,7,8,9,10\} \\ \dfrac{0,30}{29} & x\in\{11,12,\ldots,39\}. \end{cases}$$

а) $P(X\in\{1,2,3\}/H_o) = \dfrac{3}{39} = 0,077 < \alpha$

$B = \{1,2,3\}$ е критичен домен.

б) $B_1 = \{a\},\ a\in\{1,\ldots,39\};\ P(X\in B_1/H_o) = \dfrac{1}{39} <\alpha$

$B_2 = \{a,b\},\ a,b\in\{1,\ldots,39\};\ P(X\in B_2/H_o) = \dfrac{2}{39} <\alpha$

$B_3=\{a,b,c\},\ a,b,c\in\{1,\ldots,39\};\ P(X\in B_3/H_o) = \dfrac{3}{39} <\alpha$

$B_4=\{a,b,c,d\},\ a,b,c,d\in\{1,\ldots,39\};\ P(X\in B_4/H_o)=\dfrac{4}{39} =$

$= 0,10256 > \alpha.$

Критичните домени можат да содржат најмногу 3 елементи.

в) Треба да се најде:

$max\{P(X\in B/H_1)\}$

B е критичен домен.

Најголема веројатност, при важење на алтернативната хипотеза, имаат елементите 1, 2, 3 и 4. Максималниот обем на критичниот домен е 3. Затоа, триелементно подмножество на $\{1,2,3,4\}$ е оптимален критичен домен.

Моќта на секој од четирите критични домени изнесува 0,30. На пример, за $\{1,2,4\}$ имаме:

$P(X\in\{1,2,4\}/H_1) = 0,30.$

За $\alpha=0,15$ имаме:

а) $P(X\in\{1,2,3\}/H_o) = \dfrac{3}{39} \leq \alpha$

$B = \{1,2,3\}$ е критичен домен,

б) Бидејќи 5 е најголемиот природен број k за кој

$$\frac{k}{39} < 0,15,$$

заклучуваме дека критичните домени можат да содржат најмногу 5 елементи од множеството $\{1,2,\dots,39\}$.

в) $\{1,2,3,4\}$ е дел од секој оптимален критичен домен. Петтиот елемент треба да се земе од множеството $\{5,6,7,8,9,10\}$. За грешка $\alpha = 0,15$ постојат 6 оптимални критични домени чија моќ изнесува 0,45. На пример:

$$P(X\in\{1,2,3,4,5\}/H_1) = 4\cdot 0,10+0,05 = 0,45. \quad \Delta$$

2. ПРОВЕРКА НА ХИПОТЕЗИ ЗА МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКУВАЊЕ

Проверката на хипотези за просечната вредност на обележјата или точната вредност на величината што се мери е една од најчестите и најважните задачи за проверка на хипотезите. Ова произлегува од фактот дека тие величини, се всушност, математичко очекување на распределбата на соодветните случајни променливи, а се убедивме дека, кај најголем број распределбите, со математичкото очекување, се определени нивните параметри.

А. ТЕСТ ЗА МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКУВАЊЕ ПРИ ПОЗНАТА ДИСПЕРЗИЈА

Ќе ја разгледаме задачата за проверка на хипотезата - обележјето X има математичко очекување еднакво на a_o, наспроти алтернативата дека има математичко очекување различно од a_o. Претпоставуваме дека дисперзијата на сл.п. X е позната и $DX = \sigma_o^2$.

Познато ни е дека аритметичката средина на примерокот $\overline{X}_n$ е статистика која е оценка на EX за произволна распределба на обележјето X. Нејзини основни бројни карактеристики се:

$$E\overline{X}_n = EX \quad \text{и} \quad D\overline{X}_n = \frac{DX}{n} = \frac{\sigma_o^2}{n}.$$

Освен тоа, согласно централната гранична теорема, веројатностите во врска со нормираниот облик на $\overline{X}_n$, за голем обем на примерокот, можат да се пресметаат приближно со веројатностите на $N(0,1)$ распределбата.

Сега можеме да пристапиме кон избор на тест-статистика. Ако е хипотезата H_o точна, тогаш апсолутната грешка на оценката на математичкото очекување, добиена врз основа на примерокот, е $|\overline{x}_n - a_o|$. Ќе ја споредиме со очекуваната грешка на $\overline{X}_n$, т.е. со $\sqrt{D\overline{X}_n} = \sigma_o/\sqrt{n}$. Така ја добиваме величината:

$$\overline{u} = \frac{|\overline{x}_n - a_o|}{\sigma_o}\sqrt{n}. \tag{4}$$

При точна хипотеза H_o се очекува x_n малку да се разликува од a_o. Во спротивен случај, кога е точна алтернативата $H_1: EX\neq a_o$, се очекуваат поголеми отстапувања од a_o, така што $|\overline{x}_n - a_o|$ има поголема вредност.

До кога ќе сметаме дека апсолутната грешка е во граници определени со случајни фактори, сврзани за процесот на прибирање на податоци, зависи од очекуваната грешка $\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}$ на $\overline{x}_n$ и избраното ниво на значајност α.

Ако обемот n на примерокот е голем, тогаш најдобриот критичен домен е определен со неравенството:

$$\frac{|\overline{x}_n - a_o|}{\sigma_o}\sqrt{n} \geq u_{1-\alpha}, \tag{5}$$

каде што $u_{1-\alpha}$ е вредност прочитана од таблицата за нормална распределба, така што $\phi(u_{1-\alpha}) = 1-\alpha$. Значи, ако вредноста на величината $\overline{u}$, пресметана врз основа на примерокот е од множеството $(-\infty,-u_{1-\alpha})\cup(u_{1-\alpha},\infty)$, тогаш хипотезата H_o се отфрла со веројатност на грешка од прв тип не поголем од α. Во спротивен случај, ако $\overline{u}\in(-u_{1-\alpha},u_{1-\alpha})$, тогаш H_o не се отфрла. Се заклучува дека добиеното отстапување на оценката $\overline{x}$ од a_o не е статистички значајно, а резултатите од направеното испитување се во согласност со хипотезата H_o.

За $\alpha=0,05$ и $\alpha=0,01$, кои најчесто се користат, критичната вредност $u_{1-\alpha}$ е 1,96 и 2,58 соодветно.

Величината $\bar{u}$ се користи за проверка на хипотеза H_o: $EX=a_o$, во однос на алтернативна H_1: $EX\neq a_o$ и во случајот кога имаме мал примерок, при претпоставка дека испитуваното обележје X има нормална распределба. Во тој случај, ако е точна хипотезата H_o-обележјето X има $N(a_o,\sigma_o^2)$ распределба, тогаш $\bar{x}$ е оценка на првиот параметар на таа распределба, Критичниот домен е определен на ист начин.

Пример 3. *Извршени се 9 мерења на една величина, при што се добиени следниве вредности:*

5,29, 5,30, 5,33, 5,31, 5,30, 5,32, 5,29, 5,32, 5,33

Да се провери хипотезата дека точната вредност на величината е 5,30, ако стандардната грешка на мерењето е 0,02, при ниво на значајност $\alpha=0,05$.

Решение: Бидејќи се работи за резултати од мерење на една величина, исполнета е претпоставката дека обележјето има нормална распределба. Вториот параметар е познат, $\sigma=0,02$, така што треба да се оцени првиот и да се провери хипотезата дека е тој еднаков на 5,30. Значи, се проверува хипотезата:

H_o: $EX = 5,30$ во однос на алтернативата

H_1: $EX \neq 5,30$, со ниво на значајност $\alpha=0,05$.

Пресметуваме $\bar{x}_9 = 5,31$ и

$$\bar{u} = \frac{|5,31-5,30|}{0,02}\sqrt{9} = 1,5.$$

Бидејќи пресметаната вредност $\bar{u}$ е помала од прочитаната критична вредност 1,96 од таблицата I, заклучуваме дека, врз основа на изведените мерења, нема причини да сметаме дека хипотезата H_o не е точна.

Ако истата вредност на оценката $\bar{x}$ беше добиена од примерок со поголем обем, на пример n=36, тогаш $\bar{x}_{36}=5,31$ и

$$\bar{u} = \frac{|5,31-5,30|}{0,02}\sqrt{36} = 3.$$

Во овој случај пресметаната вредност $\bar{u}$ е поголема од критичната вредност за $\alpha=0,05$ и $\alpha=0,01$, така што, претпоставката дека величината што се мери има вредност 5,30 ја отфрламе со веројатност на грешка од прв тип помала од 0,01. △

Очекуваната вредност на грешката $\overline{X}_n$, како оценка на EX, е обратно пропорционална со квадратниот корен на обемот n на примерокот. Затоа со зголемување на обемот на примерокот, и помали отстапувања од a_o доведуваат до отфрлање на хипотезата H_o.

Пример 4. *Во една фабрика процентот на дефектни производи во првата смена изнесува 10%. Дали процентот на дефектни производи во втората смена е знатно поголем, ако се најдени 59 дефектни во примерок од 440 производи? Проверката да се изврши при ниво на значајност 0,01.*

Решение: Во оваа задача потребно е да се провери хипотезата:

H_o: $P(A) = 0,10$ наспроти

H_1: $P(A) \neq 0,10$, каде што A е настанот „произведен е дефектен производ".

За случајната променлива I_A - индикатор на настанот A, $EI_A=P(A)$ и $DI_A=P(A)P(\overline{A})$, така што проверуваните хипотези всушност се хипотези за математичко очекување на сл.п. I_A. Ако е точна хипотезата H_o, тогаш $EI_A=0,1$, а $DI_A=0,1\cdot 0,9$, што значи дека дисперзијата е позната. Обемот на примерокот е голем n=440, па можеме да ја користиме за одлучување величината $\overline{u}$, која во овој случај ќе ја означиме со $\overline{u}_p$.

Аритметичката средина на примерокот за обележјето I_A, всушност, е еднаква на релативната зачестеност на настанот A во 440 изведени испитувања, т.е. на релативната зачестеност на дефектни производи во 440 проверени. Ако означиме $P(A)=P_A$, а релативната зачестеност како оценка на P_A со $\hat{P}_A$, величината $\overline{u}_p$ го добива обликот:

$$\overline{u}_p = \frac{|\hat{P}_A-P_A|}{\sqrt{P_A(1-P_A)}}\sqrt{n}. \qquad (6)$$

Врз основа на податоците добиваме:

$$\hat{P}_A = \frac{59}{440} = 0,134,$$

$$\bar{u}_p = \frac{|0,134-0,10|}{\sqrt{0,1\cdot 0,9}}\sqrt{440} = 2,38.$$

Пресметаната вредност $\bar{u}_p$ е помала од критичната 2,58, заради што донесуваме заклучок дека зголемувањето на процентот на дефектни производи за 3,4% не е статистички значајно. Δ

Тестот што беше разгледан е т.н. двостран тест, бидејќи алтернативната хипотеза опфаќа помали и поголеми вредности од a_o, а критичниот домен е симетричен $(-\infty,-u_{1-\alpha})\cup(u_{1-\alpha},\infty)$.

Ако при одредено испитување не е доволно да се одговори дали $EX = a_o$ или $EX \neq a_o$, а потребно е поточно да се провери дали е EX поголемо или помало од a_o, тогаш имаме еден од следниве два случаеви:

1^o. H_o: $EX = a_o$ и 2^o. H_o: $EX = a_o$
H_1: $EX > a_o$ H_2: $EX < a_o$.

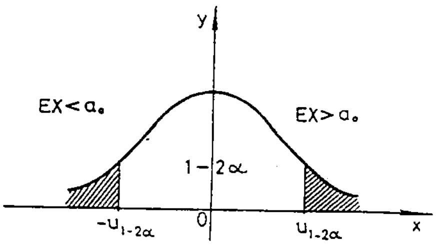
Проверката се извршува со величината:

$$\bar{u} = \frac{\bar{x}_n - a_o}{\sigma_o}\sqrt{n},$$

а критичниот домен при ниво на значајност α е определен со:

$$\bar{u} \geq u_{1-2\alpha} \quad \text{и} \quad \bar{u} \leq -u_{1-2\alpha}$$

во првиот и вториот случај, соодветно $u_{1-2\alpha}$ е број прочитан од таблицата на функцијата $\phi(x)$, така што $\phi(u_{1-2\alpha}) = 1-2\alpha$. Графички приказ на критичните домени даден е на сл. 1.



Сл. 1

Во примерот 3 добивме $\bar{x}_9 = 5,31 > 5,30$, заради што поправилно би било да се спроведе проверката на хипотезите:

H_o: $EX = 5,30$

H_1: $EX > 5,30$.

Во таблицата на функцијата $\phi(x)$ читаме дека за $1-2\alpha=0,9$,

$\phi(1,64) = 0,90$. Бидејќи $\bar{u} < 1,64$, H_o не ја отфрламе.

Во примерот 4 добиваме $\hat{P}_A = 0,134 > 0,10$, така што проверуваме:

$$H_o:\ P(A) = 0,10$$

$$H_1:\ P(A) > 0,10.$$

Во таблицата на функцијата $\phi(x)$ за $\alpha=0,01$ наоѓаме $\phi(2,32) = 0,98 = 1-2\alpha$. Бидејќи пресметаната вредност $\bar{u}_p=2,38$ е поголема од критичната 2,32, хипотезата H_o ја отфрламе при ниво на значајност $\alpha=0,01$. Заклучуваме дека процентот на дефектни производи во втората смена е знатно поголем од тој во првата смена.

Б. ТЕСТ ЗА МАТЕМАТИЧКО ОЧЕКУВАЊЕ ПРИ НЕПОЗНАТА ДИСПЕРЗИЈА

Во задачите за проверка на хипотезите за вредноста на математичкото очекување многу почесто дисперзијата на испитуваното обележје е непозната. Ако обемот на примерокот е мал, ќе го разгледаме само случајот кога обележјето X има нормална распределба $N(a,\sigma^2)$. Двата параметри се непознати и треба да се тестита хипотезата H_1: $EX = a_o$ наспроти алтернативата H_1: $EX \neq a_o$, при ниво на значајност α. Проверката се врши со величината:

$$\bar{t}_{n-1} = \frac{\bar{x}_n - a_o}{\bar{s}_n}\sqrt{n} \tag{7}$$

која се разликува од $\bar{u}$ по тоа што познатата дисперзија е заменета со нејзината поправена оценка. Бидејќи

$$\bar{s}_n^2 = \frac{n}{n-1}\cdot s_n^2$$

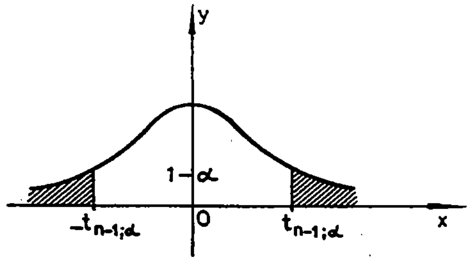
величината $\bar{t}_{n-1}$ може да биде запишана и во следниов облик:

$$\bar{t}_{n-1} = \frac{\bar{x}_n - a_o}{s_n}\sqrt{n-1} \tag{7'}$$

Критичниот домен е определен со неравенството:

$$|\overline{t}_{n-1}| \geq t_{n-1,\alpha} \qquad (8)$$

каде што $t_{n-1;\alpha}$ е вредност прочитана од таблицата II, така што:



Сл. 2

$$P\left\{|\overline{t}_{n-1}| \geq t_{n-1;\alpha}\right\} = \alpha, \quad \text{(сл. 2)}$$

Ако пресметаната вредност $|\overline{t}_{n-1}|$ врз основа на примерокот е поголема од критичната $t_{n-1;\alpha}$, хипотезата H_o се отфрла при ниво на значајност α. Во спротивен случај хипотезата не се отфрла и се заклучува дека резултатите од испитувањата се во согласност со хипотезата H_o.

Разгледаниот тест е т.н. t-тест, а величината $t_{n-1;\alpha}$ е т.н. **t-величина.**

Пример 5. *Со стандардите е пропишано одредена карактеристика да има вредност 50 единици. Извршени се мерења на девет производи и притоа добиени се оценките* $\overline{x}_9 = 49,7$ *и* $\overline{s}_9 = 0,4$. *Да се провери дали серијата од која се земени производите ги задоволува стандардите, при* $\alpha = 0,05$.

Решение: Се проверува хипотезата $EX = 50$ во однос на алтернативата $EX \neq 50$, при ниво на значајност $\alpha = 0,05$. Во таблицата III, за $n = 8$ и $\alpha = 0,05$ наоѓаме $t_{8;0,05} = 2,306$. Врз основа на оценките добиени од примерокот ја пресметуваме вредноста на тест-статистиката:

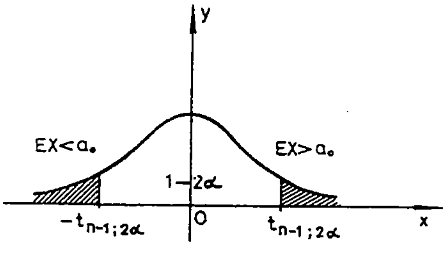
$$\overline{t}_s = \frac{|49,4-50|}{0,4}\sqrt{9} = 2,25.$$

Бидејќи пресметаната вредност е помала од прочитаната критична вредност, заклучуваме дека хипотезата H_o се отфрла, т.е. дека при даденото ниво на значајност серијата од која е земен примерокот ги задоволува стандардите.

Ако треба да се проверува хипотезата H_o: $EX = a_o$ во однос на алтернативата H_1: $EX > a_o$ или $EX < a_o$, тогаш проверката се врши со истата величина $\overline{t}_{n-1}$, а критичниот домен е определен со:

$$\overline{t}_{n-1} \geq t_{n-1;2\alpha} \quad \text{и} \quad \overline{t}_{n-1} \leq -t_{n-1;2\alpha} \qquad (9)$$

за првата и втората алтернатива соодветно. Критичните домени графички се прикажани на сл. 3.



Сл. 3

Во претходно разгледаниот пример оценката $\overline{x} = 49,7$ има помала вредност од предвидената со стандардите, така што може да се проверува хипотезата:

H_o: $EX = 50$ – во однос на алтернативата

H_2: $EX < 50$ при ниво на значајност $\alpha = 0,05$.

Во таблицата II за $n = 8$ и $2\alpha = 0,1$ читаме $t_{8;0,1} = 1,860$, а вредноста на t-величината е $\overline{t}_8 = -2,25$. Така при спроведување на едностран тест, кој повеќе одговара на поставената задача, заради

$$\overline{t}_8 < -1,86,$$

донесуваме заклучок дека H_o се отфрла со веројатност на грешка од прв вид што е помала од 0,05.

В. ТЕСТ ЗА РАВЕНСТВО НА МАТЕМАТИЧКИ ОЧЕКУВАЊА

Често пати статистичките испитувања се вршат за да се споредат вредностите на повеќе обележја, или вредностите на едно обележје во повеќе серии на набљудувања. Така, на пример, може да се споредуваат: вредностите на одредена карактеристика (димензија, состав) на производи од различни машини или фабрики, вредноста на некое обележје пред и по извршувањето на некои промени во процесот во кој тоа се набљудува, ефектот од примената на два препарати во одгледување на животни или некоја земјоделска култура, величини што го карактеризираат степенот на развиеноста на две општини, републики и друго.

Нека X и Y се две обележја. Трба да се провери хипотезата:

H_o: $EX = EY$ во однос на алтернативата

H_1: $EX \neq EY$ при дадено ниво на значајност α.

Проверката се врши со помош на аритметичките средини на примероците за обележјето X и обележјето Y. Ако е точна хипотезата H_o, тогаш се очекува аритметичките средини $\bar{x}$ и $\bar{y}$, добиени од двата примероци како оценки на иста величина, да бидат приближно еднакви.

Нека обемот на примероците за двете обележја е голем, или е познато дека X и Y имаат нормална распределба. Ако се познати дисперзиите σ_X^2 и σ_Y^2 на двете обележја и врз основа на примероците со обем n_1 и n_2 соодветно се пресметани $\bar{x}$ и $\bar{y}$, тогаш проверката на хипотезата H_o се врши со помош на величината:

$$\bar{u} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{S_o}, \tag{10}$$

при што:

$$S_o^2 = \frac{\sigma_x^2}{n_1} + \frac{\sigma_y^2}{n_2}.$$

Критичниот домен е определен со неравенството:

$$|\bar{u}| \geq u_{1-\alpha}, \tag{11}$$

каде што $u_{1-\alpha}$ е вредност прочитана од таблицата за функцијата $\phi(x)$, така што да важи $\phi(u_{1-\alpha}) = 1-\alpha$.

Меѓутоа, многу почесто се случува дисперзиите на набљудуваните обележја да не се познати. Ако двете обележја имаат иста дисперзија (која не е позната), тогаш таа се оценува со помош на двата примероци, т.е. со нивните дисперзии s_x^2 и s_y^2 на следниов начин:

$$S^2 = \frac{n_1 s_x^2 + n_2 s_y^2}{n_1+n_2-2}.$$

Проверка на хипотезата се врши со величината:

$$\bar{t} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{S}\sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1+n_2}}, \qquad (12')$$

а најдобар критичен домен е определен со неравенството:

$$|\bar{t}| \geq t_{n_1+n_2-2;\alpha}, \qquad (13)$$

каде што $t_{n_1+n_2-2;\alpha}$ е вредност прочитана од таблицата II, за n_1+n_2-2 степени на слобода и даденото α.

Ако дисперзиите на обележјата X и Y не се еднакви и не се познати, при голем обем на примероците, проверката на хипотезата H_0 може да се врши со величината $\bar{u}$, во која σ_X^2 и σ_Y^2 се заменуваат со нивните поправени оценки s_x^2 и s_y^2. Критичниот домен е определен со неравенството (11)

3а8 **Пример 6.** *На примерок со обем $n_1 = 8$ извршено е мерење на една бројна карактеристика, при што се добиени следниве податоци:*

42, 41, 45, 43, 44, 43, 44, 42.

По извесно време земен е примерок со обем $n_2 = 10$ и се извршени еднакво точни мерења на истата карактеристика. Добиени се следниве податоци:

43, 40, 41, 42, 40, 42, 41, 39, 42, 40.

Да се провери дали дошло до промена на испитуваната карактеристика, при ниво на значајност $\alpha = 0,05$.

Решение: Од првиот и вториот примерок пресметуваме:

$$\bar{x} = 43, \qquad s_x^2 = \frac{12}{8} = 1,5;$$

$$\bar{y} = 41, \qquad s_y^2 = \frac{14}{10} = 1,4.$$

Бидејќи важи претпоставката за еднаквост на дисперзиите, ја пресметуваме оценката на дисперзијата:

$$S^2 = \frac{12+14}{8+10-2} = 1,625,$$

а потоа вредноста на t-статистиката:

$$\bar{t} = \frac{43-41}{\sqrt{1,625}}\sqrt{\frac{8\cdot 10}{18}} = 3,3.$$

Во таблицата II читаме $t_{16;0,05} = 2,120$.

Бидејќи пресметаната вредност врз основа на примероците е поголема од критичната вредност прочитана во таблица, хипотезата H_o се отфрла. Така заклучуваме, со веројатност на грешка од прв тип помала од 0,05, дека вредноста на испитуваната карактеристика се променила, во овој случај се намалила. Δ

При решавање на задачи за споредување на две математички очекувања, може да се примени еднostран тест. Ако со $\bar{x}$ ја означиме поголемата од двете аритметички средини, тогаш се поставува задача за проверка на хипотезата H_o: $EX = EY$ во однос на алтернативата H_1: $EX > EY$. Проверката се извршува со величините $\bar{u}$ или $\bar{t}$, во зависност од тоа, кои од условите за обележјата X и Y се исполнети. Критичниот домен е определен со неравенстсото:

$$\bar{u} > u_{1-2\alpha}$$

ако се користи величината $\bar{u}$, или

$$\bar{t} > t_{n_1+n_2-2;2\alpha}$$

ако се користи величината $\bar{t}$.

Во примерот 6, за примена на еднostран тест во таблицата II, наоѓаме $t_{16;0,10} = 1,746$. Заклучокот е ист како и при проверка со двостран тест.

ПЕТ ЗАДАЧИ

1. *Од популацијата која има $N(a,144)$ распределба, земен е примерок со 100 елементи за кој средната вредност изнесува 98. Да се провери дали е точна претпоставката дека $a = 100$ наспроти тврдењата дека: а) $a < 100$; б) $a \neq 100$.*

(Не, Да)

2. *Забележано е дека бродовите во едно пристаниште наидуваат во временски интервали чија должина е сл.п. со експоненцијална распределба со* $\lambda = \frac{1}{8}$ *(во бродови на час). Набљудувано е доаѓањето и добиени се следниве податоци:*

растојание меѓу две пристигнув.	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28	28-32
честота	67	43	30	18	11	7	5	4

Да се провери претпоставката дека бродовите пристигнуваат просечно на 8 часа, наспроти алтернативата дека времето е подолго од 8 часа, со ниво на значајност:

а) $\alpha = 0,05$; б) $\alpha = 0,01$.

(Да, Да)

3. *Во случај да не е познат законот, според кој пристигнуваат бродовите, да се утврди дали е точна хипотезата дека бродовите наидуваат просечно секои 9 часа наспроти алтернативата дека:*

а) *времето е различно од 9 часа;*

б) *времето е под 9 часа.*

(Да, Да)

4. *За 100 километри прав пат, 10 автомобили од типот А потрошиле просечно по 8 литри бензин, а 8 од типот В само по 7 литри. Познато е дека отстапувањето на потршувачката на 100 km за автомобилите од типот А изнесува 1 литар, а од типот В, 1,5 литри. Дали двата типа автомобили просечно трошат исто количество бензин?*

(Да)

5. *Од два класа, случајно се избрани две групи ученици и измерена им е тежината. Добиени се податоците:*

I: 68 74 47 56 82 49 78 86 54

II: 46 62 83 51 62 74

Да се оцени дали е, со ниво на значајност $\alpha = 0,05$, *точна претпоставката дека учениците од двата класа имаат еднаква просечна тежина?*

(Да)

3. ПРОВЕРКА НА ХИПОТЕЗИ ЗА ДИСПЕРЗИЈА

Дисперзијата, како што веќе беше речено, е мерка за отстапувањето на вредностите на една случајна променлива (карактеристика, обележје) од нејзиното математичко очекување (средна вредност, точна вредност). Во примената на статистичките методи, таа ја одразува точноста на мерењата, точноста на изработката и воопшто стабилноста на процесот или хомогеноста на популацијата што се набљудува преку определеното обележје. Затоа оценувањето на дисперзијата и проверката на различни хипотези за неа е од посебно значење.

А. ПРОВЕРКА НА ХИПОТЕЗА ЗА ВРЕДНОСТА НА ДИСПЕРЗИЈАТА

Ако врз основа на податоците од примерокот за обележјето X е добиена оценка на дисперзијата поголема од вообичаената или определената со соодветни стандарди вредност σ_o^2, веднаш се поставува прашањето: дали во процесот, или популацијата на која се набљудува тоа обележје, настанале промени.

Претпоставуваме дека обележјето што се испитува има нормална распределба. Се поставува задачата за проверка на хипотезата H_o: $DX = \sigma_o^2$ во однос на алтернативата H_1: $DX > \sigma_o^2$ при избрано ниво на значајност α. Проверката се извршува со помош на дисперзијата на примерок за обележјето X.

Нека s^2 е дисперзија на примерок со обем n. Критичниот домен е определен со:

$$\frac{ns^2}{\sigma_o^2} \geq \chi^2_{n-1;\alpha}, \tag{14}$$

каде што $\chi^2_{n-1;\alpha}$ е вредност прочитана во таблицата III за $n-1$ степени на слобода и дадена веројатност α.

Ако пресметаната вредност на s^2 е таква што величината ns^2/σ_o^2 има вредност што е поголема од критичната $\chi^2_{n-1;\alpha}$, тогаш хипотезата $DX = \sigma_o^2$ се отфрла со веројатност на грешка од прв тип помала од α. Во спротивен случај, кога величината ns^2/σ_o^2 има вредност помала од критичната, хипотезата H_o не се отфрла. Опишаниот тест се нарекува *хи*-квадрат-тест.

Пример 7. *Извршени се 20 мерења на едно обележје при што е добиена оценка на дисперзијата* $s^2 = 3$. *Ако со стандардите за тоа обележје е предвидено* $\sigma_o^2 = 2$, *да се провери, при ниво на значајност* $\alpha = 0,05$, *дали серијата од која е земен примерокот ги задоволува стандардите.*

Решение: Бидејќи е добиена оценка $s^2 = 3 > \sigma_o^2$, треба да се тестира хипотезата:

H_o: $DX = 2$ во однос на алтернативата

H_1: $DX > 2$ со $\alpha = 0,05$.

Пресметуваме: $\dfrac{ns^2}{\sigma_o^2} = \dfrac{20\cdot 3}{2} = 30$,

а во таблицата III читаме $\chi^2_{19;0,05} = 30,144$. Пресметаната вредност е помала од прочитаната критична вредност, така што хипотезата дека дисперзијата на набљудуваното обележје е еднаква на 2 не се отфрла. Се заклучува дека зголемувањето на дисперзијата не е значајно и е резултат на случајни фактори.

Ако истата вредност на дисперзијата s^2 се добие врз основа на поголем примерок, на пример $n = 28$, тогаш имаме:

$$\frac{ns^2}{\sigma_o^2} = \frac{28\cdot 3}{2} = 42, \text{ а } \chi^2_{27;0,05} = 40,113,$$

што доведува до отфрлање на хипотезата H_o.

Б. ПРОВЕРКА НА ХИПОТЕЗАТА ЗА ЕДНАКВОСТ НА ДИСПЕРЗИИ

Еден од условите за примена на t-тестот за равенство на математичките очекувања на две обележја е еднаквост на нивните дисперзии. Потребата за проверка на еднаквоста на дисперзиите на две обележја се јавува во низа значајни задачи, како што се: споредување на точноста на две методи за анализа, споредување на два апарати за мерење, споредување на стабилноста на два процеси, хомогеноста на две популации итн.

Нека X и Y се две обележја, за кои се земени примероци со обем n_1 и n_2 соодветно и пресметани поправените оценки на дисперзиите $\bar{s}_x^2$ и $\bar{s}_y^2$. Ако едната од нив е поголема, на пример $\bar{s}_x^2 > \bar{s}_y^2$, тогаш се поставува задача да се провери хипотезата:

H_o: $DX = DY$ во однос на алтернативата

H_1: $DX > DY$ со избрано ниво на значајност α.

Проверката се изведува со величината $\bar{s}_x^2/\bar{s}_y^2$, при што секогаш во броителот се става поголемата од добиените дисперзии.

Кога е точна хипотезата H_0, вредностите $\bar{s}_x^2$ и $\bar{s}_y^2$ се оценки на иста величина и би требало приближно да бидат еднакви. Затоа количникот $\bar{s}_x^2/\bar{s}_y^2$ има помала вредност во случај кога е точна H_o, отколку кога е точна алтернативата. Критичниот домен зависи од обемот на едниот и другиот примерок и избраното ниво на значајност α, а е определен со:

$$\frac{\bar{s}_x^2}{\bar{s}_y^2} \geq F_{n_1-1,n_2-1;\alpha} \qquad (15)$$

Критичната вредност $F_{n_1-1,n_2-1;\alpha}$ се чита од таблицата IV или V за n_1-1 и n_2-1 степени на слобода и дадената вредност α.

Ако количникот $\bar{s}_x^2/\bar{s}_y^2$ има вредност поголема од критичната $F_{n_1-1,n_2-1;\alpha}$, хипотезата за еднаквост на дисперзиите се отфрла со веројатност на грешка од прв тип помала од α. Во спротивен случај, т.е. кога:

$$\frac{\bar{s}_x^2}{\bar{s}_y^2} < F_{n_1-1,n_2-1;\alpha}$$

хипотезата H_o не се отфрла и се заклучува дека дисперзиите на двете обележја незнатно се разликуваат.

Пример 8. *При определувањето на содржината на хлор во некое соединение користени се две методи за анализа и добиени се следниве податоци во проценти:*

метода A: 27,5, 27,0, 27,3, 27,3, 27,8

метода B: 27,9, 27,2, 26,5, 26,3, 27,0, 27,4, 27,3, 26,8.

Дали врз основа на овие податоци може да се тврди дека методите се со еднаква точност?

Решение: Врз основа на податоците за двете методи пресметуваме:

$$\bar{s}^2_A = 0,093 \quad \text{и} \quad \bar{s}^2_B = 0,266$$

Бидејќи $\bar{s}^2_B > \bar{s}^2_A$ ја проверуваме хипотезата

H_o: $\sigma^2_A = \sigma^2_B$ во однос на алтернативата

H_1: $\sigma^2_A > \sigma^2_B$ при ниво на значајност $\alpha = 0,05$.

Во таблицата IV читаме $F_{7,4;0,05} = 4,12$, а од примероците добиваме:

$$\frac{\bar{s}^2_B}{\bar{s}^2_A} = \frac{0,266}{0,093} = 2,86.$$

Пресметаната вредност е помала од критичната, прочитана во соодветната таблица, така што, врз основа на овие податоци, не можеме да ја отфрлиме хипотезата дека двете методи се еднакво точни. Ако истите оценки беа добиени врз основа на податоци од по 21 мерење за секоја метода, тогаш критичната вредност е $F_{20,20;0,05} = 2,12$ и хипотезата H_o се отфрла. Во тој случај следи заклучокот дека методата *A* има помала грешка од методата *B*. Δ

Опишаната постапка за проверка на хипотеза за еднаквост на дисперии е т.н. *F*-тест.

4. ПРОВЕРКА НА ХИПОТЕЗИ НА ЗАКОНОТ НА РАСПРЕДЕЛБА

Хипотезите, чија што проверка беше разгледувана во претходните насло. і се однесуваа на одредена бројна карактеристика на распределбата на набљудуваното обележје. Сега ќе се задржиме на постапките за проверка на хипотези за видот на распределба. Хипотезите од овој тип припаѓаат на класата таканаречени **непараметарски хипотези**, а соодветните тестови се нарекуваат **непараметарски тестови**.

А. ПИРСОНОВ χ^2-ТЕСТ

За облежјето X со множество на можни вредности R_X се проверува хипотезата: X има распределба определена со густина на распределба на веројатностите или закон на распределба на веројатностите $p_o(x)$, наспроти алтернативата - X има распределба различна од $p_o(x)$, со избрано ниво на значајност α.

Претпоставуваме дека за X е земен голем примерок ($n > 50$). Множеството можни вредности R_X се дели на k подмножества $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Ако означиме $p_{oi} = P\{X \in S_i / H_o\}$, $i=\overline{1,k}$, тогаш очекуваниот број на податоци од примерокот во множеството S_i, при точна хипотеза H_o ќе биде np_{oi}. Со n_i да го означиме бројот на податоци од примерокот, кои припаѓаат на множеството S_i, $i = \overline{1,k}$. Проверката на хипотезата се изведува со величината:

$$\bar{\chi}^2_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_{oi})^2}{np_{oi}}. \tag{16}$$

Ако е точна хипотезата H_o, тогаш се очекува $(n_i - np_{oi})$ да бидат мали по апсолутна вредност, а во спротивен случај поголеми. Затоа природно е хипотезата да се отфрла кога величината $\bar{\chi}^2_{k-1}$ има голема вредност, а во спротивен случај, за мали вредности на $\bar{\chi}^2_{k-1}$, да не се отфрла. Критичниот домен зависи од k и избраното ниво на значајност α и е определен со:

$$\bar{\chi}^2_{k-1} \geq \chi^2_{k-1;\alpha} \tag{17}$$

Користењето на Пирсоновиот χ^2-тест е можно само во случај кога имаме голем примерок. Се препорачува множеството R_X да се подели на поголем број пдмножества S_i, но при тоа треба да се внимава во секое од нив да има најмалку 5 податоци ($n_i \geq 5$, или $np_{oi} \geq 5$).

Ако распределбата на обележјето X од нултата хипотеза не е потполно определена, т.е. не се познати параметрите, тогаш тие се одредуваат со соодветни оценки од примерокот, а бројот на степените на слобода на критичната вредност се намалува за бројот на оценетите параметри. Значи, ако врз основа на примерокот се оценети l непознати параметри, во распределбата $p_o(x)$, тогаш од таблицата III се чита вредност $\chi^2_{k-l-1;\alpha}$, а критичниот домен е определен со неравенството:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i-np_{oi})^2}{np_{oi}} \geq \chi^2_{k-l-1;\alpha}.$$

Пример 9. *Се фрлаат монети се додека не падне „грб". Нека X е сл.п. „бројот на фрлања до првото паѓање „ грб" на монетата". За 100 фрлања добиени се следниве податоци:*

x_i	1	2	3	4	5 и повеќе
n_i	42	30	14	8	6

Дали може, врз основа на овие податоци, да се тврди, со праг на значајност $\alpha = 0,05$, дека монетите се хомогени?

Решение: Хипотезата што треба да се проверува, всушност е претпоставката дека веројатноста да падне „грб" е еднаква на веројатноста да падне „петка". Бидејќи X е обележјето - бројот на фрлања до првото паѓање „грб", хипотезата H_o е „случајната променлива X и има геометриска распределба со $p = 0,5$". Множествата S_i се определени со вредностите на X на следниов начин:

$$S_1 = \{1\},\ S_2 = \{2\},\ S_3 = \{3\},\ S_4 = \{4\},\ S_5 = \{5,6,\dots\},$$

а веројатностите се:

$$p_{oi} = P\{X\in S_i/H_o\} = (1-p)^{i-1}\cdot p = (0,5)^i,\ i = 1,2,3,4,$$

$$p_{o5} = 1 - \sum_{i=1}^{4} p_{oi}.$$

Во секое множество имаме повеќе од 5 податоци и распределбата е наполно определена, па можеме да ја пресметаме вредноста на величината $\bar{\chi}_4^2$. Потребните резултати од пресметувањата дадени се во следнава табела:

ТАБЕЛА 1.

S_i	n_i	p_{oi}	np_{oi}	$n_i - np_{oi}$	$(n_i - np_{oi})^2/np_{oi}$
1	42	0,5000	50	-8	1,28
2	30	0,2500	25	5	1,00
3	14	0,1250	12,50	1,5	1,18
4	8	0,0625	6,25	1,75	0,49
5	6	0,0625	6,25	-0,25	0,01
Σ	100	1,0000			3,96

Добивме:

$$\bar{\chi}_4^2 = 3,96,$$

а од таблицата III имаме:

$$\chi^2_{4;0,05} = 9,488.$$

Пресметаната вредност $\bar{\chi}_4^2$ е помала од критичната, па заклучуваме дека врз основа на овој примерок хипотезата дека „монета" е хомогена (исправна) не се отфрла.

** Б. ТЕСТ НА КОЛМОГОРОВ

Во случај кога, обележјето X има непрекината распределба, проверката на хипотезите за обликот на распределбата може да се изврши со т.н. тест на Колмогоров, за кој не е неопходно да имаме голем примерок.

Се проверува хипотезата H_o: обележјето X има функција на распределба $F_o(x)$ во однос на алтернативата H_1: X има ф.р. различна од $F_o(x)$, при ниво на значајност α.

Проверката се врши со помош на емпириската функција на распределба $F_n(x)$. Ако имаме примерок со обем n, за кој е изработена распределбата на честотите (x_i, n_i), $i = 1,2,\ldots, k$, тогаш функцијата на распределба на примерокот има $k+1$ различни вредности и е определена со:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{за } x \le x_1 \\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{r-1} n_i & \text{за } x_{r-1} < x \le x_r,\ r = \overline{2,k} \\ 1 & \text{за } x > x_k \end{cases}$$

За дадената функција на распределба $F_o(x)$ се определуваат вредностите $F_o(x_i)$, $i = 1,\ldots, k$, а потоа се пресметуваат разликите $|F_o(x_i)-F_n(x_i)|$. Најголемата од нив ја означуваме со $\overline{d}_n$. Во таблицата VI наоѓаме вредност $d_{n;\alpha}$ за дадениот обем на примерокот n и веројатноста α и ја споредуваме со пресметаната. Ако е $\overline{d}_n > d_{n;\alpha}$ хипотезата H_o се отфрла со веројатност на грешка од прв тип помала од α, а во спротивен случај H_o не се отфрла и се заклучува дека популацијата, од која е земен примерокот, е во согласност со хипотезата H_o.

ВЕЖБИ

1. *Една коцка се фрла 1 000 пати. Добиени се следниве резултати:*

број на точки	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
честота	*150*	*180*	*150*	*200*	*190*	*130*

а) Дали е коцката хомогена?

б) Дали е точна претпоставката дека веројатноста да падне страната со број 6 е помала од очекуваната, наспроти алтернативата дека се совпаѓа со очекуваната. Нивото на значајност е $\alpha = 0,05$.

2. *Тежината на производите мерени во една фабрика има*

нормална распределба со дисперзија 2,25. Земен е примерок од 50 призводи со следниве тежини:

тежина (во тони)	23	24	25	26	27	28	29
честота	2	3	10	15	11	6	3

Да се провери хипотезата дека просечната тежина на производите е 26 t наспроти алтернативата дека просечната тежина надминува 26 t, со ниво на значајност $\alpha = 0,05$.

3. Дали примерокот што е земен во претходната задача го задоволува стандардот дека дисперзијата е 2,25, при ниво на значајност: $\alpha = 0,05$, $\alpha = 0,02$ и $\alpha = 0,01$?

4. Од два диска случајно се избрани датотеки и е забележана нивната величини:

I: 27 43 152 208 34 2 18 8

II: 13 58 89 143 67 50

Дали може со ниво на значајност $\alpha = 0,10$ ($\alpha = 0,01$) да се прифатат заклучоците дека:

а) Првиот диск има просечно помали датотеки;

б) На двата диска дисперзијата на големината е еднаква.

5. Испитувањата на број на застои на машина во тек на 100 дена ги дале следниве резултати:

број застои	0	1	2	3	4
број денови	41	35	12	7	5

Со ниво на значајност $\alpha = 0,05$ да се тестира хипотезата дека бројот на застоите има:

а) Биномна распределба $\mathcal{B}(100;0,25)$;

б) Биномна распределба $\mathcal{B}(100;p)$.

6. Од летните месеци јули и август се одбрани 10 дена и е регистрирана температурата во 14 часот. Дали е, со ниво на значајност $\alpha = 0,05$, точна хипотезата дека температурата има $N(32;3,24)$ распределба?

Притоа се добиени следниве податоци:

33,4	34,4	36,2	31,0	33,7
37,0	34,9	33,5	31,4	33,3

VIII. ЛИНЕАРНА РЕГРЕСИЈА

1. СТОХАСТИЧКА ЗАВИСНОСТ

За секое посериозно испитување на некоја појава или популација потребно е истовремено да се испитаат повеќе обележја на појавата, односно популацијата. Најчесто од интерес е да се утврди дали меѓу обележјата постои зависност, потоа да се оцени јачината на зависноста и на крајот да се најде функција која најдобро ја опишува таа зависност.

Така, на пример, може да се испитува зависноста меѓу обележјата X висина и Y - тежина кај луѓето, успехот по два сродни предмети кај учениците, зависноста на два фактори во некое производство, зависноста на некоја карактеристика на производите од еден или повеќе фактори на производството и др.

Често се случува, меѓу величините што се набљудуваат во една појава или на една популација, да не постои строга функционална зависност. Имено, на една определена вредност на обележјето X не му одговара една, односно, повеќе точно определени вредности на обележјето Y, туку повеќе вредности на Y што се потчинуваат на некој закон на распределба на веројатностите. Таква зависност на две или повеќе величини се нарекува **стахастичка зависност**. Таа се манифестира така што промената на вредностите на едната величина влијае на можноста за појавување на вредностите на другата.

На пример, ако X и Y се обележјата висина и тежина на човек, сигурно е дека X и Y се зависни меѓу себе. Меѓутоа, нивната зависност не е строго функционална. Имено, не постои формула со која, за определен човек со одредена висина x, точно би ја определиле неговата (вистинска) тежина y и покрај сите информации за родителите, начинот на живеење и др. Она што може да се направи е, врз основа на испитувањата на популацијата на која и припаѓа човекот, да се определи интервал во кој, со определена веројатност, може да се очекува неговата висина.

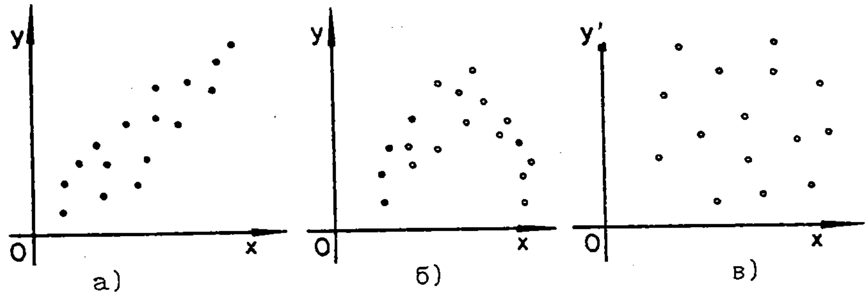
Определувањето на функција, што најдобро ја опишува зависноста на две или повеќе обележја, овозможува прогноза на вредностите на едно од обележјата со помош на другите или промена во саканата насока на едно обележје со промена на другите.

Ако се изведени n независни набљудувања на две обележја X и Y на појавата или популацијата што се испитува и ако x_i и y_i се вредности на обележјето X и Y соодветно во i-тото по ред набљудување, тогаш резултатите од n-те набљудувања можат да бидат запишани на следниов начин:

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\dots,\ (x_n,y_n).$$

Прва информација за постоење или не на зависност меѓу обележјата X и Y добиваме ако двојките (x_i,y_i), $i = 1,\dots,n$, ги претставиме како точки во координатната рамнина xOy. Така добиената слика се нарекува **дијаграм на простирање** на експериментот. Притоа можат да бидат добиени најразлични слики.

Така, сл. 1 а) покажува доста силна тенденција за групирање на точките околу права; сл. 1 б) укажува на зависност што може да се оцени со парабола, додека на сл. 1 в) не може да се воочи постоење на некаква зависност на двете обележја.



Сл. 1

При приближното определување на стохастичката зависност со функционална природно се јавува **отстапување (регрес)** на едната од другата. Затоа функцијата $f(x)$ со која се оценува стохастичката зависност се нарекува **функција на регресија**, а кривата определена со $y = f(x)$ **крива на регресија**.

Нека се $x_1,\ x_2,\dots,\ x_k$, $k \le n$ варијантите во примерокот за обележјето X. Во општ случај на секоја варијанта x_i и одговараат повеќе вредности од примерокот за Y, да ги означиме со $y_{i1},\ y_{i2},\dots,y_{in_i}$. Се поставува задача да се оцени вредноста на обележјето Y при определена вредност x_i на обележјето X. За таа цел најдобро е да се избере аритметичката средина на податоците y_{ij}, $j = \overline{1,n_i}$, за одреденото x_i. Означуваме:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = \frac{1}{n_i}(y_{i1} + y_{i2} + \ldots + y_{in_i}), \quad i = \overline{1,k}$$

Точките $(x_i, \bar{y}_i)$ во координатната рамнина xOy определуваат т.н. **полигон на регресија** ба примерокот на обележјето Y по обележјето X.

2. КОЕФИЦИЕНТ НА КОРЕЛАЦИЈА НА ПРИМЕРОКОТ

Нека за обележјата X и Y е земен примерок со обем n

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ldots,\ (x_n,y_n) \tag{1}$$

и дијаграмот на расејување на експериментот покажува групирање на точките (1) околу права q. Во тој случај се поставува задача да се определи линеарна функција која најдобро ќе ја оценува зависноста на X и Y.

Мерка за јачината на линеарната зависност на две случајни променливи е нивниот коефициент на корелација. Точната вредност на $\rho(X,Y)$ не е позната (бидејќи не е позната распределбата на X и Y). Меѓутоа, врз основа на примерок, може да се добие оценка на коефициентот на корелација. Бројот

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \bar{x}\cdot\bar{y}}{s_x s_y},$$

каде што:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad s_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (y_i-\bar{y})^2$$

се нарекува коефициент на корелација на примерокот. Тој се запишува уште и на следниов начин:

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y},$$

каде што:

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}.$$

Ако коефициентот на корелација r_{xy} по апсолутна вредност е блиску до бројот 1, тогаш заклучуваме дека постои силна линеарна зависност. Ако пак r_{xy} има вредност блиску до нулата, заклучуваме дека обележјата X и Y **не се корелирани**, т.е. не постои линеарна зависност. Ако X и Y имаат нормална распределба, тогаш $r_{xy} \approx 0$ покажува дека X и Y се независно распределени.

Пример 1. *Дадени се следниве податоци за две обележја X и Y:*

x_i	2	4	4	5	6	7	7	8	8	9
y_i	3	4	6	6	7	7	8	9	10	10

Да го нацртаме дијаграмот на расејување за изведениот експеримент, полигонот на регресија на Y по X и да го пресметаме коефициентот на корелација.

Решение: Дијаграмот на расејувањето и полигонот на регресија дадени се на сл. 2. Потребните пресметувања за коефициентот на корелација се извршени во табелата. Наоѓаме:

$$\bar{x} = 6, \quad \bar{y} = 7,$$

$$s_x^2 = \frac{404}{10} - 6^2 = 40,4-36 = 4,4,$$

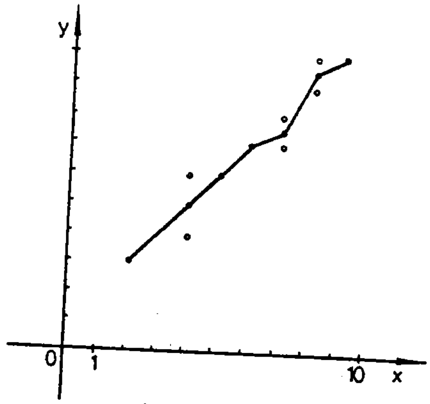
$$s_y^2 = \frac{540}{10} - 7^2 = 54-49 = 5,$$

$$s_{xy} = \frac{465}{10} - 6 \cdot 7 = 46,5-42 = 4,5$$

$$r_{xy} = \frac{4 \cdot 5}{\sqrt{4 \cdot 4}\sqrt{5}} = 0,9594$$

Добиениот коефициент на корелација има вредност многу блиску до 1, што значи дека меѓу X и Y постои силна линеарна зависност.

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
2	3	4	9	6
4	4	16	16	16
4	6	16	36	24
5	6	25	36	30
6	7	36	49	42
7	7	49	49	49
7	8	49	64	56
8	9	64	81	72
8	10	64	100	80
9	10	81	100	90
60	70	404	540	465



Сл. 2

По пресметувањето на коефициентот на корелација на примерокот, се поставува прашањето дали обележјата X и Y се во корелација или не се. За таа цел, всушност, треба да се провери хипотезата дека коефициентот на корелација на обележјата е еднаков на нула, во однос на алтернативата дека е различен од нула. Значи, се проверува:

H_o: $\rho(X,Y) = 0$ во однос на алтернативата

H_1: $\rho(X,Y) \neq 0$ при ниво на значајност α.

Ако X и Y имаат нормална распределба, тогаш проверката се извршува со величината:

$$t_{n-2} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}},$$

каде што r е коефициентот на корелација на примерокот за обележјата X и Y со обем n. Пресметаната вредност t_{n-2} се споредува со вредноста $t_{n-2;\alpha}$ што се чита во таблицата за t-распределбата. Ако е $|t_{n-2}| \geq t_{n-2;\alpha}$, тогаш хипотезата H_o се отфрла со веројатност на грешка од прв тип помала од α. Во спротивен случај хипотезата H_o не се отфрла и се заклучува дека X и Y не се во корелација.

Пример 2. *Врз основа на примерок со обем $n = 30$ пресметан е коефициент на корелација $r_{XY} = 0,15$. Да се провери хипотезата дека коефициентот на корелација на обележјата X и Y е еднаков на нула, при ниво на значајност $\alpha = 0,01$.*

Решение: Вс таблицата на t-распределбата наоѓаме:

$t_{28;0,01} = 2,763$, а од примерокот пресметуваме:

$$t_{28} = \frac{0,15}{\sqrt{1-0,15^2}}\sqrt{28} = 0,803.$$

Бидејќи $|t_{28}| < t_{28;0,01}$ хипотезата за некорелираност на обележјата X и Y не се отфрла, и се заклучува дека X и Y се независно распределени.

3. ПРАВА НА РЕГРЕСИЈА НА ПРИМЕРОКОТ

При оценувањето на стохастичката зависност со некоја функционална, врз база на податоците од примерокот, најчесто се користи линеарната функција. Така се постапува бидејќи зависноста на голем дел од обележјата, кои се набљудуваат во задачите од науката и практиката е блиска до линеарна. Освен тоа, зависности определени со посложени функции (како експоненцијална, логаритамска, степена, дробнорационална итн.), можат, со одредени трансформации, да бидат сведени на линеарна функција, а нејзиното определување и натамошно користење е наједноставно.

Нека за обележјата X и Y е земен примерок со обем n (x_1,y_1), (x_2,y_2),..., (x_n,y_n) и дијаграмот на простирање на податоците покажува тенденција за групирање околу права. Се поставува задача да се определи линеарна функција

$$y = ax + b \tag{1}$$

што најдобро ја оценува зависноста на двете обележја. Да означиме $\hat{y}_i = ax_i + b$, $i = \overline{1,n}$, за x_i од примерокот. Тогаш:

$$\hat{y}_i - y_i = ax_i + b - y_i$$

е отстапување на точката (x_i,y_i) од правата (1), мерено во правец на ординатната оска. Правата (1) се определува така што, средната вредност на квадратите на отстапувањата $(y_i - \hat{y}_i)$, $i = \overline{1,n}$ да има најмала можна вредност. Значи константите a и b треба да бидат определени врз основа на податоците, така што:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 \qquad (2)$$

да има најмала вредност.

Сумата nS^2 може да се трансформира на следниов начин:

$$nS^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 = \sum_i [(y_i - \overline{y}) - a(x_i - \overline{x}) - b + \overline{y} - a\overline{x}]^2 =$$

$$= \sum_i [(y_i - \overline{y})^2 + a^2(x_i - \overline{x})^2 + (\overline{y} - b - a\overline{x})^2 - 2a(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) +$$

$$+ 2(\overline{y} - b - a\overline{x})(y_i - \overline{y}) + 2(\overline{y} - b - a\overline{x})(x_i - \overline{x})] =$$

$$= \sum_i (y_i - \overline{y})^2 + a^2 \sum_i (x_i - \overline{x})^2 + n(\overline{y} - b - a\overline{x})^2 - 2a\sum_i (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) +$$

$$+ 2(\overline{y} - b - a\overline{x})\sum_i (y_i - \overline{y}) + 2a(\overline{y} - b - a\overline{x})\sum_i (x_i - \overline{x}).$$

Последните два собирци се еднакви на нула затоа што сумата на отстапувањата на податоците од нивната аритметичка средина е еднаква на нула. Така добиваме дека:

$$nS^2 = \sum_i (y_i - \overline{y})^2 + a^2 \sum_i (x_i - \overline{x})^2 + n(\overline{y} - b - a\overline{x})^2 -$$

$$- 2a\sum_i (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) \geq$$

$$\geq \sum_i (y_i - \overline{y})^2 + a^2 \sum_i (x_i - \overline{x})^2 - 2a\sum_i (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}).$$

Равенството ќе важи ако a и b го исполнуваат условот:

$$\overline{y} - a\overline{x} - b = 0. \qquad (3)$$

Така се добива едно равенство кое може да се искористи за определување на a и b. Од (3) заклучуваме дека точката $(\overline{x}, \overline{y})$ определена со аритметичките средини на примерокот за X и примерокот за Y треба да припаѓа на бараната права.

Ако важи (3), тогаш:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_i (y_i-\bar{y})^2 - 2a\frac{1}{n}\sum_i (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) + a^2\frac{1}{n}\sum_i (x_i-\bar{x})^2$$

е квадратна функција од a. Ако ги користиме вообичаените ознаки за сумите што се јавуваат во S^2, тогаш таа може да биде запишана и на следниов начин:

$$S^2 = s_x^2 \cdot a^2 - 2s_{xy}a + s_y^2.$$

S^2, како квадратна функција од a и со оглед на $s_x^2>0$ има најмала вредност во темето, т.е. за:

$$a = \frac{2s_{xy}}{2s_x^2} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}. \tag{4}$$

Кога ќе го замениме a во (3), за b добиваме:

$$b = \bar{y} - \frac{s_{xy}}{s_x^2}\bar{x}. \tag{5}$$

Дефинитивно правата на регресија на Y по X е определена со:

$$y = \bar{y} + \frac{s_{xy}}{s_x^2}(x-\bar{x}). \tag{6}$$

Коефициентот пред x може да биде изразен и преку коефициентот на корелација. Имено,

$$\frac{s_{xy}}{s_x^2} = r_{xy}\cdot\frac{s_y}{s_x},$$

така што добиваме:

$$y = \bar{y} + r_{xy}\cdot\frac{s_y}{s_x}(x-\bar{x})$$

или

$$\frac{y-\bar{y}}{s_y} = r_{xy}\cdot\frac{x-\bar{x}}{s_x}. \tag{7}$$

Вредноста на S^2 за a определено со (4), односно како ордината на темето на параболата на соодветната квадратна функција е:

$$S^2 = \frac{s_x^2 \cdot s_y^2 - s_{xy}^2}{s_x^2} = s_y^2\left(1 - \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 \cdot s_y^2}\right)$$

$$S^2 = s_y^2(1-r_{xy}^2). \tag{8}$$

Одтука се гледа дека отстапувањето на точките од примерокот е до толку помало, до колку коефициентот на корелација по апсолутна вредност е поблиску до 1. Во граничниот случај, $|r| = 1$ средното квадратно отстапување е еднакво на нула, а тоа е случајот кога сите точки од примерокот лежат на права, т.е. меѓу обележјата X и Y постои строга линеарна зависност.

Согласно (8), дисперзијата на Y може да биде запишана на следниов начин:

$$s_y^2 = S^2 + r^2 s_y^2,$$

при што $r^2 s_y^2$ е делот од дисперзијата што се должи на линеарната зависност на обележјето Y од X и обично се нарекува **протолкувана дисперзија**, а S^2 е **остаточна дисперзија** или **непротолкувана**. Оценката е до толку подобра, до колку е остаточната дисперзија помала.

При определувањето на права, која ја оценува зависноста на обележјето X од обележјето Y се поаѓа од условот:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - ay_i - b)^2 \tag{9}$$

да има најмала можна вредност. Со аналогна постапка се добива т.н. права на регресија на X по Y (емпириска)

$$x = \overline{x} + \frac{s_{xy}}{s_y^2}(y-\overline{y}) \tag{10}$$

или во следниов облик:

$$x = \overline{x} + r_{xy}\cdot\frac{s_x}{s_y}(y-\overline{y}) \Rightarrow \frac{x-\overline{x}}{s_x} = r_{xy}\cdot\frac{y-\overline{y}}{s_y}. \tag{11}$$

Средното квадратно отстапување на точките од примерокот од така определената права, мерено во насока на апцисната оска ќе биде:

$$S^2_{X/Y} = s^2_x(1-r^2_{xy}). \qquad (12)$$

Двете прави на регресија во општ случај се различни и имаат една заедничка точка $(\overline{x},\overline{y})$. Правите се совпаѓаат само во случајот кога $|r_{xy}| = 1$, т.е. кога постои строга линеарна зависност.

Пример 3. *Врз основа на податоците за две обележја дадени во табелата 2 да се определат двете прави на регресија и средното квадратно отстапување на податоците од нив.*

ТАБЕЛА 2.

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
0	2	4	5	5	8	8	8
0	3	4	6	7	6	8	9
2	3	5	5	7	7	8	10
2	5	5	6	7	8	10	8
4	4	5	7	7	9	10	10

Решение, Пресметувањата, ако се вршат без сметач, најдобро е да се дадат во табела. Во овој случај имаме:

																				Σ
x_i	0	0	2	2	4	4	5	5	5	5	7	7	7	7	8	8	8	10	10	108
y_i	2	3	3	5	4	6	5	6	7	8	6	7	8	9	8	9	10	8	10	129
x_i^2	0	0	4	4	16	16	25	25	25	25	49	49	49	49	64	64	64	100	100	744
y_i^2	4	9	9	25	25	36	25	36	49	64	36	49	64	81	64	81	100	64	100	937
$x_i y_i$	0	0	6	10	20	24	25	30	35	40	42	49	56	63	64	72	80	80	100	812

Бројните карактеристики на примероците се:

$$\overline{x} = \frac{108}{20} = 5,40, \qquad s^2_x = \frac{744}{20} - (5,4)^2 = 8,04$$

$$\overline{y} = \frac{129}{20} = 6,45, \qquad s^2_y = \frac{937}{20} - (6,45)^2 = 5,2475,$$

и $$s_{xy} = \frac{812}{20} - 5,4\cdot 6,45 = 5,77.$$

Коефициентот на корелација на примерокот:

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = 0,888$$

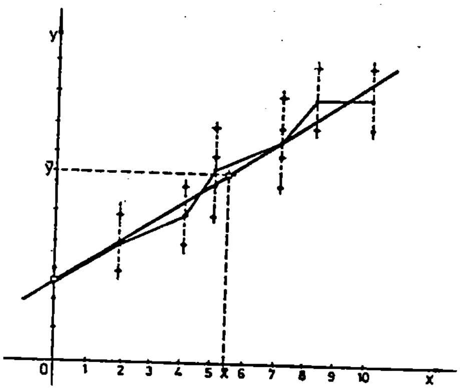
има голема вредност, што значи дека меѓу обележјата постои силна линеарна зависност.

Правата на регресија на Y по X е

$$\frac{y-6,45}{2,29} = 0,888\cdot\frac{x-5,4}{2,84} \Rightarrow y = 0,72x+2,58,$$

а за другата права на регресија се добива:

$$\frac{x-5,4}{2,84} = 0,888\cdot\frac{y-6,45}{2,29}, \text{ т.е. } y = 0,91x+1,54.$$



Сл. 3

Средното квадратно отстапување за првата права е:

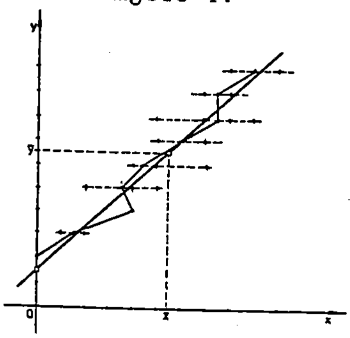
$$s^2_{y/x} = 5,2475(1-0,888^2) = 1,11$$

а за втората:

$$s^2_{x/y} = 8,04(1-0,888^2) = 1,70.$$

На сл. 3 се претставени податоците, полигонот и правата на регресија на примерокот, на обележјето Y во зависност од X.

На сл. 4 даден е дијаграмот на простирање (расејување) на податоците, полигонот и правата на регресија на обележјето X во зависност од обележјето Y.



Сл. 4

Пример 4. *По емпириски пат се добиени вредностите:*

$(4,3)$ $(5,1)$ $(2,4)$ $(3,3)$ $(6,2)$ $(4,3)$ $(4,2)$ $(3,2)$ $(5,3)$ $(5,2)$
$(2,5)$ $(3,4)$ $(4,3)$ $(4,2)$ $(2,3)$ $(3,4)$ $(5,2)$ $(4,2)$ $(6,1)$ $(2,5)$
$(4,4)$ $(3,3)$ $(4,3)$ $(5,1)$ $(2,4)$ $(6,3)$ $(3,4)$ $(5,1)$ $(4,3)$ $(5,2)$

(2,4) (6,1) (4,2) (3,2) (5,3) (6,2) (4,3) (3,3) (5,2) (3,3)
(4,3) (6,1) (3,4) (5,2) (4,3) (2,4) (3,3) (6,2) (4,4) (4,3)

а) Дали се обележјата корелирани?

Решение:

															Σ
x_i	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	
y_i	3	4	5	2	3	4	2	3	4	1	2	3	1	2	3	
n_i	1	4	2	2	5	4	4	9	2	3	5	2	3	3	1	50
$n_i x_i$	2	8	4	6	15	12	16	36	8	15	25	10	18	18	6	199
$n_i x_i^2$	4	16	8	18	45	36	64	144	32	65	125	50	108	108	36	869
$n_i y_i$	3	16	10	4	15	16	8	27	8	3	10	6	3	6	3	138
$n_i y_i^2$	9	64	50	8	45	64	16	81	32	3	20	18	3	12	9	434
$n_i x_i y_i$	6	32	20	12	45	48	32	108	32	15	50	30	18	36	18	502

$\overline{x}_{50} = 3,98$ $\qquad \overline{y}_{50} = 2,76$

$s_x^2 = 1,5396$ $\qquad s_y^2 = 1,0624$ $\qquad s_{xy} = -0,9448$

$r_{xy} = -0,74$

$\overline{t}_{48} = 7,62$ $\qquad t_{48;0,01} = 2,7$ $\qquad 2,7 < 7,62$

Обележјата се корелирани.

б) Да се најдат правите на регресија и средното квадратно отклонување од секоја права:

X по Y: $\dfrac{x-3,98}{1,24} = -0,74 \cdot \dfrac{y-2,76}{1,03}$

$$1,03x + 0,92y = 6,63$$

$$s_{x/y}^2 = 0,315;$$

Y по X: $\dfrac{x-2,76}{1,03} = -0,74 \cdot \dfrac{y-3,98}{1,24}$

$$1,24x + 0,76y = 6,46$$

$$s^2_{y/x} = 0,481.$$

ВЕЖБИ

1. *Ако коефициентот на корелација покажува постоење на линеарна зависност на променливите, формирајте ги правите на регресија врз основа на следниве податоци:*

а) X: *(1948, 49, 50, 51, 52, 54) време во години*
   Y: *(23,3 25,8 27,5 29,7 26,9 28,5 32,2) поминати километри (во милиони);*

б) X: *(0, 4, 10, 15, 21, 36, 51, 58)* $^{\circ}C$
   Y: *(66,7 71,0 76,3 80,6 85,7 92,2 99,4 113,6 125,1) раствор на* $NaNO_3$*;*

в) t: *(220, 200, 189, 160, 140, 100) температура во* $^{\circ}C$
   v: *(8,81 7,40 6,10 4,89 3,88 3,02 2,30) брзина на ладење.*

ОДГОВОРИ, УПАТСТВА И РЕШЕНИЈА

I. СМЕТАЊЕ СО ПРИБЛИЖНИ БРОЕВИ. ПРЕСМЕТУВАЊЕ ВРЕДНОСТИ НА ФУНКЦИИ

2. АПСОЛУТНА ГРЕШКА НА ПРИБЛИЖЕН БРОЈ, 3. РЕЛАТИВНА ГРЕШКА НА ПРИБЛИЖЕН БРОЈ.

2) $0{,}000285$. 3) а) $\Delta_1=0{,}0004$; $\delta_1\approx 0{,}00007$; б) $\Delta_2=0{,}0026$; $\delta_2\approx 0{,}0005$; в) $\Delta_3=0{,}0274$; $\delta_3\approx 0{,}005$.

5) $\Delta_{\bar{a}}=0{,}00053$; $\delta_{\bar{a}}=0{,}0002$ или $\delta_{\bar{a}}=0{,}02\%$; $\Delta_{\bar{b}}=0{,}0002$; $\delta_{\bar{b}}=0{,}0002$ или $\delta_{\bar{b}}=0{,}02\%$; $\Delta_{\bar{c}}=0{,}0004$; $\delta_{\bar{c}}=0{,}000005$ или $\delta_{\bar{c}}=0{,}0005\%$.

6) $\Delta_{\bar{x}}=0{,}00003$; $\delta_{\bar{x}}=0{,}00002$ или $\delta_{\bar{x}}=0{,}002\%$

$\Delta_{\bar{y}}=0{,}003$; $\delta_{\bar{y}}=0{,}005$ или $\delta_{\bar{y}}=0{,}5\%$

$\Delta_{\bar{z}}=0{,}00001$; $\delta_{\bar{x}}=0{,}00002$ или $\delta_{\bar{x}}=0{,}002\%$

$\Delta_{\bar{y}}=0{,}003$; $\delta_{\bar{y}}=0{,}005$ или $\delta_{\bar{y}}=0{,}5\%$

$\Delta_{\bar{z}}=0{,}00001$; $\delta_{\bar{z}}=0{,}00004$ или $\delta_{\bar{z}}=0{,}004\%$

$\Delta_{\bar{u}}=0{,}0005$; $\delta_{\bar{u}}=0{,}0003$ или $\delta_{\bar{u}}=0{,}03\%$

$\Delta_{\bar{v}}=0{,}005$; $\delta_{\bar{v}}=0{,}005$ или $\delta_{\bar{v}}=0{,}5\%$

7) Ако $\bar{x}=567{,}55$, тогаш $\Delta_{\bar{x}}=0{,}5$; $\delta_{\bar{x}}=0{,}0009$ итн.

8) $\Delta_{\bar{x}}=0{,}0624$; $\Delta_{\bar{y}}=0{,}002256$. 9) $252{,}42 < x < 256{,}62$.

10) $\frac{1}{3}\approx 0{,}33$ и $\frac{1}{3}\approx 0{,}333$; $\frac{5}{6}\approx 0{,}83$ и $\frac{5}{6}\approx 0{,}833$;

$\sqrt{7}\approx 2{,}64$ и $\sqrt{7}\approx 2{,}645$.

11) $\delta_{\bar{r}} = 0{,}2\%$; $\delta_{\bar{d}} = 1\%$, $\delta_{\bar{t}} = 0{,}007\%$. Величината t е измерена со најголема точност.

4. ТОЧНИ И ЗНАЧАЈНИ ЦИФРИ НА ПРИБЛИЖЕН БРОЈ. ЗАОКРУЖУВАЊЕ НА ПРИБЛИЖЕН БРОЈ

15) *Потцртаните цифри се точни.*

$\bar{x} = \underline{5,658}6$ *(во широка смисла)*

$\bar{y} = \underline{1,773}$ *(во широка смисла)*

$\bar{z} = 0,0\underline{407}$ *(во строга смисла)*

$\bar{a}_1 = 0,00\underline{87}$ *(во строга смисла)*

$\bar{a}_2 = 0,00\underline{88}$ *(во широка смисла)*

$\bar{v} = \underline{987}0$ *(во широка смисла)*

$\bar{g} = \underline{75}0000$ *(во строга смисла).*

16) а) 3; б) 2; в) 2; г) 2; д) 1. **17)** а) 3 (во строга смисла), б) 3 (во широка смисла). **18)** $\Delta_{\bar{x}}=0,0005$ и $\Delta_x=0,001$; $\Delta_{\bar{y}}=0,05$ и $\Delta_y=0,1$; $\Delta_{\bar{z}}=0,005$ и $\Delta_z=0,01$; $\Delta_{\bar{a}}=50$ и $\Delta_a=100$; $\Delta_{\bar{b}}=0,0005$ и $\Delta_b=0,001$. **19)** $x\in[458,3465;458,3475]$; $y\in[78942,5;78943,5]$. **20)** $x\in[0,02377;0,02379]$, $y\in[10,97;10,99]$. **21)** а) 0,0236; б) 2,15; в) 2,15; г) 2,70; д) 3,00; ѓ) 2,36; е) 2,34; ж) $215\cdot10^1$; з) $270\cdot10^1$. **22)** 7,8250; 7,825; 7,82; 7,8; 8. **23)** а) $985437\cdot10^1$; $98544\cdot10^2$; $9854\cdot10^3$; $985\cdot10^4$; $98\cdot10^5$; б) $99\cdot10^5$. **25)** $\bar{x}_1=3,8$; $\bar{y}_1=12,5$; $|\bar{x}-\bar{x}_1|=0,0378$; $|x-\bar{x}_1| = 0,0121+0,0378 = 0,0499 < 0,05$; $|\bar{y}-\bar{y}_1| = 0,0123$; $|y-\bar{y}_1| = 0,0211+0,0123 = 0,033^4 < 0,05$.

5.1° Собирање и одземање на приближни броеви

28) $s^*=602,25$; $\Delta_{s^*}=0,3$; $\delta_{s^*}=0,0005$. **29)** $s^*=4,8$; $\Delta_{s^*}=0,07$; $\delta_{s^*}=0,0145$. **30)** $s^*=13,8$; $\Delta_{s^*}=0,16$; $\delta_{s^*}=0,012$.

31) $\bar{d}=3,532$; $\Delta_{\bar{d}}=0,001$; $\delta_{\bar{d}}=0,0003$. **32)** $\bar{d}=14,485$; $\Delta_{\bar{d}}=0,001$;

$\delta_{\bar{d}}=0,00007.$ 33) $d*=0,007;$ $\Delta_{d*}=0,0002;$ $\delta_{d*}=0,3.$

34) Ако се стави $d = \dfrac{0,01}{\sqrt{2,01}+\sqrt{2}}$; $\sqrt{2,01} \approx 1,42$ и $\sqrt{2} \approx 1,41.$

2° Множење на приближни броеви

36) $p* = 3,1;$ $\Delta_{p*} < 0,2;$ $\delta_{p*} < 0,065.$

37) $p* = 39,0\ m^3;$ $\Delta_{p*} < 0,9\ m^3;$ $\delta_{p*} < 0,03\ m^3.$

38) $\bar{p} = 4,7\cdot 0,04 = 0,188;$ $p* = 0,2;$ $\Delta_{\bar{p}} < 0,2;$ $\Delta_{p*} < 0,3;$ $\delta_{p*} < 1,5.$

3° Делење на приближни броеви

40) $q* = 1,23;$ $\Delta_{q*} < 0,008;$ $\delta_{q*} < 0,007.$

41) $\bar{q} = 23,0023;$ $q* = 23,00;$ $\Delta_{q*} \approx 0,03034 < 0,04;$ $\delta_{q*} \approx 0,001319 < 0,002.$

42) $\bar{r} = -1,1402187;$ $r* = -1,14;$ $\Delta_{\bar{r}} \approx 0,0310477;$

$\Delta_{r*} \approx 0,0312664 < 0,04;$ $\delta_{r*} \approx 0,0274266 < 0,03.$

7. ЛИНЕАРНА ИНТЕРПОЛАЦИЈА

4) а) 4,59067; б) 5,83611; в) 6,58257; г) 1,39027;
д) 0,50574 −2; ѓ) 0,38009 − 3.

5) а) 0,66545; б) 0,74645; в) 0,89149; г) 1,1217;
д) 0,93735; ѓ) 0,47783.

8. ПРЕСМЕТУВАЊЕ ВРЕДНОСТИ НА ПОЛИНОМИ. ХОРНЕРОВА ШЕМА

6) а) 34,848; б) 11,3401; в) 15; г) 200,4322; д) −0,5642.

9. ПРИБЛИЖНО РЕШАВАЊЕ НА РАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

2° Изолирање на корените

1) *а)* $\xi_1\in(-2;-1,5)$; $\xi_2\in(0;0,5)$; $\xi_3\in(1;1,6)$; *б)* $\xi_1\in(-1,0)$; $\xi_2\in(1;1,5)$; *в)* $\xi_1\in(-2;-1)$; $\xi_2\in(-1,1)$; $\xi_3\in(3,5)$;
г) нема реални корени; *д)* $\xi_1\in(-2,0)$; $\xi_2\in(0,5;3)$;
ѓ) $\xi_1\in(0;0,6)$; *е)* $\xi_1\in(1,2)$; *ж)* $\xi_1\in(0,1)$;
з) $\xi_1\in(-1,0)$; $\xi_2\in(0,1)$.

3° Уточнување на приближните решенија

Метод на преполовување

3) $\xi = 0,859$; 4) $\xi = 1,325$; 5) $\xi = 0,32762$.

Метод на итерации

7) $\xi = 9,96667$. *Најпогодна е третата равенка.*

8) *а) постапката конвергира кон коренот* $\xi = 2$, *б) постапката дивергира.*

9) За $x_o=0$ и $x_o=1$ *постапката конвергира кон коренот* $\xi=-0,347$ *а за* $x_o=2$ *дивергира.*

10) *а) постапката дивергира, б) постапката конвергира кон коренот* $\xi=1,32472$.

11) *а)* $\xi=1,62936$; *б)* $\xi=0,75488$; *в)* $\xi=0,64199$; *г)* $\xi=0,78112$; *д)* $\xi=0,67238$; *ѓ)* $\xi=0,15368$; *е)* $\xi=3,78928$.

II. СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ. ВЕРОЈАТНОСТ

2: 1. $\Omega=\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_1,x_2,x_3\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$

$B=\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_1,x_2\in\{2,4,6\},\ x_3\in\{1,3,5\}\}$

$C=\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_1,x_2,x_3\in\{1,2,3,4,5,6\},\ x_1\neq x_2\neq x_3\neq x_1\}$

$E=\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_1,x_2,x_3\in\{1,2,3,4,5,6\},\ x_1=x_2\}$.

2. $\overline{V}_6^3$, $3\overline{V}_3^1\overline{V}_3^2+\overline{V}_3^3$, $\overline{V}_3^1\overline{V}_3^2$, V_6^3, $V_4^1+V_3^1+V_2^1+V_1^1$, $\overline{V}_6^2$, $2\overline{V}_3^1\overline{V}_3^1\overline{V}_6^1$, $\overline{V}_6^3-\overline{V}_5^3$. 3. $\Omega=\{ARF, \overline{A}RF, A\overline{R}F, AR\overline{F}, \overline{A}\overline{R}F, \overline{A}R\overline{F}, A\overline{R}\overline{F}, \overline{A}\overline{R}\overline{F}\}$.

4. C_{50}^2, C_{15}^2, $C_{100}^2-C_{50}^2$, C_{75}^2, C_{95}^2. 5. $C_{50}^1C_{50}^4$, $C_{100}^5-C_{50}^5$, $C_{100}^5-C_{50}^5-C_{50}^1C_{50}^4$, $C_{100}^5-C_{40}^5$, C_{40}^5, $C_{100}^5-C_{25}^5$, $C_{40}^4C_{60}^1+C_{40}^5$.

3: 1. $P(AB)=0,25$, $P(AB)=a-b$, $P(AB)=a+b+c-1$.

2. $a=P(A)+P(B)-d$; $b=P(A)+P(C)-e$; $c=P(B)+P(C)-f$;

$a+b-c=2P(A)-d-e+f \Rightarrow P(A)=\frac{1}{2}[(a+d)+(b+e)-(c+f)]$;

$P(ABC)=1-\frac{1}{2}[(a+b+c)-(d+e+f)]$.

3. $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)$; $P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A\cup B)$; $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-(a+b+c)+$ $+(d+e+f)$. 4. $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-P(AB\cap AC\cap BC)$.

4: 1. $\dfrac{C_{15}^{10}}{C_{30}^{10}}$, $\dfrac{C_{10}^5\,C_{20}^5}{C_{30}^{10}}$, $\dfrac{C_3^1C_7^4C_{10}^5}{C_{30}^{10}}$. 2. $\dfrac{\overline{V}_3^4}{\overline{V}_3^5}$, $\dfrac{\overline{V}_2^2C_3^1}{\overline{V}_3^5}$, $\dfrac{C_5^3\overline{V}_2^2}{\overline{V}_3^5}$.

3. $\dfrac{C_{16}^6}{C_{20}^6}$, $\dfrac{C_4^4\,C_{16}^2}{C_{20}^6}$, $\dfrac{C_{16}^6}{C_{20}^6}-\dfrac{C_4^4\,C_{16}^2}{C_{20}^6}$. 4. $\dfrac{\overline{C}_{20}^5}{\overline{C}_{35}^5}$,

$\dfrac{\overline{C}_{20}^3\,\overline{C}_{15}^2+\overline{C}_{20}^4\,\overline{C}_{15}^1+\overline{C}_{20}^5}{\overline{C}_{35}^5}$, $\dfrac{\overline{V}_{20}^2\,\overline{V}_{35}^3}{\overline{V}_{35}^5}$, $\dfrac{\overline{V}_{15}^3\,\overline{V}_{20}^2}{\overline{V}_{35}^5}$.

5: 1. $P(A) = \dfrac{1/2m}{1m} = 0,5$; $P(B) = \dfrac{1/4m+1/4m}{1m} = 0;5$.

2. Слично како во реш. зад. 1 се добива дека:

$\Omega=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ x+y\le 1\}$ $m(\Omega)=0,5\ m^2$

$A=\{(x,y)\,|\,x+y\le\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\le x\le 1,\ \frac{1}{2}\le y\le 1\}$ $m(A)=0,375\ m^2$.

3. $\Omega=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 2,\ 2\le y\le 4\}$ $m(\Omega)=2$

$A=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 2,\ 2\le y\le 4,\ 1\le y-x\le 2\}$ $m(A)=1$

$B=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 2,\ 2\le y\le 4,\ 4\le x+y\le 5\}$ $m(B)=1$.

4. $C_5^2(\frac{x}{a})^2(\frac{a-x}{a})^3$. 5. $C_{10}^4C_6^3P_4(\frac{2}{\pi})^4(\frac{\pi-2}{4\pi})^6$.

7: 1. B: извлечено е бело топче;

C: извлечено е црно топче;

S: извлечено е сино топче.

а) $P(B+SSB+SSSSB) = \frac{3}{10} + \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8} + \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{6}$;

б) $P(SB+SSSB+SSSSSB)$; в) $P(C+SC+SSC+SSSC+SSSSC+SSSSSC)$.

2. $\left(\frac{n}{n+m}\right)^5$, $\left(\frac{n}{n+m}\right)^9\frac{n}{n+m}$, $1-\left(\frac{n}{n+m}\right)^{20}$.

3. $\frac{C^1_m C^1_n}{C^2_{m+n}}\cdot\frac{C^1_{m-1}C^1_{n-1}}{C^2_{m+n-1}}\cdots\frac{C^1_{m-(n-1)}C^1_{n-(n-1)}}{C_{m+n-2(n-1)}}$.

4. A: партијата ја добил A, $P(A) = \frac{2}{3}$;

B: партијата ја добил B, $P(B) = \frac{1}{3}$.

За да победи A треба да извојува 4 победи, при што B може да оствари најмногу една победа.

$$P(AAA) + 4P(AAABA) = (\tfrac{2}{3})^4+4\tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^4 = \frac{7\cdot 2^4}{3^5} = \frac{112}{243}$$

За да победи B треба во најмногу 5 партии да освои точно две победи.

$$P(BB)+3P(ABB) + \binom{4}{2}P(AABB) + \binom{5}{2}P(AAABB) = \frac{131}{243}.$$

5. B – раѓање на близнаци.

M – раѓање на машко дете, $P(M) = 0,51$,

F – раѓање на женско дете, $P(F) = 0,49$,

$$P(MM/B) + P(FF/B) = 2P(MF/B) + P(FM/B)$$

$$P(MM/B) + P(MF/B) + P(FM/B) + P(FF/B) = 1.$$

Од овие две равенства следува дека $P(MF/B) = P(FM/B) = \frac{1}{6}$. Ако ги означиме со M_1, M_2 и F_1, F_2 настаните: првото, второто е машко и првото, второто е женско дете при раѓање на близнаци, а имајќи предвид дека $P(M_1)=P(M_2)=P(M)=0,51$,

добиваме: $P(F_2/M_1) = \frac{P(M_1F_2)}{P(M_1)} = \frac{1}{6\cdot 0,51}$.

Ако, при раѓање на близнаци, едното е машко, другото може да биде машко или женско. Затоа $P(M_2/M_1) + P(F_2/M_1) = 1$

$P(M_2/M_1) = 1 - P(F_2/M_1) = \frac{2,06}{3,06}$ $\quad P(M_2/M_1) \approx 0,673.$

8: **1.** A: целта е погодена; B: целта е пробиена; C: целта е барем еднаш пробиена во n обиди;

$$\overline{C} = (\overline{A}+A\overline{B})^n = (\Omega-AB)^n;$$

$$P(\overline{C}) = [1-P(A)P(B)]^n; \; P(C) = 1-(1-0,27)^n = 1-0,73^n.$$

2. A: извлечено е бело топче;

M_i: избрана е i-тата кутија.

а) $P(A) = P(M_1)P(A/M_1)+P(M_2)P(A/M_2)+P(M_3)P(A/M_3) =$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}+\frac{6}{8}+\frac{4}{7}\right); \qquad P(M_1/A) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{241}{420}} = \frac{56}{241}.$$

б) $P(A) = \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{10}\cdot\frac{3}{4} + \frac{7}{10}\cdot\frac{4}{7}$ $\qquad P(M_1/A) = \frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{59}{100}} = \frac{4}{59}.$

3. $P(A/M_3) = \frac{4}{7}$ $\qquad P(A) = \frac{241}{420}$

$$P(A/M_3):P(A) = \frac{4}{7}\cdot\frac{420}{241} = \frac{1680}{1687}.$$

Поверојатно е да се извлече бело топче од случајно избрана вазна.

4. A: извлечено е бело топче.
S_i: Од трите вазни се избрани i бели топчиња:

$$P(S_0) = \frac{9}{140}, \; P(S_1) = \frac{45}{140}, \; P(S_2) = \frac{62}{140}, \; P(S_3) = \frac{24}{140}.$$

а) $P(A) = P(S_0)\cdot 0+P(S_1)\cdot\frac{1}{3}+P(S_2)\cdot\frac{2}{3}+P(S_3)\cdot\frac{3}{3}$

$$P(A) = \frac{241}{420}$$

$$P((S_0+S_1+S_2)/A) = 1 - P(S_3/A) = 1 - \frac{\frac{24}{140}}{\frac{241}{420}} = \frac{169}{241};$$

б) $P(A) = P(S_0)\cdot\frac{1}{5} + P(S_1)\cdot\frac{2}{5} + P(S_2)\cdot\frac{3}{5} + P(S_3)\cdot\frac{4}{5}$;

$$P(A) = \frac{381}{700}$$

$$P((S_0+S_1+S_2)/A) = 1 - \frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{24}{140}}{\frac{381}{700}} = \frac{285}{381}.$$

5. H_i: настанал i-от дефект

A: осигурувачот откажал

$$P(A) = \frac{35}{100}\cdot\frac{5}{10} + \frac{30}{100}\cdot\frac{6}{10} + \frac{25}{100}\cdot\frac{7}{10} + \frac{10}{100}\cdot\frac{9}{10}$$

$$P(A) = \frac{175}{1000} + \frac{180}{1000} + \frac{175}{1000} + \frac{90}{1000} = \frac{62}{100} = \frac{31}{50}.$$

Најверојатно причина за отказ на осигурувачот е врската во трансформаторот $P(H_i/A) = \frac{9}{31}$.

9: 1. A: ученикот не го учел материјалот

а) 0,20; б) $1048576\cdot 10^{-20} \approx 0$; в) 0,057646.

B: Ученикот го учел предметот

а) 0,50; б) $1048576^{-1} \approx 0,000001$; в) 0,000019.

2. $\frac{22}{52} = 0,4231$. **3.** 0,65. **4.** $\frac{11}{36} = 0,3056$.

5. $\frac{15}{34} = 0,4412$. **6.** $\frac{839}{850} = 0,9871$. **7.** $\frac{94}{54145} = 0,0017$.

8. 0,857375. **9.** $\frac{23}{36} = 0,6389$. **10.** 0,972.

11. $\frac{6}{7} = 0,8571$. **12.** Втората со веројатност 0,52.

III

3: 1. A: паднале две парни вредности

B_i: се појавиле i точки, $i=2,4,6$

X: збир на точките на двете коцки, $X\in\{4,6,8,10,12\}$

$$P(X=4) = P(B_2B_2/A) = \frac{1/36}{1/4} = \frac{1}{9}$$

$$P(X=8) = P(B_2B_6/A)+P(B_4B_4/A)+P(B_6B_2/A) = \frac{3}{9}$$

$$X: \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ 1/9 & 2/9 & 3/9 & 2/9 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

2. X: број на бели топчиња, $X \in \{0,1,2,3\}$

$$P(X=0) = \frac{C_8^0 C_4^3}{C_{12}^3}, \quad P(X=1) = \frac{C_8^1 C_4^2}{C_{12}^3}$$

$$P(X=2) = \frac{C_8^2 C_4^1}{C_{12}^3}, \quad P(X=3) = \frac{C_8^3 C_4^0}{C_{12}^3}$$

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/55 & 12/55 & 28/55 & 14/55 \end{pmatrix}.$$

3. $a = \frac{15}{109}$.

4. $$X: \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

5. За да биде $F_X(x)$ функција на распределба мора да важат условите:

1. $\left(\frac{a+b}{10}\right)^2 = 0$

2. $\left(\frac{6a+b}{10}\right)^2 = 1$. Се добиваат два системи:

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ 6a+b = 10 \end{cases} \quad и \quad \begin{cases} a+b = 0 \\ 6a+b = -10 \end{cases}$$

Решенијата се $a=2$, $b=-2$ и $a=-2$, $b=2$. За првиот и вториот пар вредности се добиваат истите вредности на $F_X(x)$.

$$X: \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/25 & 3/25 & 5/25 & 7/25 & 9/25 \end{pmatrix}$$

9: 1. X: Збир на точките од двете коцки

$$X: \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1/36 & 2/36 & 3/36 & 4/36 & 5/36 & 6/36 & 5/36 & 4/36 & 3/36 & 2/36 & 1/36 \end{pmatrix}$$

2. X: *број на семафори до првото застанување*

$P(X=i)=0,6\cdot 0,4^{i-1},\quad i=0,\ 1,\ 2,\ 3\quad P(X=4)=0,4^4$

$$X:\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,6 & 0,24 & 0,096 & 0,0384 & 0,0256 \end{bmatrix}$$

3. X: *број исправни меѓу десетте испитани*

Y: *број дефектни*

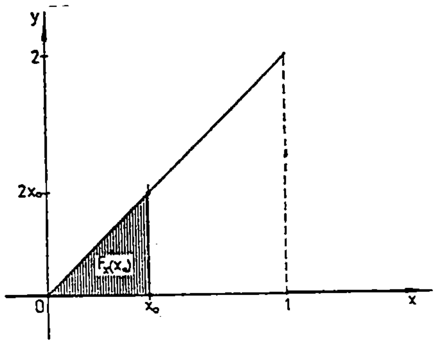
а) X: $P(X=i) = \binom{10}{i}0,9^{i}\cdot 0,1^{10-i},\quad i=0,1,\ldots,10$

б) 9 $\quad P(X=9) = 0,3874$

в) Y: $P(Y=i) = \binom{10}{i}0,1^{i}\cdot 0,9^{10-i},\quad i=0,1,\ldots,10$

г) $P(Y\geq 4) = 0,01279.$

4.



$$\left.\begin{array}{l} F(-1)=P(X<-1)=0 \\ F(0)\ =P(X<0)\ =0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} F(x)=0 \\ x\leq 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} F(1)\ =P(X<1)\ =1 \\ F(12)=P(X<12)=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} F(x)=1 \\ x\geq 1 \end{array}$$

$$F(x_o)=P(X<x_o)=x_o^2$$

Според тоа:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x\leq 0 \\ x^2 & 0<x\leq 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$$

5. а) 0; $\quad$ б) $\frac{9}{20}$; $\quad$ в) 0,7125; $\quad$ г) 0,45;

д) $F(x)=\begin{cases} 0 & x\leq 4 \\ (x^2-16)/20 & 4<x\leq 6 \\ 1 & x>6 \end{cases}$

6. б) 0,525, 0,4; $\quad$ в) 0,775, 0,6; $\quad$ г) Не.

IV

1: в) $EZ=0,7\cdot(1+2\cdot 0,3+3\cdot 0,3^2+\ldots+n\cdot 0,3^{n-1}+\ldots) = \frac{1}{0,7}$

Нека е збирот S

$S=1+2a+3a^2+4a^3+\ldots$, каде $0<a<1$. Ја запишуваме сумата на следниов начин:

$$\begin{aligned}S=1&+a+a^2+a^3+\ldots+\\ &+a+a^2+a^3+a^4+\ldots+\\ &+a^2+a^3+a^4+a^5+\ldots+\\ &+a^3+a^4+a^5+a^6+\ldots\end{aligned}$$

Според формулата (**) од стр. 108

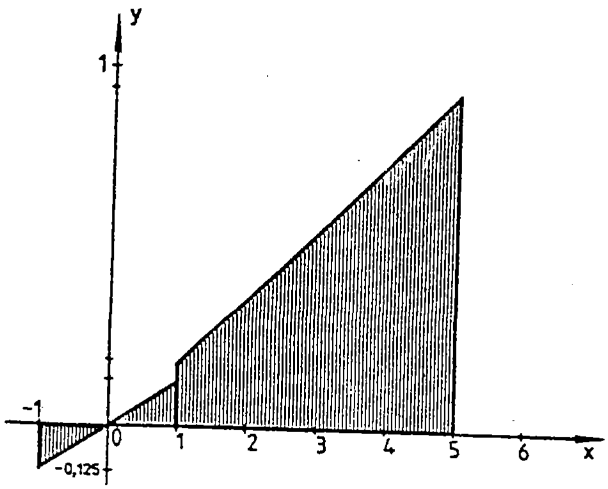
$$S = \frac{1}{1-a} + a\cdot\frac{1}{1-a} + a^2\cdot\frac{1}{1-a} + a^3\cdot\frac{1}{1-a} + \ldots$$

$$S = \frac{1}{1-a}(1 + a + a^2 + a^3 + \ldots) = \frac{1}{(1-a)^2}$$

Вредноста a е всушност веројатноста на настанот $\overline{A}$. Според тоа, $a=1-p$, па $S = \frac{1}{p^2}$, а $EZ = \frac{1}{p}$.

3. $\frac{a}{3}[1-(-1)] + \frac{a}{2}(5-1) \equiv 1 \Rightarrow a = \frac{3}{8}$

$$y = xp(x) = \begin{cases} 0 & x<-1 \\ x/8 & -1\le x\le 1 \\ 3x/16 & 1\le x\le 5 \\ 0 & x>5 \end{cases}$$



$$EX = \frac{1}{2}\cdot 0,125(0-(-1)) + \frac{1}{2}\cdot 0,125(1-0) +$$
$$+ \frac{1}{2}(0,177 + 0,9375)(5-1); \qquad EX = 2,355$$

4. $X \in \{0,1,2,\ldots\}$

$$EX = P(X=1) + 2P(X=2) + 3P(X=3) + 4P(X=4) + \ldots$$

$$EX = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + \ldots +$$
$$+ P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + \ldots +$$
$$+ P(X=3) + P(X=4) + \ldots$$

$$EX = P(X\geq 1) + P(X\geq 2) + P(X\geq 3) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} P(X\geq k) .$$

5. *Случајната променлива* Y *за која* $P(Y=0)=q^n$;

$P(Y=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$; $P(Y=n)=p^n$ *има биномна распределба и*

$EY=np$. $EX = EY - 0\cdot q^n - np^n + 0\cdot a + nb = np+1$.

Се добива дека $b = \frac{1}{n} + p^n$. *Вредноста на* a *ја добиваме користејќи го својството дека збирот на веројатностите на сите вредности кои ги прима случајната променлива е* 1. *Според тоа,* $a+b = p^n + q^n$, *од каде* $a = -\frac{1}{n} + q^n$.

2: 1. $Z: \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 0,12 & 0,36 & 0,35 & 0,14 & 0,03 \end{pmatrix}$ $\quad EZ=-0,8, \; DZ=3,76$

$T: \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 0,02 & 0,11 & 0,30 & 0,39 & 0,18 \end{pmatrix}$ $\quad ET=1,2, \; DT=3,76.$

Заклучок: $EX=0,2$; $EY=-1$; $DX=1,96$; $DY=1,8$; $EZ=EX+EY$, $ET=EX-EY$; $DZ=DT=DX+DY$.

2. $Z = X-\frac{1}{2}Y = X+(-\frac{1}{2}Y)$

$Z: \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0,02 & 0,18 & 0,36 & 0,36 & 0,08 \end{pmatrix}$ $\quad EZ=0,3, \; DZ=0,85$

$$T: \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0,1 & 0,82 & 0,08 \end{bmatrix} \qquad ET=-0,04, \ DT=0,7184.$$

$EZ = EX-\frac{1}{2}EY; \ DZ = DX+\frac{1}{4}DY; \ ET = EXEY; \ DT \neq DXDY.$

4. $$Z: \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0,15 & 0,1 & 0,5 & 0,1 & 0,15 \end{bmatrix} \qquad EZ=0, \ DZ=1,4$$

$EX = -0,05, \quad EY = 0,5, \quad EZ \neq EX\cdot EY, \quad EZ \neq EX+EY;$

$DX = 0,7475, \quad DY = 1,65, \quad DZ \neq DX\cdot DY, \quad DZ > DXDY.$

5. $$xp(x) = \begin{cases} 1 & x\in[1,e] \\ 0 & x\notin[1,e] \end{cases}$$

Плоштината меѓу $xp(x)$ и x-оската изнесува $e-1$.

$EX = e-1 \qquad EX \approx 1,718$

$$x^2p(x) = \begin{cases} x & x\in[1,e] \\ 0 & x\notin[1,e] \end{cases}$$

Плоштината меѓу $x^2p(x)$ и x-оската изнесува $\frac{1}{2}(e^2-1)$

$EX^2 = \frac{1}{2}(e^2-1). \quad DX=EX^2-(EX)^2 = \frac{1}{2}(e-1)(3-e) = 0,242.$

V

1. X: збир на точките на две коцки $EX = 7, \ DX = \frac{35}{6}$

а) $P(2<X<12) = \frac{17}{18} = 0,944$

$P(2<X<12) = P(2-7<X-7<12-7) = P(-5<X-7<5) =$

$= P(|X-7| < 5)$

$P(|X-7| < 5) \geq 1 - \frac{35}{6\cdot 25} = \frac{23}{30} = 0,767$

б) $P(4<X<10) = \frac{2}{3} = 0,667 \qquad P(4<X<10) \geq \frac{19}{54} = 0,352$

в) $P(4\leq X\leq 10) = \frac{5}{6} = 0,833 \qquad P(4\leq X\leq 10) > 0,352$

г) $P(6<X<8) = \frac{1}{6} = 0,167 \qquad P(6<X<8) > 0.$

Проценките со неравенството на Чебишев се подобри за поголеми вредности на ε.

2. S: Збир на точките од 10 коцки

$ES_{10} = 10\cdot 3,5 = 35 \quad DS_{10} = 10\cdot\frac{35}{12} = \frac{175}{6}$

$P(|S_{10}-35| > 12) \le \frac{175}{864} = 0,2.$

3. $\overline{X}_n$: аритметичка средина на точките од n коцки

$E\overline{X}_n = 3,5 \quad D\overline{X}_n = \frac{35}{12n}$

а) $P(|\overline{X}_n - E\overline{X}_n| < \varepsilon) = 0,95$

$P(|\overline{X}_n - E\overline{X}_n| < 0,1) \ge 1 - \frac{3500}{12n}$

$1 - \frac{3500}{12n} = 0,95 \quad n = 58,33$

б) $n = 29167.$

4. A: производот е неисправен, $p=0;02$, $n=100$, $np=2<10$

а) $P(S_n=2) = \frac{2^2}{2!}e^{-2} = 0,271$

б) $P(S_n\ge 2) = 0,406$

в) $P(2\le S_n\le 6) = 0,589.$

5. Чипот е неисправен $p=0,1$, $n=100$, $np=10$

нормална апроксимација а) $P(S_n<3) = \frac{1}{3}F(-2,33)=0,0088;$

б) $P(S_n\ge 3)=0,9912;$ в) $P(1\le S_n\le 6)=F(-1,33)-F(-3)=0,09.$

6. A: дискетата е неупотреблива $p=0,02$ $n=100$ $np=20$

а) $P(S_n=10) = \frac{1}{4,4}\ \phi(-2,26) = 0,007$

б) $P(S_n\ge 100) = 1-P(S_n<100) = 1-F(20,45) = 0$

в) $P(10\le S_n\le 50) = 0,5.$

7. $EX_k=0 \quad DX_k=\frac{1}{2}$. Законот за големите броеви важи

$P(|\overline{X}_n - E\overline{X}_n| \le 0,1) > 0,95 \quad n=?$

$1-D\overline{X}_n/\varepsilon^2 = 0,95$

$1-1/200n = 0,95 \Rightarrow n=1000.$

8. При заокружување на 4 децимали грешката е по апсолутна вредност помала од $5\cdot 10^{-4}$ и рамномерно распределена на интервалот $(-5\cdot 10^{-4}, 5\cdot 10^{-4})$.

X_k: грешка при заокружување на k-тиот собирок

$a=EX_k=0,\ \ DX_k=0,083\cdot 10^{-8},\ \ \sigma=3\cdot 10^{-4}$

$X_1, X_2, \ldots, X_{1000}$ се независни, еднакво распределени, со конечна математичка надеж и дисперзија, па за нив важи централната гранична теорема и

$P\left\{(S_n-na)/\sigma\sqrt{n} < x\right\} = F(x)$ за големо n каде:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^{2/2}}\,dt$$

$$P(|\overline{X}_{1000}|<0,005) = P(|S_{1000}|<5) = P\left\{\frac{|S_{1000}|}{\sqrt{1000}\sigma} < \frac{5}{\sqrt{1000}\sigma}\right\} =$$

$$= F(527)-F(-527) = 1.$$

При заокружување на 4 децимали аритметичката средина е точна на 2 децимали. Докажете дека е точно и на 4. Сумата на сите вредности има точни 2 децимали со веројатност 0,399,

$$P(|S_n| < 0,005) = P\left\{\frac{|S_{1000}|}{\sqrt{1000}\sigma} < \frac{0,005}{\sqrt{1000}\sigma}\right\} = F(0,527) -$$

$$- F(-0,527)$$

$$P(|S_n| < 0,005) = (0,5+0,199511)-(0,5-0,199511) = 0,399$$

VI

4: 1. $\Omega=\{Т, М, А, Б, В, Г\}$,

$\{Т, М, А, Б\}$, $\{Т, М, А, В\}$, $\{Т, М, А, Г\}$, $\{Т, М, Б, Г\}$,

$\{Т, М, Б, В\}$, $\{Т, А, Б, Г\}$, $\{Т, А, В, Г\}$, $\{Т, А, Б, В\}$,

$\{Т, Б, В, Г\}$, $\{М, А, Б, В\}$, $\{М, А, Б, Г\}$, $\{Т, М, Б, Г\}$,

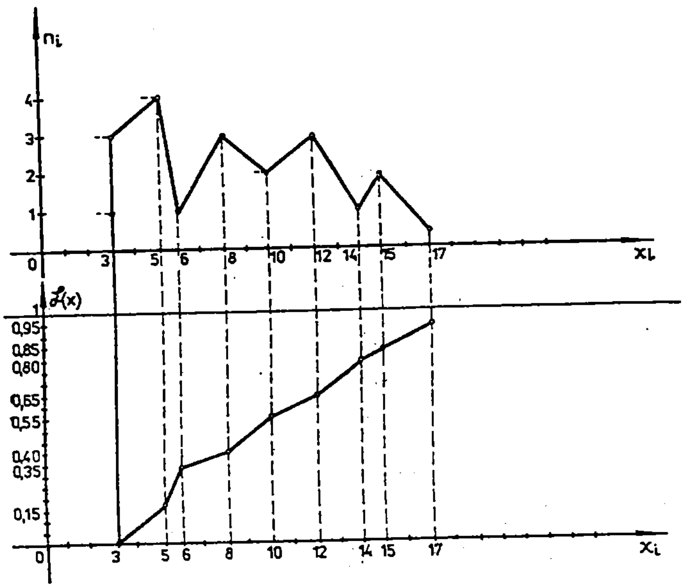
$\{М, А, В, Г\}$, $\{М, Б, В, Г\}$, $\{А, Б, В, Г\}$.

2. *Класот има n ученици*

$$C_n^{10} = \binom{n}{10}$$

3.

температура x_i	3	5	6	8	10	12	14	15	17
n_i	3	4	1	3	2	3	1	2	1
n_i/n	0,15	0,20	0,05	0,15	0,10	0,15	0,05	0,10	0,05
$n(x)$	0	3	7	8	11	13	16	17	19
$n(x)/n$	0,00	0,15	0,35	0,40	0,55	0,65	0,80	0,85	0,95



X_i'

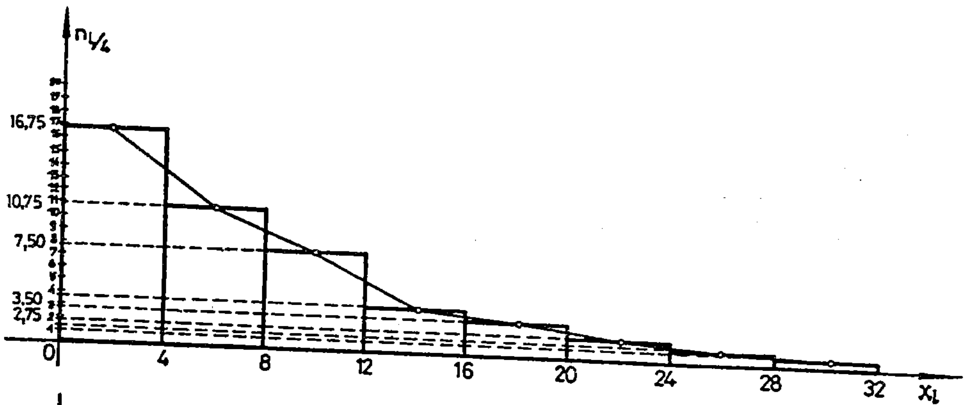
4.

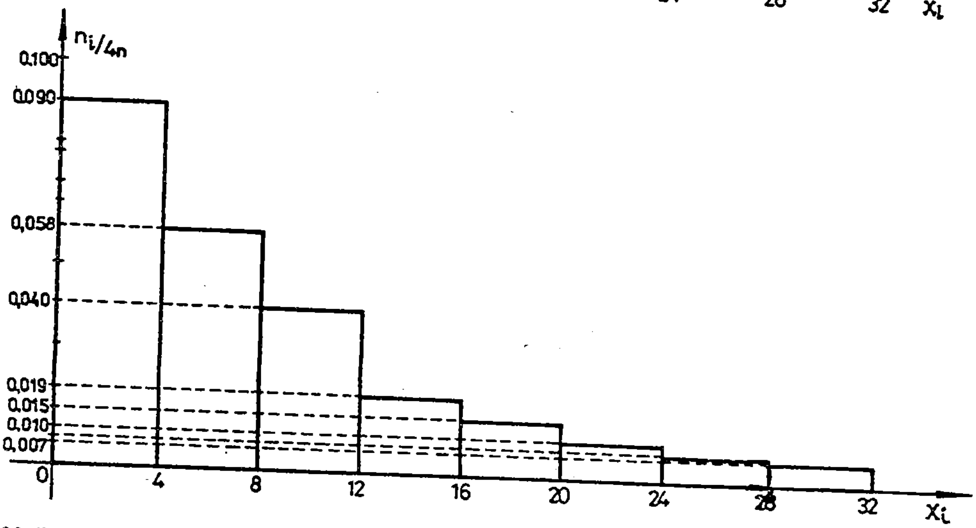
растојание меѓу две пристигнув.	средна вредност	апсолутна честота n_i	релативна честота n_i/n	релативна кумулатив. $n(x)/n$
0-4	2	67	0,360	0,000
4-8	6	43	0,231	0,360
8-12	10	30	0,161	0,591
12-16	14	18	0,097	0,752
16-20	18	11	0,059	0,849
20-24	22	7	0,038	0,908
24-28	26	5	0,028	0,946
28-32	30	4	0,026	0,974

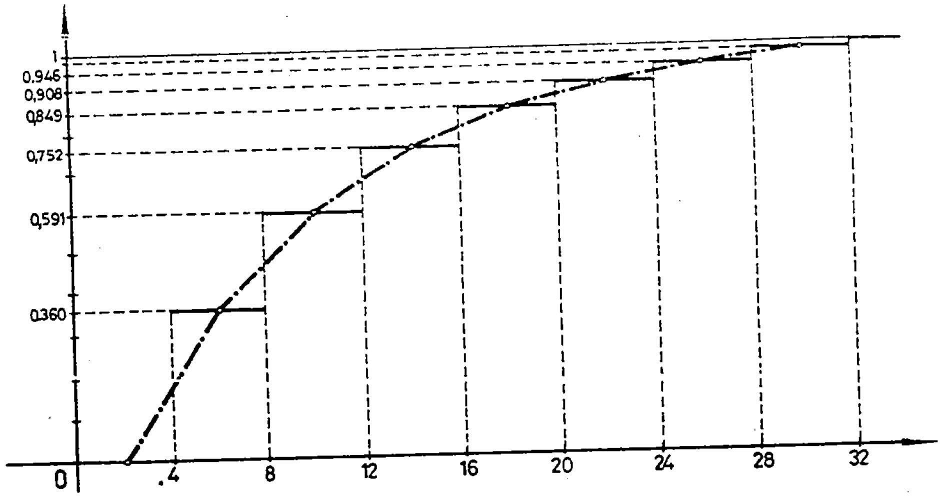
$F(x)$

Имајќи предвид дека податоците се групирани во интервали со должина 4, распределбата на примерокот графички се претставува со помош на хистограм. Вредностите во колоните 3 и 4 се делат со должината на интервалите.

$h=4$







5. $x_{min}=1$, $x_{max}=514$, $r=7$, $h=75$

ред. број	интервал	x_i	n_i	n_i/n	$n(x)/n$
1	0-75	37,5	33	0,66	0,00
2	75-150	112,5	2	0,04	0,66
3	150-225	187,5	4	0,08	0,70
4	225-300	262,5	4	0,08	0,78
5	300-375	337,5	3	0,06	0,86
6	375-450	412,5	2	0,04	0,92
7	450-525	487,5	2	0,04	0,96
Σ			50		

$x_{min}=1$, $x_{max}=514$, $r=10$, $h=52$

VI

1.

Број дефекти x_i	Зачестеност n_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
0	21	0	0
1	11	11	11
2	3	6	12
3	1	3	9
Суми:	36	20	32

$$\bar{x}_{30} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \qquad s^2_{30} = \frac{32}{36} - \left(\frac{20}{36}\right)^2$$

$$s^2_{30} = \frac{47}{81} \qquad s_{30} = \frac{\sqrt{47}}{9}$$

2. $x_{min} = 25, \quad x_{max} = 69, \; r = 7, \; h = 7$

Реден број	Интервал	Средна вредност	Зачестеност n_i	d_i	$n_i d_i$	$n_i d_i^2$
1	22–29	26	1	−3	−3	9
2	29–36	33	1	−2	−2	4
3	36–43	40	6	−1	−6	6
4	43–50	47	9	0	0	0
5	50–57	54	16	1	16	16
6	57–64	61	5	2	10	20
7	64–71	68	2	3	6	18

а) $\bar{x}_{40} = \frac{1}{40}\cdot 1980 = 49{,}5$

$s^2_{40} = \frac{1}{40}\cdot 101154 - 49{,}5^2 = 78{,}6$

$s_{40} = 8{,}8566$

$CV = 17{,}89\%;$

б) $x_o = 47, \; h = 7$

$\bar{x}_{40} = 47 + \frac{7}{40}\cdot 21 = 50{,}675$

$s^2_{40} = 7^2\left(\frac{1}{40}\cdot 73 - \left(\frac{1}{40}\cdot 21\right)^2\right)$

$s^2_{40} = 75{,}919375$

$s_{40} = 8{,}7132$

$CV = 17{,}19\%.$

3. а) I: 51 51 39 25 51, $\quad y_1 = 43{,}4;$

II: 53 52 44 51 40, $\quad y_2 = 48;$

$y_3 = 48{,}4; \; y_4 = 52{,}2; \; y_5 = 55{,}2; \; y_6 = 47{,}4;$

$y_7 = 45{,}6; \; y_8 = 55{,}8.$

б) $\bar{Y}_8 = 49,5;\quad S_8^2 = 17,47;\quad S_8 = 4,1797;\quad CV = 8,44\%.$

в) $\bar{Y}_8 \equiv \bar{x}_{40} = 49,5;\quad s_{40}^2 = 78,6;\quad S_8^2 = 17,47;$

$s_{40}^2 = 4,5\cdot S_8^2;\quad s_{40} = \sqrt{4,5}S_8\quad CV = \sqrt{4,5}V_y.$

Извршете групирање на податоците во осум петелементни групи, на друг начин пресметајте ги аритметичката средина и дисперзиите на аритметичките средини во секоја група.

Аритметичките средини по групирањето ќе бидат еднакви на 49,5, а дисперзиите околу пет пати помали од дисперзијата на целосниот примерок. Зошто?

4. а) $\bar{x}_{30} = 229,167\quad s_{30}^2 = 1,872;$

б) $G = \sqrt[29]{\dfrac{220}{217}} = 1,0004734$ напонот нема прираст;

в) $M_o = 220\quad P(X=220) = 0,33.$

5. $x_{min} = 3,1\quad x_{max} = 9,0$

Реден број	Интервал	Средна вредност	Честота n_i	d_i	$n_i d_i$	$n_i d_i^2$
1	3-4	3,5	1	-5	-5	25
2	4-5	4,5	3	-3	-9	27
3	5-6	5,5	14	-1	-14	14
4	6-7	6,5	5	1	5	5
5	7-8	7,5	4	3	12	36
6	8-9	8,5	3	5	15	65
Σ			30		14	157

$\bar{x}_{30} = 6,23\quad s_{30}^2 = 1,254\quad s_{30} = 1,12$

б) $x_i^* = (x_i - 6,23)/1,12;$

в) $\bar{X}_{30}^* = 0$, пресметувањето на коефициентот на варијација не е можно.

6. I фабрика: $\overline{X}_{75} = 442$ $S^2_{75} = 19936$ $CV = 31,95\%$

II фабрика: $\overline{X}_{75} = 463,33$ $S^2_{75} = 43288,22$ $CV = 44,90\%$.

Квалитетот на сијалиците од првата фабрика е во просек 5% послаб. Производството на првата фабрика е 40% похомогено, па според тоа и подобро.

7. $\overline{x}_{30} = 0,556$ $M_o = 0$ $M_e = 1,5$

8.

Реден број	Интервал	Честота	Кумулативна честота
1	22-29	1	0
2	29-36	1	1
3	36-43	6	2
4	43-50	9	8
5	50-57	16	17
6	57-64	5	33*
7	64-71	2	38

$P(X \le 57) = \frac{33}{40} > 0,5$ $P(X < 57) = \frac{17}{40} < 0,5$

Медијален е интервалот (50, 57)

$M_e = 50 + 7 \cdot \frac{20-17}{16} = 51,3125$

$P(50 \le X \le 57) = \frac{16}{40} = 0,4.$

Модален е интервалот (50, 57)

$M_o = 52,72.$

9. $\overline{x}_{30} = 6,23$ $M_o = 5,55$ $M_e = 5,7857$ $\overline{x}_{30} > M_e > M_o$.

10. $\overline{X}_{10} = 28,9$ минути. $H=22,98$ минути. Единица производ во погонот се изработува просечно 22,98 m.

11.

брзина x_i	километража n_i	n_i/x_i
25 30 40	50 90 200	2 3 5
Σ	340	10

$H = \frac{340}{10} = 34 \qquad \bar{x}_{340} = 35,147.$

Просечната брзина е 34 km/h, за 1 km пат потребни се 1,7647 минути.

VII

1. $n=100, \ \bar{x}_{100}=98, \ \sigma=\sqrt{144}=12$

   $\bar{u}-1,6667 \qquad u_{0,90}=1,64 \qquad u_{0,95}=1,96$

   а) $\bar{u}>u_{0,90}$ хипотезата $a=100$ се отфрла

   б) $\bar{u}<u_{0,95}$ хипотезата $a=100$ се прифаќа.

2. $X: \varepsilon(\lambda) \qquad EX = \frac{1}{\lambda} \qquad DX = 1/\lambda^2$

   $\bar{x}_{185} = 8,36 \qquad \sigma = 8 \qquad \bar{u} = 0,612$

   а) $0,612 < u_{0,95}$, б) $0,612 < u_{0,99}$

3. $\bar{x}_{185} = 8,36 \qquad S_{185} = 50,58 \qquad \bar{t}_{184} = 0,1716$

   а) $t_{184;0,05} = 1,960 > \bar{t}_{184}$,

   б) $t_{184;0,10} = 1,645 > \bar{t}_{184}$.

4. $\bar{x}_{10} = 8 \qquad \sigma_X = 1, \qquad \bar{Y}_8 = 7 \qquad \sigma_Y = 1,5$

   $S_o^2 = \frac{1}{10} + \frac{2,25}{8} = 0,38125 \qquad S_o = 0,6175$

   $\bar{u} = 1,619 \qquad u_{0,95} = 1,64 \qquad \bar{u} < u_{0,95}$

5. $\overline{x}_9 = 66 \qquad s_x^2 = 195,7777$

$\overline{Y}_6 = 63 \qquad s_Y^2 = 159,3333$

$S^2 = 209 \qquad S = 14,46$

$\overline{t} = 0,394 \qquad t_{13;0,05} = 2,16.$

4: 1. а) Бројот на појавувања на секоја вредност има $N(np,npq)$ распределба. Се бара интервалот во кој припаѓа средниот број на појавувања на секоја вредност, со веројатност на грешка $\alpha=0,05$.

$$P\left\{\frac{|S_n-np|}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\right\} = 1-\alpha = 0,95 \qquad \varepsilon=1,96,\ n=1000,\ p=\frac{1}{6}$$

$B:\ 143 \le S_n \le 189.$

Страните се 4, 5 и 6 точки што паднале надвор од критичниот домен B, па според тоа коцката не е хомогена.

б) $$P\left\{\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}} < \varepsilon\right\} = 0,05 \qquad \varepsilon = -1,64.$$

$P(S_n < 147,36) = 0,05$ хипотезата дека страната со број 6 паѓа поретко отколку што е вообичаено се прифаќа. Дали се прифаќа и при ниво на значајност $\alpha=0,01$?

2. $\overline{x}_{50} = 26,2 \qquad \overline{u} = 0,942$. Просечната тежина не надминува 26 t.

3. $n=50,\ s_X^2 = 2,\ \sigma_o^2 = 2,25$ прагот на критичност е 44,44

$\chi^2_{50;0,05} = 67,50 \qquad \chi^2_{40;0,05} = 55,76$

$$\chi^2_{49;0,05} = \frac{1}{10}(9\chi^2_{40;0,05} + \chi^2_{50;0,05}) = 56,934 > 44,44$$

Примерокот има стандардна дисперзија.

4. $\overline{x}_8 = 61,\quad s_x^2 = 5090,75 \quad \overline{y}_6 = 70,\ s_y^2 = 1582$

а) $\overline{t}_{12} = 0,1492 \quad \overline{t}_{12;0,10} = 1,782 \quad t_{12;0,10} = 3,055$

во просек, датотеките на двата диска се со еднаква големина.

б) $F_{7;5;0,10}=3,37 \quad F_{7;5;0,05}=3,97 \quad F_{7;5;0,01} = 10,5$

Со сите нивоа на значајност се прифаќа дека дисперзијата на двата диска е еднаква.

5. а) H_o: $P(X=k) = \binom{4}{k}\cdot 0,25^k\cdot 0,75^{4-k}, \quad k=0,\dots,4$

$p_o=0,316 \quad p_1=0,422 \quad p_2=0,211 \quad p_3=0,047 \quad p_4=0,004$

$\bar{\chi}^2_4 = 9,325 \quad \chi^2_{4;0,05} = 9,448 \quad H_o$ се прифаќа.

б) H_o: $P(X=k) = \binom{4}{k}\cdot p^k(1-p)^{4-k}, \quad k=0,\dots,4$

p е непознат параметар. $\overline{X}_{100} = 1$

Ако X има $\mathcal{B}(n,p)$ распределба $EX=np$

$np = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{4} = 0,25$

$\bar{\chi}^2_3 = 9,325 \quad \chi^2_{3;0,05} = 7,815 \quad H_o$ се отфрла.

6. Низата се подредува во растечки редослед

$F(x) = P(X<x) = P(\overset{*}{X}<(x-32)/1,8)$

$F(31)=0,288 \quad F_{10}(31)=0 \quad d=0,288 \quad F(33,7)=0,826 \quad d=0,326;$

$F(31,4)=0,371 \quad F_{10}(31,4)=0,1 \quad d=0,271 \quad F(34,4)=0,908 \quad d=0,308;$

$F(33,3)=0,764 \quad F_{10}(33,3)=0,2 \quad d=0,564* \quad F(34,9)=0,946 \quad d=0,246;$

$F(33,4)=0,782 \quad F_{10}(33,4)=0,3 \quad d=0,482 \quad F(36,2)=0,990 \quad d=0,190;$

$F(33,5)=0,797 \quad F_{10}(33,5)=0,4 \quad d=0,497 \quad F(37,0)=0,997 \quad d=0,097;$

$\bar{d}_n = 0,564 \quad d_{10;0,05} = 0,487$

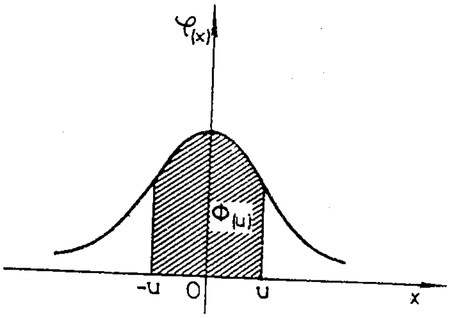
Хипотезата се отфрла.

ТАБЛИЦИ

УПАТСТВО ЗА КОРИСТЕЊЕ НА ТАБЛИЦИТЕ

1. ТАБЛИЦА I НА ФУНКЦИЈАТА $\phi(x)$

Во оваа таблица дадени се вредности на функцијата $\phi(x)$ со која е определена веројатноста случајна променлива , која има распределба $N(0,1)$, да прима вредност од интервалот $(-x,x)$. На сл. 1 е графички прикажана $\phi(x)$, како плоштина на осенчената фигура за избраното x.



Сл. 1

$$P\{-x\leq X\leq 0\}=P\{0\leq X\leq x\}=0,5\phi(x)$$

$$P\{X\leq 0\} = P\{X\geq 0\} = 0,5.$$

Вредностите на ф.р. на сл.п. со $N(0,1)$ распределба се определуваат на следниов начин:

$$F(x) = 0,5 - 0,5\phi(-x), \text{ за } x<0$$

$$F(x) = 0,5 + 0,5\phi(x), \text{ за } x>0.$$

На пример:

1° За $x=1,64$, читаме во редицата за $x=1,6$ и во колоната 4, дека $\phi(1,64) = 0,89899 \approx 0,9$.

2° За $x=2,28$ читаме во редицата на $x=2,2$ и колоната 8, дека $\phi(2,28) = 0,97739$.

$$F(2,28) = 0,5+0,5\phi(2,28) = 0,5(1+0,97739)$$

$$F(2,28) = 0,98869 \approx 0,99;$$

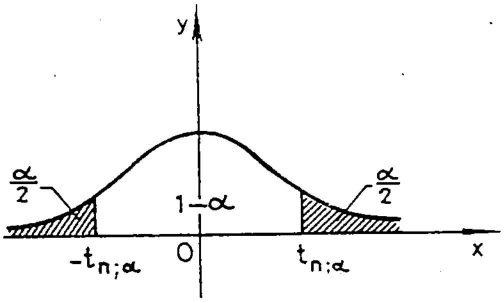
$$F(-1,64) = 0,5-0,5\phi(1,64) = 0,5(1-0,90)$$

$$F(-1,64) = 0,05$$

$$P\{X\in[-1,64;2,28]\} = F(2,28) - F(-1,64) = 0,94.$$

2. ТАБЛИЦА II ЗА t-РАСПРЕДЕЛБАТА

Во оваа таблица дадени се вредности во врска со т.н. t-распределба, која зависи од еден параметар n. Во првата колона, означена со n, наведени се по ред вредностите 1 до 30, а потоа 40, 60, 120 и симболот ∞, за овој параметар. Во првата редица наведени се вредности на веројатноста α од 0,80 до 0,01.



Сл. 2

За дадено n и α, од наведените во таблицата, може да се прочита вредност $t_{n;\alpha}$ таква што, за веројатноста на сл.п. t_n со t-распределба да важи:

$$P\{|t_n| \geq t_{n;\alpha}\} = \alpha.$$

$$P\{t_n \leq -t_{n;\alpha}\} = P\{t \geq t_{n;\alpha}\} = \frac{\alpha}{2}.$$

На пример, за n=17, α=0,05

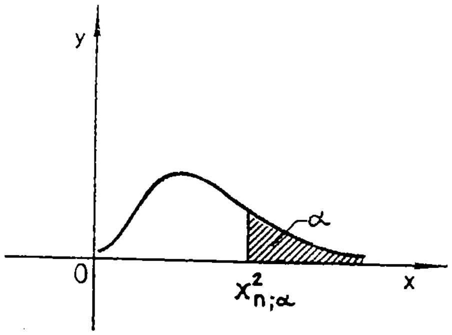
$$t_{17;0,05} = 2,110.$$

3. ТАБЛИЦА III НА χ^2-РАСПРЕДЕЛБАТА

Во оваа таблица дадени се вредности во врска со т.н. *хи* квадрат распределба која зависи од еден параметар, тука означен со n. Во првата колона на таблицата наведени се вредностите на n, а во првата редица вредностите на α. За дадена вредност на n и α, во пресекот на редицата за одреденото n и колоната која одговара на избраното α чија е вредност, која се означува со $\chi^2_{n;\alpha}$ и за која важи:

$$P\{\chi^2_n \geq \chi^2_{n;\alpha}\} = \alpha.$$

На сл. 3 е даден графички приказ на веројатноста α и вредноста $\chi^2_{n;\alpha}$.



Сл. 3

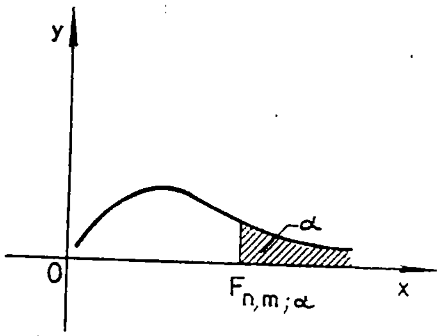
На пример, за n=22, α=0,02

$$\chi^2_{22;0,02} = 37,659$$

$$P\{\chi^2_{22} \geq 37,659\} = 0,02.$$

4. ТАБЛИЦИ IV И V ЗА F-РАСПРЕДЕЛБАТА

Во овие две таблици дадени се вредности во врска со т.н. F-распределба која зависи од два параметри n_1 и n_2.



Сл. 4

Таблицата IV е изработена за α=0,05, а таблицата V за α=0,01.

За избрана вредност на α и дадени вредности на n_1 и n_2 во соодветната таблица може да се прочита број $F_{n_1,n_2;\alpha}$ таков што плоштината на фигурата, заградена со графикот на густината на распределба, x-оската и ординатата $x = F_{n_1,n_2;\alpha}$, е еднаква на α (сл. 4).

На пример, за $n_1 = 5$, $n_2 = 10$ и $\alpha = 0,05$, во таблицата IV имаме:

$$F_{5,10;0,05} = 3,33,$$

а за $\alpha = 0,01$ во таблицата V, наоѓаме вредност:

$$F_{5,10;0,01} = 5,64.$$

ТАБЛИЦА I НА ФУНКЦИЈАТА Φ (x)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	00000	00798	01596	02393	03191	03988	04784	05581	06376	07171
0,1	07966	08759	09552	10343	11134	11924	12712	13499	14285	15069
0,2	15852	16633	17413	18191	18967	19741	20514	21284	22052	22818
0,3	23582	24344	25103	25860	26614	27366	28115	28862	29605	30346
0,4	31084	31819	32551	33280	34006	34729	35448	36164	36877	37587
0,5	38292	38995	39694	40389	41080	41768	42452	43132	43809	44481
0,6	45149	45814	46474	47131	47783	48431	49075	49714	50350	50981
0,7	51607	52230	52848	53461	54070	54675	55275	55870	56461	57047
0,8	57629	58206	58778	59346	59909	60468	61021	61570	62114	62653
0,9	63188	63718	64243	64763	65278	65789	66294	66795	67291	67783
1,0	68269	68750	69227	69699	70166	70628	71086	71538	71986	72429
1,1	72867	73300	73729	74152	74571	74986	75395	75800	76200	76595
1,2	76986	77372	77754	78130	78502	78870	79233	79592	79945	80295
1,3	80640	80980	81316	81648	81975	82298	82617	82931	83241	83547
1,4	83849	84146	84439	84728	85013	85294	85571	85844	86113	86378
1,5	86639	86896	87149	87398	87644	87886	88124	88358	88589	88817
1,6	89040	89260	89477	89690	89899	90106	90309	90508	90704	90897
1,7	91087	91273	91457	91637	91814	91988	92159	92327	92492	92655
1,8	92814	92970	93124	93275	93423	93569	93711	93852	93989	94124
1,9	94257	94387	94514	94639	94762	94882	95000	95116	95230	95341
2,0	95450	95557	95662	95764	95865	95964	96060	96155	96247	96338
2,1	96427	96514	96599	96683	96765	96844	96923	96999	97074	97148
2,2	97219	97289	97358	97425	97491	97555	97618	97679	97739	97798
2,3	97855	97911	97966	98019	98072	98123	98172	98221	98269	98315
2,4	98360	98405	98448	98490	98531	98571	98611	98649	98686	98723
2,5	98758	98793	98826	98859	98891	98923	98953	98983	99012	99040
2,6	99068	99095	99121	99146	99171	99195	99219	99241	99264	99285
2,7	99307	99327	99347	99367	99386	99404	99422	99439	99456	99473
2,8	99489	99505	99520	99535	99549	99563	99576	99590	99602	99615
2,9	99627	99639	99650	99661	99672	99682	99592	99702	99712	99721
3,0	99730	99739	99747	99755	99763	99771	99779	99786	99793	99800
3,1	99806	99813	99819	99825	99831	99837	99842	99848	99853	99858
3,2	99863	99867	99872	99876	99880	99885	99889	99892	99896	99900
3,3	99903	99907	99910	99913	99916	99919	99922	99925	99928	99930
3,4	99933	99935	99937	99940	99942	99944	99946	99948	99950	99952
3,5	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99963	99964	99966	99967
3,6	99968	99969	99971	99972	99973	99974	99975	99976	99977	99978
3,7	99978	99979	99980	99981	99982	99982	99983	99984	99984	99985
3,8	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989	99989	99990	99990
3,9	99990	99991	99991	99992	99992	99992	99992	99993	99993	99993
4,	99994	99996	99997	99998	99999	99999	—	—	—	—

ТАБЛИЦА II за t–РАСПРЕДЕЛБАТА

				α				
n	0.80	0.60	0.40	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.823	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.403	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.531	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.133	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

ТАБЛИЦА III ЗА x^2–РАСПРЕДЕЛБАТА

n \ α	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	$0{,}0^{3}16$	$0{,}0^{3}63$	$0{,}0^{2}39$	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	3,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,268
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,465
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,517
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	0,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	7,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,123
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	28,968	41,638	49,728
24	10,856	11,992	13,848	14,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,719	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

ТАБЛИЦА IV ЗА F–РАСПРЕДЕЛБАТА ($\alpha = 0{,}05$)

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	246,5	249,0	251,8	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,43	19,45	19,47	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,69	8,64	8,58	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,84	5,77	5,70	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,60	4,53	4,44	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,63	4,39	4,28	4,15	4,00	3,92	3,84	3,75	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,49	3,41	3,32	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,20	3,12	3,03	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,98	2,90	2,80	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,82	2,74	2,64	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,70	2,61	2,50	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,60	2,50	2,40	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,51	2,42	2,32	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	3,85	2,70	2,53	2,44	2,35	2,24	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,39	2,29	2,18	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,33	2,24	2,13	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,29	2,19	2,08	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,25	2,15	2,04	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,21	2,11	2,00	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,18	2 08	1,96	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,15	2,05	1,93	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,13	2,03	1,91	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,11	2,00	1,88	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	2,09	1,98	1,86	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	2,07	1,96	1,84	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	2,05	1,95	1,82	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,16	2,30	2,13	2,03	1,93	1,80	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	2,02	1,91	1,78	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	7,10	2,00	1,90	1,77	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,99	1,89	1,76	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,94	1,83	1,70	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,90	1,79	1,66	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,87	1,76	1,63	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,85	1,74	1,60	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,81	1,70	1,56	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,79	1,67	1,53	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,77	1,65	1,51	1,32
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,76	1,64	1,49	1,30
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,75	1,63	1,48	1,28
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,72	1,60	1,45	1,25
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,71	1,59	1,44	1,22
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,69	1,57	1,42	1,19
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,68	1,55	1,39	1,15
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,67	1,54	1,38	1,13
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,66	1,54	1,38	1,11
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,65	1,53	1,36	1,08
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,64	1,52	1,35	1,00

ТАБЛИЦА IV ЗА F–РАСПРЕДЕЛБАТА ($\alpha = 0{,}05$)

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	∞
1	161,4	199,5	215,7	224.6	230,2	234,0	238,9	243,9	246,5	249,0	251,8	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,43	19,45	19,47	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9.12	9,01	8.94	8,84	8,74	8,69	8,64	8,58	8,53
4	7,71	6.94	6.59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,84	5,77	5,70	5,63
5	6,61	5,79	5.41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4.60	4,53	4,44	4,36
6	5,99	5.14	4,76	4,63	4,39	4,28	4.15	4,00	3,92	3,84	3,75	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3.57	3,49	3,41	3,32	3,23
8	5,32	4.46	4.07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,20	3,12	3,03	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,98	2,90	2,80	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3.22	3.07	2,91	2,82	2,74	2,64	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,70	2,61	2,50	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2.69	2,60	2,50	2,40	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2.60	2,51	2.42	2,32	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	3,85	2.70	2,53	2,44	2,35	2,24	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2.48	2,39	2,29	2,18	2,07
16	4,49	3,63	3.24	3,01	2,85	2,74	2.59	2,42	2,33	2,24	2,13	2,01
17	4,45	3,59	3.20	2,96	2,81	2,70	2,55	2.38	2,29	2,19	2,08	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,25	2,15	2,04	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,21	2,11	2,00	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,18	2 08	1,96	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,15	2,05	1,93	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,13	2,03	1,91	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,11	2,00	1,88	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	2,09	1,98	1,86	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	2,07	1,96	1,84	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	2,05	1,95	1,82	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,16	2,30	2,13	2,03	1,93	1,80	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	2,02	1,91	1,78	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	7,10	2,00	1,90	1,77	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,99	1,89	1,76	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,94	1,83	1,70	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,90	1,79	1,66	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,87	1,76	1,63	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,85	1,74	1,60	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2.25	2,10	1,92	1,81	1,70	1,56	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,79	1,67	1,53	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,77	1,65	1,51	1,32
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,76	1,64	1,49	1,30
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,75	1,63	1,48	1,28
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,72	1,60	1,45	1,25
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2.16	2,00	1,82	1,71	1,59	1,44	1,22
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,69	1,57	1,42	1;19
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,68	1,55	1,39	1,15
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,67	1,54	1,38	1,13
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,66	1,54	1,38	1,11
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,65	1,53	1,36	1,08
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,64	1,52	1,35	1,00

ЛИТЕРАТУРА

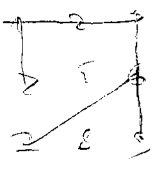
1. А.А.Боровков: Теория вероятностей, Москва, 1976
2. С.Стојановиќ: Математичка статистика, Београд, 1980
3. Б.Трпеновски: Елементарен увод во теоријата на веројатност, Скопје, 1982
4. В.Н.Тутубалин: Теория вероятностей, Москва, 1972
5. Г.В.Емельянов, В.П.Скитович: Задачник по теории вероятностеи и математической статистике, Ленинград, 1967
6. Z.Ivković: Uvod u teoriju verovatnoće, slučajne procese i matematičku statistiku, Beograd, 1980
7. S.Elazar: Matematička statistika, Sarajevo, 1968
8. M.Melnik: Principles of Applied Statistics, New York, 1974
9. Ž.Pauše: Verojatnost, Zagreb, 1985
10. I.Pavlić: Statistička teorija i primjena, Zagreb, 1971
11. H.Tucker: Introduction to Mathematical statistik, New York, 1962
12. J.Ukšanović: Kurs teorije verovatnoće, Beograd, 1980

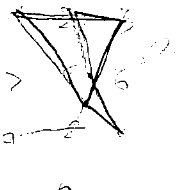
СОДРЖИНА

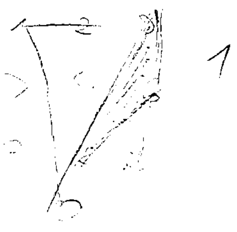
01.05.1993
20.08.1974
[illegible]

09.04.1993
20.08.1974
[illegible]

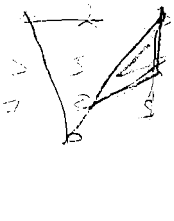
09.04.1993
12.06.1975
[illegible]







10.04.1993
12.06.1975
[illegible]



ОП за издавање на учебници и наставни средства „Просветно дело“ – Скопје, ул. Вељко Влаховиќ бр. 15 Градски ѕид блок 4.

За издавачот:
д-р Крсте Ангеловски

*

Магдалена Георгиева * Радојко Секулоски
Катерина Чундева
ПРАКТИЧНА МАТЕМАТИКА за IV година
природно-математичка струка

*

Лектура
Саветка Димитрова

*

Илустрации
дипл. инж. Љупчо Стефанов
дипл. инж. Зоран Тониќ

*

Технички уредник
Новко Груевски

*

Корицата ја илустрирал
Ладислав Цветковски

*

Коректор
Методија Трајкоски

*

Ракописот е предаден во печат 23.07.1992 година. Печатењето е завршено на 15.08.1992 година. Обем: 326 стр. Формат: 17 х 24 см. Тираж: 1100 примероци. Книгата е отпечатена во А.Д. ГИТ „Гоце Делчев“ Скопје (3859/92)

CIP – Каталогизација во публикација Народна и универзитетска библиотека „Климент Охридски“, Скопје

511.13/.16(075.3)(076)

ГЕОРГИЕВА, Магдалена
Практична математика : за IV година природно математичка струка / Магдалена Георгиева, Радојко Секулоски, Катерина Чундева ; [илустрации Љупчо Стефанов, Зоран Тониќ]. – Скопје : Просветно дело, 1992. – 325 стр. : илустр. ; 24 см

1. СЕКУЛОСКИ, Радојко 2. ЧУНДЕВА, Катерина