ИЛИЈА ЈАНЕВ * НИКОЛА ПЕТРЕСКИ
ИВАН ТРАЈКОВ * ГЛИГОР ТРЕНЧЕВСКИ

МАТЕМАТИКА

ЗА II ГОДИНА
НА ПРИРОДНО–МАТЕМАТИЧКА СТРУКА

II ПОПРАВЕНО ИЗДАНИЕ

ПРОСВЕТНО ДЕЛО
СКОПЈЕ 1996

Уредник:

Кирил МИЛЧЕВ

Рецензенти:

д–р **Дончо Димовски,** доцент на природно–математички факултет во Скопје
Асен Радојков, професор на Педагошката Академија во Скопје
Билјана Витанова, професор во училишниот центар „Јане Сандански" во Струмица

Со решение на Републичкиот педагошки совет бр. 13–17/1 од 27.II.1990 год. се одобрува употребата на овој учебник.

ВОВЕД

Во досегашното твое образование си се запознал со доста поими како од алгебрата, така и од геометријата. Работејќи со овој учебник ти ќе продолжиш да навлегуваш во тајните и убавините на математиката. Тука, веќе познатите поими ќе ги прошириш и ќе се запознаеш со нивни нови примени. Исто така ќе научиш нови поими и факти: квадратни функции, квадратни равенки, равенки од повисок степен, ќе научиш некои докази во геометријата кои досега си ги прифаќал како точни, ќе се сретнеш со примена на математиката во другите науки, и што е многу важно во практиката.

Учебникот е работен така што со неговата употреба ќе можеш, главно, самостојно да доаѓаш до знаења што се предвидени да ги стекнеш.

Секоја поставена задача обиди се сам да ја решиш, што нема секојпат да ти успее. Обиди се повторно и не се обесхрабрувај. Во краен случај види го решението или ако не е комплетно решена задачата, побарај помош од својот другар или од наставникот. Таквите задачи, главно се означени со ѕвездичка (*). Но, не заборави, дека најголем успех ќе постигнеш, ако солидно го проучиш материјалот изложен во учебников, и ги проучиш решените примери кои ги има во доволна мерка.

Наставната материја што е предвидена со Програмата за таа струка е разделена на седум целини означени со римските броеви од I до VII. Секоја од нив е разделена на одреден број лекции, коишто од своја страна, исто така, се заокружени целини. Некои од тие лекции започнуваат со поопширно изложување на материјалот како при: призмата, пирамидата, цилиндарот, конусот и топката. Тоа е направено со цел да те потсетиме на нивните дефиниции што веќе ги учеше во VIII одд.

Лекциите се разделени на помали делови – единки со буквите а. б. в. г. д.. Пожелно е секој дел да го проучиш, па тогаш да поминуваш на наредниот дел.

На крајот на секој дел има вежби во кои се дадени задачи од целата лекција како и задачи кои ќе те упатат во наредната лекција, тие се означени со знакот $\boxed{}$ (на пример $\boxed{13}$).

Авторите

I. СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

I.1. Поим за равенка и неравенка

Често во математиката користиме букви, на пример x, y, a, b, m итн, како **заеднички ознаки** за некои точно определени математички објекти (броеви, прави, точки, геометриски фигури, множества итн). Така употребените букви велиме „држат место" за кој било од разгледуваните објекти и се викаат **променливи.**

Пример 1. *Фактот дека: „Производот на бројот 2 и кој било елемент од множеството* $\mathbf{D} = \{1, 2, 3\}$ *е едноцифрен број" можеме да го запишеме со симболи вака:* $2 \cdot x < 10$, *при што буквата* x *е ознака за кој било од елементите на* **D**, т. е. x е *променлива.* Елементите од **D**, т. е. броевите 1, 2, 3 се викаат **допуштени вредности,** или само **вредности на променлива** x.

Да се потсетиме дека: **исказна функција** или **предикат** е реченица со променлива, која станува исказ за секоја вредност на променливата од некое дадено множество **D.**

Пример 2. *Нека* x *е заедничка ознака за елементите од множеството* $\mathbf{D} = \{9, 12, 15, 18, 20\}$. *Реченицата „бројот 6 е делител на бројот* x *или со симболи* $6|x$, *е исказна функција (со една променлива), бидејќи ако променливата* x *ја замениме со која било од нејзините вредности 9, 12, 15, 18, 20 ќе добиеме исказ.* На пример: „Бројот 6 е делител 9" е невистинит исказ, а „бројот 6 е делител на 12" е вистинит исказ.

Притоа, множеството **D** се вика уште и **дефинициона област** или **домен** на предикатот, а неговите елементи – **допуштени вредности** на променливата.

1. Одреди кои од следниве реченици се предикати во множеството на природните броеви:

а) $2x > x$ за $x = 3$
б) $3x - 2y = z$
в) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$
г) „x е прост број"

Секоја вредност на променливата (променливите) за која предикатот станува вистинит исказ се вика **решение на предикатот.** Множеството пак, $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{D}$ од сите такви вредности се вика **множество решенија** на тој предикат.

Пример 3. *Множеството решенија на предикатот*

$x < 4, x \in \mathbf{N}$ е $\mathbf{M} = \{1, 2, 3\}$

Пример. 4. *Множеството решенија на предикатот*

$x + y = 4, \quad x,y \in \mathbf{N}$ е $\mathbf{M} = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$

2. Одреди го множеството решенија на предикатот:

а) $x < 7, \quad x \in \mathbf{N}$; б) $x \cdot y = 6, \quad x, y \in \mathbf{Z}$

3. Одреди го множеството решенија на предикатот:

а) $x + y = 5, \quad x, y \in \mathbf{N}$; $x + 3y = 9, \quad x, y \in \mathbf{N}$

б Да напомнеме дека равенките, неравенките и системите равенки се најважните примери на предикати со кои ќе се среќаваме понатаму.

Да забележиме дека: предикатот од бројна променлива (променливи) која што ја содржи релацијата „=" се вика **равенка**, а ако ја содржи релацијата „<" (или „>", „≤", „≥"), се вика **неравенка.**

Според бројот на променливите во предикатот, равенките (неравенките) можат да бидат со една, две или повеќе променливи (непознати).

На пример, исказната функција (предикатот)

$f(x) = \varphi(x), \; x \in \mathbf{D}$,

каде што $f(x)$ и $\varphi(x)$ се дадени алгебарски изрази со променлива x, е **равенка со една променлива.** Притоа, за оваа равенка велиме дека е:

а) **возможна** (т.е. има решение), ако $\mathbf{M} \neq \varnothing$ и $\mathbf{M} \neq \mathbf{D}$,

б) **невозможна** (т.е. нема решение), ако $\mathbf{M} = \varnothing$

в) **идентитет** ако $\mathbf{M} = \mathbf{D}$

Пример 5. а) *Равенката* $2 \cdot x = 1, \; x \in \mathbf{N}$ *е невозможна, бидејќи* $\mathbf{M} = \varnothing$ *(зошто?). б) Равенката* $x\,(x - 4) = 3x - 10$, $\mathbf{D} = \{1, 2, 3, 4\}$ *е возможна и притоа* $\mathbf{M} = \{2\}$. *Да забележиме дека за* $x = 5$ *оваа равенка станува вистинит исказ, но бројот* $5 \notin \mathbf{D}$.

4. Утврди, каква е секоја од равенките:

а) $5x + 7 = 21, \; x \in \mathbf{Z}$, б) $x^2 - 4 = 0, \; x \in \mathbf{N}$, b) $x^2 + 1 = 0, \; x \in \mathbf{R}$.

Две равенки се **еквивалентни** во дадена област $\mathbf{D}$, ако и само ако тие имаат еднакви множества решенија.

Пример 6. *Равенката* $\dfrac{2 \cdot x - 1}{2} = 3x + 1$ *е еквивалентна со равенката* $2 \cdot x - 1 = 6x + 2$, *односно со равенката* $2 \cdot x - 6x = 2 + 1$.

5. Провери дали се еквивалентни равенките:

а) $\dfrac{2 - x}{3} = x - 1$ и $-4x = -5$ б) $x - y = 1$ и $2x - 2y = 2$

в Аналогно, за предикатот $f(x) > \varphi(x), \; x \in \mathbf{D}$ велиме дека е **неравенка со една променлива.** Равенките и неравенките не се искази, бидејќи за нив не може да се каже дали се вистинити или невистинити. Но тие преминуваат во искази ако променливата се замени со кој било број од $\mathbf{D}$.

Пример 7. *Неравенката* $2 \cdot x - 4 > x + 1$ *не е исказ бидејќи за* $x = 6$ *таа преминува во вистинит исказ, а за* $x = 2$ *во невистинит исказ (Провери)!*

6. Кои од наведените искази се вистинити?

а) $2x - 3 > x - 1$ за $x = 4$

б) $x + 2y < 2 + x$ за $x = -3, y = 1$

в) $x^2 - 9 \geqslant 0$ за $x = 3$

Вредноста на непознатата за која неравенката преминува во вистинит исказ се вика **решение на неравенката.**

Да се реши една неравенка, значи да се определи множество решенија **M** на таа неравенка.

За една неравенка велиме дека е:

а) **возможна** (т.е. има решение), ако $\mathbf{M} \neq \varnothing$ и $\mathbf{M} \neq \mathbf{D}$

б) **невозможна** (т.е. нема решение), ако $\mathbf{M} = \varnothing$

в) идентично неравенство, ако $\mathbf{M} = \mathbf{D}$

Пример 8. а) *Неравенката* $3x < 1$, $x \in \mathbf{N}$ *е невозможна, бидејќи* $\mathbf{M} = \varnothing$ *(зошто?)* б) *Неравенката* $x + 1 < 5$, $x \in \mathbf{N}$ *е возможна, и притоа* $\mathbf{M} = \{1, 2, 3\}$. Да забележиме дека и за $x = 0$ неравенката станува вистинит исказ, но бројот $x = 0$ не е решение, бидејќи $0 \notin \mathbf{N}$.

7. Утврди каква е секоја од неравенките:

а) $2x + 1 < 3, x \in \mathbf{N}$, б) $3x - 1 > 5, x \in \mathbf{N}$ в) $x + 1 < 4, x \in \mathbf{Z}$

Вежби

8. Утврди, кои од следниве реченици се исказни функции:

а) X е жител на Скопје и X има повеќе од 100 години.

б) Y е македонска река и $Y \in \mathbf{D} = \{$Треска, Лепенец, Пчиња, Црна$\}$.

в) Z е месец во годината и Z има 28 дена.

9. Дадена е исказната функција "$x|18$" со домен $\mathbf{D} = \{0, 3, 4, 5, 6, 9\}$. Одреди го нејзиното множество решенија.

10. Кои од следните исказни функции се равенки, а кои се неравенки:

а) $x \in \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$ и $9|x$

b) $x, y \in \mathbf{Z}$ и x е непосреден следбеник на y

в) $x \in \mathbf{R} \wedge 2x - 1 > x$

г) $x \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ и x е прост број

11. Дадена е равенката $x + y = 5$ и $x, y \in \mathbf{N}$. Одреди го нејзиното множество решенија.

12. Утврди, каква е (возможна, невозможна или идентитет) секоја од равенките.

а) $|x| = x \wedge x \in \mathbf{N}$, б) $|x| = -x \wedge x \in \mathbf{Z}$, в) $|x| = 5 \wedge x \in \mathbf{Z}$ и одреди ги нивните множества на решенијата.

13. Одреди ја дефиниционата област на равенките:

а) $\frac{x - 3y}{y} - 3y = \frac{2}{x - 1}$ б) $\frac{3}{x+1} - 2 = \frac{1 - 2x}{3 - \frac{1}{x}}$

14. Дадена е равенката $2x - 3y = 4$. Одреди го она нејзино решение, за кое е : а) $x = 1$, б) $y = -2$.

15. Провери дали се еквивалентни равенките:
а) $2x-y=3$ и $4x-2y=6$ б) $x-2y+3=5$ и $x-2y=2$

$\frac{x-y}{2} = x - 1$ и $x+y-2=0$ г) $y = -2x^2 + 3$ и $2x^2-3=y$

I.2. Линеарни равенки со две променливи

Во основно училиште веќе научи дека секоја равенка со две променливи x и y која може да се трансформира во видот

$$ax + by = c \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

каде што $a, b, c \in \mathbf{R}$ и при тоа $a \neq 0$ или $b \neq 0$, се вика **линеарна равенка со две променливи.** Броевите a и b се викаат **коефициенти** пред променливите, а c е **слободен член.**

За равенката (1) велиме дека е **општ вид** на линеарна равенка со две променливи.

1. Запиши ја во општ вид равенката

$$\frac{3x - y + 2}{4} - \frac{x + 3y - 1}{2} = 3$$

а потоа одреди ги коефициентите a, b, c.

Забелешка: На секоја равенка со две променливи, па според тоа и на равенката (1) решение е секој подреден пар реални броеви (x_0, y_0), за кој равенката преминува во вистинит исказ.

2. Најди неколку решенија на равенката $x + 2y = 10$, $x, y \in \mathbf{N}$. Колку решенија има оваа равенка?

Да уочиме дека секоја линеарна равенка со две променливи во множеството R има бесконечно множество решенија. Ова ќе го потврдиме со равенката

$$2x + y = 3x - 1,\ x, y \in \mathbf{R} \dots \quad \dots. (2)$$

Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$y = x-1$$

Ако за променливата x избереме произволна вредност $a \in \mathbf{R}$, т.е. $x = a$, тогаш од последната равенка добиваме дека $y = a-1$.

Значи, подредената двојка $(a, a-1)$ е решение на равенката (2) за секој $a \in \mathbf{R}$. Такви двојки броеви има бесконечно многу. Следствено, равенката (2) **има бесконечно множество решенија.**

$$M = \{(a, a - 1) \mid a \in \mathbf{R}\}$$

Велиме дека, подредената двојка $(a, a-1)$ е **општо** решение на равенката (2), а решенијата на пример $(0, -1)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $(5, 4)$ се **посебни** решенија, кои се добиваат од општото за конкретни вредности на a : $a = 0$; $a = \frac{1}{2}$; $a = 5$.

3. Одреди го множеството решенија на равенките:

а) $2(x-y)+3=5x-3y$, б) $\frac{x-y+3}{4} - \frac{x+2y-5}{3} = \frac{x}{2} + \frac{y}{3}$

а потоа најди по три посебни решенија.

5. Познато е дека секоја подредена двојка реални броеви (x_0, y_0) може геометриски да се претстави со една одредена точка од координатната рамнина $x0y$.

Множеството од сите точки во координатната рамнина, чии координати како подредена двојка реални броеви се решенија на равенката (1) се вика **график** на линеарна равенка со две променливи.

Графикот на секоја линеарна равенка со две променливи е права. Навистина, равенката (1), при $b \neq 0$ е еквивалентна со равенката

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

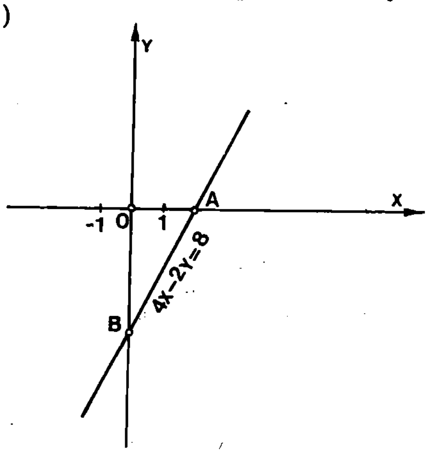
која всушност претставува линеарна функција за чиј график знаеме дека е права. Ако $b = 0$, тогаш равенката (1) го добива видот.

$$ax + 0 \cdot y = c$$

или (поради $a \neq 0$) $x = \frac{c}{a}$. Со последната равенка е определена права паралелна со y – оската, која минува низ точката $\left(\frac{c}{a}, 0\right)$.

Пример 1. *Нацртај го графикот на равенката* $4x - 2y = 8$.

Решение. Доволно е да најдеме две точки со кои бараната права е наполно определена. Ако $x = 0$, тогаш од $4 \cdot 0 - 2y = 8$ добиваме $y = -4$, а ако $y = 0$, тогаш $x = 2$. Значи, правата минува низ точките A (2, 0) и B (0, –4), (црт. 1)



црт. 1

4. Нацртај го графикот на равенките:

а) $x + 2y = 6$ б) $3x - y + 1 = 0$, в) $3x + 0 \cdot y = 12$,

г) $0 \cdot x + 2y = 4$.

б. Вежби

5. Запиши ги во општ вид равенките:

а) $\frac{y-2}{6} - \frac{x}{3} = y - \frac{x+1}{4}$ б) $\frac{3(x-2)}{2} - 2(y-5) = \frac{x-y}{3}$

6. Одреди го општото решение на равенката:

а) $3(x-2) + 2(y-3) = 2x + y$ б) $\frac{x-y}{2} - \frac{2x-3y}{3} = x + y - 1$

а потоа најди по три посебни решенија.

7. Нацртај ги графиците на равенките:

а) $x - 2y = 6$ б) $3x - y = 1$ в) $2x + y = 3$ г) $3x = 6$ д) $5y = 4$

8. Нацртај ги графиците на равенките $2x - 4y = 8$ и $x - 2y = 4$ во ист координатен систем. Што забележуваш?

9. Во равенката $3x + 4y = 5$ одреди го коефициентот b, така што нејзиниот график да минува низ точката P $(-1, 2)$.

10. За која вредност на a, графикот на равенката $3x + y = a$ ќе минува низ точката T $(-1, -2)$?

11. Во два кафеза A и B се најдуваат 5 канаринци. По колку канаринци има во секој кафез? Колку можни решенија постојат?

I. 3. Систем линеарни равенки со две променливи

а. Да го разгледаме

Пример 1. *Збирот на два броја е 14, а нивната разлика е 2. Кои се тие броеви?*

Ако непознатите броеви ги означиме со x и y, тогаш треба да биде задоволена конјункцијата од равенките

$$x + y = 14 \land x - y = 2 \quad \text{..............................} \quad (1)$$

Проверете дали подредената двојка броеви (8, 6) е одговор на примерот. Навистина, за вредностите на $x = 8$ и $y = 6$ конјункцијата $8 + 6 = 14 \land 8 - 6 = 2$ е вистинит исказ.

Всушност, подредената двојка броеви (8, 6) за која конјункцијата (1) е точен исказ, претставува заедничко решение и на двете равенки во неа.

Има многу задачи, чие решавање се сведува на конјункција од две равенки со две променливи, односно на определување на заедничките решенија на две равенки со две променливи. Во таков случај велиме дека тие две равенки образуваат **систем од две равенки со две променливи.**

Системот равенки со две променливи го запишуваме во облик

$$f(x, y) = 0 \land g(x, y) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

или
$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Дисјункцијата, пак, $f(x, y) = 0 \lor g(x, y) = 0$ уште ја викаме **вкупност равенки** и ја означуваме
$$\left[\begin{array}{l} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{array}\right. \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Системот равенки, всушност, го изразува барањето да се одредат оние вредности на променливите x, y, за кои **двете равенки во него** преминуваат во вистински искази. Вкупноста равенки, пак, го изразува барањето да се одредат оние вредности на променливите x, y, за кои **барем една од равенките во неа** преминува во вистински исказ.

Ако со $\mathbf{M_1}$ и $\mathbf{M_2}$ ги означиме соодветно множествата решенија на равенките $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$, тогаш множествата решенија на системот равенки (3) ќе биде пресекот $\mathbf{M_1} \cap \mathbf{M_2}$, а множеството решенија на вкупноста равенки (4) ќе биде унијата $\mathbf{M_1} \cup \mathbf{M_2}$.

Според тоа, секоја подредена двојка реални броеви (x_o, y_o) за која конјункцијата (2) е точен исказ, односно за која и двете равенки од системот (3) преминуваат во точни искази, се вика **решение на системот равенки.**

Ако и двете равенки во системот (3) се линеарни равенки со две променливи, тогаш тој систем се вика уште **систем од две линеарни равенки со две променливи.**

Секој систем од две линеарни равенки со две променливи може да се доведе во општ вид

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

каде што x и y се променливи, а a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, се кои било реални броеви, или изрази кои не зависат од променливите.

Броевите a_1, b_1, a_2, b_2 се викаат **коефициенти пред променливите,** а c_1 и c_2 – **слободни членови на системот (5)**

Пример 2. *Сведи го во општ вид системот*

$$\begin{cases} \dfrac{3y+1}{4} - \dfrac{4-5x}{3} = x + y \\[2mm] \dfrac{7x-2}{6} - \dfrac{8y+1}{9} = x - y \end{cases}.$$

Решение. Со елиминирање на именителите, го добиваме системот

$$\begin{cases} 3\ (3y + 1) - 4\ (4 - 5x) = 12\ (x + y) \\ 3\ (7x - 2) - 2\ (8y + 1) = 18\ (x - y) \end{cases}$$

Кој по ослободување од заградите и префрлување на непознатите членови на лева, а познатите на десна страна го добива видот

$$\begin{cases} 8\ x - 3y = 7 \\ 3\ x - 34y = 8 \end{cases}$$

1. Дадените системи равенки сведи ги во општ вид

а) $\begin{cases} \dfrac{y + 4}{3} - \dfrac{x - 2}{5} = x - 3y \\ 5(y - 3) + 3(x+2) = 30 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{3y + 1}{4} + \dfrac{2x - 4}{3} = x + y \\ \dfrac{7x - 2}{6} - \dfrac{8y+1}{4} = 2x \end{cases}$

Вежби

2. Дадените системи равенки сведи ги во општ вид:

а) $\begin{cases} \dfrac{2x - y}{2} - \dfrac{x - 2y}{3} = 1 \\ \dfrac{2 - x}{3} + \dfrac{1-y}{2} = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x - 2}{5} + 3y = \dfrac{1 - x}{2} \\ \dfrac{2x - 1}{3} - \dfrac{x - y}{2} = x \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x - y) : (x + y) = 1:2 \\ \dfrac{2\ x-1}{2} - \dfrac{y - 2}{3} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x - b}{a} + \dfrac{a - y}{b} = 2 \\ \dfrac{x + y}{a} + \dfrac{x - y}{b} = 4 \end{cases}$

3. Провери кои од подредените двојки реални броеви (–1, 0), (3, 5), (0, –2), (1, 1), (5, 4) се решенија на системот равенки:

а) $\begin{cases} 2\ x + y = 3 \\ 3\ x + 4y = 7 \end{cases}$ б) $\begin{cases} -\ 3\ x + \dfrac{1}{2}\ y = -\ 1 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x + 1}{2} - \dfrac{2y - 7}{3} = 1 \\ \dfrac{2\ x - 3}{6} + \dfrac{y - 5}{3} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x+y) : (x - y) = 9:1 \\ \dfrac{x}{5} - \dfrac{2y+1}{9} + \dfrac{y+2}{6} = \dfrac{x - 1}{4} \end{cases}$

4. За кои вредности на a и b подредената двојка броеви (3, –1) ќе биде решение на системот равенки:

а) $\begin{cases} ax - 2y = 3 \\ x + by = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x - a}{2} + \dfrac{y}{2} = 1 \\ \dfrac{x - b}{3} - \dfrac{y - 2}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

I.4. Еквивалентни системи равенки. Решавање на систем линеарни равенки со две променливи

За еквивалентноста на два системи равенки, ја усвојуваме следнава дефиниција:

Д₁ **За два системи равенки, во областа на дефинираност велиме дека, се еквивалентни, ако тие имаат еднакви множества решенија, односно ако секое решение на првиот систем е решение и на вториот, и обратно ако секое решение на вториот систем е решение и на првиот.**

При решавањето на системите равенки често пати е потребно даден систем равенки да се замени со друг попрост систем, но еквивалентен на него. Потоа тој се заменува со трет систем (види пр. 2 од I.3), итн. додека не дојдеме до најпростиот систем равенки од

видот $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$, каде што a и b се реални броеви, или изрази што не ги содржат променливите. Паротот (a,b) е решение на дадениот систем.

Трансформациите, што доведуваат до еквивалентни системи равенки, ги вршиме врз основа на следниве теореми за еквивалентност на системите равенки:

Т₁ **Ако која било од равенките на даден систем се замени со еквивалентна на неа равенка, се добива систем еквивалентен на дадениот.**

На доказот на оваа теорема нема да се задржиме.

Т₂ **Ако од една равенка на системот** $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$ .... (1)
едната променлива (на пример y) може еднозначно да се изрази преку другата променлива : $y=g(x)$, тогаш системот
равенки $\begin{cases} y = g(x) \\ \varphi[x,g(x)] = 0 \end{cases}$ .... (2)
е еквивалентен со дадениот.

Доказ: а) Нека двојката броеви (x_0, y_0) е решение на системот (1) т.е. $f(x_0, y_0) = 0$ и $\varphi(x_0, y_0) = 0$ се вистинити искази.

Бидејќи првата равенка на системот (1) е еквивалентна со првата равенка на системот (2), тогаш (x_0,y_0) е решение на првата равенка од системот (2) т.е. $y_0 = g(x_0)$ е исто вистинит исказ.

Ако во равенството $\varphi(x_0, y_0) = 0$ бројот y_0 го замениме со еднаков на него број $g(x_0)$, ќе добиеме $\varphi[(x_0,g(x_0)] = 0$. А тоа значи, дека (x_0, y_0) е решение и на втората равенка од системот (2).

Според тоа, секое решение (x_0, y_0) на системот (1) е решение и на системот (2). Останува да докажеме дека и секое решение на системот (2) е решение и на системот (1).

б) Сега ќе земеме дека двојката (x_0, y_0) е решение на системот (2), т. е. нека важи: $y_0 = g(x_0)$ и $\varphi[x_0, g(x_0)] = 0$.

Бидејќи $y = g(x) \Leftrightarrow f(x, y) = 0$ тогаш (x_0, y_0) е решение на равенката $f(x, y) = 0$, односно важи $f(x_0, y_0) = 0$.

Ако во равенството $\varphi[x_0, g(x_0)] = 0$ бројот (x_0) го замениме со еднаквиот на него број y_0, добиваме: $\varphi(x_0, y_0) = 0$.

Тоа покажува дека двојката броеви (x_0, y_0) е решение и на втората равенка на системот (1). Значи секое решение (x_0, y_0) на системот (2) е решение и на системот (1). Со тоа, теоремата е докажана.

На оваа теорема се базира познатиот **метод на замена** за решавање на системите равенки со две променливи.

Да го покажеме тоа со следните неколку примери:

Пример 1. *Реши го системот равенки:*

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3)$$

Решение. Првата равенка од системот (3) е еквивалентна со равенката $y = 4 - 3x$, па согласно со теоремата 2, системот (3) е еквивалентен со системот.

$$\begin{cases} y = 4 - 3x \\ 2x - 3(4 - 3x) = -1 \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3')$$

Втората равенка од овој систем е со една променлива, па од неа наоѓаме: $x = 1$. Потоа од првата равенка на системот (3′) добиваме:

$$y = 4 - 3 \cdot 1 = 1$$

Значи, вредностите на променливите $x = 2$, $y = 1$, односно подредената двојка броеви (2, 1) е решение на дадениот систем линеарни равенки.

1. По метод на замена реши ги следните системи линеарни равенки:

а) $\begin{cases} 3x - 2y = -9 \\ x - y = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{y-4}{2} - \dfrac{y+2}{6} = \dfrac{-x}{3} \\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 3a \\ x - 2y = 6a \end{cases}$

T_3

Системот равенки $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$

е еквивалентен со системот равенки:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) + k \cdot f(x, y) = 0 \end{cases}$$

каде што k е кој било реален број, или израз што не зависи од x и y.

Доказ: а) Нека е $f(x, y) = 0$ и $\varphi(x, y) = 0$, тогаш е и

$$\varphi(x, y) + k \cdot f(x, y) = 0 + k \cdot 0 = 0$$

Според тоа: $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) + k \cdot f(x, y) = 0 \end{cases}$ .... (6)

б) Обратно: Нека е $f(x, y) = 0$ и $\varphi(x, y) + k \cdot f(x, y) = 0$

Тогаш врз основа на претпоставката $f(x, y) = 0$, од втората равенка добиваме: $\varphi(x, y) + k \cdot f(x, y) = \varphi(x, y) + k \cdot 0 = 0$, т. е $\varphi(x, y) = 0$

Според тоа: $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) + k \cdot f(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$ .... (7)

Од импликациите (6) и (7), следува дека:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) + k \cdot f(x, y) = 0 \end{cases}$$

На оваа теорема се базира познатиот **метод на спротивни коефициенти** за решавање на системите равенки со две променливи.

Еве неколку примери со примена на тој метод:

Пример 2. *Реши го системот равенки* $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 5x - y = 4 \end{cases}$

Решение. Ако втората равенка ја помножиме со 2, и истата ја собереме со првата, го добиваме системот

$$\begin{cases} x+2y+2 \cdot (5x-y) = 3+2 \cdot 4 \\ 5x - y = 4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 11x = 11 \\ 5x - y = 4 \end{cases}$$

Од првата равенка $x = 1$. Со замена за $x = 1$ во втората равенка, добиваме $y = 1$. Што значи, решението на системот е парот $(1, 1)$.

Пример 3. *Реши го системот равенки* $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x} - \dfrac{2}{y-1} = 1 \\ \dfrac{3x}{x+4} + \dfrac{10}{y} = 3 \end{cases}$

Решение. Овој систем е од две дробно рационални равенки со две променливи. Тој е дефиниран само за оние вредности на променливите, за кои именителите се различни од нула, т. е. за

$x \neq 0, y - 1 \neq 0, x + 4 \neq 0$ и $y \neq 0$ .... (8)
или $x \notin \{0, -4\}, y \notin \{0, 1\}$

По ослободувањето од именителите во секоја од равенките, го добиваме системот:

$$\begin{cases} (x + 1)(y - 1) - 2x = x(y - 1) \\ 3xy + 10(x + 4) = 3y(x + 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y = 1 \\ 5x - 6y = -20 \end{cases}$$

Ако првата равенка ја помножиме со 6 и истата ја собереме со втората, го добиваме системот:

$$\begin{cases} 5x-6y+6\cdot(-2x+y) = 1\cdot 6-20 \\ 5x-y=-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x=-14 \\ 5x-6y=-20 \end{cases}$$

Од првата равенка добиваме за $x = 2$. Со замена за $x = 2$ во втората равенка, добиваме за $y = 5$. Гледаме, за $x = 2$, $y = 5$ се задоволени условите (8), така што заклучуваме дека, решението на дадениот систем е одредената двојка броеви (2, 5).

2. По метод на спротивни коефициенти реши ги следните системи линеарни равенки:

а) $\begin{cases} 5x-7y=1 \\ 8x+3y=30 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x}{x-2}-\dfrac{4}{y-1}=1 \\ \dfrac{x+3}{x}-\dfrac{4}{y+1}=1 \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x-a}{2}+\dfrac{y-b}{2}=a \\ \dfrac{x-b}{3}+\dfrac{y-a}{2}=b \end{cases}$

Вежби

3. Провери ја еквивалентноста на системите равенки:

а) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ и $\begin{cases} y=3-2x \\ 3x-y=1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$ и $\begin{cases} 4x+2y=3 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

Реши ги системите равенки:

4. а) $\begin{cases} 5x+2y=16 \\ y=4x-5 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x-2y=-8 \\ x-3y=2 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x-7y=1 \\ 8x+3y=30 \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} (x-1)(y+3)=xy+2 \\ (x+5)(y-3)=xy+2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+2)^2-(x-3)^2=3.(y+5) \\ (2y-3)^2=y(4y-3)-3(4x-5) \end{cases}$

6. а) $\begin{cases} \dfrac{x+7}{5}-\dfrac{2x-y}{4}=3y-5 \\ \dfrac{4x-3}{6}-\dfrac{5y-7}{2}=18-5x \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x}{x-2}=\dfrac{4}{x-1}+1 \\ \dfrac{x+3}{x}=\dfrac{4}{y+1}+1 \end{cases}$

$\boxed{7.}$ а) $\begin{cases} x + ay = 3 \\ x - 2ay = 6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{a+1} + \dfrac{y-1}{a} = 1 \\ y = x + a \end{cases}$

I. 5. Детерминанти од втор ред и нивна примена

а. Квадратната шема $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$, на која ѝ се придружува бројот $ad - bc$, се вика **детерминанта од втор ред,** т. е.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \overset{def}{=} ad - bc$$

Броевите (или изразите) a, b, c, d се викаат **елементи** на детерминантата, $\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}$ и $\begin{matrix} b \\ d \end{matrix}$ се викаат **колони,** додека $a\ b$, и $c\ d$ – **редици** на детерминантата. Кај детерминантата разликуваме и две дијагонали: $a \searrow d$ – **главна дијагонала** и $c \nearrow b$ – **споредна дијагонала**

Согласно дефиницијата, имаме дека:

Вредноста на детерминантата од втор ред е еднаква на разликата од производите на нејзините елементи од главната и споредната дијагонала.

Пример 1. *Пресметај ја вредноста на детерминантата*

а) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) = 6 + 4 = 10$

б) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a-1 & a \end{vmatrix} = (a+1) \cdot a - (a-1) \cdot 1 = a^2 + a - a + 1 = a^2 + 1$

1. Пресметај ја вредноста на детерминантата

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & a+1 \\ a-1 & a \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{vmatrix}$

$(a-b)(a+b) - a^2 = a^2 + ab - ab - b^2 - a^2 = b^2$

$0 - 3 = -3$ $a - (a+1)(a-1) = a - a^2 - a + a - 1 = a - a^2 - 1$

б. **Својства на детерминантите од втор ред.**

1°. Вредноста на детерминантата не се менува, ако соодветните редици станат соодветни колони, а колоните редици, т. е.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

Пример 2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - 1 \cdot 3 = -5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - 3 \cdot 1 = -5$

2. Провери ја точноста на равенствата:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} a & -2 \\ a-1 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a-1 \\ 2 & -a \end{vmatrix}$

$8 - 3 = 8 - 3$ $-a^2 - 2a \neq -a^2 + 2a - 2$

2°. Ако двете редици (или двете колони) си ги променат местата, детерминантата го менува само својот знак, т.е.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb = -(cb - ad) = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

Пример 3. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 12+2 = 14, \quad \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 12 = -14$

3. Провери ја точноста на равенствата:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ a-1 & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a-1 & a \\ a & 2 \end{vmatrix}$

$-4-3 = -(-3-6) \,/\, -7 \neq +7 \,|\quad a^2-2a-2 \neq 2a-2+a^2$

3°. Заедничкиот множител на елементите од една редица (или колона) може да се изнесе како множител пред детерминантата, т.е.

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = kad - kcd = k\,(ad - bc) = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Пример 4. $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20-6=14, \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 2 & 1\cdot 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$

$$=2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\,(10-3) = 2\cdot 7$$

4. Провери ја точноста на равенствата:

а) $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ a & 2a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

4°. Ако елементите на една редица (или колона) се пропорционални на елементите од другата редица (или колона), детерминантата е еднаква на нула , т.е. ако

$$a=ck, b=dk \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ck & dk \\ c & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} c & d \\ c & d \end{vmatrix} = k(cd-cd) = k\cdot 0 = 0$$

Пример 5. $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 0 = 0$

5. Провери ја точноста на равенствата:

а) $\begin{vmatrix} 12 & 10 \\ 24 & 20 \end{vmatrix} = 0$ б) $\begin{vmatrix} a-2 & 2a-4 \\ a & 2a \end{vmatrix} = 0$

5°. Ако елементите на една редица (или колона) се изрази од по два собирци, тогаш детерминантата е еднаква на збирот од две детерминанти, како на примеров:

$$\begin{vmatrix} a+\alpha & b+\beta \\ c & d \end{vmatrix} = a\cdot d + \alpha\cdot d - cb - c\cdot\beta = (a\cdot d - c\cdot b)+(\alpha\cdot d - c\cdot\beta)=$$

$$=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ c & d \end{vmatrix}$$

Пример 6. $\begin{vmatrix} a+2 & 2a+1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2a-4-6a-3 = -8a-7$

$$\begin{vmatrix} a+2 & 2a+1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2a \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2a-6a-4-3 = -8a-7$$

6. Провери ја точноста на равенствата:

а) $\begin{vmatrix} 3+a & -1 \\ 2-a & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & -1 \\ -a & 4 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} 3 & a^2-1 \\ 4 & a^2+1 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

6°. Ако кон елементите на **еден ред** (или колона) ги дадеме соодветните елементи на **друг ред** (или колона) помножени со еден ист број, детерминантата не ја менува својата вредност, т.е.

$$\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kc & kd \\ c & d \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} c & d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + k\cdot 0 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Пример 7. $\begin{vmatrix} 3+4a & 1+2a \\ 2a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2a & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4a & 2a \\ 2a & a \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2a & a \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2a & 2a \\ a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2a & a \end{vmatrix}$$

7. Провери ја точноста на равенствата:

а) $\begin{vmatrix} 2-3a & 3+6a \\ -a & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -a & 2a \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 3a & 4 \\ 2+6a & -1+8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

Системот равенки

$$\begin{cases} a_1x+b_1y = c_1 \\ a_2x+b_2y = c_2 \end{cases} \qquad \text{..} \quad (1)$$

под услов $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ има единствено решение (провери по методот на замена или спротивни коефициенти), зададено со формулите:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad \text{.................................} \quad (2)$$

Ако изразите во именителот и броителите на формулите (2) ги означиме со детерминантите:

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_x = c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

тогаш решението (2) на системот (1) може да се запише во следнава позгодна форма за помнење:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Формулите (3) со кои го определуваме единственото решение на системот (1) при услов $\Delta \neq 0$, се викаат **Крамерови формули.**

Пример 8. *Реши го системот* $\begin{cases} 5x - 3y = 7 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$ *со помош на Крамеровите формули.*

Прво ги определуваме детерминантите: $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10+9=19$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 14+24 = 38 \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 21 = 19$

Согласно Крамеровите формули имаме:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{38}{19} = 2, \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{19}{19} = 1$$

Според тоа, дадениот систем има решение (2, 1)

8. Реши ги системите равенки:

а) $\begin{cases} 7x - 8y = 8 \\ 3x+16y=18 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 3y=-8 \\ 3x - \frac{2y}{3} = 4 \end{cases}$

Вежби

Одреди ја вредноста на детерминантата:

9. а) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} a & a+1 \\ a-1 & a \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$

Со примена на својствата за детерминанта, провери ја точноста на следниве равенства.

10. а) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$ д) $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a-1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a-1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ ѓ) $\begin{vmatrix} a-1 & 3 \\ a^2-1 & 2 \end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ a+1 & 2 \end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ е) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$

г) $\begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a+1-2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a+1-2 \\ 2a & 1 \end{vmatrix}$ ж) $\begin{vmatrix} a-1 & 3a-3 \\ a & 3a \end{vmatrix} = 0$

з) $\begin{vmatrix} 2+a & 1-a \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & -a \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ и) $\begin{vmatrix} 3+2a & 1-4a \\ a & -2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ a & -2a \end{vmatrix}$

ѕ) $\begin{vmatrix} a-1 & 3 \\ 2-a & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -a & 2 \end{vmatrix}$ ј) $\begin{vmatrix} a & 2-a \\ 3a & 1-3a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

Да се решат следниве системи равенки:

11. а) $\begin{cases} x - 3y = -2 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ x - 5y = 1 \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} (x + 4)(y - 3) = xy - 22 \\ (x - 2)(y + 2) = xy \end{cases}$

$\boxed{13.}$ $\begin{cases} ax + by = a^2 + b \\ ax - by = a^2 - b \end{cases}$ $\boxed{14.}$ $\begin{cases} \dfrac{x-a}{2} + \dfrac{y-b}{2} = a \\ 2x + 3y = 3a + 8b \end{cases}$

I. 6. Дискусија на решенијата на систем линеарни равенки со две променливи

Да се дискутира за решенијата на системот линеарни равенки со две променливи

$$\begin{cases} a_1\, x + b_1 y = c_1 \\ a_2\, x + b_2 y = c_2 \end{cases} \qquad \text{..........} \qquad (1)$$

значи, да се утврди при кои релации меѓу коефициентите (под претпоставка тие да се различни од нула), тој има единствено решение, нема решение, или има бесконечно многу решенија.

При решавање на системот (1) по методот на спротивни коефициенти, тој е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1) \cdot x = c_1b_2 - c_2b_1 \\ (a_1b_2 - a_2b_1) \cdot y = a_1c_2 - a_2c_1 \end{cases} \qquad \text{..........} \qquad (2)$$

односно на

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \end{cases} \qquad \text{..........} \qquad (2')$$

Во зависност од тоа дали детерминантите се еднакви или различни од нула, имаме:

1°. Ако $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, тогаш системот (2′), односно системот (1) има единствено решение $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$.

Според тоа:

Ако коефициентите пред променливите не се пропорционални $(a_1 : a_2 \neq b_1 : b_2)$, **тогаш системот (1) е определен (возможен)**

Пример 1. *Реши го системот равенки* $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 5x - y = 4 \end{cases}$

Решение. Бидејќи $1:5 \neq 2:(-1)$, тогаш системот е одреден и има единствено решение $x = 1,\ y = 1$.

1. Реши го системот равенки

а) $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} \end{cases}$

2°. Ако $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ и барем една од детерминантите Δ_x или Δ_y не е нула, на пример $\Delta_x \neq 0$, тогаш системот (2') добива облик

$$\begin{cases} 0 \cdot x = \Delta_x & (\Delta_x \neq 0) \\ 0 \cdot y = \Delta_y & (\Delta_y \neq 0) \end{cases}$$

Очигледно дека системот (2'), односно системот (1) нема решение. Според тоа:

Ако коефициентите пред променливите се пропорционални ($a_1 : a_2 = b_1 : b_2$), **а слободните членови не се пропорционални со нив** ($a_1 : a_2 = b_1 : b_2 \neq c_1 : c_2$), **тогаш системот (1) нема решение, т.е. тој е невозможен или апсурден.**

Пример 2. *Реши го системот равенки* $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$

Решение. Бидејќи $1:2 = 2:4 \neq 3:1$, тогаш системот нема решение. т.е. тој е невозможен.

За илустрација, дадениот систем е еквивалентен со системот.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 2x + 4y = 1, \end{cases}$$

од каде е очигледно дека тој е апсурден (зошто?).

2. Реши го системот равенки

а) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y-3}{2} = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$

3°. Ако $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ и $\Delta_x = 0$ и $\Delta_y = 0$ тогаш системот (2') добива облик.

$$\begin{cases} 0 \cdot x = 0 \\ 0 \cdot y = 0 \end{cases}$$

Во тој случај системот (1) има бесконечно многу решенија и велиме дека е **неодреден.**

Забележувајќи дека $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$, добиваме:

$a_1=ka_2$, $b_1=kb_2$, $c_1=kc_2$. Тогаш системот (1) го добива видот:

$$\begin{cases} ka_2x + kb_2y = kc_2 \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

кој е еквивалентен на системот:

$$\begin{cases} a_2x + b_2y = c_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Уочуваме дека, системот се состои од една равенка со две променливи, а таа како што знаеме, има бесконечно многу решенија.

Според тоа:

Ако коефициентите пред променливите и слободните членови се пропорционални ($a_1:a_2=b_1:b_2=c_1:c_2$), тогаш системот има бесконечно многу решенија, што ги добиваме како решенија на една од равенките во системот.

Пример 3: *Реши го системот равенки* $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$

Решение. Бидејќи $1:2 = 2:4 = 3:6$, тогаш системот има бесконечно многу решенија.

За илустрација, со делење на втората равенка со 2, добиваме равенка што е идентична со првата. Значи дадениот систем е еквивалентен со системот:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 2y = 3, \end{cases}$$

чие множество решенија е $\{(3-2к, к)\ (к \in \mathbf{R})\}$.

3. Реши го системот равенки

а) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 6x - 3y = 3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ x - \frac{1}{3}y = 2 \end{cases}$

Пример 4: *Дискутирај го решението на системот равенки* $\begin{cases} a\,x + y = a^2 \\ x + ay = 1 \end{cases}$

Решение: Прво ги определуваме детерминантите

$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)\ (a+1)$, $\Delta x = \begin{vmatrix} a^2 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)\ (a^2+a+1)$,

$\Delta y = \begin{vmatrix} a & a^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\ a\ (a - 1)$

1°. Ако $\Delta \neq 0$, т.е. $a \neq \pm 1$, тогаш системот е одреден и има единствено решение $x = \frac{a^2 + a + 1}{a + 1}$, $y = -\frac{a}{a+1}$

2°. Ако $a = 1$, тогаш $\Delta = 0$, а исто така и $\Delta_x = \Delta_y = 0$.

За $a = 1$, системот го добива видот $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1. \end{cases}$

Очигледно е дека системот има бесконечно множество на решенија

$$M = \{(k,k-1) \mid k\in\mathbf{R}\}.$$

3°. Ако $a = -1$, тогаш $\Delta = 0$, а $\Delta_x = 2$, $\Delta_y = -2$.

Во тој случај системот го добива видот

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Очигледно, системот нема решение, т.е. е невозможен.

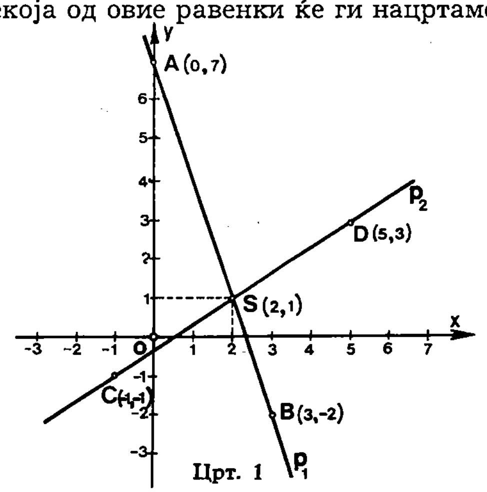
4. Дискутирај го решението на системот равенки $\begin{cases} ax + y = 2 \\ 2x - ay = 5. \end{cases}$

За решенијата на системот равенки $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$ може да се дискутира и на следниов начин:

1°. Системот линеарни равенки со две променливи има единствено решение, ако графиците на равенките на правите се сечат.

Пример 5. *Реши го графички системот равенки* $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

Решение. За да го решиме системот равенки графички, графиците на секоја од овие равенки ќе ги нацртаме во ист координатен систем.



Црт. 1

Графикот на првата равенка ќе биде правата p_1 што минува низ точките A (0,7) и B (3,−2), а графикот на втората равенка – правата p_2 што минува низ точките C (−1,−1) и D (5,3) (црт. 1).

Координатите на точките од правата p_1 ни го даваат множеството решенија на првата равенка, а координатите на точките од правата p_2 ни го даваат множеството решенија од втората равенка.

Според тоа, доколку двете равенки имаат заедничко решение, тогаш соодветната точка на тоа решение мора да лежи истовремено на двете прави p_1 и p_2. Тоа е пресечната точка S на правите p_1 и p_2 чии координати ($x = 2$, $y = 1$) ги задоволуваат двете равенки (провери!).

5. Реши го графички системот равенки

а) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 3x-y=1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

2° Системот линеарни равенки со две променливи нема решение, ако графиците на равенките на правите немаат заедничка точка, односно кога правите се паралелни и различни.

6. Реши го графички системот равенки

а) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 4x-2y=4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y=4 \\ \frac{1}{2}x-y=3 \end{cases}$

3°. Системот линеарни равенки, со две променливи има бесконечно многу решенија, ако графиците на равенките во системот се паралелни и се поклопуваат.

7. Реши го графички системот равенки

а) $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-2y=6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{2}-y=1 \\ x-2y=2 \end{cases}$

Вежби

Одреди ги решенијата на системите равенки (од 8 до 11):

8. $\begin{cases} 3x-4y=10 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x-3y=1 \\ 3x-9y=2 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-4y=6 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1 \\ 3x-2y=3 \end{cases}$

12. Даден е системот равенки $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-ay=b \end{cases}$

Изберете такви вредности за a и b, при што системот равенки: а) да има единствено решение, б) да нема решение, в) да има бесконечно многу решенија.

Дискутирај го решението на системите равенки (од 13 до 16):

13. $\begin{cases} ax+y=a^2 \\ x+y=1 \end{cases}$

14.* $\begin{cases} a^2x-b^2y=a-b \\ ax-by=0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} ax+by=a^2 \\ x+y=a \end{cases}$

16.* $\begin{cases} \frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=\frac{1}{a^2-b^2} \\ \frac{x}{a-b}-\frac{y}{a+b}=\frac{1}{a^2-b^2} \end{cases}$

17. За кои вредности на параметарот k, системот равенки

$\begin{cases} kx-3y=1 \\ 3x-ky=k+1 \end{cases}$ нема решение.

18. За кои вредности на параметарот n, системот равенки

$$\begin{cases} x + ny = n+2 \\ 2x + 6y = 10 \end{cases}$$ е неодреден.

19. За кои вредности на параметрите a и b системот равенки

$$\begin{cases} (a + b)x - 3y = 6 \\ 2x + y = b \end{cases}$$ ќе има бесконечно многу решенија.

20. Графички реши ги системите равенки:

а) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - \frac{y}{2} = 2 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

I.7. Примена на системите линеарни равенки со две променливи

На доста задачи од математиката, физиката па и од практиката воопшто нивното решавање се сведува на составување и решавање на некој одреден систем линеарни равенки со две променливи.

За илустрација ќе решиме некој пример:

Пример 1. *Збирот на цифрите на еден двоцифрен број е еднаков на 11. Ако кон него додадеме 27 ќе добиеме двоцифрен број што е запишан со исти цифри но во обратен ред. Кој е тој број?*

Решение. Двоцифрениот број го означуваме со $10x+y$. Согласно условите во задачата го составуваме системот равенки:

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 10x + y + 27 = 10y + x \end{cases}$$

Со решавање на овој систем, наоѓаме $x = 4, y = 7$.
Значи, бараниот двоцифрен број е 47.

Пример 2. *Две тела се оддалечени 360 m. Ако се движат едно спроти друго тие ќе се сретнат по 10 секунди. Ако пак се движат едно по друго, тогаш телото со поголема брзина ќе го стигне телото со помалата брзина по 40 секунди.*

Со колкава брзина се движат телата?

Решение. Нека x и y се брзините на телата $(x > y)$. Тогаш, за нивното определување го имаме системот равенки:

$$\begin{cases} 10x + 10y = 360 \\ 40x = 360 + 40y \end{cases}$$

чие решение е $x = 22{,}5, \quad y = 13{,}5$.

6. Вежби

1. Збирот на два броја е 47. Ако поголемиот го поделиме со помалиот се добива количник 4 и остаток 2. Кои се тие броеви?

2. Ако еден двоцифрен број го поделиме со цифрата на десетките се добива количник 12. Ако пак тој број го поделиме со 9 се добива количник 5 и остаток 3. Кој е тој број.

3. На прашањето колку има браќа и сестри братот одговорил „Јас имам исто толку браќа колку и сестри", а сестрата одговорила „Јас имам двапати повеќе браќа од сестри".

   Колку биле браќа, а колку сестри?

4. Вредноста на една дропка е $\frac{5}{6}$. Ако броителот на таа дропка се зголеми за 8, вредноста на така добиената дропка е $\frac{7}{6}$. Која е таа дропка?

5. Збирот на цифрите на еден двоцифрен број е 12. Ако цифрите си ги променат местата, новиот број е за 54 поголем од првиот.

   Кој е тој број?

6. Две цевки полнат еден базен за 4 саата. Ако првата цевка тече 3 саати, а втората 2, ќе наполнат $\frac{2}{3}$ од базенот.

   За колку саати секоја сама може да го наполни базенот?

7.*Два работника завршуваат една работа за 18 часа, но по заедничката работа од 15 часа првиот ја напуштил, а вториот за да ја доврши работата работел уште толку часа за колку што првиот би завршил $\frac{1}{9}$ од работата.

   За колку часа секој сам би ја завршил работата?

8. Од две места оддалечени 650 km тргнуваат два воза еден спроти друг. Ако двата воза истовремено тргнат ќе се сретнат по 10 часа. Ако вториот воз тргне 4 часа и 20 минути пред првиот, тогаш тие ќе се сретнат 8 часа после тргнувањето на првиот воз.

   Одреди ја брзината на двата воза.

9. *Некој бил должен 12 000 денари. На првиот давател му плаќал 12%, а на вториот 8% камата. Ако на првиот давател му плаќа камата колку што плаќа на вториот и обратно тогаш годишно би плаќал 320 денари повеќе.

   По колку динари позајмил од секој давател?

10. Периметарот на еден триаголник е 50 cm. Допирната точка на впишаната во него кружница, што лежи на најголемата страна ја разделува таа страна на два дела чии должини се 8 cm и 12 cm.

    Одреди ги страните на триаголникот.

11. Во трапезот ABCD средната линија е 15 cm, а разликата од основите 8 cm. Одреди ги страните на трапезот.

I. 8. Системи од три линеарни равенки со три променливи и нивно решавање

Постојат доста задачи, чие решавање се сведува на конјункцијата од три равенки со три променливи, односно на одредување на заедничките решенија на три равенки со три променливи. Во таков случај велиме дека тие равенки образуваат **систем равенки со три променливи.**

За да означиме дека равенките $f(x, y, z) = 0$, $\varphi(x, y, z) = 0$ и $g(x, y, z) = 0$ образуваат систем равенки, честопати, наместо
$f(x, y, z) = 0 \wedge \varphi(x, y, z) = 0 \wedge g(x, y, z) = 0$ .... (1)

Пишуваме
$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \qquad \text{(2)}$$

Секоја подредена тројка броеви (x_0, y_0, z_0) за која конјункцијата (1) е точен исказ, односно за која и трите равенки во системот (2) преминуваат во точни искази се вика **решение на системот равенки.**

Ако и трите равенки во системот (2) се линеарни равенки со три променливи, тогаш тој систем се вика уште **систем од три линеарни равенки со три променливи.**

Секој систем од три линеарни равенки со три променливи може да се доведе во **општ вид**

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \qquad \text{(3)}$$

каде што x, y, z се променливи, а a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3 и d_3 се кои било реални броеви, или изрази што не зависат од променливите.

Броевите a_i, b_i, c_i, се викаат **коефициенти пред променливите,** а d_i $(i = 1, 2, 3)$ – **слободни членови на системот (3).**

Пример 1. *Дадениот систем, сведи го во општ вид.*
Користејќи ја Т.1. од I.4 за еквивалентност на системи равенки, имаме

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{y+2}{3} - 2z = -\frac{1}{3} \\ 2(x-y) + \frac{z-1}{2} = \frac{7}{2} \\ \frac{2x-y}{4} - \frac{y-z}{2} = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-y) - 2(y+2) - 12z = -2 \\ 4(x-y) + z - 1 = 7 \\ 2x - y - 2(y-z) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5y - 12z = 2 \\ 4x - 4y + z = 8 \\ 2x - 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

1. Сведи го во општ вид системот равенки:

а) $\begin{cases} \dfrac{x+y-z}{2} + 2x = \dfrac{x-z}{2} \\ 3(x-y) - (2y+z) = 2y \\ x(2+y) - 3z = xy + 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y-z}{a^2-2a} = 1 \\ 2x - 3az = \dfrac{y-x}{2} \\ ax - 2y = az - 1 \end{cases}$

б. Овде ќе се запознаеме со два основни методи за решавање на систем од три линеарни равенки со три променливи: метод на замена (супституција) и метод на елиминација.

1°. Метод на замена

Според овој метод, една од равенките на дадениот систем ја решаваме по која било променлива и со најдениот израз за неа, ја заменуваме соодветната променлива во другите две равенки на системот, со што добиваме систем од две равенки со две променливи. Решавањето на тој систем познат е од I.4. Вредноста (изразите) за двете променливи ги заменуваме во изразот на третата променлива, со кое сме го определиле решението на системот. Методот на замена ќе го изведеме во општ случај. Нека е даден системот равенки:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad \text{......} \quad (1)$$

Ако, барем еден од коефициентите $a_1, b_1, c_1 \neq 0$, на пример $c_1 \neq 0$, од првата равенка на системот (1), наоѓаме

$$z = \frac{d_1 - a_1x - b_1y}{c_1} \quad \text{......} \quad (2)$$

Заменувајќи ја непознатата z во втората и третата равенка во системот, добиваме:

$$\begin{cases} a_2x + b_2y + c_2 \cdot \dfrac{d_1 - a_1x - b_1y}{c_1} = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3 \cdot \dfrac{d_1 - a_1x - b_1y}{c_1} = d_3 \end{cases}$$

систем од две линеарни равенки со две променливи, кои со неколку трансформации може да се доведе во видот:

$$\begin{cases} (c_1a_2 - c_2a_1)\,x + (c_1b_2 - c_2b_1)\,y = c_1d_2 - c_2d_1 \\ (c_1a_3 - c_3a_1)\,x + (c_1b_3 - c_3b_1)\,y = c_1d_3 - c_3d_1 \end{cases} \quad \text{......} \quad (3)$$

Решавајќи го системот (3), по кој било од познатите методи, ги одредуваме променливите x и y, а потоа истите ги заменуваме во (2), со што го добиваме и z.

Пример 2. *Реши го системот равенки по методот на замена.*

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 8 \\ -x + 2y + z = 4 \\ 3x + y - 4z = 0 \end{cases}$$

Решение. Од првата равенка ја изразуваме променливата

$$y = 2x + 3z - 8 \quad \text{.........} \quad (1)$$

а потоа ја заменуваме во другите две равенки, со што го добиваме системот:

$$\begin{cases} -x + 2(2x + 3z - 8) + z = 4 \\ 3x + 2x + 3z - 8 - 4z = 0, \end{cases}$$

кој, после средувањето го добива видот

$$\begin{cases} 3x + 7z = 20 \\ 5x - z = 8 \end{cases}$$

Добиениот систем е со променливи x и z, чие решение го добиваме со примена на познатите методи, односно за x и z добиваме $x = 2$ и $z = 2$. Со замена на x и z во (1) ја добиваме вредноста за $y = 2$. Што значи, решението на системот е тројката (2; 2; 2).

2. Реши ги системите:

а) $\begin{cases} x - 2y + 3z = -8 \\ -2x + y - z = 3 \\ 3x - y + 2z = -5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3x + 2y = 5 \\ -2y + 3z = 1 \end{cases}$

2°. Метод на елиминација

Суштината на овој метод се состои во тоа што со помош на низа елементарни трансформации системот се сведува на еквивалентен систем на дадениот, од кој веднаш се гледа решението на истиот.

Постапката се нарекува **метод на елиминација на Жордан–Гаус** и се состои од конечен број чекори. Овој метод ќе го разгледаме на конкретен пример.

Пример 3. *По методот на елиминација реши го системот од равенки*

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -2x + y + z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

Решение. I. Вршиме елиминација на променливата x во втората и третата равенка. За елиминација на x од втората равенка, ја множиме првата равенка со 2 и добиената равенка ја додаваме кон втората. За елиминација на x од третата равенка, ја множиме првата равенка со -1 и добиената равенка ја додаваме кон третата. Или,

$$\begin{cases} x+y-z = 2 \\ -2x+y+z = 3 \\ x+y+z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z = 2 \\ -2x+y+z+2(x+y-z) = 3+2\cdot 2 \\ x+y+z-1(x+y-z) = 6-1\cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z = 2 \\ 3y-z = 7 \\ 2z = 4 \end{cases}$$

II. Втората равенка ја делиме со -3 и ја додаваме на првата равенка, односно

$$\begin{cases} x+y-z = 2 \\ 3y-z = 7 \\ 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z+\dfrac{3y-z}{-3} = 2+\dfrac{7}{-3} \\ 3y-z = 7 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\dfrac{2}{3}z = -\dfrac{1}{3} \\ y-\dfrac{1}{3}z = \dfrac{7}{3} \\ z = 2 \end{cases}$$

III. Множејќи ја третата равенка со $\frac{2}{3}$, а потоа со $\frac{1}{3}$, и така добиените равенки додавајќи ги соодветно на првата, односно втората равенка, системот равенки се сведува на обликот:

$$\begin{cases} x-\dfrac{2}{3}z = -\dfrac{1}{3} \\ y-\dfrac{1}{3}z = \dfrac{7}{3} \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\dfrac{2}{3}z+\dfrac{2}{3}z = -\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3} \\ y-\dfrac{1}{3}z+\dfrac{1}{3}z = \dfrac{7}{3}+\dfrac{2}{3} \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

3. По метод на елиминација реши ги системите равенки

а) $\begin{cases} x+y+z = 9 \\ x+2y+3z = 16 \\ x+3y+4z = 21 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y+2z = 9 \\ x+4y-8z = -18 \\ -x+3y+5z = 27 \end{cases}$

Вежби

4. Сведи ги во општ вид системите равенки, а потоа провери која од подредената двојка реални броеви (1,1,1); (2,–1,0); (0,–1,1) е решение на системот.

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y+z}{3} = 0 \\ x-y-\dfrac{y+z}{2} = 1 \\ 2x-\dfrac{y+2z}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x-y+a}{2}-2z = \dfrac{a-4}{2} \\ \dfrac{x-a}{3}+\dfrac{y-z+a}{2} = \dfrac{2+a}{6} \\ ax-\dfrac{y-z}{2} = a \end{cases}$

Реши ги системите равенки:

5. $-3x + 5y + z = -5$
$6x + 2y - 3 = 23$
$4x - 3y - z = 8$

6. $$\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{y+2}{2} + \dfrac{z+3}{3} = 5 \\ \dfrac{2x+1}{3} + \dfrac{y-2}{5} - \dfrac{z+1}{2} = -1 \\ \dfrac{x+3}{4} + \dfrac{y+1}{3} + \dfrac{5-z}{2} = 3 \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} \dfrac{x-2z}{3} + \dfrac{6y+5z}{4} = 0 \\ \dfrac{x+y}{5} - \dfrac{4y+z}{2} = y+2 \\ \dfrac{x+6}{7} + \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-2}{12} \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} -\dfrac{6}{x} + \dfrac{4}{y} + \dfrac{5}{z} = 4 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{8}{y} + \dfrac{5}{z} = 4 \\ \dfrac{9}{x} + \dfrac{12}{y} - \dfrac{10}{z} = 4 \end{cases}$$

9. $x + y + z = 3a$

$x - y + z = a + 2b$

$x + y - z = a$

10.* $ax + y + z = 1$

$x + ay + z = 2 - a^2$

$x + y + az = 1$

11. Збирот на три броја е 80. Ако првиот се подели со вториот се добива количник 3 и остаток 3, ако третиот се подели со првиот се добива ист количник и остаток. Одреди ги тие броеви.

I. 9. Детерминанти од трет ред

Квадратната шема $\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}$, на која и се придружува бројот $a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$, се вика **детерминанта од трет ред.**

Броевите (или изразите) a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 се викаат елементи на детерминантата; $\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}$ се викаат **колони**, а $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$, $a_3b_3c_3$ – **редици** на детерминантата. Кај детерминантата од трет ред разликуваме и две дијагонали $a_1b_2c_3$ - **главна дијагонала** и $a_3b_2c_1$ – **споредна дијагонала.**

Ќе покажеме дека детерминантата од трет ред може да се претстави и преку детерминанти од втор ред, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$
$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(c_2b_1 - c_1b_2) =$$
$$= a_1\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \quad \text{......................} \quad (1)$$

Детерминантите од втор ред

$$\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta_{11}, \qquad \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta_{21}, \qquad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \Delta_{31}$$

се викаат **минори** (од втор ред) на детерминантата Δ што одговараат на елементите од првата колона, a_1, a_2, a_3 соодветно, а бројот

$$A_i = (-1)^{i+1}\,\Delta_{i1},\ (i = 1,2,3 - \text{број на редица})$$

се вика **алгебарски комплемент** што му одговара на елементот a_i.

Алгебарскиот комплемент се одредува, кога се прецртува редицата и колоната на елементот кој нему му одговара, како на примериве:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2\ldots & 4\ldots & 3 \end{vmatrix} \quad A_3 = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2\ldots & 1\ldots & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \quad C_2 = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

Според тоа, детерминантата (1) можеме да ја запишеме на следниот начин:

$$\Delta = a_1 \cdot A_1 + a_2 \cdot A_2 + a_3 \cdot A_3,$$

а се покажува дека се точни и равенствата

$$\Delta = b_1 \cdot B_1 + b_2 \cdot B_2 + b_3 \cdot B_3 \quad \text{и} \quad \Delta = c_1 \cdot C_1 + c_2 \cdot C_2 + c_3 \cdot C_3,$$

каде што $B_i = (-1)^{2+i}\Delta_{i2}$ и $C_i = (-1)^{3+i}\Delta_{i3}$

се алгебарски комплементи на елементите b_i (од втората колона) и c_i (од третата колона) соодветно. Или општо, за кој било комплемент важи

$X_{ij} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}$ (i – број на редица, j – број на колона) за $\forall i,j = \{1,2,3\}$

Пример 2. *Да се развие детерминантата по елементите од првата колона*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

2. Дадените детерминанти разви ги по елементите од првата редица

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{б)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Забелешка. Познато е дека изразот $(-1)^{i+j}$ за секој $i = 1{,}23$ и за секој $j = 1, 2, 3$ ќе биде негативен ако збирот $(i + j)$ е непарен број, а позитивен ако збирот $(i + j)$ е парен број. Ако i е бројот на редицата а j – бројот на колоната, тогаш на елементот кој му одговара на алгебарскиот комплемент A_i, B_i, C_i, ќе биде негативен за $(i + j)$ непарно и позитивен за $(i + j)$ парно.

Од претходниот пример, очигледно алгебарскиот комплемент $A_2 = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ е негативен, бидејќи елементот 5 се најдува во 2–та редица и 1–та колона.

Пример 3. *Одреди ја вредноста на детерминантата*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-7) - 2 \cdot 5 = -31$$

3. Одреди ја вредноста на детерминантата $\quad$ а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ $\quad$ б) $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Забелешка. Ако во детерминантата има елемент нула, тогаш најпогодно (и побрзо) е, детерминантата да се развие по таа редица (колона) во која се најдува елементот нула (види пр. 3).

Вредноста на детерминантата може уште полесно и побрзо да се пресмета со примена на т.н. **Сарусово правило.**

Истото, се состои во тоа, што од десната страна на дадената детерминанта ѝ ги допишуваме првите две колони, и со тоа ја добиваме следнава правоаголна шема:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - c_1b_2a_3 - c_2b_3a_1 - c_3b_1a_2$$

$$- \quad - \quad - \qquad\qquad + \quad + \quad +$$

Пример 4. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 0 + (-3) \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 0 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 - 3 - 3 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 \cdot (-3) = -32$

Во понатамошите примери, изразот кој содржи множител нула не го пишуваме.

4. Одреди ја вредноста на детерминантата

а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

6. Својства на детерминанта од III ред.

1°. Вредноста на детерминантата од трет ред не се менува ако редиците и колоните си ги заменат местата,

2°. Ако сите елементи во некоја редица (колона) се нули, тогаш и самата детерминанта е нула,

3°. Ако две редици (колони) на една детерминанта од трет ред се еднакви, тогаш детерминантата е еднаква на нула,

4°. Детерминантата од трет ред го менува својот предзнак ако две редици (колони) си ги заменат местата,

5°. Заедничкиот множител на сите елементи од една редица (или колона) може да се изнесе како множител на цела детерминанта,

6°. Вредноста на детерминантата не се менува ако кон елементите на една колона (редица) се додадат соодветните елементи од друга колона (редица) помножени со ист број k.

7°. Вредноста на детерминантата е нула, ако елементите барем на две редици (колони) се пропорционални меѓу себе.

Се остава на читателот, да ги докаже, односно потврди претходниве тврдења.

Пример 5. *Одреди ја вредноста на детерминантата*

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Решение. Уочливо е, дека првата и третата редица се пропорционални, па според тврдењето (7), вредноста на детерминантата е нула (провери!).

Пример 6. *Одреди ја вредноста на детерминантата*

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Решение
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+(-2) & 1 & 3 \\ -4+4 & -2 & 5 \\ -3+2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -5-6=-11$$

Примерот е решен со примена на тврдењето (6), кое придонесува во детерминантата да добиеме елементи нула и кое ни овозможува побрзо определување на нејзината вредност.

Вежби

5. Одреди ја вредноста на детерминантата:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix}$

г) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$ д) $\begin{vmatrix} -a & 1 & a \\ b & -1 & -b \\ -c & 2 & c \end{vmatrix}$ ѓ) $\begin{vmatrix} 1-a & 3 & 3 \\ 3 & 5+a & 3 \\ 6 & 6 & 4-a \end{vmatrix}$

е) $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}$ ж) $\begin{vmatrix} a^2+y^2 & y^2 & a^2 \\ x^2 & a^2+x^2 & a^2 \\ x^2 & y^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix}$

6. Реши ги по x равенките:

а) $\begin{vmatrix} x & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 2x \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ б) $\begin{vmatrix} x+1 & x+3 & 1 \\ x+2 & 2 & x+2 \\ 3 & x+1 & x+3 \end{vmatrix} = 0$

в) $\begin{vmatrix} x+3 & 5 & 6 \\ 1 & 3-x & 6 \\ 1 & 1 & x+4 \end{vmatrix} = 0$ г) $\begin{vmatrix} 0 & x+a & x+b \\ x-a & 0 & x+c \\ x-b & x-c & \end{vmatrix} = 0$

I. 10. Примена на детерминанта од III ред за решавање на систем од три линеарни равенки со три променливи

ⓐ▫ Нека е даден системот
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \qquad \text{............ (1)}$$

Коефициентите пред x, y, z земени како прва, втора, односно трета колона, формираат детерминанта Δ, наречена детерминанта на системот. Ако слободните членови ги поставиме на соодветните места од коефициентите на x, y односно z, формираме детерминанти Δx, Δy односно Δz. Ако е $\Delta \neq 0$, тогаш за решавањето на системот (1) ги користиме следниве формули:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta},$$

наречени **Крамерови формули** за решавање на системи линеарни равенки.

Пример 1. *Реши го системот равенки*
$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ -x + y - z = -1 \\ 3x - y + 3z = 5 \end{cases}$$

Решение. Прво ги определуваме детерминантите:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -2\left(-\frac{1}{2}\right)(-3 + 1) = -2$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 5 & -1 \end{matrix} = 3 + 10 + 2 - 10 - 1 - 6 = -2$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (5 - 3) = -2$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (5-3) = -2$$

За решението на системот, добиваме

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

1. Реши го системот $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 2y - z = -3 \\ -x + 3y + 2z = -1 \end{cases}$

Вежби

2. Со помош на детерминанти, реши ги системите равенки:

а) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - 3z = 1 \\ -x + 2y - z = -3 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y + z = 3a \\ x - y + z = a+2b \\ x + y - z = a \end{cases}$

б) $\begin{cases} -\frac{x}{2} - \frac{y-z}{3} = 0 \\ 2(x-y) - \frac{z}{2} = \frac{11}{2} \\ -x + z = -5 \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{x-a}{2} + \frac{y-1}{3} - 2z = -\frac{7+3a}{6} \\ \frac{x-1}{3} - \frac{y+a}{2} + \frac{z+1}{2} = -\frac{a}{2} \\ 2x - y + 3z = 3 \end{cases}$

3. Со воведување на нови променливи реши ги системите равенки:

а) $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{2y} + \frac{6}{z} = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{6}{y} + \frac{2}{z} = 1 \\ \frac{6}{5x} - \frac{9}{5y} + \frac{12}{z} = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{7}{x+y} + \frac{6}{x+z} = 2 \\ \frac{21}{x+y} - \frac{5}{y+z} = 2 \\ \frac{15}{y+z} - \frac{6}{x+z} = 2 \end{cases}$

4. Збирот на три броја е 113. Ако првиот број се подели со вториот се добива количник 2 и остаток 2, ако третиот се подели со првиот се добива ист количник и остаток. Кои се тие броеви?

5. Збирот на цифрите на еден трицифрен број е 11. Ако ги изменат местата цифрата на десетките и единиците ќе се добие број за 27 поголем од дадениот, а ако дадениот број го поделиме со цифрата на десетките се добива количник 212 и остаток 1.
Одреди го трицифрениот број.

6. Тројца работници вршат некоја работа. Првиот и другиот работник ја завршуваат таа работа за m дена, вториот и третиот за n дена, а третиот и првиот за p дена. За колку дена секој од нив ќе ја заврши таа работа?

I. 11 Графичко решавање на линеарни неравенки со две променливи

а. Познато е дека графикот на линеарната равенка

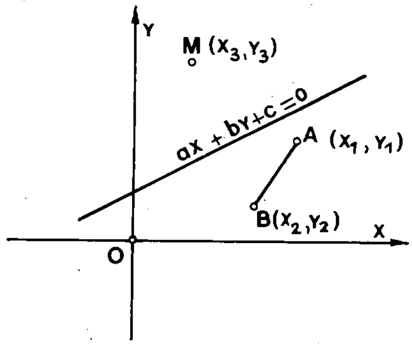
$$ax + by + c = 0, \quad \forall a, b, c \in \mathbf{R}$$

е права. Со оваа права множеството $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ на точки во рамнината $x0y$ е поделено на две подмножества – две полурамнини.

Нека, точката A лежи во една од полурамнините на која графикот на равенката $ax + by + c = 0$ ја дели рамнината $x0y$ (црт. 1.).

Тогаш, ако за точката A $(x_1\ y_1)$ $ax_1 + by_1 + c > 0$, следува и $ax + by + c > 0$ за која било друга точка $B(x_2\ y_2)$ во полурамнината во која лежи точката A.

Исто така, ако $ax_3 + by_3 + c < 0$ за точката M (x_3, y_3), тогаш $ax + by + c < 0$ за која било друга точка во полурамнината во која лежи точката M.



црт. 1

Да претпоставиме спротивното т.е. $ax_1 + by_1 + c > 0$ и $ax_3 + by_3 + c < 0$, при што (x_1,y_1) се координати на точката A и (x_3,y_3) на точката M. Овие точки лежат во различни полурамнини. Секако, во точките A и M $ax + by + c \neq 0$, бидејќи тие не лежат на правата $ax + by + c = 0$.

б. Во врска со претходното не е тешко да се опише постапката за **графичко решавање на линеарни неравенки со две променливи.** Имено, треба да се нацрта графикот на соодветната права и да се избере во секоја од добиените полурамнини по една точка за која да се испита точноста на разгледуваната неравенка.

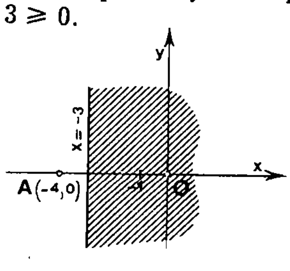
За илустрација, да се исшрафира онаа полурамнина во која припаѓа точката за која неравенката е точна.

Значи, решенијата на линеарната равенка со две променливи е множество точки од една полурамнина.

Пример 1. *Претстави го графички множеството на решенија на неравенките:* а) $x - 3 > 0$; б) $x - 3y > 0$; в) $4x - 2y + 3 \geqslant 0$.

Решение а).Најпрвин го цртаме графикот на правата $x = -3$ (црт. 2.)

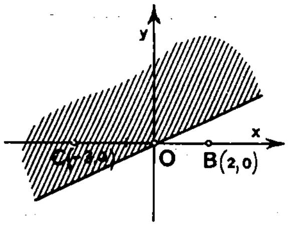
Точката О (0, 0) припаѓа на десната полурамнина (во однос на $x = -3$) и за неа неравенката $x <- 3$ е точна. Точката A (–4, 0) припаѓа на левата полурамнина и за неа неравенката $x \geqslant -3$ не е точна.



црт. 2

Според тоа, заклучуваме дека множеството решенија на неравенката $x > -3$ е шрафираниот дел на црт. 2.

б) Го цртаме графикот на правата $x - 3y = 0$ (црт. 3)

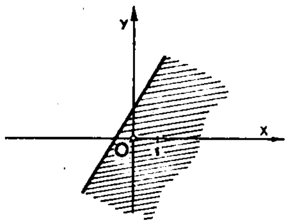


црт. 3

Точката B (2, 0) припаѓа на десната (или долната) полурамнина и за неа неравенката $x - 3y < 0$ не точна. Точката C (–3, 0) припаѓа на левата (горната) полурамнина и за неа неравенката $x - 3y < 0$ е точна.

Според тоа, множеството решенија на дадената неравенка е полурамнината во која припаѓа точката C. Шрафираниот дел на црт. 3. е решение на неравенката.

в) Графички ја претставуваме правата $4x - 2y + 3 = 0$ (црт. 4).



црт. 4

Точката O (0, 0) припаѓа на десната полурамнина и за таа точка дадената неравенка е точна. Што значи, множеството решенија на неравенката е шрафираниот дел на црт. 4, заедно со множеството точки од правата $4x - 2y + 3 = 0$,

бидејќи важи знакот за неравенство „$\geq$" (затоа правата се црта задебелена.

Вежби

Графички претстави го множеството решенија на неравенките:

1. а) $x - 2 > 0$ б) $2x + 3y > 0$ в) $2x - y + 6 \leq 0$
2. а) $x > -2$ б) $x \leq 3$ в) $y \leq -3$ г) $y > 2$
3. а) $x - 2y > 0$ б) $2x - y \leq 0$ в) $2x - 3y \geq 0$ г) $\frac{1}{2}x + y \geq 0$
4. а) $2x - y + 4 > 0$ б) $x + y - 4 \leq 0$ в) $3x - y + 1 \geq 0$

5. Определи го заедничкото решение на неравенките

$-3x + y - 1 \leq 0 \wedge -x - y + 4 \geq 0$

I. 12. Графичко решавање на систем линеарни неравенки со две променливи

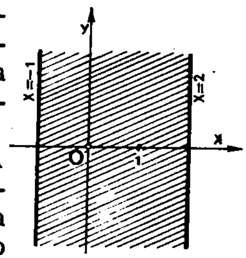
а. Под систем линеарни неравенки подразбираме конјункција од неколку линеарни неравенки. Така, на пример, систем од две линеарни неравенки со две променливи е $x - y > 2 \wedge x + y < 4$. Конјункцијата на неравенките $x + y + 1 \geqslant 0 \wedge 2x - y - 1 < 0 \wedge x + 3y > 0 \wedge x \leqslant 0$ е пример на систем од четири линеарни неравенки со две променливи.

Множеството од решенија на системот линеарни неравенки е пресекот на множеството решенија на неравенките кои влегуваат во системот. Ако така добиеното множество не е празно, тогаш системот е можен. Ако пресекот на множеството решенија на неравенките е празно множество, тогаш велиме дека системот е неможен, односно нема решение.

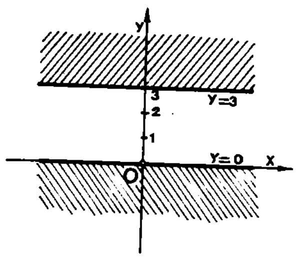
Пример 1. Системот $x > -1 \wedge x < 2$ е можен (има решение).

Повикувајќи се на I. 11 за графичкото решавање на линеарните неравенки, очигледно е дека решението на системот е пресекот на множеството решенија на неравенките $x > -1$ и $x < 2$ (црт. 1).

Од друга страна, системот $y \geqslant 3 \wedge y \leqslant 0$ не е можен, бидејќи пресекот на множеството решенија на неравенките $y \geqslant 3$ и $y \leqslant 0$ е празно множество (црт. 2).



црт. 1



црт. 2

1. Графички реши ги системите

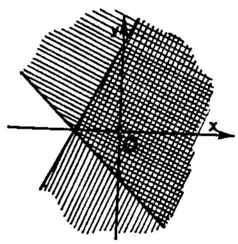
а) $x \geqslant -2 \wedge x < 3$, б) $y > 2 \wedge y \leqslant -1$

Пример 2. *Реши го графички системот линеарни неравенки*

$$-2x + y - 4 < 0 \wedge x + y + 2 > 0$$

Решение. Во избраниот координатен систем xOy ги претставуваме графички правите $-2x + y - 4 = 0$ и $x + y + 2 = 0$. Определувањето (со избор на точки) на множеството решенија на секоја од равенките познато е од I.11.

Пресекот на тие множества на решенија (двојно ишрафираниот дел) го дава решението на дадениот систем (црт. 3).



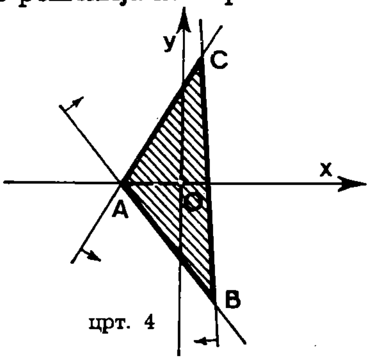
црт. 3

2. Графички реши ги системите а) $3x - y + 2 \geqslant 0 \wedge x + 2y - 1 > 0$ б) $-2x + y \geqslant 1 \wedge x - 2y + 1 < 0$

Пример 3. *Реши ги графички системите линеарни неравенки*

а) $2x - y + 4 > 0 \wedge x + y + 2 > 0 \wedge 10x + y < 16$

Решение: Графичкото решение M на првите две неравенки се бара како и во претходниот пример. Според тоа, множеството решенија на системот од овој пример е пресекот на множеството, решенија M и множеството решенија на неравенката $10x + y < 16$ (црт. 4).



црт. 4

Очигледно, е дека точката O (0,0) ги задоволува трите неравенки. Што значи, решението на дадениот систем неравенки е внатрешноста на триаголникот A (–2,0) B (2,–4), C (1,6).

3. Графички реши ги системите линеарни неравенки:

$$x + 2y - 1 < 0 \wedge x - y + 1 > 0 \wedge 2x + y - 2 < 0$$

б. Вежби

Графички определи го решението на системите линеарни неравенки.

4. а) $x - 2y < 0 \wedge 2x - y > 0$ б) $3x + 5y - 15 \leqslant 0 \wedge x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0$

5. а) $x - 2y < 0 \wedge 2x - y > 0 \wedge x + y > 6$ б) $x + y \geqslant 2 \wedge x + y \leqslant -1 \wedge x - 2y \geqslant -3$

6. $x + y - 1 \geqslant 0 \wedge x + y - 2 \geqslant 0 \wedge 2x + 2y \geqslant -3$

7. $3x - y \geqslant -1 \wedge x + y \leqslant 4 \wedge x + y \geqslant -1 \wedge x - y \leqslant 3$

8. $2x + y - 1 \geqslant 0 \wedge x + 2y - 1 \geqslant 0 \wedge x + y - 2 \geqslant 2 \wedge x + y - 1 \geqslant 0$

I. 13. Примена на систем линеарни неравенки со две променливи за решавање на поедноставни задачи

а. Овде ќе се задржиме на минимизација, односно максимизација на линеарната функција

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n,$$

која се вика функција на целта, со ограничувања

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots & + \ a_{1n}x_n \geqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots & + \ a_{2n}x_n \geqslant b_2, \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + & a_{mn}x_n \geqslant b_m \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \dots\dots\dots\dots x_n \geqslant 0 \ \dots\dots\dots\dots \qquad (2)$$

Сите решенија на системот (1) кои ги исполнуваат условите (2) се викаат **допуштени решенија.** Допуштеното решение за кое функцијата L постигнува минимум (максимум) се вика **оптимално решение.**

За решавање на некои проблеми разработени се разни методи. Овде ќе се задржиме на **графичкиот метод,** каде функцијата на целта и ограничувањата учествуваат со **две променливи.**

Решавањето ќе го видиме на неколку примери.

Пример 1. Да се определи максимум на функцијата

$$L = x + y$$

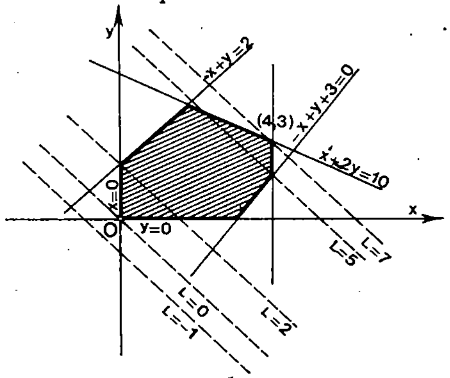
Со ограничувања $\quad -x + y \geqslant -3 \wedge x \leqslant 4 \wedge x + 2y \leqslant 10 \wedge -x + y \ \ 2,$

како и $\quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$

Решение. Во избраниот координатен систем $x0y$ ги цртаме графички правите $-x + y + 3 = 0$, $x = 4$, $x + 2y = 10$ и $-x + y = 2$ и проверуваме дали координатниот почеток ги задоволува дадените неравенки или не.

Со замена за $x = 0$ и $y = 0$ добиваме дека сите неравенки се точни.

Според тоа, множеството на допуштените решенија е шрафираната област на црт.1, при што се земени и условите за ненегативност на решенијата.



црт. 1

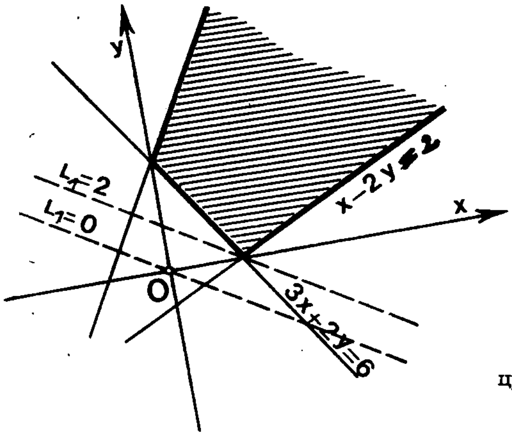
Ако функцијата L на целта ја изедначиме на нула, добиваме $x + y = 0$, т.е. $y = -x$. Правата $y = -x$ се „движи" од лево на десно, и максимум функцијата ќе постигне кога правата $y = -x$ ќе проаѓа низ точката (4, 3). Тогаш $max.\ L = 7$. Ако бараме минимум, тој ќе биде постигнат за онаа права која проаѓа низ точката (0,0). Според тоа, било да бараме максимум или минимум, добиваме едно решение.

1. Да се определи оптималната вредност на функцијата $L = 2x + 3y$ со ограничувања $x + y \leqslant 4 \wedge 3x + y \geqslant 4 \wedge x + 5y \geqslant 4 \wedge \wedge\, x \leqslant 3 \wedge y \leqslant 3$

2. Да се определи максималната вредност на функцијата $L = 2{,}5\,x + y$ со ограничувања $2x + 5y \leqslant 15 \wedge 5x + 2y \leqslant 10 \wedge x,y \geqslant 0$

Пример 2. *Да се определи најмалата и најголемата вредност на функциите* $L_1 = x + y$ и $L_2 = -2x - y$ во областа

$$3x + 2y \geqslant 6 \wedge x - 2y \leqslant 2 \wedge -3x + 2y \leqslant 6 \wedge x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0$$



црт. 2

Функцијата L_1 има најмала вредност $L_1 = 2$ за $x = 2$, $y = 0$, додека најголема вредност нема (црт. 2). Слично се заклучува и за функцијата L_2 да нема најмала вредност, а да има најголема $L_2 = -1$ за $x = 1$, $y = 0$.

Пример 3. (Практичен пример). *Постојат два пункта A и B на некој вид производ и три пункта I,II,III на потрошувачка. Во пунктот A се произведуваат 250 единици, а во пунктот B – 350 единици. Во пунктот I потребни се 150 единици, во пунктот II – 240 единици и во пунктот III – 210 единици производ.*

Вредноста на превозот по единица производ од пунктот на производство во пунктот на потрошувачка е дадена со следната табела.

Табела 1.

	I	*II*	*III*
A	4	3	5
B	5	6	4

Треба да се состави план на превоз на производство, при кој вкупните расходи на превозот ќе бидат најмали.

Да го означиме количеството на производи, превезени од пунктот A во пунктот I, со x, од пунктот A во пунктот II – со y. Како потребите во пунктот I се 150 единици, тогаш од пунктот B потребно е да се довезат $(150 - x)$ единици. Исто така од пунктот B во пунктот II треба да се довезат $(240 - y)$ единици. Понатаму, производството во пунктот A е 250 единици, а ние веќе распоредивме $(x + y)$ единици. За да се осигури наполно потребата во пунктот III, останува да се превезат $210 - (250 - -x - y) = x + y - 40$ единици во пунктот B.

Што значи, планот на превозот е даден со следната табела.

Табела 2.

I	*II*	*III*
x	y	$250-x-y$
$150-x$	$240-y$	$x+y-40$

За да ја определиме правата (целосна) вредност на превозот го поставуваме следниот израз:

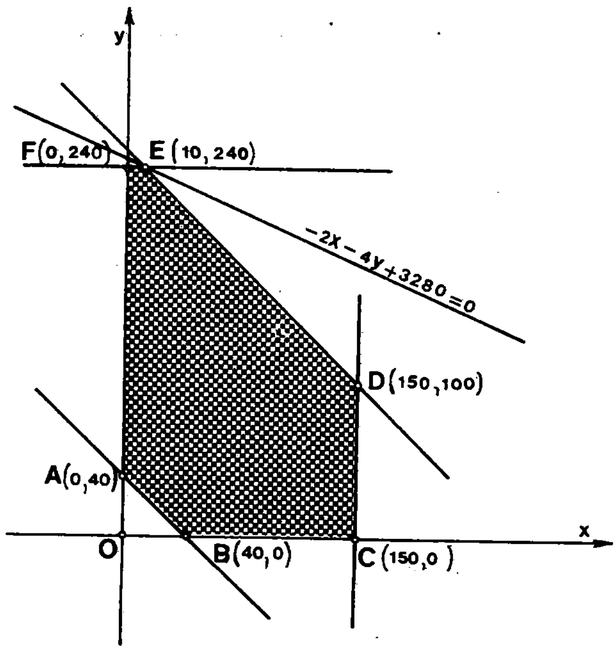
$$S(x,y) = 4x+3y+5(250-x-y) + 5\ (150-x) + 6\ (240-y) + 4\ (x+y-40) = -2x-4y+3280 \quad \ldots\ldots (1)$$

По условот на задачата потребно е да се најде минимум на тој израз. Но во овој пример x и y не можат да примат произволни вредности. Количеството на производите не може да биде негативен број. Затоа сите броеви во таблицата 2 се ненегативни, односно

$$x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \wedge 250-x-y \geqslant 0 \wedge$$
$$\wedge\ 150-x \geqslant 0 \wedge 240-y \geqslant 0 \wedge x+y-40 \geqslant 0, \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Што значи, нам ни е потребно да најдеме минимум на функцијата $S(x,y)$ во областа, зададена со системот неравенки (2).

Таа област изложена на црт.3 – е многуаголникот, ограничен со правите.



црт. 3

$x = 0,\ y = 0,\ 250 - x - 0,\ 240 - y = 0,\ x + y - 40 = 0$

Во избраниот координатен систем $x0y$ (црт. 16) ги нанесуваме спомнатите прави, а во нивниот пресек ги добиваме темињата на многуаголникот

A(0,40), B(40,0), C(150,0), D(150,100), E(10,240), F(0,240).

Функцијата $S(x,y)$ ќе добие најмала вредност во едно од темињата на многуаголникот ABCDEF.

За таа цел во функцијата $S(x,y)$ ги заменуваме координатите на темињата на многуаголникот и добиваме:

$S(0,40) = 3120$, $S(40,0) = 3200$, $S(150,0) = 2980$, $S(150,100) = 2580$, $S(10,240) = 2300$, $S(0,240) = 2320$

Што значи, функцијата $S(x, y)$ ќе добие најмала вредност 2 300 во точката $E(10,240)$. **За планот на превозот** ја добиваме табелата:

	I	*II*	*III*
A	10	240	0
B	140	0	210

Според тоа, од претходното имаме:

– од пунктот A во пунктот I треба да се превезат 10 единици производ
– – " II – " 240 – "
и.т.н. **Вредноста** на поставениот план е 2 300.

Името линеарно доаѓа оттаму што и ограничувањето и функцијата на целта се линеарни функции со променливи $x_1, \ldots, x_n$.

Задачите од овој тип се викаат задачи на **линеарнто програмирање.**

6. Вежби

Определи го оптималното решение на функцијата

3. $L=3x+2y$ со ограничувања $3x+2y\geq4 \wedge x+y\leq3 \wedge x+4y\geq3 \wedge x\leq2 \wedge y\leq2 \wedge x, y\geq0$

4. $L=x+y$ " $3x-y\leq-3 \wedge x-y\geq0 \wedge x,y\geq0$

5. $L=3x+2y$ " $x+y\geq1 \wedge x-2y\geq-3 \wedge x\geq2 \wedge x, y\geq0$

6. $L=x+y$ " $0\leq-x+y\leq1 \wedge 0\leq x+y\leq3 \wedge 0\leq x\leq1 \wedge 0\leq y\leq2$

I. 14. Транспортен проблем

Како и во претходните примери, транспортниот проблем се состои во минимизација на функцијата

$$
\begin{aligned}
L = {} & c_{11}\,x_{11} + c_{12}\,x_{12} + \dots + c_{1n}\,x_{1n} \\
& + c_{21}\,x_{21} + c_{22}\,x_{22} + \dots \quad c_{2n}\,x_{2n} \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + c_{m1}\,x_{m1} + c_{m2}\,x_{m2} + \dots + c_{mn}\,x_{mn}.
\end{aligned}
$$

Функцијата L се вика **функција на целта.**

Минимизација на функцијата L се постигнува со погоден избор на променливи кои мораат да ги исполнуваат следните услови:

$$
\begin{aligned}
& x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1, \\
& x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = a_2. \\
& \text{-----------------------------} \\
& x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m,
\end{aligned}
$$

како и

$$
\begin{aligned}
& x_{11} + x_{21} + \dots + x_{n1} = b_1, \\
& x_{12} + x_{22} + \dots + x_{n2} = b_2, \\
& \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \quad \vdots \\
& x_{1m} + x_{2m} + \dots + x_{nm} = b_n
\end{aligned}
$$

При тоа мора да биде

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = b_1 + b_2 + \dots + b_n.$$

Покрај тоа променливите x_{ij} $(i = 1,2,.., m;\ j = 1,2,..,n)$ мораат да бидат ненегативни, т.е.

$$x_{ij} \geqslant 0 \ (i = 1,2, \dots\dots, m;\ j = 1,2,3,..n)$$

Пример 1. *Нека во магацините A_1, A_2, A_3, се наоѓаат по a_1, a_2, a_3 единици на некој производ кој треба да се пренесе на потрошувачите B_1, B_2, B_3, B_4 на тој начин што потрошувачите B_1, B_2, B_3, B_4 добиваат по b_1, b_2, b_3, b_4 единици производ. Да претпоставиме дека превозот може така да се организира така што да се достави на секој потрошувач во кој било магацин. Превозот треба да се организира така што вкупните трошоци на превозот да бидат што помали.*

Во вака формулирана задача величините a_i, b_i, c_i(i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4) се фиксирани, додека величните x_{ij} можат на одреден начин да се бираат (планираат). Бидејќи, вкупната цена на превозот е

$$
\begin{aligned}
L = {} & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{14}x_{14} \\
& + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} \\
& + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32} + c_{33}x_{33} + c_{34}x_{34}
\end{aligned}
$$

задачата се сведува на изборот на величините x_{ij} така што L да биде минимално, со услови:

1°. Секој од трите магазини да ја отпреми целокупната количина производ.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = a_1,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = a_2,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = a_3,$$

2°. На секој потрошувач да се испорача потребната количина производ:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = b_3$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = b_4$$

3°. Количината на производите се изразува во ненегативни броеви, т.е. $x_{ij} \geqslant 0$ $(i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4)$

4°. Количината во магацините е еднаква со количината што е потребна на потрошувачите т.е. $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$

Пример 2. Едно претпријатие има четири градилишта кои се снабдуваат со бетон од три производни места. На првото производно место A_1 се произведува дневно 250 тони бетон, на производното место A_2 се произведува 350 тони дневно и, најпосле на производното место A_3 се произведува 200 тони бетон дневно. На градилиштето B_1 потребно му е дневно 220 тони, на градилиштето B_2 потребно му е 170 тони дневно, на градилиштето B_3 потребно му е 200 тони дневно и на градилиштето B_4 потребно му е 210 тони бетон дневно. Цената на превозот од A во B дадени се во динари по тон со следната табела.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	35	30	27	20	250
A_2	40	25	32	35	350
A_3	25	45	30	30	200
b_i	220	170	200	210	$\Sigma a_i = \Sigma bi$

На пример, цената на превозот од A_2 до B_3 е 32 динари по тон. Со x_{ij} да го означиме количеството на превезениот бетон од A_i на градилиштета b_j. Вкупните трошоци за превозот се:

$$\begin{aligned} L = {} & 35x_{11} + 30x_{12} + 27x_{13} + 20x_{14} \\ & + 40x_{21} + 25x_{22} + 32x_{23} + 35x_{24} \ \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1) \\ & + 25x_{31} + 45x_{32} + 30x_{33} + 30x_{34} \end{aligned}$$

Количината на превозениот бетон треба да се бира така што вкупните трошоци на превозот да бидат минимални. При изборот на x_{ij}, мораме да водиме сметка за ограничувањата кои се наметнуваат за x_{ij} .

1°. Од секое производно место треба да се отпреми целокупната количина на произведениот бетон, т.е. мора да биде

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 250\\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 350 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)\\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 200
\end{aligned}
$$

2°. На секое градилиште треба да се испрати потребната количина бетон, т.е.

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 220\\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 170\\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 200 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)\\
x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 210
\end{aligned}
$$

3°. Количината на превезениот бетон се изразува во ненегативни броеви, т.е.

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

4°. Количината на произведениот бетон е еднаква на количината на превезениот, т.е.

$$250 + 350 + 200 = 220 + 170 + 200 + 210$$

Според тоа, проблемот се сведува на минимизација на функцијата L, која се вика **функција на целта**, со ограничувања (2), (3, и (4).

1. Од фабриките A_1 и A_2 дневно се испраќаат, соодветно, 60 и 40 вагони со некој хомоген производ. Приемни пунктови се магазините B_1, B_2, B_3. Дневната побарувачка на магазините изнесува, соодветно 30, 50 и 20 вагони. Оддалеченоста на фабриките од магазините (во km) е дадена во следната табела:

Доставка	Примател		
	B_1	B_2	B_3
A_1	40	20	50
A_2	25	100	30

Да се најде таков план на доставка на двете фабрики до трите магазини што транспортната работа при превозот на стоката ќе биде најмала.

6. Проблем на диета

Нека земеме пет производи кои имаат калоричност, содржина на белковини, калциум, витамин A. Какви количества производи треба да се купат, за дневната побарувачка на организмот, при минимални трошоци.

За математички да ја формулираме оваа задача, претходно ја формираме табелата

Состојки	Леб	Месо	Зелка	Млеко	Компир	Дневна побарувачка
Калории	1254	1457	46	309	318	3000
Белковини	39	73	4	16	8	70(г)
Калциум	418	41	141	536	42	800(мг)
Витамин А	–	–	860	720	70	500(мг)
Цена во дол.	0,50	3,50	0,40	0,75	0,35	Минимум

Нека x е количество леб што треба да се купи, y – количество месо, z – количество зелка, u – количество млеко, v – количество компир.

За да биде задоволена побарувачката на организмот во калории треба да биде

$$1254x + 1457y + 46z + 309u + 318v = 3000, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

со белковини

$$39x + 73y + 4z + 16u + 8v = 70, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

со калциуми

$$418x + 41y + 141z + 536u + 42v = 800, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

со витамин A

$$860z + 720u + 70v = 500$$

Вкупната цена (во дол.) на производите, кои треба да се купат изнесува $S = 0{,}50x + 3{,}50y + 0{,}40z + 0{,}75u + 0{,}35v$. Со определување на x, y, z, u, $v \geqslant 0$ од (1), (2), (3), (4) и замена со S се наоѓа минималната вредност.

II.1. Проширување на множествата броеви

а. Првите чекори во изучувањето на математиката почнуваат со поимот **број и бројни множества.**

Основно множество на броеви е множеството на **природните броеви**

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\ldots, n, n + 1, \ldots\}$$

до кое се доаѓа со **пребројување** на елементите на множествата. За природните броеви рековме како се **собираат** и **множат.** За секои два природни броја a и b еднозначно е определен нивниот **збир** $a + b$, и нивниот **производ** $a \cdot b$, и тоа пак се природни броеви.
Значи, за секое $a, b \in \mathbf{N}$ важи

$$a + b \in \mathbf{N} \quad \text{и} \quad a \cdot b \in \mathbf{N}$$

Според тоа, велиме дека множеството **N** е **затворено** во однос на операциите собирање и множење. Овие две операции се **асоцијативни и комутативни,** а множењето е **дистрибутивно** спрема собирањето. Тоа значи, дека за кои било природни броеви a, b, c важи:

(А) $(a + b) + c = a + (b + c),\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (асоцијативност)
(К) $a + b = b + a\,,\ a \cdot b = b \cdot a$ (комутативност)
(Д) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (дистрибутивност)

1. Која од следниве равенки има решение во множеството **N**:

а) $x + 3 = 5$ б) $x + 3 = 1$ в) $x \cdot 3 = 6$ г) $2 \cdot x = 3$

б. Множеството на природните броеви не е затворено во однос на одземањето бидејќи разликата на кои било два природни броја не секогаш е природен број. Тоа значи дека постојат равенки по x, од видот

$$x + a = b \quad (a, b \in \mathbf{N}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

кои немаат решение во **N.** Такви се равенките

$$x + 1 = 1, \quad x + 2 = 1, \quad x + 5 = 2, \quad \text{итн.}$$

Всушност, тоа се равенки од видот (1) кај кои $a \geqslant b$.

Овој недостаток на множеството **N** е отстранет со проширување на множеството **N** со нулата и негативните броеви $-1, -2, -3, \ldots$, со што е добиено **множеството на целите броеви**

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Во множеството **Z** горенаведените равенки ги имаат следните решенија: $0, -1, -3$ итн.

Значи, секоја равенка $x + a = b$, каде што a и b се цели броеви, има единствено решение во $\mathbf{Z}$, дадено со $x = b - a$.

Операциите собирање и множење се проширени од $\mathbf{N}$ во $\mathbf{Z}$ и се асоцијативни и комутативни, а множењето е дистрибутивно спрема собирањето. Со други зборови, за кои било $a, b, c, \in \mathbf{Z}$ важат формулите (А), (К), (Д).

Множеството $\mathbf{Z}$ е затворено во однос на операциите: собирање, множење и одземање, т.е. ако $a, b,$ се цели броеви, тогаш и

$$a + b \in \mathbf{Z}, \quad a \cdot b \in \mathbf{Z} \quad \text{и} \quad a - b \in \mathbf{Z}$$

Пример 1. *Равенките:* $x + 2 = 4, \quad x + 1 = -1, \quad x \cdot 3 = -6,$ $3 \cdot x = -3$ *имаат решение во* $\mathbf{Z}$ *т.е. нивни решенија се:* $2, -2, -2, -1$.

2. Која од следниве равенки има решение во множеството $\mathbf{Z}$:

а) $x - 3 = 5$ б) $x + 2 = -1$ в) $x \cdot 3 = 5$, г) $x \cdot (-2) = 4$ д) $3x = 0$

б. Множеството $\mathbf{Z}$ не е затворено во однос на делењето, бидејќи, на пример $\frac{3}{2} \notin \mathbf{Z}$. Со други зборови, равенката $2x = 3$ нема решение во $\mathbf{Z}$. Општо, равенката од видот

$$ax = b \qquad (a,\ b \in \mathbf{Z}, \quad a \neq 0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

не секогаш има решение во $\mathbf{Z}$. Тоа е еден мотив за проширување на множеството $\mathbf{Z}$ во **множеството на рационалните броеви** $\mathbf{Q}$, т.е.

$$\mathbf{Q} = \left\{\frac{a}{b}, a,\ b \in \mathbf{Z}, \quad b \neq 0\right\}$$

Множеството $\mathbf{Q}$ е затворено во однос на операциите: собирање, множење, одземање и делење (освен делење со нулата). Ако a и b се рационални броеви и ако $a \neq 0$, тогаш равенката $ax = b$ има решение $\frac{b}{a}$, и притоа $\frac{b}{a}$ е рационален број.

Операциите собирање и множење во $\mathbf{Q}$ се асоцијативни, комутативни, а множењето е дистрибутивна операција во однос на собирањето, т.е. за кои било рационални броеви $a, b, c,$ важат формулите (А), (К), и (Д).

3. Која од следниве равенки нема решение во множеството $\mathbf{Q}$

а) $3 + x = -1$ б) $2x = -3$ в) $0 \cdot x = 3$ г) $-3x = 2$

4. Дали секогаш квадратен корен од рационален број е пак рационален број?

г. Познато е дека не постои рационален број x чиј квадрат е еднаков на 2, т.е. равенката $x^2 = 2$ нема решение во $\mathbf{Q}$, бидејќи $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$. Потребата за проширување на множеството $\mathbf{Q}$ е мотивирано, главно, од барањето равенката од видот

$$x^n = a \qquad (a \geqslant 0, \quad n \in \mathbf{N}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

да има решение. Тоа барање е остварено со воведување на нови броеви – наречени **ирационални броеви,** чие множество ќе го означуваме со **J.** Такви се броевите $\sqrt{2} = 1,4142...$, $\pi = 3,14159...$; 1, 020020002...; 0, 1121231234...

Множеството на **реалните броеви R** е воведено како **унија** на множеството на рационалните и ирационалните броеви, т.е.

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{J}$$

Со проширување на множеството **Q** во множеството **R,** добиваме множество затворено во однос на операциите: собирање, множење, одземање, делење (освен со нула) и вадење на парен корен од ненегативни броеви.

За секој реален број $a \geqslant 0$ и природен број n, равенката $x^n = a$ има единствено позитивно решение, што го означуваме со $\sqrt[n]{a}$. Собирањето и множењето во **R** се асоцијативни, комутативни, а множењето е дистрибутивно во однос на собирањето. Значи, ако a, b, c, се кои било реални броеви, тогаш за нив важат формулите (А), (К) и (D).

5. Која од следниве равенки има решение во множеството **R.**

а) $x + 1 = -2$ б) $x^2 - 4 = 0$ в) $x^2 + 1 = 0$ г) $2x^2 + 3 = 0$

Бидејќи квадратот на секој реален број е ненегативен број (или кратко запишано: $x \in \mathbf{R}$, $x^2 \geq 0$) тогаш во множеството на реалните броеви не постои ниту еден број чиј квадрат е – 1, т.е. ниеден реален број не е парен корен од бројот –1. Слично, ниту броевите $-\frac{1}{3}$, $-\sqrt{2}$, воопшто кој било негативен реален број, нема во тоа множество парен корен. Може и вака да се рече: Ниту една од равенките $x^2 + 1 = 0, x^2 + \frac{1}{3} = 0$, $x^2 + \sqrt{2} = 0$, воопшто $x^2 + a = 0$ ($a \in \mathbf{R}^+$), нема решение во множеството R.

Причината за тоа е што за секој $x \in \mathbf{R}$, важи $x^2 \geqslant 0$. Оттука, потребата за проширување на множеството на реалните броеви **R** во некое ново множество броеви, во кое што равенката во видот $x^n = a$ ($a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$) секогаш ќе има решение. Со проширување на множеството на реалните броеви се добива множество на **комплексните броеви,** со кое поконкретно ќе се запознаеме во наредната лекција.

Вежби

6. Ако a, $b \in \mathbf{N}$, тогаш во кое од досега спомнатите множества на броеви е решлива секоја од равенките:

а) $x - a = b$ б) $x + b = a$ в) $x : a = b$ г) $a \cdot x = b$

7. Со кои броеви треба да се прошири множеството **Z,** за равенката $ax + b = 0$ да биде решлива за a, $b \in \mathbf{Z}$ и $a \neq 0$.

8. Ако a, $b \in \mathbf{R}$ и $a \neq 0$, тогаш дали во множеството **R** е секогаш решлива равенката $ax^2 = b$.

9. Кое множество го претставува пресекот:

а) $\mathbf{N} \cap \mathbf{Z}$ б) $\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}$ в) $\mathbf{Q} \cap \mathbf{J}$

10. Со кое множество броеви треба да се прошири множеството **Q,** така што во новото множество на секоја точка од бројната оска да ѝ одговара определен број од тоа множество.

II. 2. Поим и еднаквост на комплексни броеви

Проширувањето на множествата броеви, т.е. проширувањето на поимот за број, главно, како што рековме, го вршиме за одредени равенки да имаат решение. Но, и при решавањето на многу други проблеми од науката, техниката и секојдневниот живот, сме принудени да го прошириме поимот за број. Сега ќе го извршиме последното проширување на поимот број, т.е. ќе се запознаеме со **комплексните броеви** чие множество ќе го означуваме со **C**.

а. Значи, си поставуваме задача да го изградиме (формираме) проширеното множество на реални броеви, во коешто равенката $x^2 + 1 = 0$ ќе има решение.

Да видиме каква форма (облик) мора да имаат елементите на тоа множество и како треба да ги дефинираме операциите собирање и множење во него.

Новото множество треба да ги исполнува следниве барања:

1°. да ги содржи реалните броеви, т.е. $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$

2°. да содржи барем еден број, чиј квадрат е -1,

3°. во множеството **C** дефинираме операции собирање и множење, кои се во склад со истите операции во **R**, и уште се асоцијативни, комутативни, а множењето е дистрибутивно спрема собирањето.

За да го задоволиме условот 2°, усвојуваме:

Симболот i е број, чиј квадрат е -1, т.е. таков што

$$i^2 \overset{def}{=} -1$$

Вака дефинираниот број i се вика **имагинарна единица.** Тој е решение на квадратната равенка $x^2 = -1$, и има **основна улога** во градбата на множеството на комплексните броеви **C.** Понекогаш пишуваме и $i = \sqrt{-1}$.

Воопшто, имајќи ги во предвид барањата 1° и 3° за секој реален број b и имагинарната единица i, множеството **C** треба да го содржи и нивниот производ $b \cdot i$ (затвореност во однос на операцијата множење). Исто така, множеството **C** освен реалниот број a и производот bi, треба да го содржи и нивниот збир $a + bi$ (затвореност во однос на операцијата собирање).

Следствено, множеството **C** ги содржи сите броеви од видот $a + bi$. Затоа прифаќаме

Д1	**Секој комплексен број да го има обликот $a + bi$ каде што a и b се кои било реални броеви, а i имагинарна единица, со својство $i^2 = -1$. Тогаш можеме да запишеме дека** $$\mathbf{C} = \{a + bi \mid a,b \in \mathbf{R}\}$$

б. Комплексниот број $a + bi$ често ќе го означуваме со z , т.е.

$$z = a + bi$$

Овој запис се вика **алгебарска или стандардна форма на комплексниот број.**

Притоа, бројот a се вика негов **реален дел**, а b – **имагинарен дел.** Тоа симболично го означуваме вака:

$$a = Re\ (z)\ ,\ \ b = Jm\ (z)$$

и читаме: a е реален дел од z. b е имагинарен дел од z.

Пример 1. $Re\ (3 + 2i) = 3, Jm\ (3 + 2i) = 2$

Пример 2. $Re\left(\frac{2}{3}i - \sqrt{5}\right) = -\sqrt{5},\ \ Jm\left(\frac{2}{3}i - \sqrt{5}\right) = \frac{2}{3}$

Забелешка. Во комплексниот број $a + bi$ знакот „+" меѓу a и bi, а исто и знакот „·" меѓу b и i (кој обично не се пишува) засега не го имаат вообичаеното значење, бидејќи операциите со новите броеви сè уште не се дефинирани.

За комплексниот број усвојуваме: ако $b = 0$, тогаш $a + bi \overset{def}{=} a$

Значи, комплексните броеви, чиј имагинарен дел е нула се поистоветуваат со реалните броеви, со што, всушност, реалните броеви се подмножество од комплексните броеви.

Ако $b \neq 0$, тогаш комплексниот број $a + bi$ се вика **имагинарен (нереален) број**, а ако $b \neq 0$ и $a =$ тогаш тој се вика и **чисто имагинарен број.**

1. Одреди го реалниот и имагинарниот дел на комплексниот број z, ако

а) $z = -5 + 2i$ б) $z = 4i - \sqrt{7}$ в) $z = \frac{a}{a^2 + b^2} = \frac{bi}{a^2 + b^2}$

2. Запиши го комплексниот број z, ако:

а) $Re\ (z) = 2, Jm\ (z) = 1$ б) $Re\ (z) = -\frac{1}{2}\ Jm\ (z) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Ако $b = 0$, тогаш $z = a + bi = a$ е реален број, а ако $a = 0$ и $b \neq 0$ тогаш $z = a + bi = bi$ е чисто имагинарен број.

3. Точно ли е дека: а) секој реален број, б) секој имагинарен број е комплексен број.

b. Очигледно е дека секој комплексен број е еднозначно определен, ако се знаат неговиот реален и имагинарен дел, па затоа дефинираме:

Д₂

За комплексните броеви $a + bi$ и $c + di$ велиме дека се **еднакви** - ако и само ако реалните делови им се еднакви и имагинарните делови им се еднакви, т.е.

$$a + bi = c + di <=> a = c \wedge b = d\ (a,b,c,d \in \mathbf{R})$$

Забележуваш дека еднаквоста на два комплексни броја е еквивалентна со две еднаквости меѓу реалните броеви, т.е.

$$z_1 = z_2 <=> Re\,(z_1) = Re\,(z_2) \wedge Jm\,(z_1) = Jm\,(z_2)$$

Пример 3. *За кои реални броеви x и y важи равенството*

$$(x-3)+(y+1)i=1-5i$$

Решение. Ако комплексните броеви од левата и десната страна на равенството ги означиме соодветно, со z_1 и z_2 ќе имаме

$Re\,(z_1)=x-3,\ Jm\,(z_1)=y-1,\ Re\,(z_2)=1,\ Jm\,(z_2)=-5$

Тогаш, според дефиницијата Д₁ даденото равенство ќе важи, ако е задоволен системот равенки

$$\begin{cases} x-3=1 \\ y+1=-5, \end{cases}$$ од каде што добиваме: $x=4,\ y=-6$

4. Најди ги реалните броеви x и y од равенствата:

а) $2x+(y-1)i=4-3i$ б) $x+2-yi=3-i$

За кои било два реални броја α и β важи законот за **трихотомија,** т.е. точно е само едно од следните тврдења:

$$\text{или } \alpha<\beta, \text{ или } \alpha=\beta, \text{ или } \alpha>\beta$$

Со други зборови реалните броеви може да ги подредуваме. За комплексните броеви, пак, z_1 и z_2 можеме да кажеме дека $z_1=z_2$ или $z_1\neq z_2$ т.е. комплексните броеви **не се подредуваат.**

За вториот случај, за нееднаквите комплексни броеви $z_1\neq z_2$ не можеме да ја дефинираме релацијата „е поголемо од“, односно „е помало од”, со други зборови, нема смисла да зборуваме дека, на пример $1+2i$ е помал или поголем од $2+i$.

Значи, во множеството **C** не е дефинирана релацијата на подредување како во множеството **R.** Оваа загуба е занемарлива во однос на она што добиваме со проширувањето на множеството **R** во **C.**

Комплексните броеви, на прв поглед се апстрактни, но тие денес наоѓаат широка примена во хидротехниката, агротехниката, електротехниката, физиката и во низа други природни науки.

Вежби

5. Запиши ги во форма на комплексен број реалните броеви:

$$-2,\ \sqrt{3},\ -\frac{1}{3},\ \pi,\ 1-\sqrt{2}$$

6. Одреди го реалниот и имагинарниот дел на комплексните броеви:

а) $z=2-i$ б) $z=\dfrac{2+i}{3}$ в) $z=x-2yi+1$ г) $z=5i$

7. За кои реални броеви x и y ќе важат равенките:

а) $2x+(y+1)i=4+3i$ б) $x+2+yi=3+i$

в) $x-1+(2-y)i=1-i$ г) $x+3-2yi=-6i$

д) $\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{x-y}{2}\,i=3$ ѓ) $x-1+\dfrac{2-3yi}{2}=2i$

II.3. Операции со комплексни броеви

Според барањето 3° од претходната лекција рековме дека комплексните броеви ќе ги собираме и множиме на сличен начин како и реалните броеви.

Со комплексните броеви оперираме слично како со реални полиноми. Поблиску, комплексните броеви ги собираме, множиме, одземаме како да се полиноми по i. Во така добиениот резултат насекаде i^2 го заменуваме со -1 (во согласност со равенката $i^2 = -1$).

Пример 1. *Образувај го збирот и производот на комплексните броеви* $2 + 3i$ и $1 + 2i$.

Решение. На основа претходно реченото, дадените комплексни броеви ги земаме како полином (од прв степен) по i. Оттука збирот го одредуваме на следниот начин:

$$\begin{aligned}(2 + 3i) + (5 + 2i) &= 2 + 3i + 5 + 2i = 2 + 5 + 3i + 2i = \\ &= (2 + 5) + (3 + 2)i = 7 + 5i.\end{aligned}$$

На сличен начин го образуваме производот

$$\begin{aligned}(2 + 3i) \cdot (5 + 2i) &= 2\,(5 + 2i) + 3i(5 + 2i) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 2i + 3 \cdot 5i + 3 \cdot 2i^2 = \\ &= 2 \cdot 5 + (2 \cdot 2 + 3 \cdot 5)i + 3 \cdot 2i^2 \text{(среден полином по } i) \\ &= 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2\,(-1) + (2 \cdot 2 + 3 \cdot 5)i = \\ &= (2 \cdot 5 - 3 \cdot 2) + (2 \cdot 2 + 3 \cdot 5)i = \\ &= 4 + 19i\end{aligned}$$

Нека сега $a_1 + b_1i$, $a_2 + b_2i$ се два произволни комплексни броја. Повторувајќи ја постапката како во примерот **1**, лесно доаѓаме до дефиницијата за собирање и множење на комплексни броеви.

Д1

Збир на комплексните броеви $a + bi$ **и** $c + di$ **се вика комплексниот број** $(a + c) + (b + d)i$, **т.е.**

$$(a + bi) + (c + di) \stackrel{\text{def}}{=} (a + c) + (b + d)i \qquad (1)$$

Од дефиницијата следува дека за збирот на комплексните броеви z_1 и z_2 важи:

$$Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$$
$$\mathrm{Jm}(z_1 + z_2) = \mathrm{Jm}(z_1) + \mathrm{Jm}(z_2)$$

Бидејќи комплексниот број $a + bi$ е наполно определен со својот реален и имагинарен дел, тогаш и збирот на два комплексни броја согласно равенството (1) секогаш постои, и е еднозначно определен. Според тоа:

Множеството на комплексните броеви C е затворено во однос на операцијата собирање, т.е.

$$\forall\, z_1, z_2 \in \mathbf{C} \Rightarrow (z_1 + z_2) \in \mathbf{C}$$

1. Одреди го збирот на броевите

а) $2-3i$ и $5+2i$ б) $-3+3i$ и $2-3i$ в) $2-5i$ и $-2+5i$

Д₂ **Производ на комплексните броеви** $a+bi$ **и** $c+di$ **се вика комплексниот број** $(ac-bd)+(ad+bc)i$, т.е.

$$(a+bi)(c+di) \stackrel{\text{def}}{=} (ac-bd)+(ad+bc)i \qquad (2)$$

Гледаме, производот на комплексните броеви $a+bi$ и $c+di$ согласно со равенството (2), е определен со парот реални броеви $(ac-bd, ad+bc)$. Бидејќи таа двојка реални броеви секогаш постои (зошто?), следува дека производот на секои два комплексни броја постои, и пак е некој комплексен број.

Според тоа:

Множеството на комплексните броеви е затворено во однос на операцијата множење, т.е.

$$\forall\ z_1, z_2 \in \mathbf{C} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 \in \mathbf{C}$$

2. Одреди го производот на броевите

а) $1-i$ и $2+3i$ б) $-2+3i$ и $-2-3i$ в) $5i$ и $3-2i$

б Да ја разгледаме сега разликата на комплексните броеви a_1+b_1i и a_2+b_2i. Одземајќи ги тие броеви како полиноми по i, добиваме:

$$(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i) = a_1+b_1i-a_2-b_2i = (a_1-a_2)+(b_1-b_2)i, \quad \text{или кратко}$$

$$(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i) = (a_1-a_2)+(b_1-b_2)i \qquad (3)$$

Равенството (3) ни го дава следното

Правило: Разликата на два комплексни броја е комплексен број, чиј реален дел е еднаков на разликата од реалните делови, а имагинарниот дел е еднаков на разликата од имагинарните делови на дадените броеви.

Се забележува дека, до равенството (3) се доаѓа собирајќи ги бројот a_1+b_1i со бројот a_2+b_1i од каде за разликата важи следното равенство

$$(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i) = (a_1+b_1i)+(-a_2-b_2i)$$

Комплексниот број $-a-bi$ е **спротивен број на бројот** $a+bi$, бидејќи $(a+bi)+(-a-bi)=0$. Ако е z комплексен број, тогаш $-z$ е спротивен број на бројот z.

Од равенството (3) и затвореноста на одземањето во множеството $\mathbf{R}$ следува дека:

Множеството на комплексните броеви C е затворено во однос на операцијата одземање т.е.

$$\forall\ z_1, z_2 \in \mathbf{C} \Rightarrow (z_1-z_2) \in \mathbf{C}$$

Пример 2. *Разликата на комплексните броеви* $2 + 3i$ и $5 - 2i$ е:

$$(2 + 3i) - (5 - 2i) = 2 + 3i - 5 + 2i = (2 - 5) + (3 + 2)i = -3 + 5i$$

3. Одреди ја разликата на броевите

а) $1 - i$ и $3 - 2i$ б) $2i + 3$ и $-2i + 1$ в) $-1 + 2i$ и $3i + 1$

Досега видовме дека множеството на комплексните броеви е затворено во однос на собирањето, множењето и одземањето, односно дека збирот, производот и разликата на два комплексни броја пак е комплексен број.

Пред да го разгледаме делењето, ќе истакнеме еден многу важен случај кај множењето на комплексните броеви:

Производот на комплексниот број $a + bi$ со бројот $a - bi$ е реален број $a^2 + b^2$. Имено, врз основа формулата за разлика на квадрати (која важи и за полиноми, па според тоа и за комплексните броеви), имаме

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2i^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2 \quad \text{................} \quad (4)$$

Примери 3. $(3 + 2i)(3 - 2i) = 3^2 - (2i)^2 = 9 - 4i^2 = 9 + 4 = 13,$

4. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36}$

Комплексниот број $a - bi$ е таканаречен **конјугирано комплексен број** за бројот $a + bi$, т.е.

Два комплексни броја, кои имаат еднакви реални делови, а имагинарните делови им се спротивни броеви се викаат конјугирано комплексни броеви.

Од дефиницијата следува дека:

За секој комплексен број z постои еден и само еден нему конјугиран комплексен број, кој ќе го означиме со $\overline{z}$, т.е. на

$$z = a + bi \quad \text{одговара} \quad \overline{z} = a - bi$$

За конјугирано комплексните броеви важат следниве својства:

1°. Збирот и производот на конјугирано комплексните броеви z и $\overline{z}$ е реален број:

$$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a + 0 \cdot i = 2a$$

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

Пример 5. *Скрати ја дропката* $\dfrac{a^2 + 1}{a - i}$

Решение. Бидејќи $a^2 + 1 = (a + i)(a - i)$ тогаш, имаме

$$\frac{a^2 + 1}{a - 1} = \frac{(a + i)(a - i)}{a - i} = a + i$$

4. Скрати ги дропките: а) $\dfrac{a - 2i}{a^2 + 4}$ б) $\dfrac{4x^2 - 1}{2x + i}$

2° За кои било комплексни броеви z_1 и z_2 важат равенствата

а) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ б) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ в) $\overline{(\overline{z})} = z$. Докажи!

Пример 6. *Одреди ја вредноста на изразот* $z - 2\overline{z} + 3$ за $z = 2 - 3i$

Решение. Бидејќи $z = 2 - 3i$, тогаш $\overline{z} = 2 + 3i$, па имаме:

$$z - 2\overline{z} + 3 = (2 - 3i) - 2(2 + 3i) + 3 = 2 - 3i - 4 - 6i + 3 = 1 - 9i$$

5. Упрости го изразот $2\overline{z} - 3z + 1$ за:

а) $z = 1 - 2i$ в) $z = \frac{1}{2} + i$

б) $z = 3i - 2$ г) $z = \sqrt{2} + 3i$

Оперирајќи со комплексните броеви како со полиноми, лесно образуваме количник на комплексниот број $a + bi$ со реалниот број k кој е различен од нула. На пример, $\frac{3 - 6i}{3} = 1 - 2i$. Го поставуваме сега овој проблем: Дали постои комплексен број z таков што $(a + bi) \cdot z = c + di$ односно дали постои количник на комплексниот број $c + di$ со $a + bi$?

Проблемот го решаваме на следниот начин: Бидејќи $z \cdot \overline{z}$ е реален број, претходната равенка ја множиме со $a - bi$, т.е. со конјугиран број на $a + bi$. Така ја добиваме равенката

$$(a + bi)(a - bi) \cdot z = (c + di) \cdot (a - bi)$$

еквивалентна со првата равенка. Користејќи ја формулата

$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$, добиваме $(a^2 + b^2) \cdot z = (ac + bd) + (ad - bc)i$, т.е.

$$z = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}\, i$$

До количникот може да се дојде и на следниот начин (копирајќи ја постапката за **рационализација на именител**):

$$\frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di)(a - bi)}{(a + bi)\cdot(a - bi)} = \frac{(ac + bd) + (ad - bc)i}{a^2 + b^2} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad + bc}{a^2 + b^2}\, i$$

Според тоа, за количникот на комплексните броеви $c + di$ **со** $a + bi$ **добиваме**

$$\frac{c + di}{a + bi} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}\, i$$

Ова равенство ни го дава **правилото** за пресметување на количникот на два комплексни броја.

Бидејќи, количник на два комплексни броја е комплексен број, следува:

Множеството на комплексните броеви е затворено во однос на операцијата делење, т.е.

$$(\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C} \wedge z_2 \neq 0) \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} \in \mathbf{C}$$

Пример 7.

$$\frac{3+2i}{2i-1} = \frac{3+2i}{-1+2i} \cdot \frac{-1-2i}{-1-2i} = \frac{-3-6i-2i+4}{1+4} = \frac{1-8i}{5}$$

6. Пресметај ги количниците:

а) $\frac{2-i}{3-2i}$ б) $\frac{2i-3}{i+1}$

в) $\frac{1-i}{2i-3}$ г) $\frac{1-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-i}$

Пример 8. Реши ја по z равенката $(3+2i)\cdot z = 1-i$

Решение. Ако за z го замениме изразот $x+yi$ добиваме:

$(3+2i)(x+yi) = 1-i$, или $(3x-2y)+(2x+3y)i = 1-i$. Користејќи ја еднаквоста на два комплексни броја, го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 2x+3y=-1, \end{cases} \text{ од каде } \quad x = \frac{1}{13},\ y = \frac{1}{13} - \frac{5}{13}i \text{ т.е. } z = \frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$$

7. Реши ги по z равенките (на двата начина):

а) $(2-i)z = 1+i$ б) $(i-3)\cdot z = 2-3i$ в) $z\cdot(i-1) = i+1$

9. Степенувањето на комплексен број z го дефинираме како и степенувањето на реален број a, имено:

$z^1 = z, \qquad z^{n+1} = z^n \cdot z,\ n \in \mathbf{N}$

Додека степените на бројот $z \neq 0$ со показател нула и цел негативен број, ги воведуваме со $z^0 = 1$ и $z^{-n} = (z^{-1})^n$.

Во практиката степенот на кој било комплексен број $z = a+bi$ со показател $n \in \mathbf{N}$ го пресметуваме како степен на бином, при што треба да се земат предвид соодветните степени на имагинарната единица:

$$i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = i^2 \cdot i = -i,\ i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$i^{4k} = (i^4)^k = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$$

односно, за степените на имагинарната единица i важи:

$$i^m \in \{1, -1, i, -i\},\ m \in \mathbf{Z}$$

Пример 9. $i^{15} = i^{4\cdot 3+3} = -i,\ i^{126} = i^{4\cdot 31+2} = -1,\ i^{493} = i^{4\cdot 123+1} = i$

$i^{-99} = i^{-100+1} = i^{4(-25)+1} = i, \quad i^{-778} = i^{-800+2} = i^{4(-200)+2} = i^2 = -1$

Пример 10. а) $(2+3i)^2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot 3i + (3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$

б) $(2-i)^3 = 2^3 - 3\cdot 2^2\cdot i + 3\cdot 2\cdot i^2 - i^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$

8. Пресметај ги степените на имагинарната единица:

$i^{32},\ i^{134},\ i^{731},\ i^{-98},\ i^{-779}$

9. Упрости ги изразите:

а) $(3-2i)^2 - (1-i)^2$

б) $\dfrac{(1+i)^2 - (2-i)^2}{(1+i)^2}$

в) $\dfrac{(2-i)^3 - (1+i)^3}{(i-1)^3}$

Вежби

10. Одреди го збирот на броевите:

а) $3+4i$ и $1-i$

б) 3 и $2-3i$

в) $1-2i$ и $3i$

г) $\frac{1}{2}-3i$ и $3i$

д) $a-b+ci$ и $a+b+2ci$

ѓ) $m-ni$ и $n+(m-n)i$

11. Одредете ја разликата на броевите:

а) $(-2+3i)-(1-3i)$

б) $(a-c+bi)-(a+c-2bi)$

в) $(3\sqrt{2}-2i\sqrt{3})-(\sqrt{8}-i\sqrt{27})$

г) $(1+i)a-(1-i)b$

12. Одреди го производот на броевите:

а) $(-1+i)\ (2-i)$

б) $(m-i)\ (1+mi)$

в) $(1+i)\ (3-2i)$

г) $(\sqrt{3}+2i)\ (2-i\sqrt{3})$

д) $(m-n+mi)\ (m+n-ni)$

ѓ) $\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

е) $(\sqrt{3}-i)\ (-\sqrt{3}+i)$

ж) $(\sqrt{2}+i)\ (\sqrt{6}-i\sqrt{3})$

з) $(-2\sqrt{3}+6i)\ (6-2i\sqrt{3})$

13. Пресметај ги количниците на броевите:

а) $\dfrac{1-2i}{1+2i}$

б) $\dfrac{3}{1+i}$

в) $(2+i):(1-i)$

г) $\dfrac{3-2i}{3i-1}$

д) $\dfrac{-2-3i}{i}$

ѓ) $\dfrac{3-2i}{-i}$

е) $\dfrac{2i}{3i-2}$

ж) $\dfrac{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}$

з) $\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}-ai}$

ѕ) $\dfrac{\sqrt{3}-i\sqrt{5}}{-1-i\sqrt{3}}$

и) $\dfrac{2\sqrt{2}-3i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+3i\sqrt{3}}$

14. Пресметај: а) $(1+i)^2$ б) $(2-i\sqrt{2})^2$ в) $(\sqrt{3}-3i)^2$

15. Извршете ги назначените операции во изразите:

а) $(3-5i)\ (3+5i)-(1+i)^2$

б) $(1+i)^3+(2-i)^2$

в) $(7+24i)\cdot\left(\dfrac{1-2i}{1+2i}\right)^2$

г) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}\right)^2\ \left[(2+i\sqrt{2})^2+5\right]$

д) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^2$

ѓ) $\dfrac{3-i}{2+i}-\dfrac{2-i}{3+i}$

16. Пресметајте ја вредноста на изразот:

а) $z^2-4z(z+1)-7$ за $z=2+3i$

б) $z(z-1)+2z$ за $z=1+i$

17. Упрости го изразот:

а) $\dfrac{x\sqrt{y}-yi\sqrt{x}}{y\sqrt{x}+xi\sqrt{y}}+(x+y-xyi)$

б) $\dfrac{(1+i)^2\ (1-i)^2}{(1+2i)^3}$

в) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3\cdot\left(\dfrac{1+i}{1-i}-\dfrac{1-i}{1+i}\right)$

г) $\dfrac{(1-i)^2\ (1+i)^2}{(\sqrt{3}+i)^2}$

18. Дадени се броевите: $z_1=3-2i$ и $z_2=1+3i$. Одредете ги изразите:

а) z_1+z_2

б) z_1-z_2

в) $z_1\cdot z_2$

г) $\dfrac{z_1}{z_2}$

д) $\overline{z_1}-\overline{z_2}+z_1\cdot z_2$

ѓ) $(z_1+z_2)^2$

19. Одредете ги реалните броеви x и y од равенствата:

а) $(3-2i)x+(1-i)y=2-5i$

б) $(x+y)\ (1+i)-(2-i)y=5-4i$

20. Нека е дадено $z=x+yi$, $z_1=2+3i$, $z_2=1-2i$ и притоа

$Re\{\overline{z_1}\cdot z\}=1$ и $Jm\left\{\dfrac{z}{z_2}\right\}=-\dfrac{1}{5}$. Одреди ги реалните броеви x и y.

21. Упрости ги изразите:

а) $i^8,\ i^{25},\ i^{138},\ i^{-9},\ i^{-27},\ i^{-97},\ i^{-779}$

б) $(2-3i)^2-3(1-2i)$

в) $(1-i)^3-2(i-3)^2+1-2i$

г) $\dfrac{(1-3i)^2-(2-i)^2}{(1-i)^2}$

д) $\dfrac{(3-2i)^3+(3+2i)^3}{(i-1)^3}$

II.4. Модул на комплексен број

а. Д1

Модул или апсолутна вредност на комплексниот број $z = a + bi$ се вика реалниот ненегативен број $\sqrt{a^2 + b^2}$, и се означува со $|z|$, т.е.

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Пример: 1. $|3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

2. $\left|\frac{1}{2} + i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

3. $|\sqrt{2} - i| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}$

Одреди го моделот на комплексните броеви

1. а) $2 - 3i$ б) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i$ в) $\frac{1 - 3i}{2}$

2. а) $\sqrt{2} - i$ б) $2i + 3\sqrt{2}$ в) $\frac{2\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}$

Забележуваме, модулот на кој било комплексен број различен од нула $(a + bi \neq 0)$ е позитивен број, а е еднаков на нула, ако и само ако $a + bi = 0$, т.е. ако $a = b = 0$.
Ако комплексниот број $a + bi$ е реален број, т.е. ако $b = 0$, тогаш:

$$|z| = |a + 0 \cdot i| = |a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & \text{ако } a \geqslant 0 \\ -a, & \text{ако } a < 0 \end{cases}$$

Пример 4. $|-2 + 0 \cdot i| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$

Според тоа, поимот модул (апсолутна вредност) на реален број е специјален случај од поимот модул на комплексен број.

Бидејќи $a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$, може слободно да се каже, дека

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \quad \ldots\ldots (1)$$

Пример 5. $(2 + 3i)\ (2 - 3i) = 2^2 - (3i)^2 = 2^2 - 3^2 i^2 = 2^2 + 3^2$

3. Провери го равенството (1) на броевите

а) $z = 1 - 2i$ б) $z = \sqrt{2} - 2i$ в) $z = \frac{1}{2} - \sqrt{2}\,i$

Т1

За производот и количникот на комплексните броеви z_1 и z_2 важи:

а) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ...... (2)

б) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $(z_2 \neq 0)$ 3

Доказ: а) Со примена на равенството (1), добиваме:

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1 \cdot z_2} = z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} =$$

$$= (z_1 \cdot \overline{z_1}) \cdot (z_2 \cdot \overline{z_2}) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2, \text{ а од } |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

следува равенството (2).

б) Тргнувајќи од идентитетот $\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 = z_1$ $(z_2 \neq 0)$, а со примена на равенството (2), добиваме:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| \cdot |z_2| = |z_1| \ (z_2 \neq 0), \text{ односно } \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ за } (z_2 \neq 0).$$

T_2 **За произволни комплексни броеви z_1 и z_2 важи неравенството.**

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ [1]}$$

б Вежби

4. Одреди го модулот на комплексните броеви

а) $2-3i$ б) $-3+2i$ в) $-3i$ г) $\sqrt{2}+2i$ д) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i$

5. Дадени се броевите: $z_1 = 3-2i$ и $z_2 = 1+3i$. Одреди ги изразите:

а) $|z_1 \cdot z_2|$ б) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ в) $\left|\frac{z_1^2}{z_2}\right|$ г) $\left|\frac{z_1^2}{z_2^2}\right|$

6. Што може да се каже за модулите на:

а) два конјугирано комплексни броја
б) два спротивни комплексни броја

II.5. Геометриско претставување на комплексните броеви

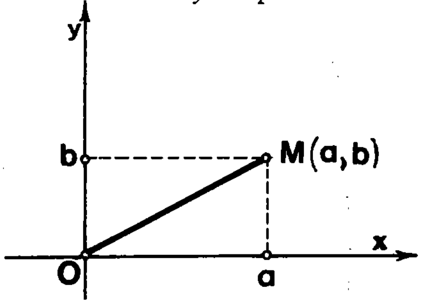
а Познато е дека меѓу множеството на реалните броеви и множеството точки од бројната оска постои биекција, имено: на секој реален број му соодветствува една и само една точка од бројната оска и секоја точка од бројната оска е претставник точно на еден реален број.

---

[1] Неговата точност ќе ја потврдиме во геометриската интерпретација на комплексните броеви.

Целта ни е да најдеме начин за геометриско изразување на комплексните броеви и операциите со нив. Бидејќи една права не е доволна за изразување на сите комплексни броеви, ќе ја искористиме координативната рамнина.

Нека xOy е правоаголен координатен систем во рамнина (црт. 1).

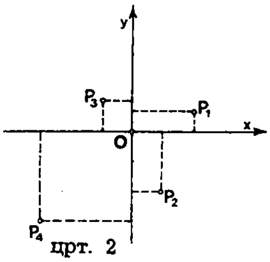


црт. 1

Тогаш на секој комплексен број $z = a + bi$ му соодветствува точка $M(a, b)$ со координати $x = a$ и $y = b$. Соодветството

$$z = a + bi \Leftrightarrow M(a, b)$$

е взаемно еднозначно: секој комплексен број се изразува со единствена точка од координатната рамнина и, обратно – секоја точка од координатната рамнина е слика на еден комплексен број.



црт. 2

На црт. 2, се точките P_1, P_2, P_3 и P_4 се претставени комплексните броеви:

$z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 - \frac{3}{2}i$, $z_3 = -1 + i\sqrt{2}$, $z_4 = -3 - 2{,}5i$

Рамнината со зададен во неа правоаголен координатен систем, користен за претставување на комплексните броеви, се вика **комплексна рамнина.**

Понекогаш наместо терминот комплексна рамнина се користи терминот Гаусова рамнина по името на германскиот математичар К. Ф. Гаус (1777–1866), кој го утврдил тој познат и пред него начин за претставување на комплексните броеви.

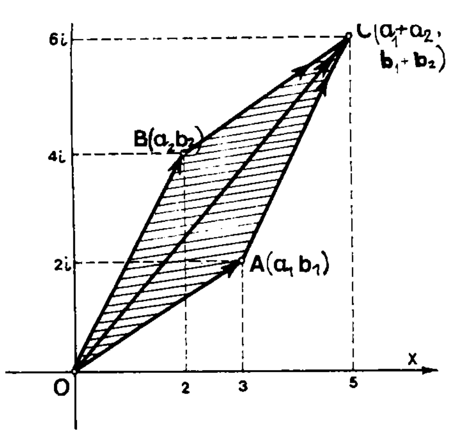
Од идејата за претставување на комплексните броеви со точки во една рамнина не може да има посебна корист, ако не постои и претставување на операциите со нив. Затоа барем за операциите собирање и одземање на комплексните броеви истото ќе го постигнеме со помош на вектори.

Нека на комплексниот број $z = a + bi$ му соодветствува точка $M(a, b)$ во координатната рамнина (црт. 1). На точката M и одговара точно еден радиус вектор $\overrightarrow{OM}$.

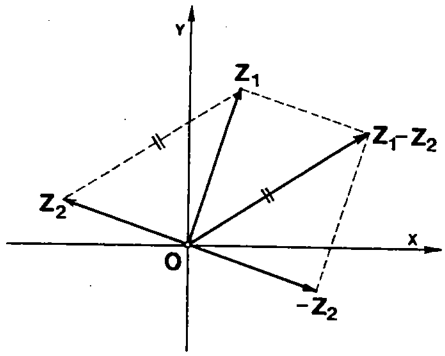
Соодветството $z \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM}$ е уште взаемно еднозначно.

Претставувањето на комплексните броеви преку вектори е погодно, бидејќи со векторите можеме да ги извршуваме операциите собирање и одземање.

За да го најдеме збирот $z_1 + z_2$, го конструираме паралелограмот (црт. 3) со страна OA и OB, каде векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, ги претставуваат z_1 и z_2 соодветно со координати (a_1, b_1) и (a_2, b_2)



црт. 3



црт. 4

Векторот $\overrightarrow{OC}$ (црт. 3) кој е дијагонала на паралелограмот $OACB$, одговара на збирот $z_1 + z_2$ на комплексните броеви z_1 и z_2.

Може да се даде геометриско толкување и на разликата $z_1 - z_2$ на два комплексни броја. Знаеме, дека разликата на два комплексни броја се претставува како збир $z_1 + (-z_2)$, од црт. 4 очигледна е таа постапка.

б Поимот модул на комплексен број исто така е поврзан со геометриското претставување на комплексните броеви. Имено, модулот на комплексниот број е еднаков на растојанието од координатниот почеток во комплексната рамнина до точката што е избрана за комплексниот број (црт.1.) Во II.4. рековме дека неравенството $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ ќе го потврдуваме овде. Навистина, точноста на ова неравенство е очигледна, кога ќе го разгледаме црт.3, каде збирот $z_1 + z_2$ на комплексните броеви z_1 и z_2 е изразен преку дијагоналата OC на паралелограмот, поставен на векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, земен како z_1 и z_2. Очигледно е, дека даденото неравенство е задоволено од страните на $\triangle OAC$, каде $\overrightarrow{OC} < \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Можноста за равенство е кога векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ лежат на една права и се исто насочени.

в Вежби

1. Претстави ги геометриски (со вектори) комплексните броеви z_1 и z_2 и одреди го нивниот збир (со цртеж), ако:

   а) $z_1 = 5 + 2i \quad z_2 = 3 + 2i$ б) $z_1 = -2 + 3i \quad z_2 = 5 - 2i$

   в) $z_1 = -2 - 4i \quad z_2 = -5 + 2i$ г) $z_1 = -1 + 3i \quad z_2 = 2 + 3i$

2. Одреди ја геометриски разликата на z_1 и z_2 ако:

а) $z_1 = 4 + 3i,\ z_2 = 1 - i$ б) $z_1 = -2 + 3i,\ z_2 = 5 - 2i$

в) $z_1 = -2 - 4i,\ z_2 = -5 + 2i$ г) $z_1 = -1 + 3i,\ z_2 = 3 + i$

3. Одреди го растојанието меѓу точките, определени со комплексните броеви:

а) $1 - i$ и $-2 + 3i$ б) $2 - i$ и $-3 + 5i$ в) $2 + 4i$ и $3 + 2i$

(Растојанието меѓу точките (како ком. броеви z_1 и z_2) е $|z_1 - z_2|$

4. Образложи ги следниве тврдења:

а) На конјугирано комплексните броеви z и $\bar{z}$ им се придружени точки од рамнината, кои се симетрични во однос на x – оската.

б) На заемно спротивните комплексни броеви z и $-z$ им се придружени точки од рамнината, кои се симетрични во однос на координатниот почеток.

в) Модулот на комплексниот број $z = a + bi$ е еднаков на растојанието од точката $M(a, b)$ што му е придружена во рамнината до координатниот почеток $O(0, 0)$, црт.1.

II.6. Комплексни броеви како подредена двојка реални броеви

Врз основа на досегашното изложување на комплексните броеви, се виде дека комплексниот број е одреден со познавање на неговиот реален и имагинарен дел. Тоа е **причина** комплексниот број да се дефинира како подредена двојка на реални броеви. Попрецизно: Подредена двојка на реални броеви е, по дефиниција, комплексен број, т.е.

$$\mathbf{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$$

Операциите собирање и множење ги изведуваме согласно равенствата:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c,\ b + d) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd,\ ad + bc) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Пример 1. *Одреди го збирот и производот на комплексните броеви:*

а) $z_1 = (2, 3)$ и $z_2 = (1, -2)$ б) $z_1 = (-3, 0)$ и $z_2 = (3, -1)$

Решение. Според равенствата (1) и (2) имаме:

а) $z_1 + z_2 = (2, 3) + (1, -2) = (2 + 1, 3 - 2) = (3, 1)$
$z_1 \cdot z_2 = (2, 3) \cdot (1, -2) = (2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2), 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = (2 + 6, -4 + 3) =$
$= (8, -1)$

б) $z_1 + z_2 = (-3, 0) + (3, -1) = (0, -1)$ $z_1 \cdot z_2 = (-3, 0) \cdot (3, -1) = (-9, 3)$

1. Одреди го збирот и производот на комплексните броеви:

а) $z_1 = (-3, 2)$ и $z_2 = (3, -2)$ б) $z_1 = \left(\frac{1}{2};\ 0{,}5\right)$ и $z_2 = \left(0{,}5;\ -\frac{1}{3}\right)$

За комплексните броеви (a, b) и (c, d) важи:

$$(a, b) = (c, d) <=> a = c \wedge b = d \qquad (3)$$

Комплексниот број (0, 0) се вика **комплексна нула** или само **нула**, а бројот (1, 0) **комплексна единица**, или само **единица**.

За комплексниот број $z = (a, b)$ негов **конјугирано комплексен број** е бројот $\bar{z} = (a, -b)$, а негов **спротивен** е бројот $-z = (-a, -b)$.

Разликата и количникот на броевите (a, b) и (c, d) определени се со равенката:

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d) \qquad (4)$$

$$(a, b) : (c, d) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) \qquad (5)$$

Пример 2. *Нека* $z_1 = (2, 3)$ *и* $z_2 = (0, -1)$, *тогаш според равенството* (4) *и* (5) *имаме:*

$$z_1 - z_2 = (2, 3) - (0, -1) = (2 - 0, 3 + 1) = (2, 4)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2, 3)}{(0, -1)} = \left(\frac{2 \cdot 0 - 3 \cdot 1}{1}, \frac{3 \cdot 0 + 2}{1}\right) = (-3, 2)$$

2. Одреди ја разликата и количникот од комплексните броеви

а) $z_1 = (-2, 3)$ и $z_2 = (0, 1)$ б) $z_1 = (-\frac{1}{2}, 1)$ и $z_2 = (2, -1)$

Комплексниот број (0, 1) е друга ознака за имагинарната единица i. Еве две важни својства:

1°. Квадратот на имагинарната единица е еднаков на –1, т.е.

$$i^2 = -1$$

Од дефиницијата за i равенството (2), имаме:

$$i^2 = (0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

Лесно се уочува дека е $(-i)^2 = -1$. Значи, во множеството **C** равенката $x^2 = -1$ има две решенија $x_1 = i$, $x_2 = -i$.

2°. Секој комплексен број (a, b) може на единствен начин да се претстави во следнава форма $a + bi$, која ја нарековме алгебарска или стандардна форма на комплексниот број (a, b).

Ова својство е точно, бидејќи секој комплексен број $z = (a, b)$ може да се претстави како збир $(a, 0) + (0, b)$ а комплексниот број $(0, b)$ може да се запише и како производ $(b, 0) \cdot (0, 1)$. Во врска со тоа имаме:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$$

Притоа, ако имаме во вид дека $(a, 0) = a$, $(b, 0) = b$ и $(0, 1) = i$, добиваме:

$$z = (a, b) = a + bi$$

б. Вежби

3. Комплексните броеви: $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$, $z_3 = -\frac{1}{3} + 2i$, $z_4 = 2i$ да се запишат како подредена двојка од реални броеви

4. Одреди го збирот на комплексните броеви

а) $(2, -3) + (-1, 3)$ б) $\left(-\frac{3}{2}, 0\right) + -2, -3)$ в) $(-0,5; -2, 3) + \left(\frac{1}{2}; -0,7\right)$

5. Кој е потребен и доволен услов збирот на два комплексни броја $z_1 = (a, b)$ и $z_2 = (c, d)$ да биде: а) реален, б) имагинарен број?

6. Одреди го производот на комплексните броеви:

а) $(3, 2) \cdot (-1, 2)$ в) $\left(\frac{1}{2}, -1\right) \cdot \left(0,5, -\frac{3}{4}\right)$

б) $(2, -1) \cdot (-2; 0,3)$ г) $\left(3\frac{1}{2}, 0\right) \ (-0,5; 1)$

7. Одреди ги реалните броеви x и y од равенствата:

а) $(x + 2, y - 1) = (-3, 0)$ г) $(x, 1) + (y + 1, y) = (4, -3)$

б) $(2x - 1, y + 2) = (x + 1, -1)$ д) $(4, -2) - (x - 1, y) = (1, 5)$

в) $(x, -1) = \left(\frac{1}{2}, y + 1\right)$ ѓ) $(x, y)(1, -1) = (-1, -3)$

8. Одреди го количникот на комплексните броеви

а) $\frac{(1, -1)}{(1, 2)}$ б) $\frac{(0, -2)}{(2, 0)}$ в) $\frac{\left(\frac{1}{2}\ 0,5\right)}{(-2, 3)}$ г) $\frac{\left(-3, 1\frac{1}{2}\right)}{(0, 1)}$

II.7. Поле на комплексни броеви

а. За секои два комплексни броја (a, b), (c, d), нивниот збир $(a + c, b + d)$ и производот $(ac - bd, ad + bc)$ се исто така комплексни броеви. За овие две операции се исполнети следните барања:

1°. Операцијата собирање во множеството на комплексните броеви ги има следниве својства:

а) Комутативност. За кои било два комплексни броја z_1 и z_2 важи:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

Доказ. Врз основа на дефиницијата за операцијата собирање во множеството на комплексните броеви **C**, и комутативноста на собирањето на реалните броеви, добиваме:

$$z_1 + z_2 = (a,\ b) + (c,\ d) = (a + c,\ b + d) = (c + a,\ d + b) =$$
$$= (c,\ d) + (a,\ b) = z_2 + z_1.$$

б) **Асоцијативност.** За кое било $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ важи:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

Доказ. Познато е дека собирањето на реалните броеви е асоцијативна операција, па ќе имаме:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = \big((a,\ b) + (c,\ d)\big) + (e,\ f) = (a + c,\ b + d) + (e,\ f) =$$
$$= \big((a + c) + e,\ (b + d) + f\big) = (a + (c + e),\ b + (d + f)) =$$
$$= (a,\ b) + (c + e,\ d + f) = (a,\ b) + \big((c,\ d) + (e,\ f)\big)$$
$$= z_1 + (z_2 + z_3)$$

в) Постоење на неутрален елемент (нула). Комплексниот број (0, 0) има својство да за секое $z \in \mathbf{C}$ важи:

$$z + (0,\ 0) = (0,\ 0) + z = z$$

Доказ. Нека $z = (a,\ b)$ е кој било комплексен број. Тогаш:

$$z = (0,\ 0) = (a,\ b) + (0,\ 0) = (a + 0,\ \ b + 0) = (a,\ b) = z$$

Значи комплексниот број (0, 0) е нула во множеството **C**.

г) **Постоење на спротивен елемент.** Секој комплексен број z има спротивен елемент, што го означуваме, со $-z$, таков што е

$$z + (-z) = (0,\ 0)$$

Доказ. Од $(a,\ b) \in \mathbf{C}$ следува дека $(-a,\ -b) \in \mathbf{C}$ при што важи:

$$(a,\ b) + (-a,\ -b) = \big(a + (-a),\ b + (-b)\big) = (0,\ 0)$$

Значи, за комплексниот број $z = (a,\ b)$ спротивен елемент е бројот

$$(-a,\ -b), \quad \text{т.е.} \quad -z = -(a,\ b) = (-a,\ -b)$$

Со горните својства на операцијата собирање во множеството **C**, покажуваме дека важи следнава

T1	**Множеството на комплексните броеви C е комутативна група по однос на операцијата собирање.**

2°. Операцијата множење во множеството **C** ги има следните својства:

а) **Комутативност.** За кој било два комплексни броја $z_1 = (a,\ b)$ и $z_2 = (c,\ d)$

важи: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

Доказ. Врз основа на дефиницијата на операцијата множење во множеството **C**, и комутативноста на множењето на реалните броеви, добиваме:

$$z_1 \cdot z_2 = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, cb + da) = \\ = (c, d)(a, b) = z_2 \cdot z_1$$

Користејќи ја асоцијативноста на множењето на реалните броеви, лесно се покажува дека и операцијата множење на комплексните броеви е асоцијативна, т.е.

б) За $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ важи $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 (z_2 \cdot z_3)$. Доказот извршете го сами.

в) Постоење на неутрален елемент (единица). Комплексниот број (1, 0) има својство да за секое $z \in \mathbf{C}$ важи:

$$z \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot z = z$$

Доказ. Нека $z = (a, b)$ е кој било комплексен број. Тогаш:

$$z \cdot (1, 0) = (a, b)(1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b) = z$$

Со тоа го докажавме равенството $z \cdot (1, 0) = z$, а врз основа на комутативноста важи и $(1, 0) \cdot z = z$.

Според тоа, комплексниот број (1, 0) е неутрален елемент во множеството **C** во однос на операцијата множење.

г) Постоење на инверзен елемент (реципрочен број). Реципрачен број на комплексниот број $z \neq (0, 0)$, што го означуваме со $\frac{1}{z}$ или z^{-1} е таков комплексен број за кој важи $z \cdot \frac{1}{z} = (1, 0)$.

Ќе покажеме дека: За секој комплексен број $z = (a, b) \neq (0, 0)$ постои единствен негов реципрочен број

$$z^{-1} = (a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$$

Доказ. Нека $z = (a, b)$ е произволен комплексен број различен од (0, 0) и ако постои негов реципрочен број, нека е тоа бројот (x, y) таков што да важи $(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0)$.

Тогаш од $(a, b)(x, y) = (ax - by, ay + bx) = (1, 0)$, врз основа на дефиницијата за еднаквост на комплексни броја, го добиваме системот равенки:

$$\begin{aligned} ax - by &= 1 \\ bx + ay &= 0 \end{aligned} \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

Бидејќи $(a, b) \neq 0$, т.е. $a^2 + b^2 \neq 0$, тогаш системот равенки (1) ќе има единствено решение

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Така добиваме: $(a, b)^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \ -\dfrac{b}{a^2 + b^2}\right)$

Со горните својства на операцијата во множеството **C**, покажуваме дека важи следново

T2 **Множеството $C \setminus \{(0, 0)\}$ е комутативна група по однос на операцијата множење.**

3°. Дистрибутивност на множеството во однос на собирањето.
За секое $z_1, z_2, z_3 \in$ **C** важи: $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Доказ. Нека $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$, $z_3 = (e, f)$ се произволни комплексни броеви. Тогаш $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (a, b)\left((c, d) + (e, f)\right) = (a, b)\,(c + e, d + f) = (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) = (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be)$, а исто така и:

$$z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 = (a, b)\,(c, d) + (a, b)\,(e, f) = (ac - bd, ad + bc) +$$

$$+ (ae - bf, af + be) = (ac - bd + ac - bf, ad + bc + af + be).$$

Оттука следува дека: $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$. Поради комутативноста на множењето, за $\forall z_1, z_2, z_3 \in$ **C** важи и равенството

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$$

Со теоремите 1 и 2 и барањето 3° покажавме дека:

а) Множеството **C** е комутативна група во однос на операцијата собирање,

б) Множеството $C \setminus \{(0, 0)\}$ е комутативна група во однос на операцијата множење,

в) Во множеството **C** операцијата множење е дистрибутивна во однос на собирањето.

Според тоа, важи:

T3 **Множеството на комплексните броеви C е поле во однос на операциите собирање и множење.**

Вежби

1. Нека $C_Z = \{ (a, b) \in C \mid a, b \in Z \}$. Да се покаже дека подмножеството C_Z е група во однос на собирањето на комплексните броеви.
2. Нека $C_Q = \{(a, b) \in C \mid a, b \in Q\}$. Да се докаже дека подмножеството $C_Q \setminus \{0\}$ од **C** е група по однос на множењето на комплексни броеви.
3. Дали множеството C_Q е поле по однос на операциите собирање и множење на комплексните броеви.

III КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

III.1. Дефиниција и видови квадратни равенки

а Многу задачи од алгебрата, геометријата, физиката и техниката се сведуваат на равенки како овие:

$$x^2 + 2x - 15 = 0, \qquad 3x^2 - 4x - 1 = 0, \qquad \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = 0.$$

Карактеристично за овие равенки е тоа што нивната лева страна е полином од втор степен во однос на променливата x, т.е. *квадратен трином,* а десната страна е еднаква на нула. Таквите равенки се викаат *квадратни равенки.*

> **Д**
>
> **Равенката од видот**
>
> **(1)** $\qquad ax^2 + bx + c = 0,$
>
> **каде што x е променлива, а a, b, c се дадени реални броеви, при што $a \neq 0$, се вика квадратна равенка со една променлива.**

Броевите a, b, c се викаат *коефициенти* на квадратната равенка, и тоа: a – коефициент на квадратниот член (ax^2), b – коефициент на линеарниот член (bx), c – слободен член.

Условот $a \neq 0$ има суштинско значење, бидејќи во спротивен случај равенката (1) не би била квадратна.

Еве уште неколку примери на квадратни равенки:

$$0{,}2x^2 - 1{,}5x = 0, \quad x^2 - (1 - \sqrt{2})\, x + 3\sqrt{2} = 0, \quad 44x^2 - 1989 = 0$$

За првата од овие равенки: $a = 0{,}2$, $b = -1{,}5$, $c = 0$; за втората: $a = 1$, $b = \sqrt{2} - 1$, $c = 3\sqrt{2}$; а за третата: $a = 44$, $b = 0$, $c = 1989$.

1. Одреди ги коефициентите на равенките:

а) $-9x^2 + x - 5 = 0$ $\quad$ б) $3x - x^2 = 0$ $\quad$ в) $\sqrt{3} - 4x + \sqrt{2}\, x^2 = 0.$

Равенката $0 \cdot x^2 + 6x - 7 = 0$ не е квадратна, бидејќи $a = 0$.

2. Кои од следниве равенки се квадратни:

а) $7x^2 + 0 \cdot x - 12 = 0$ $\quad$ б) $2 - 6x + 0 \cdot x^2 = 0$ $\quad$ в) $0 \cdot x^2 + 11x - 17 = 0$

г) $-2x^3 + 0 \cdot x^2 - 13 = 0$ $\quad$ д) $0 \cdot x^3 + 2x^2 - 1 = 0$ $\quad$ ѓ) $5x^2 - 4\sqrt{x} + 9 = 0$

б Равенката (1) е *општ вид* на квадратна равенка. Ако во неа $a = 1$, тогаш велиме дека равенката е во *нормален* или *сведен вид,* и, обично ја запишуваме вака:

$$(2) \qquad x^2 + px + q = 0,$$

каде што p и q се кои било реални броеви. Јасно е дека секоја квадратна равенка од општ вид може да се запише во сведен вид; за тоа е доволно равенката (1) да ја поделиме со a $(a \neq 0)$, и да ставиме $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$.

Ако барем еден од коефициентите a, b или c зависи од некој параметар, велиме дека квадратната равенка е со *параметри* или со *општи коефициенти*. Така, на пример, во равенката $(k-3)x^2 - 2x + 5k + 7 = 0$, коефициентите: $a = k - 3$ и $c = 5k + 7$ зависат од параметарот k. Оваа равенка со параметри ќе биде квадратна за секој $k \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$, а за $k = 3$ е линеарна. (Зошто?).

3. За кои вредности на параметарот k, равенката:

а) $(k+2)x^2 + 5x - 2k + 1 = 0$ б) $(3k-5)x^2 - 4kx = 0$, е квадратна?

Ако во равенката (1) коефициентите a, b и c се различни од нула, тогаш таа се вика *полна квадратна равенка*, а ако барем еден од коефициентите b или c е еднаков на нула – *неполна квадратна равенка*. Неполни квадратни равенки се:

$$ax^2 + bx = 0, \quad b \neq 0; \qquad ax^2 + c = 0, \quad c \neq 0; \qquad ax^2 = 0.$$

4. За кои вредности на параметарот k, равенката

$$(k-1)x^2 + 2(k+2)x - 2k + 5 = 0$$

е неполна квадратна равенка од видот:

а) $ax^2 + bx = 0$ б) $ax^2 + c = 0$

Вежби

5. Трансформирај ги во општ (или сведен) вид равенките:

а) $3x(x-1) = 5 + x$ б) $(x-2)^2 - 7 = (1-x)(x+3)$

в) $\frac{2x-1}{2} - \frac{x(x+2)}{4} = 1 - \frac{x^2+4}{3}$.

6. За кои вредности на параметарот k, равенката $(k+1)x^2 + (3k+2)x - 5k + 4 = 0$ е:

а) квадратна б) линеарна в) од видот $x^2 + px + q = 0$

г) од видот $ax^2 + bx = 0$ д) од видот $ax^2 + c = 0$

7. Одреди ја вредноста на квадратниот трином

$x^2 - 3x + 2$ за: а) $x = 0$ б) $x = 1$ в) $x = -2$ г) $x = 2$.

8. Испитај кои од броевите: $-1, -\frac{1}{3}, 0, 1, 2$, се решенија на равенката $3x^2 - 2x - 1 = 0$.

9. Разложи го на множители биномот:

а) $x^2 - 5x$ б) $x^2 - 9$ в) $(x+1)^2 - 4$.

10. За кои вредности на x, е еднаков на нула производот:

а) $x(x-7)$ б) $(x-1)(x+2)(2x+7)$

III. 2. Решавање на неполни квадратни равенки

а. Да ја разгледаме равенката $(x-1)^2 - 4 = 0$. Решавајќи ја задача 9 в) од минатата лекција, сигурно доби:

$(x+1)^2 - 4 \equiv (x-1)(x+3)$. Сега дадената равенка можеме да ја запишеме вака:

$$(x-1)(x+3) = 0.$$

Лесно можеш да видиш дека последната равенка, па според тоа и дадената, е задоволена само за $x = 1$ и $x = -3$.

Идејата за разложување на изразот $f(x)$ на множители, честопати ја користиме при решавање на равенката $f(x) = 0$. Ако $f(x) \equiv g(x) \cdot h(x)$, тогаш равенката $f(x) = 0$ е еквивалентна со равенката $g(x) \cdot h(x) = 0$, за којашто важи еквиваленцијата

(*) $\qquad g(x) \,.\, h(x) = 0 \iff g(x) = 0 \;\lor\; h(x) = 0.$

Вистинитоста на оваа еквиваленција следува од фактот што производот на два или повеќе множители е еднаков на нула, ако барем еден од множителите е еднаков на нула.

Пример 1. *Реши ја равенката* $(x-2)(x+3)(2x-1) = 0$.

Решение. Според (*), дадената равенка е еквивалентна со дисјункцијата на равенките

$$x - 2 = 0 \;\lor\; x + 3 = 0 \;\lor\; 2x - 1 = 0,$$

т.е. *вкупноста* на тие равенки

$$\left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x + 3 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

Решавајќи ја секоја равенка од вкупноста, добиваме: $x = 2$, $x = -3$, $x = \frac{1}{2}$, па множеството решенија на вкупноста, а со тоа и на дадената равенка, е $M = \left\{-3, \frac{1}{2}, 2\right\}$.

1. Реши ја равенката $(2x+5)(-\frac{1}{2}x+1)(2x-\sqrt{3}) = 0$.

б. Неполната квадратна равенка од видот

(1) $\qquad ax^2 + bx = 0, \qquad a \neq 0$

ја решаваме со разложување на нејзината лева страна на множители. Таа е еквивалентна со равенката $x(ax+b) = 0$, односно со вкупноста равенки

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ ax + b = 0, \end{array}\right. \qquad (a \neq 0)$$

Оттука добиваме дека равенката (1) има две решенија:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Очигледно е дека равенките од овој вид имаат секогаш две реални решенија. Ако $b = 0$, тогаш $x = -\frac{b}{a} = 0$, па во тој случај велиме дека $x_1 = x_2 = 0$ е *двократен* (или *двоен*) корен на равенката $ax^2 = 0$.

2. Реши ја равенката $-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 = 0$

Пример 2. *Реши ја равенката* $2x^2 + 3x = 0$.

Решение. Со извлекување x пред заграда добиваме

$$2x^2 + 3x = x(2x + 3) = 0,$$

од каде што

$$x = 0 \quad \text{или} \quad 2x + 3 = 0,$$

па решенијата на равенката се: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{3}{2}$.

3. Реши ја равенката $3x^2 - 15x = 0$

b. Да ја разгледаме сега нецолната квадратна равенка од видот

(2) $$ax^2 + c = 0, \qquad a \neq 0$$

Со префрлување на слободниот член c на десната страна и делење на двете страни со a, ја добиваме равенката

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

Ако $-\frac{c}{a} > 0$, случај кога a и c имаат различни знаци, равенката има два различни реални корени (два спротивни броеви):

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, \qquad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Тоа кратко го запишуваме вака

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Ако $c = 0$, тогаш $x_1 = x_2 = 0$ е двократен корен на равенката $ax^2 = 0$, што заклучивме и порано.

Ако $-\frac{c}{a} < 0$, случај кога a и c имаат еднакви знаци, корените на равенката се конјугирано комплексни броеви

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}\, i.$$

Пример 3. *Реши ги равенките*

а) $4x^2 - 9 = 0$ б) $16x^2 + 25 = 0$

Решение. Имаме по ред:

а) $4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 9 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{9}{4}$, па $x_1 = \frac{3}{2}$ $x_2 = -\frac{3}{2}$;

б) $16x^2 + 25 = 0 \Longleftrightarrow 16x^2 = -25 \Longleftrightarrow x^2 = -\frac{25}{16}$, па

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{25}{16}} = \pm\frac{5}{4}i$$

Равенките можеме да ги решиме и со разложување на левата страна на множители:

а) $4x^2 - 9 = 0 \Longleftrightarrow (2x - 3)\ (2x + 3) = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 3 = 0 \\ 2x + 3 = 0 \end{array}\right.$

од каде што $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$;

б) $16x + 25 = 0 \Longleftrightarrow (\ 4x - 5i)\ (4x + 5i) = 0$, па

$$x_1 = \frac{5}{4}i\ ,\ x_2 = -\frac{5}{4}i\ .$$

4. Реши ја равенката $x^2 - 0{,}25 = 0$.

Пример 4. *За кои вредности на параметарот k равенката $(k - 4)x^2 + k + 1 = 0$ ќе има реални корени?*

Решение. Равенката $ax^2 + c = 0$, $(a \neq 0)$ ќе има реални корени ако $-\frac{c}{a} \geqslant 0$, т.е. ако

$$a > 0 \wedge c \leqslant 0 \quad \text{или} \quad a < 0 \wedge c \geqslant 0\ .$$

Бидејќи во нашиот пример $a = k - 4$, $c = k + 1$, параметарот k треба да ги исполнува условите:

$$\begin{cases} k - 4 > 0 \\ k + 1 \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} k - 4 < 0 \\ k + 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

Првиот систем неравенки нема решение (зошто?), а множеството решенија на вториот систем е интервалот $[-1,\ 4)$.

Според тоа, дадената равенка ќе има реални корени за секој $k \in [-1,\ 4)$.

5. За кои вредности на параметарот p равенката $(p - 1)x^2 = p + 3$ ќе има реални корени?

Да видиме сега како се решава една парамстарска равенка, која се сведува на неполна квадратна равенка.

Пример 5. *Реши ја равенката $k^2(1 + x)^2 = (k^2 + x)^2$.*

Решение. Имаме последователно:

$$k^2(1 + 2x + x^2) = k^4 + 2k^2x + x^2$$
$$k^2 + 2k^2x + k^2x^2 = k^4 + 2k^2x + x^2$$
$$(k^2 - 1)x^2 - k^2(k^2 - 1) = 0$$
$$(k^2 - 1)(x^2 - k^2) = 0$$

i) Ако $k^2 - 1 = 0$, т.е. $|k| = 1$, тогаш корен на равенката е секој реален број.

ii) Ако $|k| \neq 1$, тогаш $x_{1,2} = \pm k$.

6. Реши ја равенката $(a - x)(b - x) = (1 - ax)(1 - bx)$.

В е ж б и

Реши ги равенките:

7. а) $(x + 5)(2x - 8) = 0$ б) $(x + 2)(x - 2) + (x + 2)^2 = 0$

8. а) $(x + 2)^2 - 9 = 0$ б) $(2x + 3)^2 = 49$

9. а) $\frac{2x + 27}{18} - \frac{x^2}{6} = \frac{3}{2}$ б) $\frac{(x - 1)^2}{4} - \frac{x - 2x}{3} = \frac{x}{6}$

10. За кои вредности на параметарот k, квадратната равенка:

а) $(k + 2)x^2 - 5 = 0$ б) $(2k - 3)x^2 + k + 5 = 0$

ќе има реални корени?

Реши ги равенките:

11. а) $k^2x^2 - k^2 + 2k - 1 = 0$ б) $(x - a)^3 - (x - b)^3 = b^3 - a^3$

12*. а) $(x - a)(x - b) = (x + a)(ax + b)$
б) $(ax + b)^2 - (a - bx)^2 - 4abx + a^2(x^2 - 1) = 0$

$\boxed{13.}$ Запиши го како разлика од квадрати на два израза полиномот:

а) $a^2 + 2ab$ б) $x^2 - 2x$ в) $x^2 + 6x + 5$

Упатство. $a^2 + 2ab = (a^2 + 2ab + b^2) - b^2$

$\boxed{14.}$ Разложи го на линеарни множители триномот :

а) $x^2 + 4x + 3$ б) $x^2 - 8x + 7$

III. 3. Решавање на полни квадратни равенки

Видовме дека неполните квадратни равенки обично ги решаваме со разложување на нивната лева страна на множители. Ќе покажеме дека на тој начин можат да се решат и полните квадратни равенки.

Пример 1. *Реши ја равенката* $x^2 + 6x - 7 = 0$.

Решение. Го дополнуваме квадратниот трином до полн квадрат, додавајќи и одземајќи $3^2 = 9$ – квадратот на половината од коефициентот на линеарниот член:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x - 7 &= \underline{x^2 + 6x + 9} - 9 - 7 \\ &= (x + 3)^2 - 16 \\ &= (x + 3 - 4)(x + 3 + 4) \\ &= (x - 1)(x + 7) \end{aligned}$$

Значи, дадената равенка е еквивалентна со равенката $(x - 1)(x + 7) = 0$, од каде што ги добиваме решенијата на равенката: $x = 1$, $x = -7$.

1. Реши ја равенката: $-x^2 + 4x + 5 = 0$.

Пример 2. *Реши ја равенката* $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Решение. Имаме

$$x^2 - 6x + 9 \equiv (x - 3)^2 \equiv (x - 3)(x - 3) = 0$$

од каде што

$$x_1 = x_2 = 3.$$

2. Реши ја равенката $x^2 + 10x + 25 = 0$.

6. Изложениот метод на издвојување на полн квадрат можеме да го примениме и при решавање на општата квадратна равенка

(1) $$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0$$

Нејзината лева страна ја трансформираме вака:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

Според тоа, равенката (1) е еквивалентна со равенката

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b - 4ac}{4a^2}\right] = 0$$

т.е.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

од каде што следува

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Оттука ги добиваме корените на равенката (1):

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Двата корени заедно ги запишуваме со формулата

(2) $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

која се фика *формула за корените на квадратната равенка* (1).

Оваа формула важи и кога $b = 0$ или $c = 0$.

Пример 3. *Реши ги квадратните равенки:*

а) $2x^2 - 5x + 3 = 0$; б) $4x^2 = 12x - 9$; в) $-x^2 + 4x - 13 = 0$

Решение. а) Коефициентите на равенката се: $a = 2$, $b = -5$, $c = 3$, па, според формулата (2) добиваме:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4}$$

Значи

$$x_1 = \frac{5 + 1}{4} = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{5 - 1}{4} = 1$$

се корени на равенката $2x^2 - 5x + 3 = 0$, што може лесно да се провери.

Проверка

$$2x_1^2 - 5x_1 + 3 = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2} - \frac{15}{2} + 3 = -\frac{6}{2} + 3 = 0,$$

$$2x_2^2 - 5x_2 + 3 = 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 2 - 5 + 3 = 0.$$

б) $4x^2 = 12x - 9 \iff 4x^2 - 12x + 9 = 0$, па според формулата (2) добиваме:

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \frac{12 \pm 0}{8} = \frac{3}{2}.$$

Во овој случај корените се еднакви реални броеви, или велиме уште дека $x = \frac{3}{2}$ е двократен корен на равенката $4x^2 - 12x + 9 = 0$

в) $-x^2 + 4x - 13 = 0 \iff x^2 - 4x + 13 = 0$, па имаме

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i.$$

Во овој случај корените $x_1 = 2 + 3i$ и $x_2 = 2 - 3i$ се конјугирано комплексни броеви.

3. Реши ги равенките:

а) $x^2 - 12x + 35 = 0$ б) $2x - x^2 = 4$ в) $x^2 = 6x - 9$.

б. Ако квадратната равенка е дадена во нормален вид

(3) $$x^2 + px + q = 0$$

тогаш формулата (2) го добива видот

(4) $$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Оваа формула е особено погодна кога коефициентот p е парен број.

Пример 4. *Реши ги равенките:*

а) $x^2 - 14x + 45 = 0$ б) $x^2 + 10ax + 16a^2 = 0$

Решение. Користејќи ја формулата (4) добиваме:

а) $x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{7^2 - 45} = 7 \pm 2$; $x_1 = 5$; $x_2 = 9$

б) $x_{1,2} = -5a \pm \sqrt{25a^2 - 16a^2} = -5a \pm 3a$ $x_1 = -8a$, $x_2 = -2a$

4. Реши ги равенките:

а) $x^2 + 12x + 20 = 0$ б) $x^2 + 6a^2 = 5a$

г. Вежби

Реши ги равенките:

5. а) $2x^2 - 3x - 5 = 0$ б) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

6. $(x-1)(x+1) + (x+1)^2 = (x+4)^2$.

7. $\frac{x+1}{3} - \frac{7-3x}{4} - (x-3)^2 = 0$

8*. $x^2 - (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$

9. а) $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$ б) $6x^2 + ax = a^2$

10. Одреди ја дефиниционата област на дропката:

а) $\frac{2}{x^2-49}$ б) $\frac{2x-3}{x^2-5x-14}$ в) $\frac{x-1}{2x^2-5x+4}$

11. Дали равенката $ax^2 + bx + c = 0$ има секогаш реални решенија? Од што зависи тоа?

III. 4. Дискриминанта на квадратната равенка

Од примерите во минатата лекција видовме дека корените на квадратната равенка можат да бидат или реални или комплексни броеви. Тоа зависи од знакот на поткорениот израз $b^2 - 4ac$.

Реалниот број $b^2 - 4ac$ се вика *дискриминанта* на квадратната равенка $ax^2 + bx + c = 0$, и се означува со D, т.е.

$$D = b^2 - 4ac \tag{1}$$

Со употреба на ознаката D, корените на квадратната равенка можеме да ги запишеме во видот

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \tag{2}$$

Бидејќи $D \in \mathbf{R}$, постојат три можности:

$$D > 0, \qquad D = 0, \qquad D < 0$$

i) Ако $D > 0$, тогаш $\sqrt{D} \in \mathbf{R}^+$ па квадратната равенка има два различни реални корени:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

ii) Ако $D = 0$, тогаш $\sqrt{D} = 0$, па квадратната равенка има двократен корен

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

iii) Ако $D < 0$, тогаш $-D > 0$. Значи $\sqrt{-D}$ е реален број и $\sqrt{D} = i\sqrt{-D}$, па корените на квадратната равенка се конјугирано комплексни броеви

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$$

Значи, важи следнава теорема:

T

Квадратната равенка $ax^2 + bx + c = 0$, каде што a,b,c се реални броеви, и $a \neq 0$, има секогаш два корени кои ги наоѓаме по формулата (2).

Тие корени се:

i) реални и различни, ако $D > 0$;

ii) реални и еднакви, ако $D = 0$;

iii) конјугирано комплексни, ако $D < 0$.

Пример 1. *Во зависност од знакот на дискриминантата, одреди ја природата на корените на равенката* $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Решение. Бидејќи дискриминантата

$$D = b^2 - 4ac = 49 - 24 = 25,$$

е позитивен број, следува дека корените на равенката се различни реални броеви.

1. Без да ја решаваш квадратната равенка

а) $3x^2 + 6x + 5 = 0$ б) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ в) $2x^2 + 3 = 6x$

одреди ја природата на нејзините корени.

Пример 2. *За кои вредности на параметарот* m, *равенката* $x^2 - 2(m + 1)x + m + 3 = 0$ *ќе има двократен корен?*

Решение. Квадратната равенка ќе има двократен корен, само ако $D=0$, т.е.

$$4(m + 1)^2 - 4(m + 3) = 0, \qquad m^2 + m - 2 = 0,$$

од каде што $m_1 = -2$, $m_2 = 1$.
Навистина, за $m=-2$, равенката го добива видот $x^2 + 2x + 1 = 0$, чии корени се $x_1 = x_2 = -1$, а за $m=1$, корените на равенката се $x_1=x_2=2$.

2. За кои вредности на параметарот k, множеството $\{ x \mid x^2 - 2kx + 3k - 2 = 0 \}$ ќе има само еден елемент?

Пример 3. *Испитај ја, во зависност од параметарот* m, *природата на корените на квадратната равенка* $mx^2 - (2m + 3)x + m + 2 = 0$.

Решение. Дадената равенка ќе биде квадратна само ако $m \neq 0$. Нејзината дискриминанта е

$$D = (2m + 3)^2 - 4m(m + 2) = 4m + 9$$

Тогаш, според теоремата, корените се:

i) различни реални броеви, ако $D > 0$, т.е. $m > -\frac{9}{4}$, $m \neq 0$;

ii) еднакви реални броеви, ако $D = 0$, т.е. $m = -\frac{9}{4}$;

iii) конјугирано комплексни броеви, ако $D < 0$, т.е. $m < -\frac{9}{4}$.

3. Испитај ја природата на корените на квадратната равенка $(k - 1)x^2 - (2k + 1)x + k - 3 = 0$, во зависност од параметарот k.

6. Во III.2. решивме една параметарска равенка која се сведува на неполна квадратна равенка (пример 5). Да разгледаме сега уште еден пример на параметарска равенка, и начинот на нејзиното решавање.

Пример 4*. *Реши ја равенката* $(a^2 - b^2)x^2 - 2ax + 1 = 0$.

Забелешка. Броевите од видот $a + b\sqrt{c}$ и $a - b\sqrt{c}$ се викаат конјугирани ирационални броеви, бидејќи нивниот производ е рационален број.

Пример 1. *Состави квадратна равенка со рационални коефициенти, која ќе има корен*

$$x_1 = \frac{2}{3-\sqrt{5}}$$

Решение. Ако едниот корен на равенката е

$$x = \frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{2}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{9-5} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2},$$

тогаш другиот корен е $x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$, па коефициентите на равенката се:

$$p = -(x_1 + x_2) = -\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = -3,$$

$$q = x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{9-5}{4} = 1$$

Според тоа, бараната равенка е

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

2. Состави квадратна равенка со рационални коефициенти, чиј еден корен е:

а) $x_1 = 1 + \sqrt{2}$; б) $x_2 = \dfrac{5}{7-2\sqrt{3}}$

6. Видовме дека при квадратната равенка со реални коефициенти, ако $D < 0$, тогаш нејзините корени се конјугирано комплексни броеви. Важи и обратно, т.е. ако корените се конјугирано комплексни броеви, тогаш нејзините коефициенти се реални броеви. Од ова заклучуваме дека: *Ако дадената квадратна равенка со реални коефициенти има еден корен $x_1 = \alpha + \beta i$, тогаш таа ќе има и друг корен $x_2 = \alpha - \beta i$.*

Пример 2. *Напиши квадратна равенка со реални коефициенти, чиј еден корен е $x_1 = 5 - 4i$.*

Решение. Ако $x_1 = 5 - 4i$ е корен на равенката, тогаш и нему конјугираниот комплексен број $x_2 = \overline{x_1} = \overline{5-4i} = 5 + 4i$ е нејзин корен, па имаме;

$$p = -(x_1 + x_2) = -(5 - 4i + 5 + 4i) = -10;$$

$$q = x_1 \cdot x_2 = (5 - 4i)(5 + 4i) = 25 + 16 = 41.$$

Значи, бараната равенка е: $x^2 - 10x + 41 = 0$.

3. Состави квадратна равенка со реални коефициенти, чиј еден корен е:

а) $x_1 = 2 + 3i$ б) $x_1 = 1 - i\sqrt{2}$; в) $x = \dfrac{3}{1-i}$

Во наредниве неколку примери ќе ги користиме Виетовите формули.

Пример 3. *Ако x_1 и x_2 се корени на равенката $2x^2 - 5x + 9 = 0$, пресметај ја вредноста на изразот.*

$$\text{а) } A = x_1^2 + x_2^2 \qquad \text{б) } B = x_1^3 + x_2^3$$

Решение. Според Виетовите формули имаме

$$x_1 + x_2 = \frac{5}{2}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{9}{2}.$$

Дадените изрази ги изразуваме во зависност од збирот и производот на корените на дадената равенка и добиваме:

$$\text{а) } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{9}{2} = \frac{25}{4} - 9 = -\frac{11}{4}$$

$$\text{б) } x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) = (x_1 + x_2) \cdot \left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2\right] =$$

$$= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 \cdot x_2(x_1 + x_2) = \frac{125}{8} - 3 \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{5}{2} = -\frac{145}{8}$$

Задачата можеме да ја решиме ако прво ги најдеме корените на дадената равенка, а потоа ги пресметаме изразите. Стори го тоа сам, и спореди кој од овие начини, во дадениов пример, е поедноставен.

4. Без да ги наоѓаш корените x_1 и x_2 на равенката $3x^2 - 7x - 6 = 0$, пресметај ја вредноста на изразот:

$$\text{а) } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}; \qquad \text{б) } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}; \qquad \text{в) } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$$

Пример 4. *Состави квадратна равенка чии корени се m-пати поголеми од корените на равенката $ax^2 + bx + c = 0$ $(b^2 - 4ac \geqslant 0)$.*

Решение. Нека y_1 и y_2 се корените на бараната равенка по y, тогаш $y_1 = mx_1$, $y_2 = mx_2$. За дадената равенка Виетовите формули се

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Коефициентите на бараната равенка се:

$$p = -(y_1 + y_2) = -(mx_1 + mx_2) = -m(x_1 + x_2) = m\frac{b}{a},$$

$$q = y_1 \cdot y_2 = mx_1 \cdot mx_2 = m^2 \cdot x_1 \cdot x_2 = m^2\frac{c}{a}$$

Значи, бараната равенка е

$$y^2 + m\frac{b}{a}y + m^2\frac{c}{a} = 0, \qquad \text{т.е.} \qquad ay^2 + mby + m^2c = 0.$$

5. Состави квадратна равенка чии корени се реципрочни вредности од корените на равенката $ax^2 + bx + c = 0$ $(b^2 - 4ac \geqslant 0)$. Спореди ги нивните коефициенти!

Пример 5. *Одреди го параметарот* m *така што збирот на квадратите на корените на равенката* $x^2 - (2m - 1)x + 4m - 7 = 0$ *да биде* 31.

Решение. Виетовите формули за дадената равенка се

$$x_1 + x_2 = 2m - 1, \qquad x_1 \cdot x_2 = 4m - 7$$

а условот на задачата е

$$x_1^2 + x_2^2 = 31, \qquad \text{т.е.} \qquad (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 31.$$

Според тоа, ја добиваме равенката

$$(2m - 1)^2 - 2(4m - 7) = 31, \qquad \text{т.е.} \qquad m^2 - 3m - 4 = 0$$

чии корени се $m_1 = -1$, $m_2 = 4$

Значи, бараните вредности за m се: -1 и 4.

6. За кои вредности на параметарот m, за корените на равенката $x^2 - (m + 1)x + 2m - 3 = 0$ ќе важи релацијата $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{7}$?

Вежби

7. Ако x_1 и x_2 се корени на равенката $5x^2 - 8x + 10 = 0$, пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\dfrac{x_1}{1 + x_1} + \dfrac{x_2}{1 + x_2}$ б) $\dfrac{x_1}{1 + x_2} + \dfrac{x_2}{1 + x_1}$

8. Ако x_1 и x_2 се корени на равенката $x^2 + px + q = 0$, тогаш важат релациите:

а) $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$ б) $x_1^3 = x_2^3 = 3pq - p^3$

в)* $x_1 - x_2 = \sqrt{p^2 - 4q}$ Докажи!

9. Состави квадратна равенка чии корени се еднакви на збирот и производот од корените на равенката $x^2 + px + q = 0$.

10. За кои вредности на параметарот k, меѓу корените на квадратната равенка $x^2 - kx = k^2 + 5$ ќе важи релацијата

$$\frac{4}{x_1x_2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

11. Во равенката $x^2 - 8x + q = 0$, одреди го параметарот q така што едниот корен да биде трипати поголем од другиот, ($q \leqslant 16$).

$\boxed{12}$ Каков треба да биде знакот на коефициентот q за равенката $x^2 + px + q = 0$, кај која $D \geqslant 0$, да има два корени со: а) исти знаци; б) различни знаци?

Упатство. Искористи ја втората Виетова формула.

$\boxed{13}$ Какви треба да бидат знаците на коефициентите p и q, за равенката $x^2 + px + q = 0$, кај која $D \geqslant 0$, да има:

а) два позитивни реални корени; б) два негативни реални корени?

III. 7. Испитување знаците на корените на квадратната равенка

а. Виетовата теорема ни овозможува да ги одредиме знаците на корените на квадратната равенка, без да ја решаваме истата. Секако, ова испитување има смисла ако корените се реални – различни или еднакви, т.е. само ако $D \geqslant 0$.

Пример 1. *Одреди ги знаците на корените на равенката* $5x^2 + 9x + 2 = 0$.

Решение. Бидејќи $D = 81 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 41 > 0$, равенката има два различни реални корени. Производот на корените $x_1 x_2 = \frac{2}{5}$ е позитивен, тоа значи дека x_1 и x_2 имаат исти знаци. Но, бидејќи нивниот збир $x_1 + x_2 = -\frac{9}{5}$ е негативен, заклучуваме дека корените се негативни броеви.

1. Без да ја решаваш равенката, одреди го знакот на нејзините корени, ако:

а) $x^2 - 7x + 5 = 0$ б) $2x^2 + 11x + 9 = 0$ в) $3x^2 - 2x + 5 = 0$.

б. Веќе рековме дека секоја квадратна равенка од општ вид можеме да ја запишеме во сведен вид

(1) $$x^2 + px + q = 0$$

Испитувањето на знаците на нејзините корени ќе го вршиме со помош на нејзините коефициенти p и q, и со Виетовите формули

(2) $$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1 x_2 = q$$

Ако барем еден од коефициентите p или q е еднаков на нула, тогаш равенката (1) се сведува на неполна, а таквите равенки ги разгледавме порано. Затоа ќе претпоставиме дека $pq \neq 0$.

Ќе разгледаме два случаи.

1° $q < 0$. Во овој случај дискриминантата на равенката (1) е позитивна, па равенката има секогаш различни корени со спротивни знаци. Нека $x_1 < 0 < x_2$. Притоа:

i) ако $-p = x_1 + x_2 > 0$, тогаш $|x_1| < |x_2|$, т.е. позитивниот корен x_2 има поголема апсолутна вредност од негативниот корен x_1;

ii) ако $-p = x_1 + x_2 < 0$, тогаш $|x_1| > |x_2|$, т.е. негативниот корен x_1 има поголема апсолутна вредност од позитивниот корен x_2.

2° $q > 0$. Во овој случај дискриминантата може да биде: или позитивна, или еднаква на нула, или негативна. Испитувањето има смисла само ако $D \geqslant 0$. Бидејќи $q = x_1 x_2 > 0$, следува дека корените на равенката имаат исти знаци, и притоа:

i) ако $-p = x_1 + x_2 > 0$, тогаш $0 < x_1 < x_2$;

ii) ако $-p = x_1 + x_2 < 0$, тогаш $x_1 < x_2 < 0$.

Пример 2. *За кои вредности на параметарот k, равенката $x^2 + (k-1)x - k = 0$ ќе има позитивни корени?*

Решение. Првин ја пресметуваме дискриминантата:

$$D = (k-1)^2 + 4k = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 \geqslant 0 \ .$$

Според тоа, за секој $k \in \mathbf{R}$, дадената равенка ќе има реални корени. Од Виетовите формули имаме

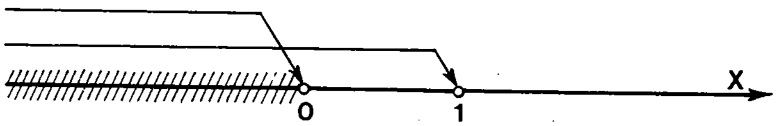
$$x_1 + x_2 = -(k-1), \qquad x_1x_2 = -k.$$

Корените x_1 и x_2 ќе бидат и двата позитивни, ако

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} k - 1 < 0 \\ -k > 0 \end{cases}$$

Множеството решенија на првата неравенка $\mathbf{M_1} = (-\infty, 1)$, а на втората $\mathbf{M_2} = (-\infty, 0)$. Според тоа, множеството решенија на системот неравенки е

$$\mathbf{M} = \mathbf{M_1} \cap \mathbf{M_2} = (-\infty, 0) \qquad \text{(црт. 1).}$$



црт. 1

Значи, дадената квадратна равенка ќе има позитивни корени за $k \in (-\infty, 0)$.

Забелешка. Задачата (во овој случај) можеме да ја решиме и поинаку. Бидејќи корените на равенката се $x_1 = 1$, $x_2 = -k$, следува дека тие ќе бидат позитивни, само ако $-k > 0$, т.е. $k < 0$.

2. Одреди го параметарот m, за корените на равенката $(m-4)x^2 + 2(m-2)x + m = 0$ да бидат негативни.

Упатство. Треба да бидат исполнети условите: $D \geqslant 0$, $p > 0$, $q > 0$.

Пример 3*. *Испитај ги знаците на корените на равенката $(k-3)x^2 - 2(k-2)x + k = 0$,* во зависност од параметарот k.

Решение. За $k \neq 3$, равенката е квадратна, а нејзината дискриминанта е

$$D = 4(k^2 - 4k + 4) - 4(k^2 - 3k) = 4(4-k)$$

Решенијата на равенката ќе бидат реални броеви, ако $D \geqslant 0$, т.е.

$$4 - k \geqslant 0, \ k \leqslant 4.$$

Го испитуваме знакот на производот од корените

$$q = x_1x_2 = \frac{k}{k-3}$$

Оваа дропка ќе биде позитивна ако k и $k-3$ имаат исти знаци, т.е. ако се исполнети условите

$$\begin{cases} k > 0 \\ k-3 > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} k < 0 \\ k-3 < 0 \end{cases}$$

Множеството решенија на првиот систем $\mathbf{M}_1 = (3, +\infty)$, а на вториот $\mathbf{M}_2 = (-\infty, 0)$. Според тоа, решението на вкупноста од овие системи е

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty).$$

Следствено, производот на корените ќе биде позитивен за $k \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$, негативен за $k \in (0, 3)$, а еднаков на нула за $k = 0$.
За поголема прегледност, овие резултати за знакот на производот ги запишуваме во таблица

k	$-\infty$	0		3	$+\infty$
k	$-$	0	$+$	3	$+$
$k-3$	$-$		$-$	0	$+$
$q = \frac{k}{k-3}$	$+$	0	$-$		$+$

Аналогно го одредуваме знакот на збирот од корените

$$-p = x_1 + x_2 = 2\,\frac{k-2}{k-3}$$

Тој е позитивен за $k \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$, негативен за $k \in (2, 3)$, а еднаков на нула за $k = 2$, што прегледно е дадено во следнава таблица

k	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$k-2$	$-$	0	$+$		$+$
$k-3$	$-$		$-$	0	$+$
$-p = 2\,\frac{k-2}{k-3}$	$+$		$-$		$+$

Конечните резултати за знаците на дискриминантата D, производот на корените $q = x_1x_2$ и нивниот збир $-p = x_1 + x_2$, во зависност од параметарот k, ги внесуваме во една табліца.

k	$-\infty$		0		2		3		4		$+\infty$
D		+		+		+		+	0	−	
$q = x_1x_2$		+	0	−		−		+		+	
$-p = x_1 + x_2$		+		+	0	−		+		+	

Од таблицата ги „читаме” следниве заклучоци:

1° За $k \in (-\infty, 0) \cup (3, 4)$, корените се позитивни броеви, т.е. $0 < x_1 < x_2$.

2° За $k \in (0, 2)$ корените се со различни знаци, т.е. $x_1 < 0 < x_2$, и притоа $|x_1| < |x_2|$.

3° За $k \in (2, 3)$ корените се со различни знаци, т.е. $x_1 < 0 < x_2$, но сега $|x_1| > |x_2|$.

4° За $k \in (4, +\infty)$ корените се конјугирано комплексни броеви.

Разликуваме четири гранични случаи:

i) За $k = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 > 0$, т.е $x_1 = 0 < x_2$.

(Во овој случај равенката го добива видот $-3x^2 + 4x = 0$, од каде што $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{3}$).

ii) За $k = 2$, корените се спротивни броеви, т.е. $x_1 < 0 < x_2$, и притоа $|x_1| = |x_2|$ $(= \sqrt{2})$.

iii) За $k = 3$ равенката е линеарна од видот $-2x + 3 = 0$ и има единствено решение $x = \frac{3}{2}$.

iv) За $k = 4$, $D = 0$, па равенката има двократен (позитивен) корен $x_1 = x_2 - \frac{b}{2a} = 2$.

3*. Испитај ги знаците на корените, т.е. дискутирај ги решенијата на равенката $kx^2 - 2(k + 6)x + k + 8 = 0$, во зависност од параметарот k.

Вежби

4. Какви се знаците на корените на квадратната равенка $x^2 + px + q = 0$, ако се исполнети условите:

а) $D > 0$, $p < 0$, $q > 0$ б) $D > 0$, $p > 0$, $q > 0$

в) $D > 0$, $p < 0$, $q < 0$ г) $D > 0$, $p > 0$, $q < 0$

5. За кои вредности на параметарот a, равенката $(a + 2)x^2 - 2ax + a - 4 = 0$: ќе има позитивни корени?

6. За кои целобројни вредности на параметарот m, равенката

$(m-5)x^2-(2m-3)x+m+2=0$ ќе има корени со различни знаци?

7*. За кои вредности на параметарот k, равенката $kx^2+2(k-4)x+k=0$,

ќе има два позитивни: а) еднакви; б) нееднакви реални корени?

8*. За кои вредности на параметарот k, равенката $(k-2)x^2+2(k-3)x+k-5=0$ ќе има реални корени со различни знаци, при што позитивниот корен да има: а) поголема; б) помала апсолутна вредност од негативниот?

9*. Испитај ги знаците на корените на равенката $kx^2-2(k-2)x+k-3=0$, во зависност од параметарот k.

$\boxed{10.}$ Разложи го на множители изразот:

а) $2x^2+4x$ б) x^2+5x+6 в) $x^2-2x-15$.

III.8. Разложување на квадратниот трином на линеарни множители

а. Полиномот од втор степен со една променлива, т.е. изразот

(1) $$ax^2+bx+c$$

се вика *квадратен трином* по однос на променливата x, каде што a, b, c се реални броеви и $a \neq 0$.

Реалниот број $D=b^2-4ac$ се вика *дискриминанта* на квадратниот трином. Корените на квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$ се викаат *нули* на квадратниот трином (1).

1. Најди ги нулите на триномот $2x^2-9x+7$.

Многу задачи во врска со квадратниот трином, поедноставно се решаваат ако тој е разложен на множители. Во минатите лекции некои квадратни триноми веќе ги разложивме на множители, без да ги наоѓаме неговите нули.

Сега ќе покажеме како се разложува квадратниот трином на линеарни множители, ако се знаат неговите нули. Со таа цел, ќе ја докажеме следнава теорема.

Т. **Квадратниот трином** ax^2+bx+c **може да се разложи на линеарни множители со реални коефициенти**

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

само ако неговите нули x_1 **и** x_2 **се реални броеви.**

Доказ. Нека x_1 и x_2 се реални нули на триномот $ax^2 + bx + c$.

Од Виетовите формули

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

ги изразуваме коефициентите b и c:

$$b = -a(x_1 + x_2), \quad c = ax_1 x_2$$

Ако овие вредности за b и c ги замениме во триномот, добиваме

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 \\ &= a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] \\ &= a(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Значи докажавме дека

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ако $x_1 = x_2$, при $D = 0$, тогаш

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Пример 1. *Разложи го на множители триномот:*

$$а)\ x^2 - 10x + 24 \qquad б)\ 6x^2 + x - 15$$

Решение. а) Корените на равенката $x^2 - 10x + 24 = 0$, односно нулите на триномот $x^2 - 10x + 24$ се

$$x_1 = 4, \qquad x_2 = 6,$$

па бараното разложување е:

$$x^2 - 10x + 26 = (x - 4)(x - 6)$$

б) Триномот $6x^2 + x - 15$ има две реални нули

$$x_1 = -\frac{5}{3} \qquad x_2 = \frac{3}{2}$$

па имаме

$$\begin{aligned} 6x^2 + x - 15 &= 6\left(x + \frac{5}{3}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \\ &= 6\,\frac{3x + 5}{3} \cdot \frac{2x - 3}{2} \\ &= (3x + 5)(2x - 3) \end{aligned}$$

2. Разложи го на множители триномот:

а) $3x^2 + 11x - 4$ б) $4x^2 - 12x + 9$

в) $x^2 + 2x - 1$ г) $x^2 + kx - 2k^2$

Пример 2. *Скрати ја дропката* $\dfrac{x^2 - 4}{3x^2 + 4x - 4}$

Решение. За да ја скратиме дадената дропка, треба броителот и именителот да ги разложиме на множители. Броителот лесно се разложува на множители – како разлика на квадрати: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. За триномот во именителот прво ги наоѓаме неговите нули:

$$3x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{3} = \frac{-2 \pm 4}{3}$$

$$x_1 = \frac{2}{3}, \qquad x_2 = -2,$$

па имаме

$$3x^2 + 4x - 4 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 2) =$$
$$= (3x - 2)(x + 2)$$

Тогаш

$$\frac{x^2 - 4}{3x^2 + 4x - 4} = \frac{(x-2)(x+2)}{(3x-2)(x+2)} = \frac{x-2}{3x-2}$$

Дадената дропка е дефинирана за секој реален број x, освен за нулите на триномот $3x^2 + 4x - 4$. Затоа дропката добиена по нејзиното скратување е еднаква на почетната само за $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-2, \frac{2}{3}\right\}$.

3. Скрати ја дропката:

а) $\dfrac{a^2 + 5a + 6}{a^2 + 2a}$ б) $\dfrac{2a^2 - a - 15}{3a^2 - 11a + 6}$

Вежби

Разложи ги на множители триномите:

4. а) $x^2 - 9x + 8$ б) $a^2 + 4a - 12$ (усно)

5. а) $3x^3 + 10x^2 + 3x$ б) $2x^4 - 7x^3 - 4x^2$

6. а) $20x^2 - 7x - 6$ б) $35y^2 + 23y - 6$

7. а) $x^2 - ax - 6$ б) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2$

8. Може ли да се разложи триномот:

а) $2x^2 + 3x + 5$ б) $7x^2 - 4x + 3$

9. Скрати ги дропките:

а) $\dfrac{x^2 - 16}{x^2 - x - 12}$ б) $\dfrac{3a^2 - 7a - 6}{a^3 - 27}$ в) $\dfrac{15x^2 + ax - 2a^2}{6x^2 + ax - a^2}$

$\boxed{10.}$ Одреди ја дефиниционата област на дропката:

а) $\dfrac{2x + 1}{x^2 - 3}$ б) $\dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 2x + 3}$ в) $\dfrac{x^2 - x + 1}{2x^3 + x^2 - x}$.

III. 9. Дробно рационални равенки кои се сведуваат на квадратни равенки

а. Равенка во која променливата се содржи и во именителот на некоја дропка, се вика дробно рационална равенка. На пример, такви се равенките:

а) $\dfrac{1 - x}{x} = \dfrac{2x}{x + 2}$ б) $\dfrac{x}{x - 2} + \dfrac{5}{x + 2} = \dfrac{8}{x^2 - 4}$, и др.

При решавање на овие равенки треба да водиме сметка за *допуштените вредности* на променливата, т.е. за *дефиниционата област* на равенката.

Дробно рационалниот израз $\dfrac{1 - x}{x}$ е определен (дефиниран) за секој реален број x, освен за $x = 0$. Велиме дека изразот $\dfrac{1 - x}{x}$ има дефинициона област $\mathbf{D_1} = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Во таа смисла $\mathbf{D_2} = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$ е дефинициона област на изразот $\dfrac{2x}{x + 2}$. Пресекот на овие дефинициони области, множеството

$$\mathbf{D} = \mathbf{D_1} \cap \mathbf{D_2} = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0\},$$

е дефинициона област на равенката (а)

Дефиниционата област на равенката (б) е множеството $\mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$.

1. Одреди ја дефиниционата област на равенката:

а) $\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{5}{x + 1} = \dfrac{2 - x^2}{x^2 - 1}$ б) $\dfrac{1}{x^2 - 4x - 5} = \dfrac{2x + 3}{x^2 + x}$

б. При решавањето на дробно рационалните равенки најчесто постапуваме по овој редослед:

– ги разложуваме именителите на множители,

– ја одредуваме дефиниционата област на равенката,

– се ослободуваме од дропките со множење на целата равенка со НЗС за нивните именители,

– ја решаваме добиената цела рационална равенка (линеарна, квадратна или од повисок ред),

– утврдуваме кои од решенијата на последната равенка се решенија и на почетната.

Да го илустрираме ова со неколку примери.

Пример 1. *Реши ја равенката* $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{5}{x+2}=\dfrac{8}{x^2-4}$

Решение. Дефиниционата област на равенката е множеството $\mathbf{D} = \mathbf{R}\setminus\{-2, 2\}$. Ја множиме дадената равенка со изразот $(x-2)(x+2)$, НЗС на сите именители, па добиваме:

$$x(x+2)+5(x-2)=8, \qquad x^2+7x-18=0$$

Оваа равенка, во областа $\mathbf{D}$, е еквивалентна со дадената. Значи, решавањето на дадената равенка го сведуваме на решавање на квадратната равенка

$$x^2+7x-18=0, \qquad x\in\mathbf{D}$$

Корените на квадратната равенка се: $x_1=-9$, $x_2=2$.

Бидејќи $2\notin\mathbf{D}$, следува дека дадената равенка има само еден корен: $x=-9$.

2. Реши ја равенката:

а) $\dfrac{x-2}{x+1}-\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{6}{x^2-1}$ б) $\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{x+3}{x+1}+\dfrac{6}{x^2-1}$

Пример 2. *Најди го множеството решенија на равенката*

$$\frac{x+8}{x^2+x-2}=\frac{2x-7}{x^2-4x+3}+\frac{x-2}{x^2-x-6}$$

Решение. Ги разложуваме именителите на линеарни множители и ја добиваме равенката

$$\frac{x+8}{(x-1)(x+2)}=\frac{2x-7}{(x-1)(x-3)}+\frac{x-2}{(x-3)(x+3)}$$

Нејзината дефинициона област е $\mathbf{D} = \mathbf{R}\setminus\{-2, 1, 3\}$.

Ја множиме равенката со изразот $(x-1)(x+2)(x-3)\neq 0$, па имаме

$$(x+8)(x-3)=(2x-7)(x+2)+(x-2)(x-1).$$

По измножување и средување ја добиваме равенката

$$2x^2-11x+12=0$$

чии корени се: $x_1=\dfrac{3}{2}$, $x_2=4$.

Бидејќи и двата корена припаѓаат на областа **D**, заклучуваме дека множеството решенија на дадената равенка е

$$\mathbf{M} = \left\{ \frac{3}{2}, 4 \right\}$$

3. Најди го множеството решенија на равенката

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+2} - \frac{4x}{x^2+x-6} = \frac{5x+3}{x^2+2x-3}\,.$$

b. Со посебна внимателност треба да пристапиме при решавање на дробно рационални равенки со параметри. Ќе го покажеме тоа на еден пример.

Пример 3*. *Да ја решиме равенката*

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \qquad (ab \neq 0)$$

Решение. Равенката (1) не е дефинирана за $x = a$ и $x = b$, т.е. $\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \{a, b\}$. За вредностите на $x \in \mathbf{D}$, таа е еквивалентна со равенката

$$ab(x-b+x-a) = (a+b)(x-a)(x-b)$$

или

$$\text{(2)} \qquad (a+b)x^2 - (a^2+4ab+b^2)x + 2ab(a+b) = 0$$

1° За $a + b = 0$, т.е. $a = -b$ $(\neq 0)$, равенката (2) е линеарна и има корен $x = 0$.

2° За $a + b \neq 0$, равенката (2) е квадратна. Нејзината дискриминанта е

$$D = a^4 + b^4 + 16a^2b^2 + 8a^3b + 8ab^3 + 2a^2b^2 - 8a^3b - 8ab^3 - 16a^2b^2,$$

т.е.

$$D = (a^2+b^2)^2 > 0$$

па равенката има два корени

$$\text{(3)} \qquad x_1 = \frac{2ab}{a+b}\,, \qquad x_2 = ab.$$

Корените (3), ќе бидат корени и на равенката (1) при условите $x \neq a$ и $x \neq b$. Да видиме за кои вредности на a и b корените x_1 и x_2 се различни од a, односно од b.

За првиот корен имаме:

$$\frac{2ab}{a+b} \neq a, \qquad\qquad \frac{2ab}{a+b} \neq b,$$

$$2ab - a^2b - ab \neq 0, \qquad\qquad 2ab - ab - b^2 \neq 0$$

$$a(b-a) \neq 0, \qquad\qquad b(a-b) \neq 0,$$

$$a \neq 0 \text{ и } a \neq b, \qquad\qquad b \neq 0 \text{ и } a \neq b$$

Бидејќи $a \neq 0$ и $b \neq 0$, заклучуваме дека x_1 е корен на равенката (1) за $a \neq b$.

За вториот корен имаме:

$$a + b \neq a, \qquad a + b \neq b,$$
$$b \neq 0; \qquad a \neq 0,$$

од каде заклучуваме дека x_2 е корен на равенката (1).

Според тоа:

i) За $a \neq b$, равенката (1) има два корени

$$x_1 = \frac{2ab}{a+b}, \qquad x_2 = a + b;$$

ii) За $a = b$, равенката (1) го добива видот

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \qquad \text{т.е.} \qquad \frac{2}{x-a} = \frac{2}{a},$$

од каде што добиваме само еден корен

$$x = 2a$$

Од сè ова следува:

– ако $|a| \neq |b|$, тогаш $x_1 = \dfrac{2ab}{a+b}$, $x_2 = a + b$

– ако $a = b$, тогаш $x = 2a$

– ако $a = -b$, тогаш $x = 0$.

4*. Реши ја и дискутирај ја равенката $\dfrac{x-a}{x-b} + \dfrac{x-b}{x-a} + 2 = 0$

Вежби

5. Одреди ја дефиниционата област на равенката

$$\frac{2x+3}{x^2+3x} + \frac{1-5x}{2x-x^2} = \frac{4x+1}{x^2+x-6}$$

6. Реши ги равенките:

а) $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{3}{x+2} = \dfrac{8}{x^2-4}$ б) $\dfrac{4}{x^2-2x} + \dfrac{x+8}{x^2+x} + \dfrac{3x-2}{x^2-x-2} = 0.$

7*. Реши ги и дискутирај ги равенките:

а) $\dfrac{x}{x-a} + \dfrac{2}{x+a} = \dfrac{8a^2}{x^2-a^2}$ б) $\dfrac{a}{a+x} + \dfrac{b}{b+x} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + 2$ $(ab \neq 0)$

$\boxed{8.}$ Напиши ги без знак на апсолутна вредност изразите:

а) $|x|$ б) $|x-1|$ в) $|2x+3|$.

III. 10.* Равенки во кои променливата се наоѓа и под знакот на апсолутна вредност

Во алгебрата често се срекаваме со равенки во кои променливата се наоѓа и под знакот на апсолутна вредност. Такви се, на пример, равенките:

$$|x| = 2; \qquad x - 2|x - 1| = 0; \qquad x^2 - |x - 2| + 3 = 0$$

Овие равенки битно се разликуваат од линеарните и квадратните равенки, иако нивното решавање се сведува на решавање на некои линеарни или квадратни равенки. Некои од нив можат да имаат и повеќе од два корени, па дури и бесконечно множество решенија, што не е случај кај квадратните равенки.

Користејќи ја дефиницијата и својствата на апсолутната вредност на реалните броеви, ќе покажеме како се решаваат некои поедноставни равенки со апсолутни вредности.

Пример 1. *Реши ја равенката* $|x - 2| = 3$.

Решение. Ќе ја користиме еквиваленцијата

$$(*) \qquad |f(x)| = a \wedge a > 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{array}\right.$$

Според тоа, имаме

$$|x - 2| = 3 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 3 \\ x - 2 = -3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Значи, равенката има два корени:

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 5$$

1. Реши ја равенката:

а) $|x + 1| = 4$ б) $|x - 5| = -1$ в) $|x^2 + 3x + 1| = 1$.

Пример 2. *Реши ја равенката* $x^2 - 3|x| + 2 = 0$

Решение. Разликуваме два случаи:

i) Ако $x < 0$, тогаш $|x| = -x$, па дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

чии корени се: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$. Бидејќи $x < 0$, следува дека x_1 и x_2 се корени на дадената равенка.

---

* Оваа материја не е предвидена со Програмата.

ii) Ако $x \geqslant 0$, тогаш $|x| = x$, па равенката го добива видот

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

чии корени се $x_3 = 1$, $x_4 = 2$. Условот $x \geqslant 0$ го задоволуваат и двата корени, па следува дека се тие корени и на дадената равенка.

Следствено, равенката има четири корени:

$$x_1 = -2, \qquad x_2 = -1, \qquad x_3 = 1, \qquad x_4 = 2.$$

Забелешка. Задачата можеме да ја решиме и со воведување на нова променлива. Бидејќи $|x|^2 = x^2$, тогаш ако ставиме $|x| = y$ равенката го добива видот

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

од каде што: $y_1 = 1$, $\quad y_2 = 2$.

Сега, имајќи ја предвид смената $y = |x|$, имаме:

i) од $|x| = 1$ следува $x_{1,2} = \pm 1$

ii) од $|x| = 2$ следува $x_{3,4} = \pm 2$

2. Реши ја равенката:

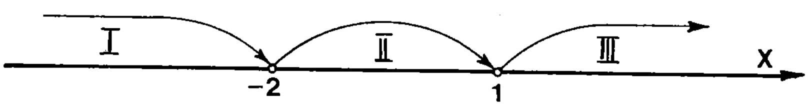
а) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$ б) $x^2 + 8\,|x| - 9 = 0$

Пример 3. *Реши ја равенката*

$$x^2 - |x + 2| - |x - 1| = 0$$

Решение. Равенката ќе ја решиме по т.н. *метод на интервали*. Ги одредуваме вредностите на x, за кои изразите под знакот на апсолутната вредност се анулираат, т.е. добиваат вредност еднаква на нула. Тоа се броевите -2 и 1. Тие бројната оска (црт. 2) ја разбиваат на три дисјунктни интервали:

$$(-\infty, -2),\ [-2, 1),\ [1, +\infty).$$



црт. 2

Дадената равенка ја разгледуваме одделно во секој од горните три интервали:

I) Ако $x \in (-\infty, -2)$, тогаш $|x+2| = -(x+2)$, $|x - 1| = -(x - 1)$, па равенката го добива видот

$$x^2 + x + 2 + x - 1 = 0, \quad \text{т. е.} \quad x^2 + 2x + 1 = 0$$

Оваа равенка има двоен корен $x_1 = x_2 = -1$, кој не припаѓа на интервалот $(-\infty, -2)$, па затоа дадената равенка нема решение во тој интервал.

II) Ако $x \in [-2, 1)$, тогаш $|x+2| = x+2$, $|x-1| = -(x-1)$, па равенката го добива видот

$$x^2 - x - 2 + x - 1 = 0, \quad \text{т.е.} \quad x^2 - 3 = 0$$

Нејзините два корени се: $x_3 = -\sqrt{3}$, $x_4 = \sqrt{3}$, од кои само x_3 ја задоволува дадената равенка, бидејќи $\sqrt{3} \notin [-2, 1)$.

III) Ако $x \in [1, +\infty)$, тогаш равенката го добива видот

$$x^2 - x - 2 - x + 1 = 0, \qquad \text{т. е.} \quad x^2 - 2x - 1 = 0$$

Од нејзините два корени $x_5 = 1 - \sqrt{2} \approx -0{,}4$ и $x_6 = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}4$, само вториот корен припаѓа на интервалот $[1, +\infty)$.

Следствено, дадената равенка има два корени

$$x_1 = -\sqrt{3}\,, \qquad x_2 = 1 + \sqrt{2}\,.$$

3. Реши ги равенките:

а) $x^2 - |x+2| + |x-3| = 0$ б) $x|x+2| + |x-1| = 3$.

Пример 4. *Реши ја равенката*

$$x^2 - |x| = x|x-1|$$

Решение. Ќе ја решиме равенката во секој од интервалите:

$$(-\infty, 0), \quad [0, 1), \quad [1, +\infty)$$

i) Ако $x \in (-\infty, 0)$, тогаш равенката го добива видот

$$x^2 + x = -x(x-1), \quad \text{т.е.} \quad 2x^2 = 0$$

чиј корен $x = 0$ не припаѓа не интервалот $(-\infty, 0)$.

ii) Ако $x \in [0, 1)$, тогаш равенката го добива видот

$$x^2 - x = -x\,(x-1) \quad \text{т.е.} \quad 2x^2 - 2x = 0$$

чии корени се: $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Од нив само првиот корен припаѓа на интервалот $[0, 1)$

iii) Ако $x \in [1, +\infty)$, тогаш имаме

$$x^2 - x = x^2 - x$$

Оваа равенка е задоволена за секој $x \in \mathbf{R}$, а дадената равенка има множество решенија само во интервалот $[1, +\infty)$.

Следствено, множеството решенија на равенката е

$$\mathbf{M} = \{0\} \cup [1, +\infty)$$

4. Најди го множеството решенија на равенката:

а) $x^2 - |x+2| = x|x-1| - 2$ б) $x^2 - x - 2 = |x+1| \cdot |x-2|$.

б Вежби

Реши ги равенките:

5. а) $x^2 + 5|x| + 6 = 0$ б) $x^2 + 3|x-1| + 2 = 0$.

6. а) $2x^3 + 5x|x| = 3x$ б) $3x^3 - 7x|x| = 6x$.

7. а) $(|x| + 1)^2 = 4|x| + 9$ б) $x^2 + |x+1| = 2x + 3$.

8. $x^2 - |2x+1| - |x-2| - 3x - 8 = 0$.

9. $x|x+2| - 2|x-3| + 4x - 3 = 0$.

III. 11. Примена на квадратните равенки

а. Во различни области од науката и практиката, решавањето на многу задачи се сведува на решавање на равенки или системи равенки. На неколку примери ќе покажеме како се решаваат ваквите задачи, кои се сведуваат на квадратни равенки.

Пример 1. *Збирот на цифрите на еден двоцифрен број е* 11, *а производот на тој број и неговиот обратен – напишан со истите цифри но со обратен ред – е* 3 154. *Кој е тој број?*

Решение. Ако x е цифрата на единиците, тогаш $11 - x$ е цифрата на десетките, па:
– бараниот број е $10(11-x)+x = 110 - 9x$,
– обратниот број е $10x + (11 - x) = 9x + 11$.
Од условот на задачата следува равенката

$$(110 - 9x)(9x+11) = 3154, \quad \text{т.е.} \quad x^2 - 11x + 24 = 0.$$

Корените на оваа равенка се: $x_1 = 3$, $x_2 = 8$.

Според тоа, постојат два броја што ги исполнуваат условите на задачата: 83 и 38.

Забелешка. Задачата можеме да ја решиме и аритметички. Двоцифрени броеви чиј збир на цифрите е 11 се: 92, 83, 74, 65, а нивните обратни броеви: 29, 38, 47, 56. Ги множиме соодветните парови броеви и проверуваме кој производ е еднаков на 3154. Но и без измножување можеме да дојдеме до резултатот – со проверка на последната цифра од производот. Бидејќи само производот $83 \cdot 38$ завршува на 4 (другите производи завршуваат на 8 или 0), следува дека ако постојат такви броеви, тие се 83 и 38. Бидејќи $83 \cdot 38 = 3154$, следува дека се тие бараните броеви – други нема.

1. Цифрата на единиците на еден двоцифрен број е за 2 помала од цифрата на десетките. Производот на тој број и збирот на неговите цифри е 900. Кој е тој број?

Пример 2. *Еден воз растојание од 650 km го минува за 3 часа побрзо од друг воз, чија брзина е за 15 km/h помала од брзината на првиот воз. Најди ги брзините на возовите.*

Решение. Нека брзината на првиот воз е x *km/h*, тогаш брзината на вториот воз е $(x-15)$ *km/h*. Времето на првиот воз е $\frac{650}{x}$ часа, а на вториот $\frac{650}{x-15}$ часа. Од условот на задачата ја добиваме равенката

$$\frac{650}{x} + 3 = \frac{650}{x-15}$$

или, по средување

$$x^2 - 15x - 3250 = 0.$$

Корените на оваа равенка се: $x_1 = -50$, $x_2 = 65$. Негативниот корен не е решение на задачата.

Според тоа, брзината на првиот воз е 65 *km/h*, а на вториот 50 *km/h*.

2. Моторен чамец минал 30 *km* по течението на реката, и 12 *km* спротивно – за 5 часа. Колкава е брзината на чамецот во мирна вода, ако брзината на реката е 2 *km/h?*

Пример 3. *Еден работник сам работи 7 дена на една работа, а потоа доаѓа друг работник и ја завршуваат работата уште за 8 дена заедно. За колку дена, секој од нив, може сам да ја заврши работата, ако вториот од нив ја завршува работата за 5 дена помалку, отколку првиот?*

Решение. Нека првиот ја завршува работата за x – денови, тогаш вториот ќе ја заврши за 5 дена помалку, т.е. за $(x-5)$ – денови. За еден ден првиот завршува $\frac{1}{x}$-ти дел од работата, вториот $\frac{1}{x-5}$-ти. Првиот работник работи 15 дена и ќе заврши $\frac{15}{x}$ -ти дел од работата, а вториот работи само 8 дена и ќе заврши $\frac{8}{x-5}$-ти дел од работата. Според тоа, ја добиваме равенката

$$\frac{15}{x} + \frac{8}{x-5} = 1, \quad \text{т. е.} \quad x^2 - 28x + 75 = 0$$

Корените на равенката се: $x_1 = 3$, $x_2 = 25$. Очигледно, првиот корен не ги задоволува условите на задачата, значи $x = 25$.

Следствено, првиот работник би ја завршил сам таа работа за 25 дена, а вториот за 20 дена.

3. Две цевки, од кои втората почнува со работа 1 час подоцна од првата, го полнат базенот за 6 часа. За колку часа секоја од нив може сама да го наполни базенот, ако првата цевка го полни базенот за 2 часа повеќе отколку втората?

Пример 4. *Страната на квадратот ABCD е 6 cm. На страните се нанесени еднакви отсечки AK, BL, CM, DN (црт. 3). Најди ја должината на отсечката AK, ако плоштината на четириаголникот KLMN е 16 см².*

Решение. Нека $\overline{AK} = x$, тогаш $\overline{KB} = 6 - x$ (црт. 3).

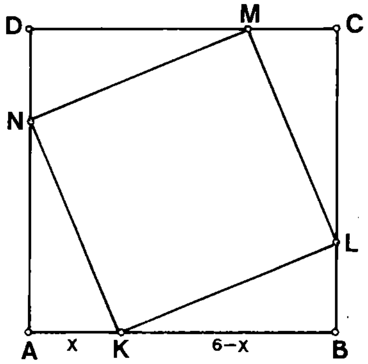
Четириаголникот $KLMN$ е квадрат, бидејќи триаголниците KBL, LCM, MDN и NAK се складни. Неговата страна е

$$\overline{KL}^2 = x^2 + (6 - x)^2$$

По услов, плоштината на квадратот $KLMN$ е $16\,cm^2$, т.е. $\overline{KL}^2$ 16, па добиваме

$$16 = x^2 + (6 - x)^2, \quad \text{т.е.}$$
$$x^2 - 6x + 10 = 0$$

Оваа равенка нема реални корени, бидејќи



црт. 3

$D = b^2 - 4ac = 36 - 40 = -4 < 0$, па следува дека задачата нема решение.

Забелешка. Дека задачата нема решение можеме да заклучиме веднаш. Најмалата плоштина што може да ја има квадратот $KLMN$ е половина од плоштината на квадратот $ABCD$, т.е. $18\,cm^2$, а тоа е тогаш кога K, L, M, N се средини на страните на квадратот $ABCD$.

За да испитаме кога задачата ќе има решение, дадените броеви ќе ги замениме со параметри. Нека страната на квадратот $ABCD$ е a, а плоштината на $KLMN$ е P. Должините на катетите на складните триаголници се x и $a - x$, и притоа $0 < x < a$. При овие ознаки ја добиваме равенката

$$(*) \qquad 2x^2 - 2ax + a^2 - P = 0$$

Оваа равенка ќе има реални корени ако нејзината дискриминанта е ненегативна, т.е.

$$a^2 - 2(a^2 - P) \geqslant 0, \quad \text{т.е.} \quad P \geqslant \frac{a^2}{2}$$

Корените на равенката (*) се

$$x_1 = \frac{a - \sqrt{2P - a^2}}{2}, \qquad x_2 = \frac{a + \sqrt{2P - a^2}}{2}$$

Ако еден од овие корени ја задоволува равенката (*), тогаш и вториот корен ќе ја задоволува, бидејќи $x_1 + x_2 = a$. Лесно се докажува дека $x_1 < x_2 < a$, т.е.

$$\frac{a + \sqrt{2P - a^2}}{2} < a, \qquad \sqrt{2P - a^2} < a,$$

бидејќи последното неравенство е еквивалентно со очигледното неравенство $P < a^2$.

Значи, задачата ќе има решение ако

$$\frac{a^2}{2} \leq P < a,$$

т.е. плоштината на квадратот $KLMN$ е меѓу половината и целата плоштина на $ABCD$.

4. Основата и висината во рамнокракиот триаголник се два последователни природни броеви, а плоштината му е 210 cm^2. Пресметај го периметарот на триаголникот.

б. Вежби

5. Збирот од квадратите на три последователни непарни броеви е 251. Кои се тие броеви?

6. Кој број е поголем за $\frac{16}{15}$ од својата реципрочна вредност?

7. Бројот 144 разложи го на два множители чиј збир е еднаков на 30.

8. Пресметај ги радиусите на впишаната и опишаната кружница на оној правоаголен триаголник, чии страни се три последователни природни броеви.

9. Дијагоналата на правоаголникот е 30 cm, а страните се разликуваат за 6 cm. Пресметај ја страната на квадратот чија плоштина е трипати поголема од плоштината на правоаголникот.

10. Колку учесници имало на еден шаховски натпревар, ако секој учесник одиграл само по една партија со секој од другите учесници, а биле одиграни вкупно 120 партии?

11. Во круг со радиус 13 cm е дадена точка M, чие растојание од центарот на кругот е 5 cm. Низ M е повлечена тетива $AB = 25$ cm. Пресметај ги должините на отсечките MA и MB.

12. Две дактилографки отчукале ракопис за 6 часа. За колку време ќе го отчука секоја од нив сама, ако првата го отчукува за 5 часа помалку отколку втората?

13. Патот од 840 km товарниот воз треба да го измине за одредено време. На половина пат возот бил задржан 30 минути, па за да стигне во одредениот рок, ја зголемил брзината за 2 km/h. Колку време патувал возот?

14. По средбата на два брода еден од нив тргнал на југ, а други на запад. По два часа од средбата растојанието меѓу нив било 60 km. Најди ги брзините на двата брода, ако се знае дека брзината на едниот од нив е за 6 km/h поголема од брзината на другиот.

15*. Автомобил треба да измине 192 km со одредена средна брзина. Првата половина од патот автомобилот ја минал со брзина помала за 10 km/h, а втората половина – со брзина поголема за 10 km/h, – од предвидената, и се задржал на пат вкупно 4 часа. Колку минути задоцнил автомобилот?

IV. КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА

IV. 1. Линеарна функција (повторување)

а. Веќе научи дека со $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ означуваме функција дефинирана во множеството **R** на реалните броеви, чии вредности се исто така во множеството **R**. Со други зборови, доменот и кодоменот на функцијата f е множеството **R**.

Такви се, на пример, функциите зададени со формулите

$$f(x) = x, \qquad g(x) = 2x - 4, \qquad h(x) = -\frac{1}{3}x + 5$$

Ова се, сигурно се присетуваш, примери на ***линеарна функција.*** Нејзиниот општ вид е

$$f(x) = ax + b, \tag{1}$$

каде што $a \neq 0$ и b се произволни реални броеви, кои не зависат од x, а x е независно променлива или аргумент. Графикот на линеарната функција (1) е права што не е паралелна со ниедна од координатните оски $(a \neq 0)$. Бројот a се вика ***коефициент на правецот*** на правата $y = ax + b$, а b е отсечокот што правата го отсекува на y-оската.

Пример 1. *Нацртај ги во ист координатен систем графиците на функциите:*

$$f(x) = x, \qquad g(x) = 2x, \qquad h(x) = \frac{1}{2}x$$

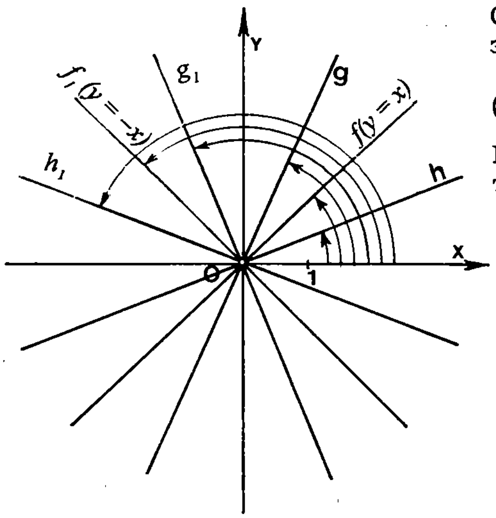
$$f_1(x) = -x, \qquad g_1(x) = -2x, \qquad h_1(x) = -\frac{1}{2}x.$$

Решение. Забележуваш дека, наместо „функцијата $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ зададена со формулата $f(x) = x$" кратко велиме, „функцијата $f(x) = x$" (или функцијата $x \mapsto x^2$). Вакво кратко искажување е често во математиката.

Графиците на сите овие функции минуваат низ координатниот почеток $(b = 0)$. Затоа, наоѓаме уште една нивна точка. Бидејќи

$$f(1) = 1 = -f_1(1), \quad g(1) = 2 = -g_1(1), \quad h(1) = \frac{1}{2} = -h_1(1)$$

графиците на функциите f, g, h, f_1, g_1 и h_1 минуваат уште низ точките $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, \frac{1}{2})$, $(1, -1)$, $(1, -2)$, $(1, -\frac{1}{2})$ – соодветно (црт. 1).



црт. 1

Сите овие функции можеме да ги запишеме со една формула

$$(2) \qquad f(x) = ax \qquad (a \neq 0)$$

Притоа, за $a > 0$ функциите растат, т.е.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

а за $a < 0$ функциите опаѓаат, т.е.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Забележуваш дека функциите f и f_1, g и g_1, h и h_1 се симетрични во однос на x–оската.

1. Во ист координатен систем нацртај график на функциите $f(x) = ax$, ако:

а) $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$, $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{3}$

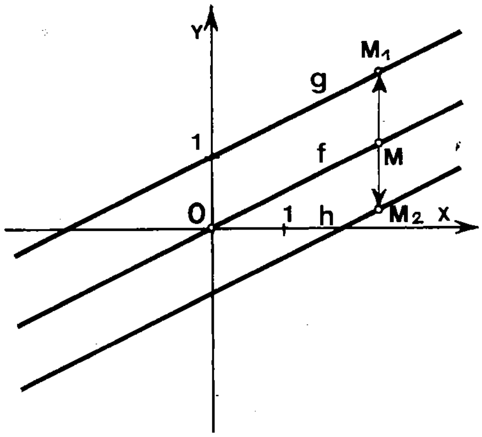
б) $a = -1$, $a = -2$, $a = -3$, $a = -\frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{3}$.

Која од овие функции побрзо расте, односно опаѓа?

Пример 2. *На црт. 2 нацртани се графиците на функциите*

$$f(x) = \frac{1}{2}x, \qquad g(x) = \frac{1}{2}x + 1,$$

$$h(x) = \frac{1}{2} - 1$$



црт. 2

Графиците на овие функции се три паралелни прави, бидејќи сите функции имаат ист коефициент на правец $a = \frac{1}{2}$.

Графикот на функцијата g (односно h) се добива со транслација на правата $y = \frac{1}{2}x$, долж y-оската, за 1 нагоре (односно надолу).

2. Нацртај график на функцијата $f(x) = 2x$, $g(x) = 2x + 2$, $h(x) = 2x - 2$. Одреди ги координатите на пресечните точки на графиците на функциите g и h со координатните оски.

Слично, и графикот на функцијата $f(x) = ax + b$ се добива со транслација на правата $y = ax$, во правец на y-оската за бројот $|b|$, и тоа во позитивна насока т.е. нагоре ако $b > 0$ односно во негативна насока т.е. надолу ако $b < 0$.

Правата $y = ax + b$ ја сече y-оската во точката $B(0, b)$, а x-оската во точката $A(x_0, 0)$. Од $f(x_0) = 0$ добиваме $ax_0 + b = 0$, т.е. $x_0 = -\frac{b}{a}$. Оваа вредност на аргументот x се вика ***нула*** на функцијата f. За нејзиното одредување, како што видовме, доволно е да ја решиме равенката $ax + b = 0$.

Бидејќи $f(x_o) = 0$, имаме

$$f(x) = f(x) - f(x_o) = (ax + b) - (ax_o + b) = ax - ax_o =$$
$$= a(x - x_o).$$

Со ова покажавме дека секоја линеарна функција f можеме да ја запишеме во видот

$$f(x) = a(x - x_o), \tag{3}$$

каде што a е коефициент на правецот, а x_o е нула на функцијата.

3. Запиши ја во видот (3) функцијата:

а) $f(x) = 2x - 3$ б) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$.

Вежби

4. Нацртај го графикот на функциите:

а) $f(x) = x - 4$ б) $f(x) = -x + 2$ в) $f(x) = -\frac{2}{3}x - 4$

5. Која од следниве функции е растечка:

а) $f(x) = 2x - \frac{1}{2}$ б) $f(x) = 5 - 3x$ в) $(x) = -\frac{1}{2}x + 4$

6. Најди ги нулите на функциите:

а) $f(x) = 2x - 5$ б) $f(x) = 3x - 1$ в) $(x) = 1 - 0{,}5x$

7. Одреди ја линеарната функција $f(x) = ax + b$, ако:

а) $f(0) = 2$, $f(2) = 0$ б) $f(-2) = 3$, $f(2) = 5$

IV. 2. Поим за квадратна функција. График на функцијата $f(x) = ax^2$

Од геометријата и физиката ни се познати формулите

$$P = r^2\pi; \quad S = \frac{1}{2}gt^2, \quad S = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + S_0$$

Првата ја изразува зависноста на плоштината на кругот од неговиот радиус r, а втората и третата – изминатиот пат во зависност од времето t. Велиме дека плоштината P (односно патот S), е изразена како функција од радиусот r (односно времето t). Овие функции се примери на *квадратна функција.*

Еве уште неколку примери на квадратна функција:

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = x^2 + 2, \qquad h(x) = x^2 - 2x - 3$$

Д	**Функцијата $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е квадратна функција, ако постојат реални броеви $a \neq 0$, b, c, кои не зависат од x, такви да за секој $x \in \mathbf{R}$ е** $$f(x) = ax^2 + bx + c$$

1. Која од следниве функции е квадратна:

а) $f(x) = 3 - x^2 + 2x$ б) $f(x) = x(x - 4)$

в) $f(x) = x - 5x^3$ г) $f(x) = 7x^2$

Бидејќи квадратниот трином $ax^2 + bx + c$ има смисла за секој реален број x, заклучуваме дека *доменот* на квадратната функција $f(x) = ax^2 + bx + c$ е множеството на реални броеви, т.е. $\mathbf{D}_f = \mathbf{R}$

2. Дадена е функцијата $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$. Најди

а) $f(0)$ б) $f(1)$ в) $f(-2)$ г) $f(\frac{3}{2})$

Квадратната функција е наполно определена ако се знаат броевите a, b, c – коефициентите на квадратниот трином. За тоа, пак, доволно е да се знаат вредностите на функцијата за три различни вредности на аргументот x.

Пример 1. *Најди квадратна функција* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *ако:*

(*) $f(0) = 6, \quad f(1) = 12, \quad f(-2) = 0$

Решение. Од $f(0) = c$, $f(1) = a + b + c$, $f(-2) = 4a - 2b + c$ и условите (*) го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} 6 = c \\ 12 = a + b + c \\ 0 = 4a - 2b + c \end{cases}$$

од каде што: $c = 6$, $b = 5$, $a = 1$.
Според тоа, бараната функција е $f(x) = x^2 + 5x + 6$

б) Ако $b = c = 0$, тогаш квадратната функција го добива видот

$$f(x) = ax^2$$

Притоа ќе разликуваме два случаи: $a > 0$ и $a < 0$.

Испитувањето на квадратната функција ќе го отпочнеме со основната квадратна функција

$$f(x) = x^2$$

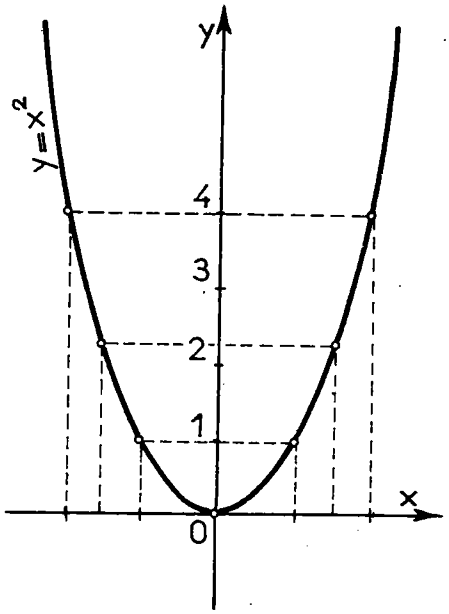
За да го нацртаме графикот на оваа функција, составуваме таблица на вредности на функцијата f за некои вредности на x.

x	...	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	...
$f(x)$	...	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9	...

Добиените точки $(0,0)$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(1, 1)$ $(-1, 1)$, $(2, 4)$, $(-2, 4)$,... ги цртаме во координатната рамнина xOy и ги сврзуваме со непрекината линија со што го добиваме графикот на функција

$$f(x) = ax^2 \qquad \text{(црт.3)}$$

Графикот на функцијата $f(x) = x^2$ е крива, која се вика *парабола*.



црт. 3

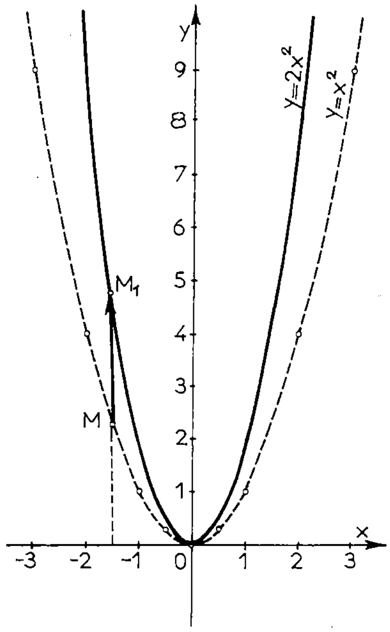
Очигледно е дека $x_0 = 0$ функцијата ја достигнува својата најмала вредност, која изнесува $f(x_0) = f(0) = 0$. Точката $O(0,0)$ е *теме* на параболата $y = x^2$. Лево од x_0 т.е. во интервалот $(-\infty, 0)$ функцијата опаѓа, а десно од x_0 т.е. во интервалот $(0, +\infty)$ функцијата расте. Графикот на функцијата е целиот над x-оската, освен нејзиното теме, бидејќи за секој $x \in \mathbf{R}$, $x^2 \geqslant 0$. Симетричен е во однос на y–оската, бидејќи на две спротивни вредности на аргументот x одговараат еднакви вредности на функцијата, т.е.

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Пример 2. *Нацртај график на функцијата* $f(x) = 2x^2$.

Решение. Графикот на функцијата $f(x) = 2x^2$ е парабола, која од параболата $y = x^2$ се добива така што ординатите на точките се помножат со 2.

x	...	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	...
x^2	...	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	...
$2x^2$	...	8	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	8	...



црт. 4

Параболата $y = 2x^2$ ги има истите својства како и параболата $y = x^2$, само што е потесна (позатворена) од неа, (црт. 4.).

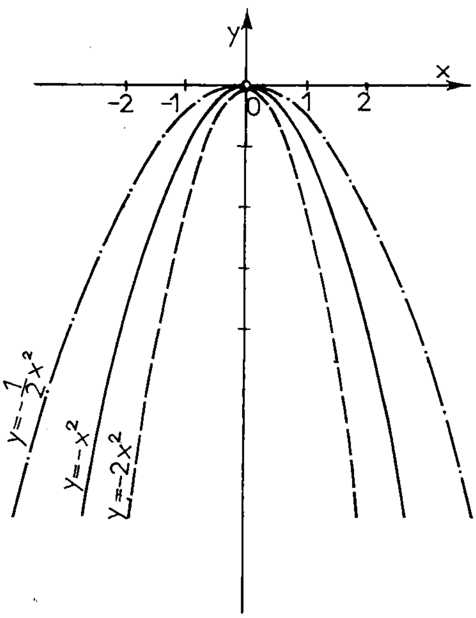
3. Нацртај график на функцијата $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, и изврши споредба со графикот на функцијата $f_1(x) = x^2$.

Сигурно ја забележа сличноста на графиците на секоја од функциите $f(x) = ax^2$, за $a > 0$. Тоа се параболи, отворени нагоре и симетрични во однос на y-оската. Точката $O(0, 0)$ е заедничко теме на сите нив, и во таа точка функциите ја достигнуваат својата најмала вредност $f(0) = 0$. Велиме дека во $x_0 = 0$ функциите имаат *минимум*. Опаѓаат во интервалот $(-\infty, 0)$, а растат во интервалот $(0, +\infty)$. Притоа, за $a > 1$, функцијата побрзо опаѓа во интервалот $(-\infty, 0)$, односно побрзо расте во интервалот $(0, +\infty)$ од функцијата $x \to x^2$, а за $0 < a < 1$ – побавно.

Пример 3. *Нацртај ги графиците на функциите:*

$$f(x) = -x^2, \qquad g(x) = -2x^2, \qquad h(x) = -\frac{1}{2}x^2.$$

Решение. Графикот на функцијата $f(x) = -x^2$, се добива со симетрија на графикот на функцијата $x \rightarrow x^2$ во однос на x-оската (црт. 5).



црт. 5

Аналогно ги добиваме графиците на функциите g и h од графиците на функциите

$$g_1(x) = 2x^2 \quad \text{и} \quad h_1(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Сите овие функции можеме да ги опфатиме со една формула

$$f(x) = ax^2, \qquad a < 0$$

Нивните графици се параболи, отворени надолу и симетрични во однос на y-оската. Точката $O(0, 0)$ е заедничко теме за сите нив, и во таа точка функциите ја достигнуваат својата најголема вредност $f(0) = 0$. Велиме дека во $x_0 = 0$ функциите имаат *максимум*. Растат во интервалот $(-\infty, 0)$, а опаѓаат во интервалот $(0, +\infty)$. Притоа растат, односно опаѓаат, побрзо или побавно – во зависност од коефициентот a.

4. Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите

$$f(x) = -x^2,\ g(x) = -3x^2,\ h(x) = -\frac{1}{3}x^2.$$

Наброј ги нивните заеднички својства.

Вежби

5. Одреди го параметарот m за графикот на функцијата $f(x) = x^2 + mx + 4$ да минува низ точката $(1, 2)$.

6. За која вредност на параметарот m функцијата $f(x) = (m-1)x^2 + 3x + 1$ не би била квадратна?

7. Расте или опаѓа функцијата $f(x) = x^2$, при растење на аргументот x од:

а) $x_1 = -5$ до $x_2 = -1$ б) $x_1 = 2$ до $x_2 = 7$

8. Нацртај го графикот на функцијата $f(x) = ax^2$, ако:

а) $a = 3$ б) $a = \frac{1}{3}$ в) $a = -\frac{1}{4}$ г) $a = -\frac{3}{2}$

$\boxed{9.}$ Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^2 + 1$. Што забележуваш? Како може да го добиеш графикот на функцијата g од графикот на функцијата f?

IV. 3. График на функцијата $f(x) = ax^2 + c$

a. Да ја разгледаме сега функцијата $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ зададена со формулата.

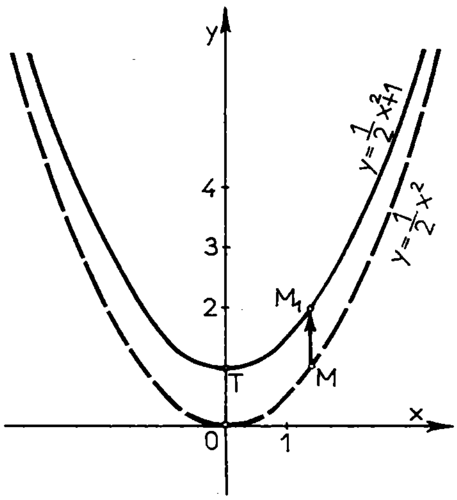
$$f(x) = ax^2 + c$$

Ако ја споредиме оваа функција со функцијата

$$f_1(x) = ax^2,$$

забележуваме дека тие се разликуваат за константниот број c. Тоа, пак, значи дека графикот на функцијата f го добиваме така што ординатата на секоја точка од графикот на функцијата f_1 ја зголемуваме за $|c|$ ако $c > 0$, или намалуваме за $|c|$ ако $c < 0$. Ова влијание на коефициентот c ќе го потврдиме со конкретни примери.

Пример 1. *Нацртај график на функцијата* $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$.



црт. 6

Решение. Графикот на функцијата f го добиваме, ако секоја ордината на параболата $y = \frac{1}{2}x^2$ ја зголемиме за 1 (црт. 6). Тоа значи дека графикот на функцијата f се добива со транслација на параболата $y = \frac{1}{2}x^2$, долж y-оската за 1 нагоре. Според тоа, графикот на функцијата $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ е парабола, со теме во точката T (0, 1).

Во таа точка функцијата има минимум и тој изнесува $f(0) = 1$. Параболата $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ е симетрична во однос на y-оската, и отворена нагоре. Опаѓа во интервалот $(-\infty, 0)$ а расте во интервалот $(0, +\infty)$.

1. Нацртај график на функцијата $f(x) = 2x^2 + 1$.

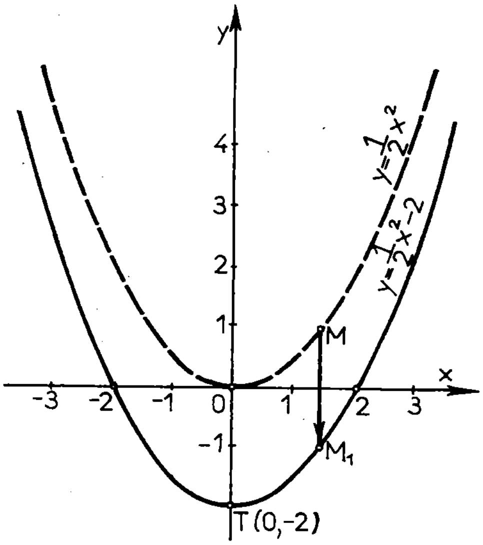
Пример 2. *Да го нацртаме графикот на функцијата* $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$.

Решение. Графикот на функцијата f го добиваме со транслација на параболата $y = \frac{1}{2}x^2$, долж y-оската за 2 надолу.

Темето на параболата $y = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 2$ е точката T(0, −2) а y-оската е оска на симетрија. Функцијата има две нули: $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$, и тоа се решенијата на квадратната равенка $\frac{1}{2}x^2 - 2 = 0$.

Да се потсетиме:

Реалниот број x_0 е нула на функцијата f, ако е решение на равенката $f(x) = 0$.



црт. 7

2. Нацртај график на функцијата $f(x) = 2x^2 - 2$. Одреди ги нулите на функцијата.

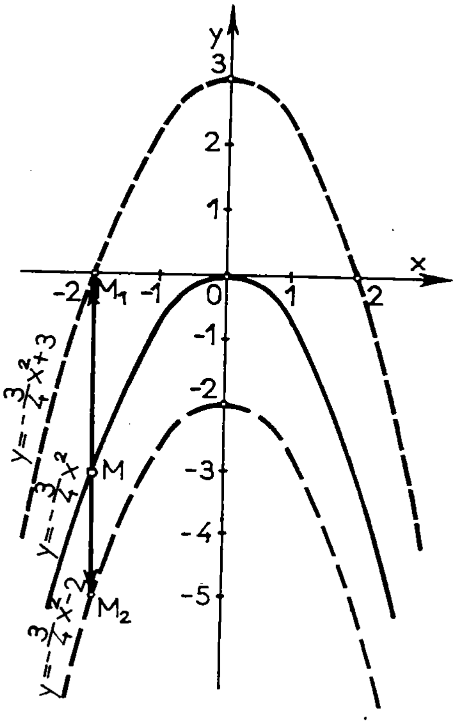
Пример 3. *На црт. 8 нацртани се графиците на функциите:*

$f(x) = -\frac{3}{4}x^2$, $g(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$,

$h(x) = -\frac{3}{4}x^2 - 2$

x	0	1	−1	2	−2	...
$-\frac{3}{4}x^2$	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	−3	−3	...
$-\frac{3}{4}x^2+3$	3	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$	0	0	...
$-\frac{3}{4}x^2-2$	−2	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{11}{4}$	−5	−5	...

Графиците на функциите g и h се добиени со транслација на параболата $y = -\frac{3}{4}x^2$, долж y-оската за 3 нагоре, односно за 2 надолу.



црт. 8

3. Во ист координатен систем нацртај ги графиците на функциите $f(x) = -2x^2 + 2$ и $g(x) = -2x^2 - 1$. Одреди ги нулите на функцијата f.

Дали функцијата g *има нули?*

Од досегашните примери можеме да заклучиме:

1° Графикот на функцијата $f(x) = ax^2 + c$ се добива со транслација на параболата $y = ax^2$, во правец на y-оската за $|c|$, и тоа нагоре ако $c > 0$, односно надолу ако $c < 0$.

2° Параболата $y = ax^2 + c$ е симетрична во однос на y-оската, а нејзиното теме е во точката $T(0, c)$.

3° Ако $a > 0$, тогаш параболата е отворена нагоре, а функцијата f за $x_0 = 0$, има минимум, и тој изнесува $f(0) = c$. Опаѓа во интервалот $(-\infty, 0)$, а расте во интервалот $(0,+\infty)$.

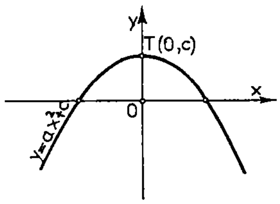
4° Ако $a < 0$, тогаш параболата е отворена надолу, а функцијата f за $x_0 = 0$ има максимум, и тој изнесува $f(0) = c$. Расте во интервалот $(-\infty, 0)$ а опаѓа во интервалот $(0, +\infty)$.

Вежби

4. Која функција се добива ако ординатите на секоја точка од параболата $y = ax^2$ се: а) зголемат за 3 б) намалат за 2

5. За колку единици, и во која насока треба да се транслатира параболата $y = ax^2 + 1{,}5$ за да се добие параболата $y = ax^2 - 1{,}5$?

6. На црт. 9 е даден график на функцијата $f(x) = ax^2 + c$. Одреди ги знаците на коефициентите a и c.



црт. 9

7. Нацртај график на функцијата $f(x) = x^2 + c$, ако:

а) $c = 1$ б) $c = -4$ в) $c = \frac{3}{2}$

8. Нацртај ги параболите:

а) $y = 2x^2 - 8$ б) $y = -\frac{3}{2}x^2 + 6$

9. Одреди ја квадратната функција $f(x) = ax^2 + c$, ако:

а) $f(0) = 2$, $f(2) = 0$ б) $f(\frac{1}{2}) = -1$, $f(-\frac{3}{2}) = 3$

$\boxed{10.}$ Пополни ја таблицата

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x) = x^2$	▨						
$g(x) = (x + 1)^2$							▨

Што можеш да кажеш за вредноста на функциите f и g?
Забележуваш дека $g(0) = f(1) = 1$. Испиши ги сличните равенства
Кој е општиот заклучок?

IV. 4 График на функцијата $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

а. За почеток ќе ја разгледаме функцијата $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ зададена со формулата

$$f(x) = a(x - \alpha)^2$$

За да ја одредиме врската меѓу графиците на функциите $x \mapsto ax^2$ и $x \mapsto a(x - \alpha)^2$, ќе решиме два примери.

Пример 1. *Нацртај график на функцијата* $f(x) = (x - 1)^2$.

Решение. Ја составуваме таблицата

x	x^2	$(x-1)^2$
−2	4	
−1	1	4
0	0	1
1	1	0
2	4	1
3	9	4
4		9

Гледаме дека функцијата $f(x) = (x - 1)^2$ ги прима истите вредности како и функцијата $f_1(x) = x^2$, за вредности на x кои се за 1 поголеми, т.е.

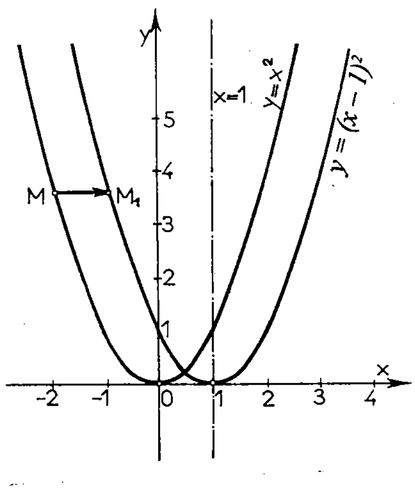
$$f_1(-1) = f(0) = 1$$

$$f_1(0) = f(1) = 0$$

$$f_1(1) = f(2) = 1$$

$$f_1(2) = f(3) = 4, \text{ итн.}$$

Сега ги цртаме графиците на функциите (црт. 10).



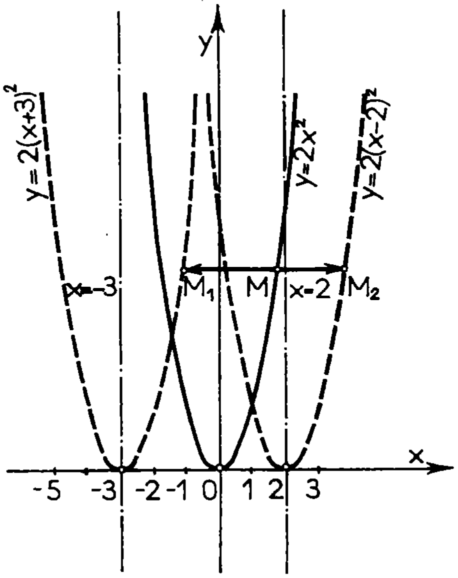
црт. 10

Графикот на функцијата f е параболата $y = (x - 1)^2$, добиена со транслација на параболата $y = x^2$, долж x-оската за 1 надесно. Точката T(1, 0) е теме на параболата $y = (x - 1)^2$, а правата $x = 1$ нејзина оска на симетрија. Функцијата f опаѓа во интервалот $(-\infty, 1)$, а расте во интервалот $(1, +\infty)$.

1. Нацртај график на функцијата $f(x) = 2(x - 3)^2$

Пример 2. *Да го нацртаме графикот на функцијата $f(x) = 2(x + 3)^2$.*

Решение. Го цртаме графикот според долу наведената таблица (црт. 11)



x	$2(x+3)^2$
–1	8
–2	2
–3	0
–4	2
–5	8

црт. 11

Графикот на функцијата f е параболата $y = 2(x + 3)^2$, добиена од параболата $y - 2x^2$, со транслација по x-оската за 3 налево. Темето на оваа парабола е точката $(-3, 0)$, а оска на симетрија правата $x = -3$. функцијата f опаѓа во интервалот $(-\infty, -3)$, а расте во интервалот $(-3, +\infty)$.

На црт. 11 е нацртан и графикот на функцијата $g(x) = 2(x - 2)^2$. Со која транслација на параболата $y = 2x^2$ е добиен графикот на функцијата g?

Од овие примери заклучуваме:

1° Графикот на функцијата $f(x) = a(x - \alpha)^2$ го добиваме со транслација на параболата $y = ax^2$, долж x-оската за $|\alpha|$ единици во лево ако, $\alpha < 0$, односно во десно ако $\alpha > 0$.

2° Параболата $y = a(x - \alpha)^2$ е симетрична во однос на правата $x = \alpha$, а нејзиното теме е во точката $T(\alpha, 0)$.

3° Ако $a > 0$, тогаш параболата е отворена нагоре, а ако $a < 0$, надолу.

2. Нацртај график на функциите $f(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2$ и $g(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2$.

Во однос на која права се симетрични нивните графици?

б. Да го нацртаме сега графикот на функцијата f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, зададена со формулата

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Ако оваа функција ја споредиме со функцијата

$$f_1(x) = a(x-\alpha)^2$$

гледаме дека тие се разликуваат за константниот број β. Тоа, пак, значи дека графикот на функцијата f ќе го добиеме од графикот на функцијата f_1 – со транслација по y–оската за $|\beta|$ единици и тоа нагоре ако $\beta > 0$, односно ако $\beta < 0$.

Пример 3. *Нацртај график на функцијата* $f(x) = -2(x+3)^2+4$.

Решение. Го цртаме прво графикот на функцијата $f_0(x) = -2x^2$. Со транслацијата по x–оската за 3 налево, го добиваме графикот на функцијата $f_1(x) = -2\ (x+3)^2$. Со уште една транслација, сега на графикот на функцијата f_1 по y-оската за 4 нагоре, го добиваме графикот на функцијата f (црт. 12).

Значи, графикот на функцијата f го добиваме од параболата $y = -2x^2$, со две нејзини транслации: по x–оската за 3 налево и по y–оската за 4 нагоре.

Темето на параболата $y = -2(x+3)^2 + 4$ е во точката T(–3, 4) а правата $x = -3$ е оска на симетрија.

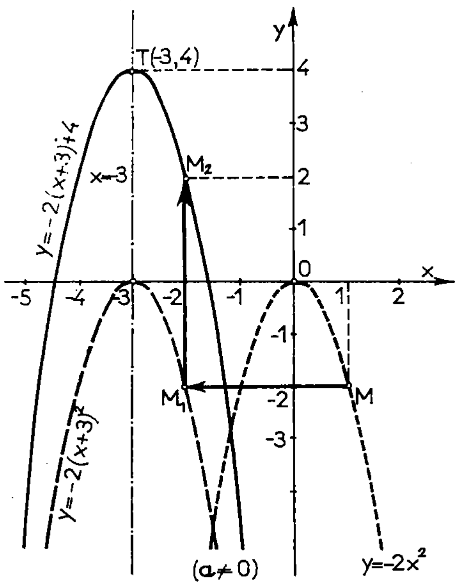
3. Нацртај график на функцијата $f(x)= \frac{1}{2}(x-4)^2-2$.

Од досегашните примери заклучуваме:

Графикот на функцијата

$$f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta \qquad (a \neq 0)$$

е парабола складна со параболата $y = ax^2$ чие теме е во точката T(α,β), а оска на симетрија е правата $x = \alpha$. Параболата е отворена нагоре ако $a > 0$, односно надолу ако $a < 0$.

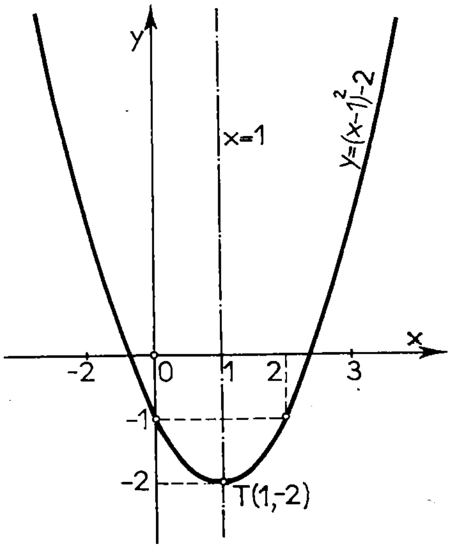


црт. 12

в. Користејќи ги овие сознанија, можеме графикот на функцијата $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$ приближно да го скицираме без да ги цртаме графиците на функциите $f_0(x) = ax^2$ и $f_1(x) = a(x-\alpha)^2$. Ќе го покажеме ова на еден конкретен пример.

Пример 4. *Нацртај график на функцијата* $f(x) = (x-1)^2 - 2$.

Решение. Графикот на функцијата f е параболата $y = (x - 1)^2 - 2$.



Темето на параболата е во точката Т $(1, -2)$, а правата $x = 1$ е оска на симетрија. Бидејќи $a = 1 > 0$, параболата е отворена нагоре (црт. 13).

На графикот се нацртани уште две точки $(0, -1)$ и $(2, -1)$. Првата од нив е пресекот на параболата со y–оската, а втората е симетрична на првата во однос на правата $x = 1$ – оската на симетрија на параболата.

4. Нацртај график на функцијата $f(x) = -2(x + 1)^2 + 2$.

црт. 13

Вежби

5. Дали се складни параболите

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{и} \quad y = ax^2$$

6. Во која насока и за колку единици треба да се транслатира параболата $y = 2(x - 3)^2$ за да се добие параболата $y = 2(x - 3)^2 - 5$.

7. Одреди го темето на параболата:

а) $y = 5(x - 1)^2 + 4$ в) $y = \frac{1}{2}(x + 4)^2$

б) $y = -3(x + 2)^2 - 3$ г) $y = -\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}$

8. Параболата со теме во точката Т $(-6, 1)$ е складна со параболата $y = 3x^2$. На која функција е график таа парабола?

9. Нацртај график на функцијата:

а) $f(x) = (x + 2)^2$ б) $f(x) = (x - 4)^2$

в) $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ г) $f(x) = \frac{1}{2}(2x - 4)^2$

10. Нацртај график на функциите:

а) $f(x) = (x - 2)^2 - 1$ б) $f(x) = -2(x + 1)^2 + 2$

в) $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$ г) $f(x) = (x + 1)^2 - 4$

11. Параболата $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ има теме во точката T и минува низ точката M. Одреди ги a, α, β, ако:

а) Т $(2, 1)$, М $(4, -1)$ б) Т $(-1, -5)$, М $(1, -1)$

12. Одреди ја равенката на параболата $y = a\,(x-2)^2 + \beta$, така да минува низ точките $M_1\ (0, -2)$ и $M_2\ (2, 2)$.

$\boxed{13.}$ Запиши го триномот $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ во видот $f(x) = 2\,(x-d)^2 + \beta$. Одреди ги вредностите на аргументот x за коишто $f(x) = 0$. Колку е $f(0)$

IV. 5. График на функцијата $f(x) = ax^2 + bx + c$

a. Во оваа лекција ќе покажеме дека графикот на квадратната функција $f(x) = ax^2 + bx + c$ е парабола, складна со параболата $y = ax^2$.

Пример 1. *Да го нацртаме графикот на функцијата*

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 3$$

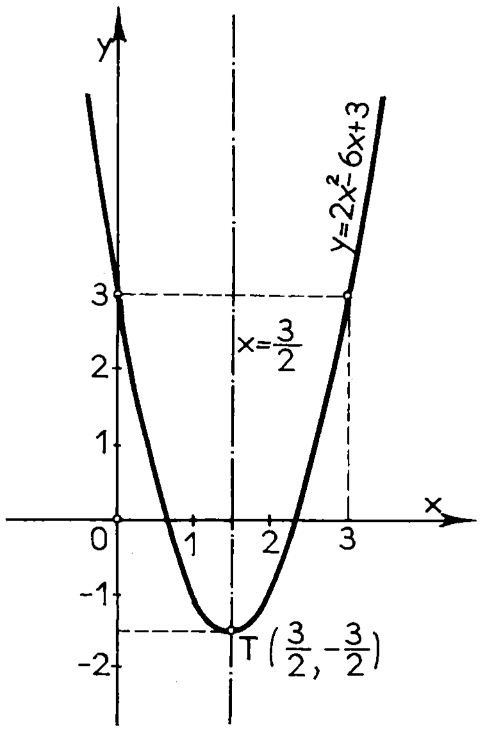
Решение. Со дополнување до полн квадрат, добиваме:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 6x + 3 = 2(x^2 - 3x) + 3 \\ &= 2\left(x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + 3 \\ &= 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{2} + 3 \\ &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Оттука гледаме дека графикот на функцијата f е парабола, добиена од параболата $y = 2x^2$ со две транслации: по x–оската за $\frac{3}{2}$ надесно, и по y–оската за $\frac{3}{2}$ надолу. Темето на параболата е точката $T\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, а оска на симетрија е правата $x = \frac{3}{2}$.

Функцијата f за $x = \frac{3}{2}$ достигнува минимум и тој изнесува $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$.

На црт. 14 е скициран графикот на параболата $y = 2x^2 - 6x + 3$, на кој, освен темето, нацртани се уште две точки (0, 3) и (3, 3).



црт. 14

1. Нацртај го графикот на функцијата $f(x) = -2x^2+4x+2$. Одреди ја пресечната точка на графикот со y–оската.

б Спомнатиот метод на дополнување до полн квадрат можеме да го примениме и во општ случај. Имаме:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

Значи, квадратната функција $f(x) = ax^2+bx+c$ секогаш можеме да ја запишеме во т.н. *каноничен вид*

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Споредувајќи го ова равенство со равенството

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

заклучуваме:

Графикот на квадратната функција

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

е парабола, складна со параболата $y = ax^2$, чие теме е во точка $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$, а оска на симетрија е правата $x = -\frac{b}{2a}$. Параболата е отворена нагоре ако $a > 0$, односно надолу ако $a < 0$.

Пример 2. *Најди го темето на параболата* $y = 3x^2 - 6x + 2$

Решение. Имаме:

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 3} = 1,$$

$$\beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 - (-6)^2}{4 \cdot 3} = \frac{24 - 36}{12} = -1$$

Според тоа, темето е точка $T(1, -1)$.

2. Најди го темето на параболата:

а) $y = -2x^2 + 8x - 3$ б) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x$

б. За попрецизно цртање на параболата

(1) $$y = ax^2 + bx + c$$

потребно е да се одредат нејзините *карактеристични точки*. Тоа се темето и пресечните точки на параболата со координатните оски.

Теме има секоја парабола, а неговите координати ги наоѓаме по формулите: $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$

Понатаму, параболата (1) секогаш ја сече y–оската во точката $(0, c)$, точка чија апсциса е еднаква на нула.

Но, како што видовме и од досегашните примери, некои параболи ја сечат x–оската, некои ја допираат, а некои немаат заеднички точки со x–оската (види црт. 8).

Графикот на квадратната функција:

(2) $$f(x) = ax^2 + bx + c$$

ја сече x–оската во точка, чии апсциси се реалните решенија на квадратните равенки

(3) $$ax^2 + bx + c = 0$$

Реалните решенија, пак, на равенката (3) се *нулите* на функцијата f, бидејќи за нив важи $f(x) = 0$. Значи, наоѓањето на пресечните точки на параболата (1) со x–оската, т. е. нулите на функцијата (2) се сведува на решавање на квадратната равенка (3). А дали оваа равенка ќе има реални решенија, зависи од нејзината дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

Според тоа, ако $D > 0$, тогаш параболата $y = ax^2 + bx + c$ ја сече x–оската во две точки $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ а ако $D < 0$, тогаш не ја сече. Ако $D = 0$, тогаш параболата ја допира x–оската во точката $(-\frac{b}{2a}, 0)$.

Пример 3. *Да ги сумираме досегашните сознанија при цртањето на графикот на функцијата*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}.$$

Решение. Ги наоѓаме прво нулите на функцијата:

$$\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0, \quad x^2 - 2x - 3 = 0,$$

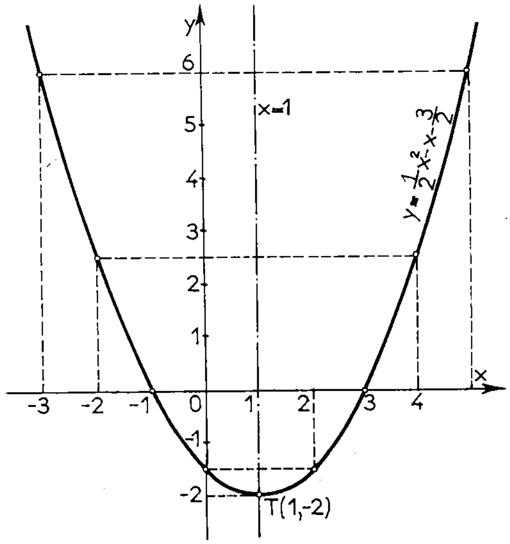
$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2; \quad x_1 = -1, x_2 = 3$$

Значи, графикот на функцијата f ја сече x–оската во точките $(-1, 0)$ и $(3, 0)$.

Координатите на темето на параболата се

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2\cdot\frac{1}{2}} = 1$$

$$\beta = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-(-1)^2}{4\cdot\frac{1}{2}} = \frac{-3-1}{2} = -2$$



црт. 15

Следствено, темето на параболата е во точката T (1, – 2), а оска на симетрија е правата $x = 1$. Пресечна точка со y–оската е точката $(0, -\frac{3}{2})$, а симетрична на неа, во однос на правата $x = 1$ е точката $(2, -\frac{3}{2})$.

За конструкцијата на графикот да биде што попрецизна, препорачливо е да се нацртаат уште неколку точки од графикот.

Бидејќи

$f(-2) = f(4) = \frac{5}{2}$

$f(-3) = f(5) = 6$

на графикот се нацртани уште точките: $\left(-2, \frac{5}{2}\right)$, $\left(4, \frac{5}{2}\right)$, $(-3, 6)$ и $(5, 6)$, (црт. 15).

3. Нацртај график на функцијата:

а) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 3$ б) $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$

Вежби

4. Запиши ја во каноничен вид функцијата:

а) $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$ б) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

в) $f(x) = x^2 - 2x$ г) $f(x) = x^2 - 5x + 4$

5. Одреди ги координатите на темето на параболата

а) $y = 2x^2 - 4x + 1$ б) $y = -x^2 + 6x - 2$ в) $y = \frac{1}{3}x^2 - 2$ г) $y = 2x^2 - 10x$

6. Нацртај график на функцијата

а) $f(x) = x^2 - 4x$ б) $f(x) = -2x^2 + 6x$

в) $f(x) = 3x^2 - 12x + 12$ г) $f(x) = (x-2)(x+3)$

7. За кои вредности на p и q, темето на параболата $y = x^2 + px + q$ ќе лежи во точката $(-2, 5)$.

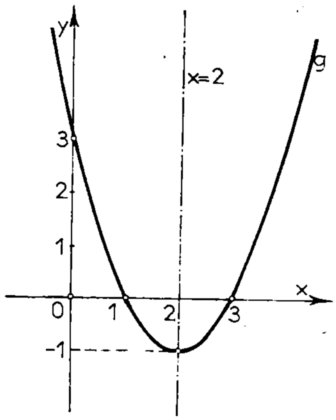
8. Која парабола има теме во точката $(1, 2,)$ и:

а) ја сече x–оската во точка $(-1, 0)$
б) ја сече y–оската во точката $(0, -3)$
в) минува низ координатниот почеток
Скицирај ги, во ист координатен систем, графиците на овие функции.

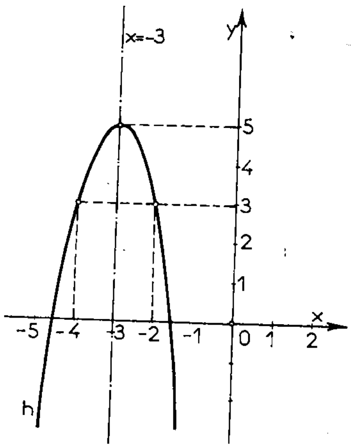
9* Најди равенка на парабола чија оска на симетрија е правата $x = -2$ и минува низ точките:

а) $A(-4, 3)$ и $B(1, -2)$ б) $A(-3, 6)$ и $B(-1, 6)$

$\boxed{10.}$ Од графикот на функциите g и h дадени на црт. 16 и 17 одреди го нивниот минимум, односно максимум.



црт. 16



црт. 17

IV. 6. Екстремни вредности на квадратната функција

При решавање на задачата **10** од минатата лекција сигурно утврди дека функцијата g има најмала вредност, т. е. *минимум* за $x = 2$, и тој изнесува -1, а нема најголема вредност, бидејќи неограничено расте нагоре. Функцијата, пак, h има најголема вредност, т. е. *максимум*, за $x = -3$, и тој изнесува 5, а нема најмала вредност, бидејќи неограничено се намалува надолу.

До истиот заклучок можеме да дојдеме и по аналитичен пат, независно од графикот на функцијата. За таа цел ја запишуваме функцијата во канонично вид

$$g(x) = (x-2)^2 - 1$$

За сите вредности на $x \in \mathbf{R}$ првиот собирок $(x-2)^2$ е ненегативен број, а за $x = 2$ ќе има најмала вредност – еднаква на нула. Значи, вредноста на збирот $(x-2)^2 + (-1)$ ќе биде најмала за $x = 2$ и ќе изнесува -1. Тоа значи дека функцијата

$$g(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$$

има минимум за $x = 2$ и тој изнесува $g(2) = -1$.

б. Минимумот и максимумот на една функција со заедничко име се викаат *екстреми* или *екстремни вредности* на функцијата.

Една функција може да нема екстремни вредности, или може да има повеќе екстремни вредности. Нив ги дефинираме вака:

Д

Функцијата f во точката $x = x_0$ има *максимум*, еднаков на $f(x_0)$, ако постои отворен интервал со средина во точката x_0 таков за секој x од тој интервал, освен за $x = x_0$, да важи

$$f(x_0) > f(x)$$

односно *минимум*, ако важи

$$f(x_0) < f(x)$$

Бројот $f(x_0)$ се вика *екстрем* на функцијата во точката $x = x_0$

Ќе докажеме дека квадратната функција $f(x) = ax^2 + bx + c$ има единствен екстрем и тоа е всушност ординатата на темето на параболата $y = ax^2 + bx + c$

Т

Квадратната функција

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

за $x = -\dfrac{b}{2a}$ има екстрем еднаков на $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$

Тој екстрем е максимум ако $a < 0$, односно минимум ако $a > 0$

Доказ. Од каноничниот вид на функцијата

$$f(x) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

добиваме

$$(1) \qquad f(x) - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Ако $a > 0$, тогаш поради $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ следува

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0,$$

па од (1) следува дека и $f(x) - \frac{4ac - b^2}{4a} \geqslant 0$, т. е.

$$f(x) \geqslant \frac{4ac - b^2}{4a} \quad (2)$$

Бидејќи $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$ тогаш за секој $x \in \mathbf{R}$ е

$$f(x) \geqslant f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

Значи, за $a > 0$ функцијата f во точката $x = -\frac{b}{2a}$ добива минимум еднаков на $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

Аналогно, за $a < 0$ наоѓаме дека за секој $x \in \mathbf{R}$

$$f(x) \leqslant f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

т. е. функцијата f во точката $x = -\frac{b}{2a}$ добива максимална вредност еднаков на $\frac{4ac - b^2}{4a}$ ▲

Пример 1. *Одреди ја екстремната вредност на функцијата* $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$.

Решение. Бидејќи $a = 2 > 0$, функцијата има минимум за

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 2} = 1$$

и тој изнесува

$$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 3 = -5$$

Значи, $Y_{min} = -5$ за $x = 1$

1. Најди екстремна вредност на функциите:

а) $f(x) = -x^2 - 6x + 5$ б) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2,5$

Многу задачи од геометријата, физиката и практиката се сведуваат на одредување максимумот, односно минимумот на квадратна функција.

Пример 2. *Разложи го бројот* c *на два собирци чиј производ е најголем.*

Решение. Нека x е првиот собирок, тогаш $c - x$ е другиот. Нивниот производ е

$$y = x(c - x) = -x^2 + cx$$

Производот ќе биде најголем за

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-c}{2\cdot(-1)} = \frac{c}{2}$$

Значи, производот ќе биде најголем ако собирците се еднакви меѓу себе, и ќе изнесува $\frac{c^2}{4}$.

2. Докажи дека од сите правоаголници со периметар p, квадратот има најголема плоштина.

Пример 3. *За која вредност на x, дропката* $\frac{1}{x^2-4x+7}$ *ќе има најголема вредност?*

Решение. Дропка чиј броител е константен, ќе има најголема вредност, ако нејзиниот именител е најмал. Во нашиов случај именителот на дропката е функцијата

$$f(x) = x^2 - 4x + 7$$

која за $x = 2$ има минимум $f(2) = 3$.

Според тоа, дадената дропка ќе има најголема вредност за $x = 2$ и таа ќе изнесува $\frac{1}{3}$.

3. Тројца работници треба да произведат c примероци од еден производ. Првиот работник произведува 12 примероци на ден, вториот x примероци помалку, а третиот $4x$ примероци повеќе од првиот. Во почетокот првиот и вториот работник работејќи заедно завршуваат $\frac{1}{4}$ од работата, а потоа сите тројца работат заедно до завршувањето на работата. Колку треба да биде x, за да биде завршена работата, под овие услови, во најкраток рок?

Упатство. Времето за кое ја завршуваат работата е збирот од времињата т. е.

$$y = \frac{c}{4} : (12 + 12 - x) + \frac{3c}{4} : (12 + 12 - x + 12 + 4x)$$

Вежби

4. Одреди ја екстремната вредност на функциите:

а) $f(x) = 2x^2 + 10x + 9$ б) $f(x) = -3x^2 - 6x + 8$

в) $f(x) = x^2 - 3x$ г) $f(x) = (x + 1)(3 - x)$

5. За која вредност на x дропката

а) $\frac{2}{x^2-2x+5}$ има најголема вредност б) $\frac{3}{-2x^2+6x-5}$ има најголема вредност

Најди ја таа вредност.

6. Одреди ја страната на најмалиот квадрат кој може да се впише во квадрат со страна a.

7.* Во полукруг со радиус $r = 12$ впиши трапез, чија поголема основа е дијаметарот, така што има максимален:

а) периметар, б) плоштина

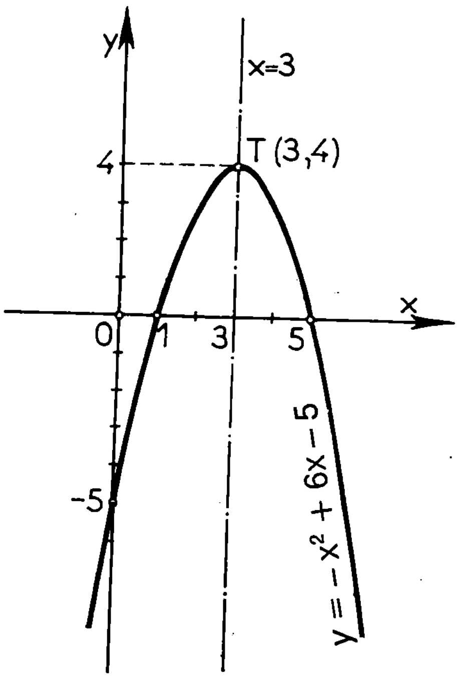
[8.] Нацртај график на функцијата $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Од графикот на функцијата одреди ги интервалите на растење и опаѓање и множеството вредности на функцијата f.

IV.7 Растење и опаѓање и множество вредности на квадратната функција

а. При изучувањето на функцијата $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ освен нејзините екстреми треба да ги знаеме и интервалите на растење и опаѓање на таа функција. Во некои од досегашните примери тоа го сторивме врз основа на графикот на квадратната функција. Да разгледаме уште еден конкретен пример.

Пример 1. *На црт. 18 е нацртан график на функцијата* $f(x) = -x^2+6x-5$.

x	$f(x)$
0	−5
1	0
2	3
3	4
4	3
5	0
6	−5
⋮	⋮



црт. 18

Од графикот на функцијата f, а и од таблицата, заклучуваме (засега без доказ) дека:

i) функцијата расте во интервалот $(-\infty, 3)$

бидејќи со зголемување на x се зголемува и y (велиме дека y се менува во иста насока со x);

ii) функцијата опаѓа во интервалот $(3,+\infty)$, бидејќи со зголемување на x, y се намалува (во овој случај велиме дека y се менува во спротивна насока од x).

Множеството вредности на функцијата е интервалот $(-\infty, 4]$ т.е. $V_f\ (-\infty, 4]$

Овие заклучоци (тврдења) можат да се докажат и аналитички независно од графикот, користејќи ја следнава дефиниција:

Д	За функцијата $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ велиме дека *i*) расте во интервалот (a,b), ако и само ако $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, за секои $x_1, x_2 \in (a,b)$; *ii*) опаѓа во интервалот (a,b) ако и само ако $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, за секои $x_1, x_2 \in (a,b)$.

Велиме дека функцијата f е *монотона* во интервалот (a,b), ако таа е или растечка или опаднувачка во тој интервал.

На пример, линеарната функција $f(x) = ax + b$, $(a \neq 0)$ расте во целиот интервал $(-\infty,+\infty)$ ако $a > 0$, а опаѓа во тој интервал ако $a < 0$.

Растењето, опаѓањето и множеството вредности на квадратната функција ги одредуваме со следнава теорема:

Т	1°. Ако $a > 0$, тогаш квадратната функција $f(x) = ax^2+bx+c$ –опаѓа во интервалот $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, –расте во интервалот $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$, –множеството вредности е интервалот $\left[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty\right)$. 2°. Ако, пак, $a < 0$, тогаш функцијата –расте во интервалот $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, –опаѓа во интервалот $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$, –множеството вредности е интервалот $\left(-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}\right]$.

Доказ. Ќе го докажеме само тврдењето 1°, а доказот на 2° е наполно сличен.

Нека $x_1 < x_2 < -\frac{b}{2a}$.

Ако кон секоја страна на тоа неравенство додеме $\frac{b}{2a}$, ќе добиеме

$$x_1 + \frac{b}{2a} < x_2 + \frac{b}{2a} < 0$$

од каде што, по квадрирање, добиваме

$$\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 > \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Множејќи го последното неравенство со бројот $a > 0$ и додавајќи го на двете страни бројот $\frac{4ac-b^2}{4a}$ добиваме

$$a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} > a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$$

т.е.

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Со тоа докажавме дека функцијата f опаѓа во интервалот $(-\infty,-\frac{b}{2a})$. Слично докажуваме дека функцијата расте во интервалот $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$.

Да го одредиме сега множеството вредности на функцијата т.е. множеството $V_f = f(D)$ – сликата на доменот на функцијата f. Бидејќи во точката $x = -\frac{b}{2a}$ функцијата има минимум $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac-b^2}{4a}$ доволно е да докажеме дека f може да ја добие која било вредност поголема од $\frac{4ac-b^2}{4a}$, со што ќе докажеме дека $V_f = \left[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty\right)$.

За таа цел доволно е да докажеме дека равенката по x:

(1) $\quad ax^2 + bx + c = y_o$ т.е. $ax^2 + bx + c - y_o = 0$

има барем едно реално решение, ако $y_o \geqslant \frac{4ac-b^2}{4a}$. Со решавање на равенката (1) добиваме.

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 4ay_o}}{2a}.$$

Дискриминантата на оваа равенка е ненегативна, бидејќи од $y_o \geqslant \frac{4ac-b^2}{4a}$. и $a > 0$ следува $4ay_o \geqslant 4ac - b^2$ т.е. $b^2 - 4ac + 4ay_o \geqslant 0$. Тоа значи дека равенката (1) има две решенија x_1 и x_2, за кои функцијата f добива вредност y_o, т.е, $f(x_1) = f(x_2) = y_o$.

Геометриски, тоа значи дека параболата $y = ax^2+bx+c$ и правата $y = y_o$ се сечат во две точки (x_1,y_o) и (x_2,y_o), кои се симетрични во однос на оската на параболата $x = -\frac{b}{2a}$.

Пример 2. *Одреди ги интервалите на растења и опаѓања и множеството вредности на функцијата* $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 4x + 7$.

Решение. Бидејќи $a = \frac{1}{3} > 0$, функцијата има минимум за

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\cdot\frac{1}{3}} = 6.$$

Следствено, функцијата опаѓа во интервалот $(-\infty, 6)$, а расте во интервалот $(6,+\infty)$.

Од вредноста на минимумот

$$f(6) = \frac{1}{3}\cdot 36 - 4\cdot 6 + 7 = 12 - 24 + 7 = -5$$

заклучуваме дека $V_f = [-5,+\infty)$.

1. Одреди ги интервалите на растење и опаѓање и множеството вредности на функциите:

а) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$ $\qquad$ б) $f(x) = -2x^2 - 6x + \frac{1}{2}$

б. Од досегашните примери сигурно забележи дека оската на симетрија – правата $x = -\frac{b}{2a}$ ја разделува дефиниционата област на два интервали $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ и $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$. Тие се всушност и интервалите во кои функцијата опаѓа или расте, во зависност од знакот на коефициентот a.

Да докажеме сега дека секоја парабола

$$y = ax^2+bx+c$$

има оска на симетрија, и тоа е правата $x = -\frac{b}{2a}$.

Две точки се симетрични во однос на правата $x = -\frac{b}{2a}$ ако имаат апсциси: $-\frac{b}{2a} - h$ и $-\frac{b}{2a} + h$, каде што h е произволен реален број.

Вредностите на функцијата во тие точки се:

$$f\left(-\frac{b}{2a} - h\right) = a\left(\left(-\frac{b}{2a} - h\right) + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} = h^2 + \frac{4ac-b^2}{4a},$$

$$f\left(-\frac{b}{2a} + h\right) = a\left(\left(-\frac{b}{2a} + h\right) + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} = h^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$$

т.е.

$$f\left(-\frac{b}{2a} - h\right) = f\left(-\frac{b}{2a} + h\right)$$

в. **Вежби**

2. Одреди го множеството вредности на функциите.
   а) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ б) $f(x) = 2x(x + 3)$
3. Одреди ги интервалите на растење и опаѓање на функциите:
   а) $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$ $f(x) = x(x-1) + 2$
4. За функциите $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ и $g(x) = -2x^2 - 8x + 7$ одреди го множеството $V_f \cap V_g$.

$\boxed{5}$ Нацртај график на функцијата $f(x) = -x^2 + x + 2$, а потоа од него одреди за кои вредности на x, истиот е над, односно под x–оската.

IV. 8. Знак на квадратната функција

а. Да го одредиме знакот на квадратната функција $f(x) = ax^2 + bx + c$, тоа значи да ги најдеме интервалите на аргументот x, во коишто вредностите на функцијата се позитивни, односно негативни. За испитување знакот на квадратната функција, во зависност од коефициентот a и дискриминантата $D = b^2 - 4ac$, функцијата ја запишуваме во видот

$$(1) \qquad f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right].$$

Видовме дека од знакот на коефициентот a зависи дали параболата е отворена нагоре (ако $a > 0$), или надолу (ако $a < 0$). Од дискриминантата D, пак, зависи дали функцијата f има нули (ако $D \geqslant 0$) или нема нули (ако $D < 0$). Разграничувањата на можните случаи ќе ги извршиме според знакот на дискриминантата D.

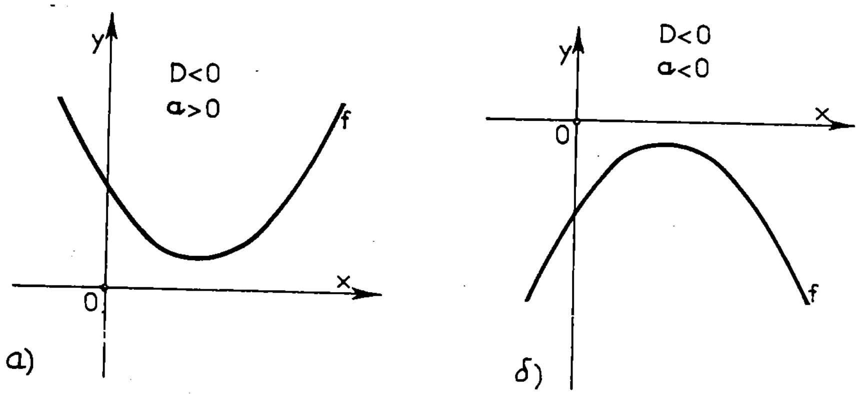
1°. Ако $D < 0$, тогаш $-\frac{D}{4a^2} > 0$, па според тоа и

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} > 0$$

Оттука заклучуваме дека за секој $x \in \mathbf{R}$, $f(x)$ има ист знак како и коефициентот a т.е.

$i)$ $f(x) > 0$, ако $a > 0$

$ii)$ $f(x) < 0$, ако $a < 0$ (црт. 19)

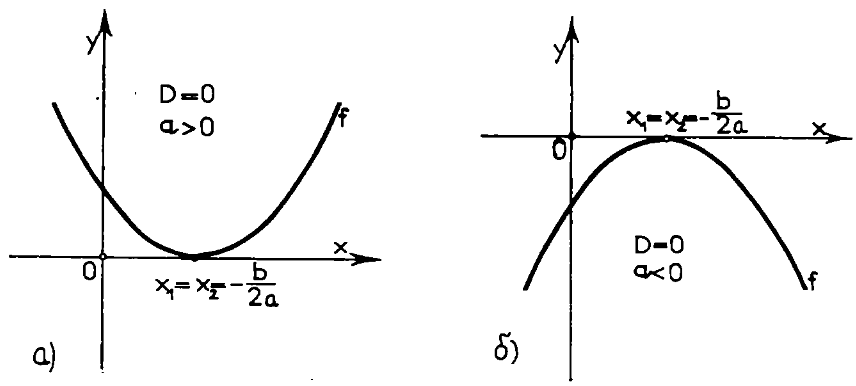


црт. 19

2°. Ако $D = 0$, тогаш функцијата (1) го добива видот

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Бидејќи $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$, заклучуваме дека $f(x)$ има ист знак како и коефициентот a, за секој $x \in \mathbf{R}$, освен за $x = -\frac{b}{2a}$, кога $f(x) = 0$. (црт. 20)



црт. 20

3°. Ако $D > 0$, тогаш функцијата (1) има две различни нули x_1 и x_2, па може да се запише во видот

$$(2) \qquad f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

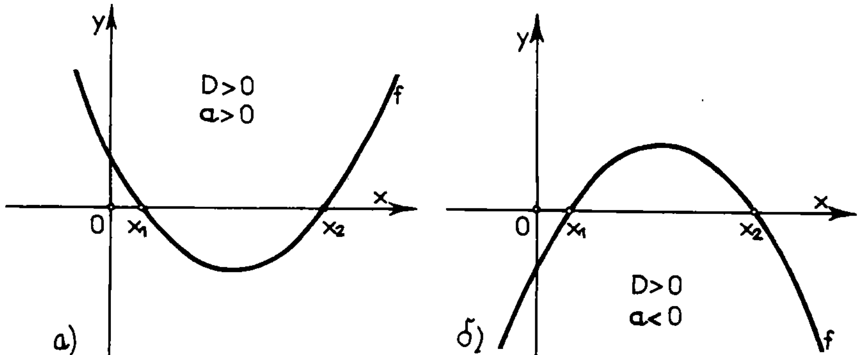
Ако $x_1 < x_2$, тогаш овие броеви го разбиваат множеството на реалните броеви на три интервали: $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) и $(x_2, +\infty)$. Да го одредиме знакот на $f(x)$ во секој од тие интервали.

i) Ако $x \in (-\infty, x_1)$, т.е. $x < x_1 < x_2$, тогаш $x - x_1 < 0$, $x - x_2 < 0$ па затоа $(x - x_1)(x - x_2) > 0$.

Значи, во овој случај $f(x)$ има ист знак како коефициентот a.

ii) Ако $x_1 < x < x_2$, тогаш $x - x_1 > 0$, $x - x_2 < 0$, па затоа $(x - x_1)(x - x_2) < 0$. Во овој случај $f(x)$ има спротивен знак од знакот на коефициентот a.

iii) Ако $x_1 < x_2 < x$, тогаш $x - x_1 > 0$, $x - x_2 > 0$ па затоа $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ од каде што следува дека $f(x)$ има ист знак како и коефициентот a (црт. 21.)



црт. 21

Опфаќајќи ги овие три можности заклучуваме:
Знакот на квадратната функција $f(x) = ax^2 + bx + c$ е еднаков со знакот на коефициентот a за сите вредности на аргументот x, освен за $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ (кога $D \geqslant 0$).

Пример 1. *Одреди го знакот на функциите:*

$$a)\ f(x) = 2x^2 - 3x + 5 \quad б)\ g(x) = 3 - 2x - x^2$$

Решение. а) Бидејќи $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -31 < 0$, а $a = 2 > 0$, функцијата е позитивна за секој $x \in \mathbf{R}$.

б) Од $D = (-2)^2 - 4(-1) \cdot 3 = 16 > 0$ следува дека функцијата има две нули:

$$x^2 + 2x - 3 = 0, \quad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2,$$

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 1$$

Бидејќи $a = -1 < 0$, следува дека функцијата е негативна во интервалите надвор од нулите, а меѓу нулите е позитивна, т.е.

$g(x) < 0$, за $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$,

$g(x) > 0$, за $x \in (-3, 1)$

Забелешка. Овие резултати не мора да се паметат. Доволно е да се скицира параболата, користејќи ги нејзините нули (ако постојат), и знакот на a. На пример, за функцијата g би ја имале следнава скица (црт. 22).

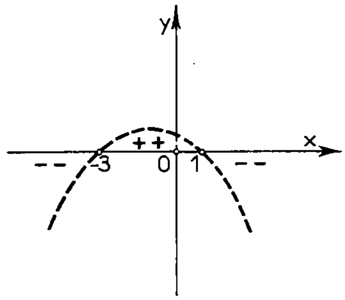
Од скицата заклучуваме

$g(x) < 0$, за $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

$g(x) > 0$, за $x \in (-3, 1)$.

1. Одреди го знакот на функцијата:

а) $f(x) = x^2 - 6x + 9$
б) $f(x) = x^2 - 3x + 7$
в) $f(x) = -2x^2 - 3x + 5$
г) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$.



црт. 22

6. Лесно можат да се докажат следниве последици квадратниот трином $ax^2 + bx + c$ е:

1°. позитивен за секој $x \in \mathbf{R}$, ако и само ако $D < 0$ и $a > 0$,
2°. негативен за секој $x \in \mathbf{R}$, ако и само ако $D < 0$ и $a < 0$.

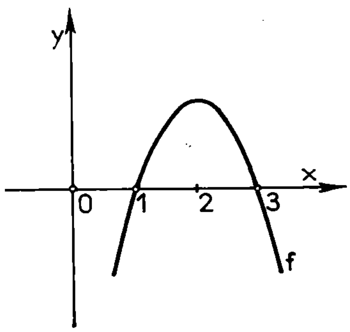
Дека условот е доволен, веќе покажавме. Потребноста на условот ја докажуваме вака. Да претпоставиме дека $f(x) > 0$ за секој $x \in \mathbf{R}$. Претпоставката $D \geqslant 0$ би довела до заклучокот дека $f(x)$ има нула што противречи на $f(x) > 0$ за секој $x \in \mathbf{R}$. Значи следува $D < 0$. На крајот од формулата (1) ќе следува дека $a > 0$.

На сличен начин се докажува и импликацијата

$$\forall x \in \mathbf{R}: f(x) < 0 \Rightarrow D < 0 \wedge a < 0$$

Пример 2. *За кои вредности на параметрите* k *и* p *квадратниот трином* $kx^2 + px - 3$ *добива позитивни вредности само во интервалот* $(1, 3)$?

Решение. Ако квадратната функција $f(x) = kx^2 + px - 3$ е позитивна само во интервалот $(1, 3)$, тогаш нејзиниот график треба да изгледа како на црт. 23. Тоа значи дека таа има две нули: $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$, и уште $k < 0$ (параболата е отворена надолу).



црт. 23

Од условот $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$ да бидат решенија на равенката $kx^2 + px - 3 = 0$, го добиваме системот равенки $k + p - 3 = 0 \ \land$ $\land \ 9k + 3p - 3 = 0$, од каде што: $k = -1, p = 4$.

Параметрите k и p можеме, поедноставно, да ги одредиме од Виетовите формули $\frac{p}{k} = -4$ и $\frac{3}{k} = -3$.

2. За кои вредности на параметрите k и p квадратниот трином $kx^2 + px - 15$ добива негативни вредности само во интервалот $(-5, \frac{3}{2})$?

Вежби

3. За кои вредности на x квадратниот трином:

а) $3x^2 - 5x - 2$ б) $16x^2 - 24x + 9$ в) $-x^2 + x + 6$ добива позитивни вредности.

4. За кои вредности на x е негативен триномот

а) $4x^2 + 11x - 3$ б) $4x^2 - 4x + 1$ в) $-2x^2 + 5x + 3$

5. Одреди го знакот на квадратната функција:

а) $f(x) = x^2 - 2x + 6$ б) $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$

6. За кои вредности на параметарот k, функцијата

$f(x) = x^2 + (k + 1)x + k + 1$

ќе добива позитивни вредности за секој $x \in \mathbf{R}$

7. За кои вредности на k и p, функцијата

$f(x) = x^2 - px - (k - 1)$

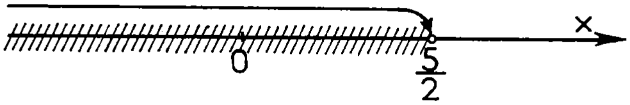
ќе добива негативни вредности само во интервалот $(1, 2)$?

8. Реши ги следниве линеарни неравенки

а) $2x - 5 < 0$ б) $\frac{1}{2}x + 3 > 0,5$

IV. 9. Квадратни неравенки

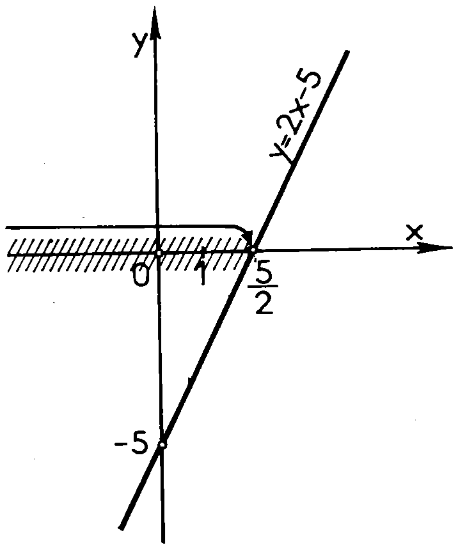
а. При решавање на задачата 8а) од минатата лекција сигурно доби дека множеството решенија е интервалот $(-\infty, \frac{5}{2})$. Тој интервал е прикажан на црт. 24



црт. 24

Оваа неравенка можеме да ја решиме и графички. За таа цел ја разгледуваме функцијата $f(x) = 2x - 5$. Нејзиниот график е правата $y = 2x - 5$ (црт. 25), која ја сече x–оската, во точката $(\frac{5}{2},0)$.

Од црт. 25 гледаме дека функцијата f добива негативни вредности, т.е. правата е под x–оската, за оние точки чии апсциси се лево од $\frac{5}{2}$. Следствено, $f(x) < 0$, ако и само ако $x < \frac{5}{2}$.



црт. 25

б. Во математиката честопати при решавањето на неравенките се користиме со графикот на соодветната функција.

Слично, графикот на квадратната функција ќе го користиме при решавање на квадратните неравенки. Претходно дефинираме:

Д

Неравенката од видот

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{или} \quad ax^2 + bx + c < 0,$$

односно

$$ax^2 + bx + c \geqslant 0 \quad \text{или} \quad ax^2 + bx + c \leqslant 0$$

каде што a, b, c се реални броеви и $a \neq 0$ се вика **квадратна неравенка со една променлива.**

Решавањето на една од квадратните неравенки

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{или} \quad ax^2 + bx + c < 0$$

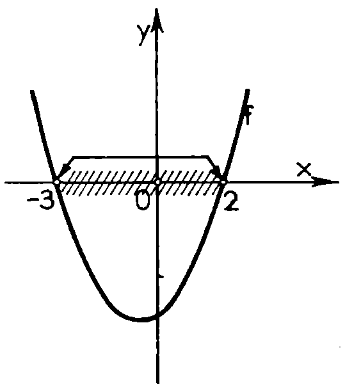
се сведува на одредување на оние вредности на x, за кои соодветната квадратна функција $f(x) = ax^2 + bx + c$ добива позитивни, односно негативни вредности. Множеството решенија, пак, на неравенките

$$ax^2 + bx + c \geqslant 0 \quad \text{или} \quad ax^2 + bx + c \leqslant 0$$

ги содржи уште и нулите на соодветната квадратна функција.

Во секоја од досега спомнатите неравенки можеме да претпоставиме дека $a > 0$. Ако $a < 0$, тогаш дадената квадратна неравенка ја множиме со (-1). На таков начин, соодветната парабола ќе биде секогаш отворена нагоре.

Пример 1. *Реши ја квадратната неравенка* $x^2 + x - 6 < 0$.



црт. 26

Решение. Соодветната квадратна функција е $f(x) = x^2 + x - 6$. За скицирање на нејзиниот график, доволно е да ги одредиме нејзините нули – решенија на равенката $x^2 + x - 6 = 0$. Тоа се броевите $x_1 = -3$ и $x_2 = 2$. Параболата е отворена нагоре. Од графикот на функцијата (црт. 26) гледаме дека таа е негативна, т.е. графикот е под x–оската, за вредности на x од интервалот $(-3, 2)$.

Следствено, решение на неравенката е множеството $(-3, 2)$, т.е. $\mathbf{M} = (3, 2)$.

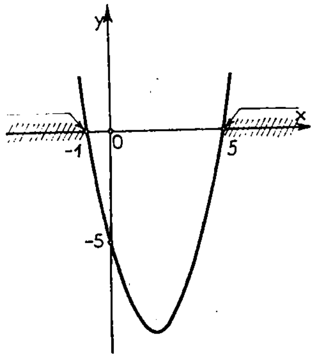
1. Реши ја неравенката $x^2 - 2x - 3 < 0$.

Пример 2. *Реши ја неравенката* $-x^2 + 4x + 5 < 0$.

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $x^2 - 4x - 5 > 0$. Ја решаваме прво равенката $x^2 - 4x - 5 = 0$. Имаме:

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 5} = 2 \pm 3$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 5$$



црт. 27

Параболата $y = x^2 - 4x - 5$ е свртена нагоре (црт. 27) и ја сече x–оската во точката $(-1, 0)$ и $(5, 0)$. Од графикот гледаме дека

$$f(x) > 0 \quad \text{за} \quad x \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty).$$

Значи, множеството решенија на неравенката е $\mathbf{M} = (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$ или запишано поинаку $\mathbf{M} = \mathbf{R} \setminus [-1, 5]$.

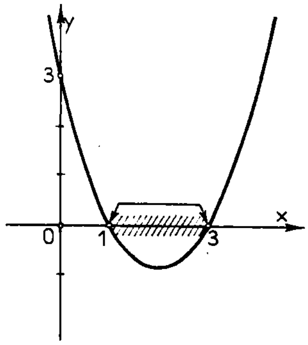
2. Реши ја неравенката, $x^2 + 2x - 8 > 0$.

Пример 3. *Најди ги целобројните решенија на неравенката*

$$\frac{(x-1)^2}{4} \leqslant 1 - \frac{3-x}{2},$$

Решение. По средувањето, неравенката го добива видот $x^2 - 4x + 3 \leqslant 0$

Параболата $y = x^2 - 4x + 3$ е отворена нагоре, а нејзините нули се броеви $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$ (црт. 28). Следствено, $x \in \{1, 2, 3\}$.



црт. 28

3. Одреди го најмалиот цел број x, за кој $2x^2 + 4x - 6 < 0$.

Пример 4. *Реши ги неравенките:*

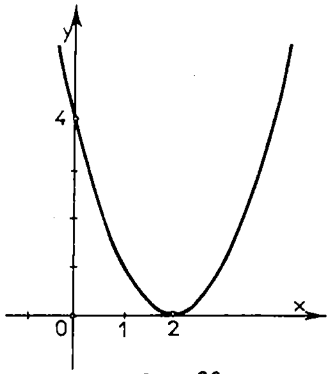
а) $(x-2)^2 \geqslant 0$ б) $(x-2)^2 > 0$

в) $(x-2)^2 \leqslant 0$ г) $(x-2)^2 < 0$

Решение. Од графикот на функцијата $f(x) = (x-2)^2$ (црт. 29) ги читаме следниве разултати:

а) $\mathbf{M} = \mathbf{R}$ б) $\mathbf{M} = \mathbf{R} \setminus \{2\}$

в) $\mathbf{M} = \{2\}$ г) $\mathbf{M} = \varnothing$



црт. 29

4. Реши ги неравенките:

а) $(x+4)^2 \geqslant 0$ б) $(x+3)^2 \leqslant 0$

в) $(2x - \sqrt{3})^2 < 0$ г) $(5x+7)^2 > 0$

b. Да наведеме сега неколку примери, кои се сведуваат на решавање на квадратни неравенки.

Пример 5. *Одреди го до доменот на функцијата* $f(x) = \sqrt{2x^2 + 9x - 5}$.

Решение. Бидејќи квадратниот корен има смисла, т.е. е реален број, само за ненегативни вредности на поткорениот израз, следува дека доменот на функцијата f го наоѓаме од условот

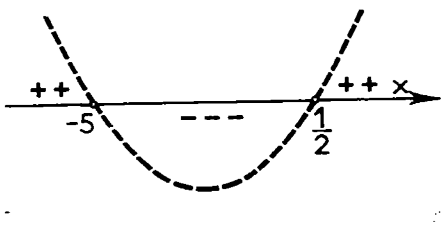
$$2x^2 + 9x - 5 \geqslant 0$$

Решението на оваа неравенка го читаме од црт. 30; тоа е интервалот

$(-\infty, -5] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Следствено, доменот на функцијата f е множеството

$$\mathbf{D}_f = \mathbf{R} \setminus \left(-5, \frac{1}{2}\right)$$



црт. 30

5. Одреди го доменот на функцијата:

а) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$;   б) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

Пример 6. *За кои вредности на параметарот k триномот $x^2 - (2k + 1)x + k - 6$ има реални нули?*

Решение. Дадениот трином ќе има реални нули, ако неговата дискриминанта е ненегативна; имаме:

$$(2k + 1)^2 - 4(k - 6) \geqslant 0$$

$$4k^2 + 4k + 1 - 4k + 24 \geqslant 0$$

$$4k^2 + 25 \geqslant 0$$

Бидејќи последната неравенка е задоволена за секој реален број k, заклучуваме дека дадениот трином ќе има реални нули за секој $k \in \mathbf{R}$.

6. За кои вредности на параметарот k равенката $(k + 1)x^2 - 2(k - 1)x + 2k - 5 = 0$ ќе има конјугирано комплексни решенија?

Пример 7*. *Одреди го множеството вредности на функцијата*

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 1}$$

Решение. Нека y е произволен реален број. Ако постојат вредности (или барем една) на аргументот x, за кои вредноста на функцијата $f(x)$ е еднаква на y, тогаш равенката

(*) $$f(x) - y = 0$$

во множеството **R** има барем едно решение. Множеството вредности на f е всушност множество вредности на параметарот y, за коишто равенката (*) има барем едно реално решение.

Во нашиов случај равенката

$$y = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 1}$$

ја трансформираме во квадратна по x:

$$(y - 1)x^2 + (y - 4)x + (y - 1) = 0$$

Корените на оваа равенка ќе бидат реални, ако нејзината дискриминанта е ненегативна, т.е.

$$(y - 4)^2 - 4(y - 1)^2 \geqslant 0, \quad -3y^2 + 12 \geqslant 0, \quad y^2 \leqslant 4$$

Множеството решенија на последната неравенка е сегментот $[-2, 2]$.
Следствено, бараното множество вредности на функцијата е

$$\mathbf{V}_f = [-2, 2]$$

7. Одреди го множеството $\mathbf{V}_f$, ако $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 2}{x^2 + 1}$

Г Вежби

8. Реши ги неравенките:

а) $x^2 - 5x + 6 > 0$ б) $x^2 + x + 1 < 0$ в) $x^2 - 3x > 0$
г) $2x^2 - 2x \leqslant 3\ (x - 1)$ д) $2x\ (1 - x) \geqslant (x - 3)^2$

9. Одреди го доменот на функцијата:

а) $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^2}$ б) $f(x) = \sqrt{1 - x + x^2}$

10. Одреди ги целобројните решенија на неравенката $3x^2 + 7x - 2 < 0$.

$\boxed{11.}$ Реши го системот неравенки:

а) $\begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 3 > 0 \\ -x + 2 > 0 \end{cases}$

IV. 10. Систем квадратни неравенки

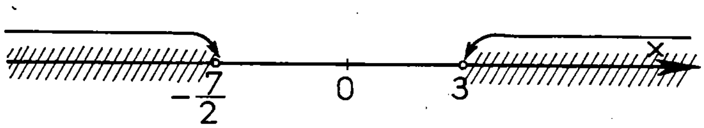
а Минатата учебна година учеше како се решаваат системи линеарни неравенки со една променлива. Да се потсетиме со еден пример.

Пример 1. *Реши го системот на неравенките* $\begin{cases} 2x + 7 < 0 \\ 3 - x < 0 \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} 2x + 7 < 0 \\ 3 - 5x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < -7 \\ 3 < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{7}{2} \\ x > 3 \end{cases}$$

Очигледно, системот нема решение, а тоа се гледа и од геометриската интерпретација на бројната оска (црт. 31.)



црт. 31

Аналитички заклучуваме вака: множеството решенија на првата неравенка е интервалот $M_1 = \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right)$, на втората $M_2 = (3, +\infty)$, а на системот:

$$M = M_1 \cap M_2 = \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right) \cap (3, +\infty) = \varnothing.$$

б Во тесна врска со квадратната неравенка е рационалната неравенка од видот

$$(1) \qquad \frac{ax + b}{cx + d} > 0 \qquad (\text{или} < 0, \text{ или} \geqslant 0, \text{ или} \leqslant 0)$$

којашто е еквивалентна со неравенката

$$(ax + b)\ (cx + d) > 0 \qquad (\text{или} < 0,\ \text{или} \geqslant 0,\ \text{или} < 0)$$

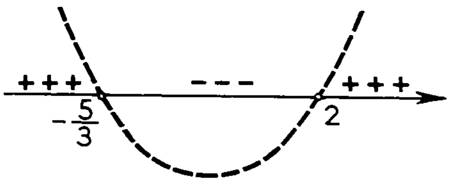
Пример 2. *Реши ја неравенката* $\dfrac{3x + 5}{x - 2} < 0.$

Решение. Ако ја помножиме неравенката со позитивниот број $(x - 2)^2$, $x \neq 2$, ја добиваме еквивалентната неравенка

$$(3x + 5)\ (x - 2) < 0.$$

Очигледно е дека $x_1 = -\dfrac{5}{3}$ и $x_2 = 2$ се нулите на квадратната функција

$$f(x) = (3x + 5)\ (x - 2)$$



црт. 32

На црт. 32 грубо е скициран графикот на функцијата f. Оттука е јасно дека

$$M = \left(-\frac{5}{3},\ 2\right).$$

1. Најди ги целобројните решенија на неравенката

$$\frac{2x - 7}{x - 2} > 1$$

Извесен број задачи од математиката се сведуваат на решавање на систем од квадратни неравенки.

Општиот вид на систем од квадратни неравенки со една променлива е

$$(1) \qquad \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0 & (\text{или} < 0,\ \text{или} \geqslant 0,\ \text{или} \leqslant 0) \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0 & (\text{или} < 0,\ \text{или} \geqslant 0,\ \text{или} \leqslant 0) \end{cases}$$

Ако $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ се, по ред, множествата решенија на првата, односно втората неравенка, тогаш множеството решенија $\mathbf{M}$ на системот (1) е пресекот на тие множества, т. е.

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$$

Пример 3. *Реши го системот неравенки*

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0 \\ x^2 - 2x - 8 > 0 \end{cases}$$

Решение. Ја решаваме прво равенката $x^2 + 2x - 3 = 0$. Имаме:

$$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1 + 3} = -1 \pm 2; \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 1.$$

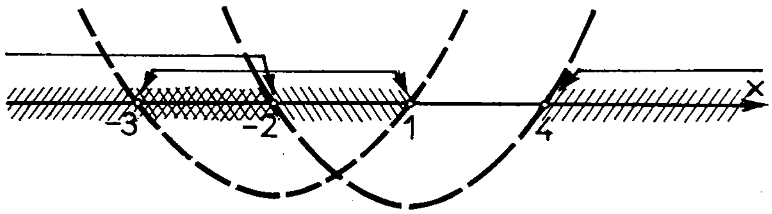
Следствено првата неравенка има множество решенија $\mathbf{M}_1 = (-3, 1)$.

Корените на равенката $x^2 - 2x - 8 = 0$ се $x_3 = -2$, $x_4 = 4$, па множеството решенија на втората неравенка е $\mathbf{M}_2 = (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$.

Конечно, множеството решенија на системот е

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 = (-3,\ 1) \cap \Big((-\infty,\ -2) \cup (4,\ +\infty)\Big) = (-3,\ -2)$$

што се гледа јасно и од црт. 33.



црт. 33

2. Реши го системот неравенки

$$\begin{cases} x^2 - 8x - 9 < 0 \\ -x^2 + 4x + 21 > 0 \end{cases}$$

Неравенката од видот

$$\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} > 0 \tag{2}$$

е еквивалентна со неравенката

$$(a_1x^2 + b_1x + c_1)\ (a_2x^2 + b_2x + c_2) > 0,$$

а оваа, пак, со вкупноста од два системи неравенки:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 < 0 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 < 0. \end{cases}$$

Наместо да решаваме два системи неравенки, на еден конкретен пример ќе покажеме пократка постапка за решавање на неравенката (2)

Пример 4. *Реши ја неравенката* $\dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 7x + 12} > 0$

Решение. Ако ја помножиме неравенката со позитивниот број $(x^2 - 7x + 12)^2$, ја добиваме еквивалентната неравенка

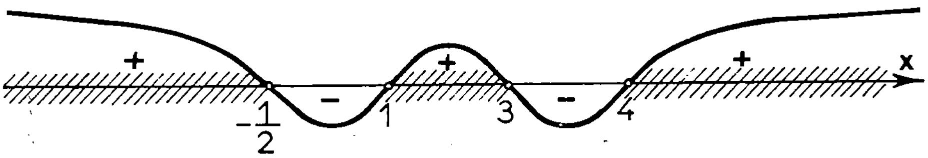
$$(2x^2 - x - 1)\ (x^2 - 7x + 12) > 0 \tag{3}$$

Со разложување на множители на триномите од левата страна на неравенката (3) добиваме

$$(2x + 1)\ (x - 1)\ (x - 3)\ (x - 4) > 0 \tag{4}$$

Очигледно, броевите $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ се нули на функцијата $x \mapsto (2x + 1)\ (x - 1)\ (x - 3)\ (x - 4)$.

Тие го разбиваат множеството **R** на реалните броеви на пет интервали (црт. 34).



црт. 34

Лесно утврдуваме дека за $x > 4$ левата страна на неравенката (4) е позитивна (бидејќи секој множител е позитивен) – па ставаме знак плус десно од 4. Понатаму, одејќи налево, ги менуваме наизменично знаците минус и плус, со што го одредуваме знакот во секој интервал. Притоа е згодно на цртежот тоа да го илустрираме со непрекината крива линија – *крива на знакот,* која минува низ разгледуваните точки и лежи над или под бројната оска, во соодветност со знакот на неравенството (црт. 34).

На крајот, од црт. 34 го читаме резултатот:

$$\mathbf{M} = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, 3) \cup (4, +\infty)$$

Забелешка. Овој метод во математиката е познат под името *метод на интервали.*

3. Користејќи го методот на интервалите, реши ја неравенката

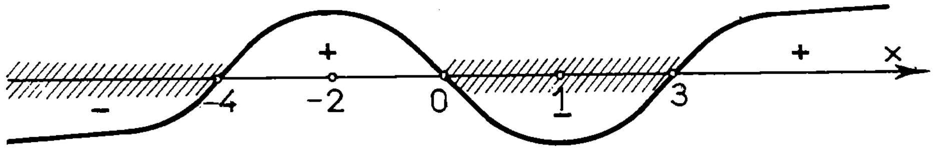
$$\frac{3x^2 - 8x + 5}{x^2 + 2x - 15} \leqslant 0$$

Пример 5*. *Реши ја неравенката* $\frac{x(x+2)^2(x+4)^5}{(x-1)^6(x-3)^7} \leqslant 0.$

Решение. Бидејќи $(x+2)^2 \geqslant 0$ и $(x-1)^6 > 0$, ја делиме неравенката со позитивната дропка $\frac{(x+2)^2}{(x-1)^6}$, имајќи предвид дека $x = -2$ е решение, а $x = 1$ не е решение на неравенката. Понатаму, секој множител со непарен показател го заменуваме со соодветниот множител на прв степен, бидејќи знакот на изразот од левата страна на неравенката не се менува. Како резултат од сè ова добиваме поедноставна неравенка, еквивалентна со дадената за секој $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$:

$$\frac{x(x+4)}{x-3} \leqslant 0$$

На црт. 35 е нацртана кривата на знакот, а решението е истакнато со шрафирање.



црт. 35

Бидејќи $x = -4$, $x = -2$ и $x = 0$ се решенија на неравенката, нив ги цртаме со исполнети кружчиња, а $x = 1$ и $x = 3$ со празни кружчиња. Од цртежот гледаме дека решението

$x = -2$ не припаѓа на шрафираниот дел – него дополнително го вклучуваме во решението. Вредноста, пак, $x = 1$ не е решение на неравенката, но припаѓа на шрафираниот дел – затоа оваа вредност ќе ја исклучиме од решението. Конечно, добиваме дека

$$M = (-\infty, -4] \cup \{-2\} \cup [0, 1) \cup (1, 3)$$

4. Реши ја неравенката $\dfrac{x^2(2x-11)(x-1)^5}{(x+6)^3(3x-9)^4}$

Вежби

5. Реши ја неравенката:

а) $\dfrac{2-x}{3x+5} < 0$ б) $\dfrac{2x+7}{x-4} \geqslant 0$

6. Реши го системот неравенки:

а) $\begin{cases} 2x+5 < 0 \\ x^2-11x+30 \geqslant 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2-8x \geqslant 0 \\ x^2+x-20 \leqslant 0 \end{cases}$

7. Реши ја неравенката

а) $(x-2)(2x+3)(3x-1) \geqslant 0$

б) $\dfrac{(x-4)\ (x+3)}{x^2+x-12} < 0$ в) $\dfrac{x+25}{20+x-x^2} \geqslant 2$

8.* За кои вредности на параметарот k, квадратната равенка $(k-5)x^2-4kx + k-2 = 0$ ќе има нееднакви реални корени со различен знак?

9.* За кои вредности на p, равенката $x^2-px+4=0$ ќе има реални корени содржани во интервалот $(1, 3)$?

10.* За кои вредности на k, функцијата $f(x) = kx^2 - kx + 1$ за секој $x \in \mathbf{R}$ добива:
а) позитивни вредности; б) негативни вредности?

11.* Одреди го параметарот m, така што корените на равенката $m^2 - mx + m - l = 0$ да го задоволуваат условот

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1} > 2$$

V. РАВЕНКИ ШТО СЕ СВЕДУВААТ НА КВАДРАТНИ

Многу равенки од повисок степен (поголем од два) можеме да ги решиме со помош на квадратните равенки, т.е. нивното решавање, со погодна смена, се сведува на решавање на квадратна равенка. Такви се некои биномни равенки, биквадратните равенки, некои триномни равенки, некои реципрочни равенки, и други, кои ќе ги разгледаме во наредните лекции. Честопати, при решавањето на овие равенки ја користиме идејата за разложување на множители на нејзината лева страна.

Да спомнеме на почетокот дека решенијата на овие равенки ќе ги бараме во множеството на комплексните броеви.

V. 1. Биномни равенки

Пред да ги запознаеш биномните равенки, ќе разгледаме два примери.

Пример 1. *Најди ги сите вредности на третиот корен од единицата.*

Решение. Треба да ја решиме равенката

(*) $\quad x = \sqrt[3]{1}, \qquad x^3 = 1, \qquad x^3 - 1 = 0$

Бидејќи $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$, равенката (*) го добива видот

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0,$$

којашто е еквивалентна со вкупноста равенки

$$\left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{array}\right.$$

Од првата равенка следува $x_1 = 1$, а од втората наоѓаме

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Следствено, корените на равенката (*), па според тоа и сите вредности на $\sqrt[3]{1}$ се броевите:

$$1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Значи, $\sqrt[3]{1}$ има три вредности: првата е реална, а другите две конјугирано комплексни.

1. Најди ги сите вредности на $\sqrt[3]{27}$.

На сличен начин можеме да најдеме трети корен од кој било реален број.

Пример 2. *Сите вредности на* $\sqrt[3]{-8}$ *ги наоѓаме со решавање на равенката*

$$x = \sqrt[3]{-8}, \qquad x^3 = -8, \qquad x^3 + 8 = 0.$$

Левата страна на последната равенка ја разложуваме на множители

$$x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4),$$

па равенката го добива видот

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0,$$

којашто е еквивалентна со вкупноста равенки

$$\left[\begin{array}{l} x + 2 = 0 \\ x^2 - 2x + 4 = 0 \end{array}\right.$$

Првата равенка има корен $x_1 = -2$, а корените на втората равенка се $x_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3}$.

Следствено, трите вредности на $\sqrt[3]{-8}$ се:

$$-2, 1 + i\sqrt{3}, \quad 1 - i\sqrt{3}.$$

2. Најди ги сите вредности на $\sqrt[3]{-1}$.

Барањето на сите вредности на третиот корен од некој реален број, различен од нула, се сведува на решавање на равенки од трет степен, од видот $x^3 \pm a = 0$. Ваквите равенки се викаат **биномни равенки од трет степен.**

Д

Равенката од видот

(1) $\qquad x^n - a = 0$

се вика **биномна равенка** од n-ти степен.

Со смената $x = y\sqrt[n]{a}$ таа се сведува на поедноставната равенка

(2) $\qquad y^n - 1 = 0$

Ќе се задржиме на решавањето само на оние биномни равенки чија лева страна можеме да ја разложиме на множители (линеарни или квадратни).*

3. Реши ги биномните равенки од втор степен:

а) $x^2 - 1 = 0$ б) $x^2 + 1 = 0$

Равенката од видот

(3) $$px^n + q = 0$$

при $p \neq 0$, со смената $x = y\sqrt[n]{\frac{q}{p}}$ се сведува на равенката (2).

Пример 3. *Реши ја равенката* $8x^3 + 125 = 0$.

Решение. Со смената $x = y\sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2}y$, дадената равенка се сведува на равенката

$$y^3 + 1 = 0,$$

чии корени се:

$$y_1 = -1,\quad y_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad y_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Имајќи ја предвид смената $x = \frac{5}{2}y$, добиваме

$$x_1 = -\frac{5}{2},\quad x_2 = \frac{5}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{4}i,\quad x_3 = \frac{5}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{4}i$$

4. Реши ги равенките:

а) $8x^3 - 27 = 0$ б) $3x^3 + 192 = 0$

Пример 4. *Да ја решиме сега биномната равенка од четврти степен* $x^4 + 1 = 0$.

Решение. Левата страна на равенката ја разложуваме на множители – со дополнување до полн квадрат:

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{2})^2$$
$$= (x^2 + 1 - x\sqrt{2})(x^2 + 1 + x\sqrt{2})^2$$

* Секоја биномна равенка може да се реши со помош на комплексните броеви, поточно – со барање на n-ти корен од комплексен број.

Според тоа, дадената равенка е еквивалентна со вкупноста равенки

$$x^2 - x\sqrt{2} + 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + x\sqrt{2} + 1 = 0,$$

од каде што ги добиваме четирите корени на дадената равенка:

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i, \qquad x_{3,4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

Тоа се всушност четирите вредности на $\sqrt[4]{-1}$.

5. Реши ја равенката $x^4 - 1 = 0$.

Упатство. $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$.

б Од досегашните примери видовме дека некои биномни равенки имаат реални и комплексни корени, а некои само конјугирано комплексни. Тоа зависи од коефициентот a и парноста на бројот n.

1° Ако $a = 0$, тогаш равенката (1) во полето на реалните, односно комплексните броеви има единствено решение $x = 0$.

2° Ако $a \neq 0$, тогаш во полето на реалните броеви равенката (1) при:

i) $n = 2k$ и $a > 0$ има два реални корени $x_{1,2} = \pm \sqrt[2k]{a}$,

ii) $n = 2k$ и $a < 0$ нема реални корени,

iii) $n = 2k + 1$ и секој $a \in \mathbf{R}$ има единствен реален корен $x = \sqrt[2k+1]{a}$.

3°. Ако $a \neq 0$ е произволен реален (или комплексен) број, тогаш може да се покаже дека во полето на комплексните броеви равенката (1) има точно n корени.

г **Вежби**

6. Дали линеарна равенка $ax + b = 0$, $a \neq 0$ е биномна равенка?

Реши ги биномните равенки:

7. а) $x^3 - 64 = 0$ б) $x^3 + 343 = 0$

8. а) $x^3 + 5 = 0$ б) $x^3 - 7 = 0$

9. а) $2x^3 - 12 = 0$ б) $5x^3 + 9 = 0$

10. а) $x^4 - 81 = 0$ б) $x^4 - 64 = 0$

11. а) $x^6 - 1 = 0$ б) $x^8 - 1 = 0$

Упатство. а) $x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$

$\boxed{12.}$ Реши ги равенките:

а) $x^4 - 16x^2 = 0$ б) $4x^4 - 25x^2 = 0$

V. 2. Биквадратни и триномни равенки

а За почеток да разгледаме еден конкретен пример.

Пример. 1. *Реши ја равенката* $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

Решение. Со смената $x^2 = y$ (тогаш $x^4 = y^2$),
равенката се сведува на квадратната равенка $y^2 - 7y + 12 = 0$,

чии корени се

$$y_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

т.е $\quad y_1 = 3$ и $y_2 = 4$

Имајќи ја предвид смената $x^2 = y$, добиваме вкупност од две квадратни равенки:

$$x^2 = 3 \text{ и } x^2 = 4,$$

чии корени се $\pm \sqrt{3}$, односно ± 2.

Според тоа, дадената равенка од четврти степен

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$$

има четири корени:

$$x_1 = -\sqrt{3}, \ x_2 = \sqrt{3}, \ x_3 = -2, \ x_4 = 2$$

Следствено, нејзиното множество решенија е

$$\{-2, -\sqrt{3}, 3, 2\}$$

1. Реши ја равенката:

а) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ б) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

б.

Д

Равенката од видот

(1) $\quad ax^4 + bx^2 + c = 0$

каде што a,b,c се реални броеви и $a \neq 0$ се вика **биквадратна равенка**

Оваа равенка е од четврти степен. Ја запишуваме во видот

$$a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0,$$

па нејзиното решавање со смената

(2) $\quad x^2 = y,$

се сведува на решавање на квадратната равенка

(3) $\quad ay^2 + by + c = 0$

чии корени y_1 и y_2 ги наоѓаме на вообичаен начин. Тогаш, имајќи ја предвид смената (2) добиваме вкупност од две квадратни равенки:

(2′) $\quad x^2 = y_1$ и $x^2 = y_2$

Овие равенки може да ги решиме само ако $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$ т.е. ако $b^2 - 4ac \geqslant 0$ (бидејќи во спротивен случај би требало да знаеме да вадиме квадратен корен од комплексен број)

Во тој случај секоја од равенките (2′) има по два корени, од каде што следува дека равенката (1), како равенка од четврти степен, ќе има четири корени.

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{y_1}, \quad x_{3,4} = \pm \sqrt{y_2}$$

2. Докажи дека за корените на биквадратната равенка важат својствата:

а) $x_1 + x_2 + x_4 + x_3 = 0$; б) $x_1 x_2 x_3 x_4 = \dfrac{c}{a}$

б. Биквадратната равенка

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

можеме да ја решиме и без воведување на нова променлива, по формулата

$$x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \tag{4}$$

Обиди се да ја образложиш точноста на оваа формула.

Пример 2. *Реши ја равенката* $4x^4 + 35x^2 - 9 = 0$
Решение. Според формулата (4) имаме

$$x_{1234} = \pm \sqrt{\frac{-35 \pm \sqrt{1225 + 144}}{8}} = \pm \sqrt{\frac{-35 \pm 37}{8}}$$

оттука

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-35+37}{8}} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2},$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-35-37}{8}} = \pm \sqrt{-9} = \pm 3i$$

3. Реши ги равенките:

а) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ б) $x^4 + 10x^2 + 25 = 0$

г. Ако $c = 0$, тогаш биквадратната равенка го добива видот

$$ax^4 + bx^2 = 0, \text{ т.е. } x^2(ax^2 + b) = 0$$

чие решавање се сведува на решавање на две неполни квадратни равенки (види III. 2.)

$$x^2 = 0 \quad \text{и} \quad ax^2 + b = 0$$

Ако $b = 0$, тогаш биквадратната равенка се сведува на биномна равенка од четврти степен

$$ax^4 + c = 0$$

притоа, за $ac > 0$ сите четири корени се комплексни, а за $ac < 0$ таа, има два реални и два комплексни корени.

Ако $b = c = 0$, тогаш биквадратната равенка има четирикратен корен $x = 0$.

4. Реши ги равенките:

а) $5x^4 = 0$ б) $2x^4 - 7x^2 = 0$ в) $16x^4 - 1 = 0$

Од порано научивме да го разложуваме квадратниот трином, имено рековме дека

$$ay^2 + by + c = a(y - y_1)(y - y_2)$$

Согласно на тоа, пишуваме

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) = a\,(x-x_1)(x+x_1)(x-x_2)(x+x_2)$$

Пример 3. *Разложи го на множители биквадратниот трином*

$$3x^4 + 26x^2 - 9$$

Решение. Ја решаваме прво равенката

$$3x^4 + 26x^2 - 9 = 0$$

Нејзините корени се: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_3 = 3i$, $x_4 = -3i$.

Сега ги имаме следниве разложувања:

– Над полето на комплексни броеви:

$$3x^4 + 26x^2 - 9 = 3(x - \frac{1}{\sqrt{3}})(x + \frac{1}{\sqrt{3}})(x - 3i)(x + 3i)$$
$$= (x\sqrt{3} - 1)(x\sqrt{3} + 1)(x - 3i)(x + 3i)$$

–Над полето на реалните броеви:

$$3x^4 + 26x^2 - 9 = (x\sqrt{3} - 1)(x\sqrt{3} + 1)(x^2 + 9)$$

–Над полето на рационалните броеви:

$$3x^4 + 26x^2 - 9 = (x\sqrt{3} - 1)(x\sqrt{3} + 1)(x^2 + 9)$$

5. Разложи го на линеарни множители триномот:

а) $2x^4 + 7x^2 - 4$ б) $x^4 - 2x^2 - 3$

Равенката од видот

(5) $$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

каде што a,b,c се реални броеви и $a \neq 0$

се вика **триномна равенка**.

Оваа равенка е од $2n$ –ти степен, а нејзиното решавање со смената

(6) $$x^n = z$$

се сведува на решавање на квадратната равенка

(7) $$az^2 + bz + c = 0$$

Ако z_1 и z_2 се корените на равенката (7), тогаш корените на триномната равенка (5) ги добиваме со решавање на вкупноста на биномните равенки

$$\left[\begin{array}{l} x^n = z_1 \\ x^n = z_2 \end{array}\right.$$

Очигледно е дека биквадратната равенка е специјален случај на триномната равенка, за $n = 2$.

Пример 4. *Реши ја равенката* $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

Решение. Со смената $x^3 = z$, равенката се сведува на квадратната равенка

$$z^2 - 9z + 8 = 0$$

чии корени се $z_1 = 1$, $z_2 = 8$.

Сега од смената $x^3 = z$ добиваме вкупност од две биномни равенки

$$x^3 = 1 \quad \text{и} \quad x^3 = 8$$

Корените на првата равенка се: $1, \ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

а на второта: $2, \ -1 + i\sqrt{3}, \ -1 - i\sqrt{3}$.

Значи, дадената равенка, како равенка од шести степен, има точно шест корени, два реални : $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, и два со два конјугирано комплексни корени : $x_{3,4} = -1 \pm i\sqrt{3}$, $x_{5,6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

6. Реши ги равенките:

а) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$ б) $x^6 - 35x^3 + 216 = 0$

Вежби

Реши ги равенките:

7. а) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ б) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

8. $(x^2 - 1)^2 + (x^2 + 2)^2 - (x^2 - 3)^2 = 21x^2 - 40$

9. $a^2x^4 - (a^4 + b^2)\,x^2 + a^2b^2 = 0$

10. а) $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$ б) $x^6 - 19x^2 - 216 = 0$

11. $2\,(x^2 - 1)^3 - (x^3 + 2)^2 = 6x^2\,(1 - x^2) - 9$

12. а) $x^8 - 97x^4 + 1296 = 0$ б) $x^6 + = 0$

Упатство. б) $x^6 + 1 = (x^3 - i)\,(x^3 + i)$, а потоа стави $x = iy$.

$\boxed{13.}$ $6\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 50 = 0$

V. 3. Равенки од квадратен вид

Идејата за воведување на нова (помошна) променлива ја применуваме и при решавање на други цели или дробно–рационални равенки.

Тие равенки најчесто го имаат видот

(1) $$a\,[f(x)]^2 + b\,[f(x)] + c = 0,$$

каде што a,b,c се реални броеви ($a \neq 0$), а $f(x)$ е израз којшто зависи од x. Таквите равенки уште ги викаме **равенки од квадратен вид**, бидејќи со смената

(2) $$f(x) = y$$

се сведуваат на квадратната равенка

(3) $$ay^2 + by + c = 0$$

Да го илустрираме тоа со два примери.

Пример 1. *Реши ја равенката*

$$(x^2 - 2x)^2 - 11\,(x^2 - 2x) + 24 = 0$$

Решение. Со смената $x^2 - 2x = y$, дадената равенка се сведува на квадратна по y

$$y^2 - 11y + 24 = 0,$$

чии корени се: $y_1 = 8$, $y_2 = 3$.

За одредување на x, ги решаваме равенките:

$$x^2 - 2x = 8 \quad \text{и} \quad x^2 - 2x = 3$$

Корените на првата равенка се $x_1 = 4$, $x_2 = -2$,
а на втората $x_3 = 3$, $x_4 = -1$.

Според тоа, множеството решенија на дадената равенка е $\{-2, -1, 3, 4\}$

1. Реши ја равенката: а) $(x^2 - 5x)^2 + 10\,(x^2 - 5x) + 24 = 0$
б) $(x^2 + 3x + 1)^2 - 4\,(x^2 + 3x + 1) = 25$

Пример 2. *Реши ја равенката*

$$\frac{x^2 + x - 2}{x} + \frac{2x}{x^2 + x - 2} - 3 = 0$$

Решение. Дефиниционата област на равенката ја наоѓаме од условите $x \neq 0$ и $x^2 + x - 2 \neq 0$. Од равенката $x^2 + x - 2 = 0$ добиваме $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

Според тоа, дефиниционата област на равенката е

$$\mathbf{D} = \mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$$

Со ослободување од именителите во равенката би добиле некоја равенка од четврти степен, која, во општ случај, не би знаеле да ја решиме. Но со воведување на смената

$$\frac{x^2 + x - 2}{x} = y$$

дадената равенка го добива видот

$$y + \frac{2}{y} - 3 = 0, \quad \text{т.е.} \quad y^2 - 3y + 2 = 0$$

Корените на оваа равенка се $y_1 = 1$ и $y_2 = 2$.

Од смената ја добиваме вкупноста равенки

$$\frac{x^2 + x - 2}{x} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2 + x - 2}{x} = 2$$

т.е.

$$x^2 - 2 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - x - 2 = 0$$

Корените на првата равенка се $x_1 = \sqrt{2}$ и $x_2 = -\sqrt{2}$
а на втората $x_3 = 2$ и $x_4 = -1$.

Бидејќи секој од овие четири корени припаѓа на дефиниционата област на равенката, т.е. $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{D}$ следува дека множеството решенија на равенката е $\{-\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}, 2\}$.

2. Реши ја равенката $\dfrac{x^2 + 3x}{x} - \dfrac{8x}{x^2 + 3x} = 2.$

6. Вежби

Реши ги равенките

3. $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$

4. $(x^2 + 5x + 8)^2 - 6(x^2 + 5x + 8) + 8 = 0$

5. $(x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$

6. $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 = 0$

7. $\dfrac{x^2 + x - 5}{x} + \dfrac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0.$

8*. $x(x + 1)(x^2 + x + 1) = 6$

9. $x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 4$

Упатство. Запиши ја равенката во видот

$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 4$, стави $x + \frac{1}{x} = y$, ќе добиеш $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

$\boxed{10.}$ Разложи ги на множители биномите:

а) $x^5 - 1$ б) $x^5 + 1$

Упатство. а) Изврши го делењето $(x^5 - 1) : (x - 1)$

V. 4. Симетрични равенки – 1

а. Веќе рековме дека решавањето на многу равенки е олеснето ако нејзината лева страна ја разложиме на множители. Да разгледаме еден конкретен пример.

Пример 1. *Реши ја равенката* $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$.

Решение. Левата страна на равенката ја разложуваме на множители со групирање на членовите со еднакви коефициенти:

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 &= 2(x^3 + 1) - 3x(x + 1) \\ &= 2(x + 1)(x^2 - x + 1) - 3x(x + 1) \\ &= (x + 1)(2x^2 - 5x + 2) \end{aligned}$$

Значи, дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(x + 1)(2x^2 - 5x + 2) = 0,$$

а оваа, пак, со вкупноста равенки

$$\left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0 \end{array}\right.$$

Од првата равенка следува $x_1 = -1$, а од втората наоѓаме:

$$x_2 = 2, \ x_3 = \frac{1}{2}.$$

Следствено, равенката од трет степен

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$$

има три корени: $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{2}$.

(1) Реши ја равенката $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$.

б.

Д	
	Равенката од видот (1) $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + cx^2 + bx + a = 0, \quad a \neq 0,$ кај којашто коефициентите на членовите еднакво оддалечени од почетокот и крајот се еднакви се вика **симетрична равенка.**

Очигледно е дека ниеден од корените на равенката (1) не е еднаков на нула, бидејќи $a \neq 0$.

Симетричните равенки го имаат следново важно својство:

Т	
	Ако α е корен на симетричната равенка (1), тогаш и $\frac{1}{\alpha}$ е нејзин корен.

Доказ. Ако $x = \alpha$ е корен на равенката (1) тогаш ќе важи равенството.

$$a\alpha^n + b\alpha^{n-1} + c\alpha^{n-2} + \dots + c\alpha^2 + b\alpha + a = 0,$$

коешто е еквивалентно со равенството

$$\alpha^n\left(a + \frac{b}{\alpha} + \frac{c}{\alpha^2} + \dots + \frac{c}{\alpha^{n-2}} + \frac{b}{\alpha^{n-1}} + \frac{a}{\alpha^n}\right) = 0$$

Бидејќи $\alpha \neq 0$, последното равенство се сведува на

$$a\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n + b\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1} + c\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-2} + \dots + c\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + b\left(\frac{1}{\alpha}\right) + a = 0,$$

од каде што следува дека $\frac{1}{\alpha}$ е корен на равенката (1).

Поради ова својство симетричните равенки ги викаме уште и **реципрочни равенки.**

Ние ќе се задржиме само на симетричните рдвенки од трет, четврти и петти степен.

б. Симетричната равенка од трет степен

$$(2) \qquad ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \qquad (a \neq 0)$$

ја решаваме со разложување, на нејзината лева страна, на множители:

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + bx + a &= a(x^3 + 1) + bx(x + 1) \\ &= a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) \\ &= a(x + 1)[ax^2 + (b - a)x + a]. \end{aligned}$$

Оттука следува дека равенката (2) е еквивалентна со вкупноста равенки

$$\left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ ax^2 + (b - a)x + a = 0 \end{array}\right.$$

Очигледно, еден од корените на симетричната равенка од трет степен секогаш е бројот -1, а другите два ги добиваме со решавање на симетричната равенка од втор степен $ax^2 + (b - a)x + a = 0$.

2. Реши ја равенката $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$.

Забелешка. Равенката од трет степен од видот

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0 \qquad (a \neq 0)$$

ја решаваме на сличен начин како и симетричните равенки од трет степен. Убеди се дека бројот 1 секогаш е решение на оваа равенка.

3. Реши ја равенката $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$.

г. Симетричната равенка од четврти степен е

$$(3) \qquad ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \qquad (a \neq 0).$$

Ако ги групираме членовите со еднакви коефициенти, ќе ја добиеме равенката

$$a(x^4 + 1) + b(x^3 + x) + cx^2 = 0$$

Последната равенка ја делиме со x^2 $(x \neq 0)$, па ја добиваме равенката

$$(3') \qquad a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Воведуваме нова (помошна) променлива со смената

$$x + \frac{1}{x} = y,$$

од каде што, со квадрирање, добиваме

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2, \text{ т.е. } x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Ако соодветните вредности ги замениме во равенката (3′), ја добиваме квадратната равенка

$$(4) \qquad a(y^2 - 2) + by + c = 0$$

Равенката (3) можеме да ја решиме само ако равенката (4) има реални корени, т.е. y_1, $y_2 \in \mathbf{R}$. Тогаш, ако y_1 и y_2 се корени на равенката (4), вредностите на x ги наоѓаме од равенките:

$$x + \frac{1}{x} = y_1 \quad \text{и} \quad x + \frac{1}{x} = y_2,$$

т.е. од вкупноста од квадратните равенки по x:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - y_1x + 1 = 0 \\ x^2 - y_2x + 1 = 0 \end{array}\right.$$

Оттука ги добиваме четирите корени на симетричната равенка од четврти степен, под услов $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$.

Значи, решавањето на равенката (3) се сведува, во општ случај, на решавање на три квадратни равенки: една за наоѓањето на помошната променлива y и две за одредување на x.

Пример 2. *Реши ја равенката* $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$.
Решение. Ја трансформираме равенката во видот

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0.$$

Да ставиме $x + \frac{1}{x} = y$; тогаш $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Ја добиваме равенката

$$6(y^2 - 2) + 5y - 38 = 0, \text{ т.е. } 6y^2 + 5y - 50 = 0,$$

чии корени се $y_1 = -\frac{10}{3}$, $y_2 = \frac{5}{2}$.

За одредување на x ги решаваме равенките

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3} \quad \text{и} \quad x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2},$$

т.е. квадратните равенки

$$3x^2 + 10x + 3 = 0 \quad \text{и} \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

Од нив наоѓаме: $x_1 = -3$, $x_3 = -\frac{1}{3}$, $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{1}{2}$.

4. Реши ја равенката $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$

Сега можеме да ги решиме и биномните равенки од петти степен.
Пример 3. *Реши ја равенката* $x^5 - 1 = 0$

Решение. Левата страна на равенката ја разложуваме на множители

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1),$$

па добиваме вкупност од две равенки

$$x - 1 = 0 \quad и \quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

Од првата равенка добиваме $x_1 = 1$. Втората равенка е симетрична равенка од четврти степен. Ја делиме со x^2 и ставајќи $x + \frac{1}{x} = y$, добиваме

$$y^2 + y - 1 = 0$$

од каде што

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

За одредување на x ги решаваме равенките

$$2x^2 + (1 - \sqrt{5})\,x + 2 = 0 \quad и \quad 2x^2 + (1 + \sqrt{5})\,x + 2 = 0$$

од каде што добиваме

$$x_{2,3} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \pm \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}\,i,$$

$$x_{4,5} = -\frac{\sqrt{5} + 1}{4} \pm \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}\,i$$

5. Реши ја равенката $x^5 + 1$.

Вежби

Реши ги равенките:

6. а) $4x^3 + 21x^2 + 21x + 4 = 0$ б) $3x^3 - 5x^2 - 5x + 3 = 0$

7. а) $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$ б) $3x^3 + x^2 - x - 3 = 0$

8. а) $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$ б) $2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$

9. Состави симетрична равенка чии корени се:

а) $-1, -2, -\frac{1}{2}$ б) $1, -3, -\frac{1}{3}$ в) $2, \frac{1}{2}, -2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}$

10. Разложи го на множители симетричниот полином:

$$2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2$$

11.* Ако $f(x)$ е симетричен полином од n-ти степен, тогаш $f(x) = x^n \cdot f(\frac{1}{x})$. Докажи!

12* Од квадратен картон со страна a од секое теме се исечени четири квадрати со страна x. Од преостанатиот картон е направена кутија. За која вредност на x волуменот на кутијата е $\frac{a^3}{16}$?

V. 5. Симетрични равенки – 2

Да ја решиме сега симетричната равенка од петти степен

$$(1) \qquad ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \qquad (a \neq 0)$$

Ги групираме членовите со еднакви коефициенти:

$$a(x^5 + 1) + bx(x^3 + 1) + cx^2(x + 1) = 0$$

Ако земеме предвид дека

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

тогаш равенката го добива видот

$$(x + 1)\,[\,a(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + bx(x^2 - x + 1) + cx^2] = 0$$

или

$$(x + 1)[ax^4 + (b - a)x^3 + (a - b + c)x^2 + (b - a)x + a] = 0$$

Оттука следува дека еден корен на равенката е $x_1 = -1$, а другите четири корени ги добиваме со решавање на симетричната равенка од четврти степен:

$$ax^4 + (b - a)x^3 + (a - b + c)x^2 + (b - a)x + a = 0$$

Забелешка. Во општ случај може да се докаже дека симетричната равенка од непарен степен $n = 2k + 1$ има еден корен $x_1 = -1$, а другите $n - 1 = 2k$ корени се добиваат со решавање на симетрична равенка од $(n - 1)$–ви степен. Ова својство не важи за симетричните равенки од парен степен $n = 2k$. Тие, пак, со смената $x + \frac{1}{x} = y$ се сведуваат на равенка чиј степен е двапати помал, т.е. $\frac{n}{2} = k$, која, во општ случај, не е симетрична. Покажи го тоа за симетрична равенка од шести степен.

Пример 1. *Да ја решиме равенката*

$$2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0$$

Решение. Според досега реченото, ќе имаме:

$$2(x^5 + 1) + 5x(x^3 + 1) - 13x^2(x + 1) = 0$$

$$2(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + 5x(x + 1)(x^2 - x + 1) - 13x^2(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 2 + 5x^3 - 5x^2 + 5x - 13x^2) = 0$$

$$(x + 1)(2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2) = 0$$

Значи, дадената равенка е еквивалентна со вкупноста равенки

$$x + 1 = 0 \quad \text{и} \quad 2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$$

Од $x + 1 = 0$ го добиваме првиот корен $x_1 = -1$, а за втората равенка имаме по ред:

$$2(x^4 + 1) + 3(x^3 + x) - 16x^2 = 0$$

$$2(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 3(x + \frac{1}{x}) - 16 = 0$$

Со смената $x + \frac{1}{x} = y$ ја добиваме равенката

$$2y^2 - 3y - 20 = 0,$$

чии корени се $y_1 = \frac{5}{2}$, $y_2 = -4$.

На крајот ги решаваме равенките:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \quad \text{и} \quad x + \frac{1}{x} = -4,$$

т.е.

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 4x + 1 = 0$$

од каде што добиваме

$$x_2 = 2, \; x_3 = \frac{1}{2}, \; x_4 = -2 + \sqrt{3}, \; x_5 = -2 - \sqrt{3}$$

Значи, корените на дадената равенка се:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = -2 + \sqrt{3}, x_5 = -2 - \sqrt{3}$$

1. Реши ја равенката

$$6x^5 + 11x^4 - 33x^3 - 33x^2 + 11x + 6 = 0$$

6. Равенката од петти степен од видот

(2) $$ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0 \qquad (a \neq 0)$$

ја решаваме на сличен начин како и симетричната равенка од петти степен. Очигледно, $x_1 = 1$ е решение на оваа равенка. Оваа равенка често се наречува *косо симетрична равенка* од петти степен

Пример. 2 *Реши ја равенката*

$$12x^5 + 44x^4 + 33x^3 - 33x^2 - 44x - 12 = 0$$

Решение. Со разложување на левата страна на множители, имаме:

$$12(x^5 - 1) + 44x(x^3 - 1) + 33x^2(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(12x^4 + 56x^3 + 89x^2 + 56x + 12) = 0$$

Оттука $x_1 = 1$. Другите четири решенија ги добиваме со решавање на равенката

$$12x^4 + 56x^3 + 89x^2 + 56x + 12 = 0, \text{ т.е.}$$

$$12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 56\left(x + \frac{1}{x}\right) + 89 = 0$$

Со смената $x + \frac{1}{x} = y$, ја добиваме равенката

$12(y^2 - 2) + 56y + 89 = 0$, т.е. $12y^2 + 56y + 65 = 0$,

чии корени се $y_1 = -\frac{5}{2}$, $y_2 = -\frac{13}{6}$.

За одредување на x ги решаваме равенките

$x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$ и $x + \frac{1}{x} = -\frac{13}{6}$,

од каде што добиваме: $x_2 = -2$, $x_3 = -\frac{1}{2}$, $x_4 = -3$, $x_5 = -\frac{1}{3}$.

2. Реши ја равенката $2x^5 - 15x^4 + 37x^3 - 37x^2 + 15x - 2 = 0$.

Равенката од четврти степен од видот

(3) $$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0 \qquad (a \neq 0)$$

ја решаваме на сличен начин како и симетричната равенка од четврти степен. Кај оваа равенка члeновите еднакво оддалечени од почетокот и крајот пред парните степени x се еднакви, а пред непарните се спротивни броеви. Овие равенки ги решаваме со смената $x - \frac{1}{x} = y$.

Пример 3. *Реши ја равенката* $6x^4 + 25x^3 + 12x^2 - 25x + 6 = 0$.

Решение. Ја трансформираме равенката во видот

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 25\left(x - \frac{1}{x}\right) + 12 = 0$$

Од смената $x - \frac{1}{x} = y$ следува $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$,

па равенката се сведува на квадратната равенка

$$6(y^2 + 2) + 25y + 12 = 0, \text{ т.е. } 6y^2 + 25y + 24 = 0,$$

чии корени се $y_1 = -\frac{3}{2}$ и $y_2 = -\frac{8}{3}$.

За одредување на x ги решаваме равенките

$$x - \frac{1}{x} = -\frac{3}{2} \text{ и } x - \frac{1}{x} = -\frac{8}{3},$$

од каде што добиваме: $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -3$, $x_4 = \frac{1}{3}$.

Забележуваш дека во овој случај корените се два реципрочни броеви, но со спротивни знаци.

3. Реши ја равенката $2x^4 - 11x^3 + 8x^2 + 11x + 2 = 0$

Равенката од четврти степен во видот

$$(4) \qquad ax^4 + bx^3 \pm bx - a = 0 \qquad (a \neq 0)$$

не можеме да ја решиме со смена, како претходната равенка (3). Оваа равенка ја решаваме со разложување на нејзината лева страна на множители, па добиваме:

$$a(x^4 - 1) + bx(x^2 \pm 1) = 0,$$

т.е.

$$(x^2 \pm 1)(ax^2 + bx \mp a) = 0$$

Пример 4. *Реши ја равенката* $3x^4 + 10x^3 - 10x - 3 = 0$.

Решение. Ја трансформираме равенката вака:

$$3(x^4 - 1) + 10x(x^2 - 1) = 0,$$

$$3(x^2 - 1)(x^2 + 1) + 10x(x^2 - 1) = 0,$$

$$(x^2 - 1)(3x^2 + 3 + 10x) = 0$$

Според таа, равенката е еквивалентна со вкупноста равенки

$$x^2 - 1 = 0 \text{ и } 3x^2 + 10x + 3 = 0,$$

од каде што: $x_{1,2} = \pm 1$, $x_3 = -3$, $x_4 = -\frac{1}{3}$.

4. Реши ја равенката $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 = 0$.

В е ж б и

Реши ги равенките:

5. $6x^5 - 29x^4 + 27x^3 + 27x^2 - 29x + 6 = 0$
6. $12x^5 - 16x^4 - 37x^3 + 37x^2 + 16x - 12 = 0$
7. $x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = 0$
8. $3x^4 + 8x^3 + 8x - 3 = 0$
9. За кој израз велиме дека е ирационален?
10. Одреди за кои реални броеви x има смисла изразот:
а) $\sqrt{2x - 3}$ б) $\sqrt[3]{1 - x}$ в) $\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 5}$

V.6. Ирационални равенки

Досега научи да решаваш линеарни, квадратни и равенки што се сведуваат на нив. Во оваа лекција ќе се запознаеш како се решаваат одделни видови равенки, кај кои променливата е и под знак на корен.
Такви се на пример, равенките:
$\sqrt{x - 2} = 3$, $\sqrt{x^2 - 4x} = x + 3$, $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 4} = 5$ и слични.

Ваквите равенки се викаат **ирационални равенки**.

Д	**Равенката, во која барем еден нејзин член е ирационален израз во однос на променливата, се вика ирационална равенка.**

Значи, ако $f(x)$ е ирационален израз, тогаш равенката

$$f(x) = 0$$

е ирационална равенка.

Ирационални се и равенките:

$$\sqrt[3]{2x-3} = 7, \quad \sqrt{x+\sqrt{x-1}} = 2, \quad \sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x} + 3 = 0,$$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = 0, \quad \sqrt{x-9} = \frac{36}{\sqrt{x-9}} - \sqrt{x}$$

Равенката, пак $x^2 - \sqrt{3} \cdot x + 7 = 0$ не е ирационална, бидејќи променливата x не е под знак на коренот. Таа е квадратна равенка со реални коефициенти.

1. Одреди кои од следниве равенки по x се ирационални:

а) $\sqrt{1-x} = 11$ б) $x\sqrt[5]{9} - 6x = 1$

в) $x - \sqrt[3]{x-a} = 4$ г) $x^2 - 5\sqrt{a} = 1 + x$

д) $2x^3 - 3\sqrt{x^2} - 7 = 0.$

б Ирационалните равенки ги решаваме само во множеството на реалните броеви. Затоа, на пример, равенката $\sqrt{x-3} = -1$ нема решение, бидејќи нејзината лева страна е ненегативен број, т.е. $\sqrt{x-1} \geqslant 0$, додека равенката $\sqrt[3]{x-3} = -1$ има решение (таа е бројот 2).

2. Објасни зошто немаат решение следниве равенки:

а) $2 + \sqrt{x+1} = 0$ б) $\sqrt{x} + \sqrt{x+2} = -2$

На пример, во равенката

$$(*) \qquad \sqrt{2x+3} + \sqrt[3]{x-2} = 4$$

квадратниот корен $\sqrt{2x+3}$ добива реални вредности само при $2x + 3 \geqslant 0$, т.е. $x \geqslant -\frac{3}{2}$, а кубниот корен $\sqrt[3]{x-2}$ за сите реални броеви.

Велиме дека *дефиниционата област* на $\sqrt{2x+3}$ е множеството $\mathbf{D}_1[-\frac{3}{2}, +\infty)$ а на $\sqrt[3]{x-2}$ е множеството $\mathbf{D}_2 = \mathbf{R}$. Пресекот на овие две множества, множеството

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 \cap \mathbf{D}_2 = [-\frac{3}{2}, +\infty) \cap (-\infty, +\infty) = [-\frac{3}{2}, +\infty)$$

е *дефиниционата област* на равенката (*)

Пример 1. *Одреди ја дефиниционата област на равенката*

$$\sqrt{x-4} + \sqrt{3-x} = 15.$$

Решение. Дефиниционата област ја наоѓаме од системот неравенки

$$\begin{cases} x - 4 \geqslant 0 \\ 3 - x \geqslant 0 \end{cases}$$

Првата неравенка во системот има решение $x \geqslant 4$, а втората $x \leqslant 3$
Според тоа,

$$D = [4, +\infty) \cap (-\infty, 3] = \varnothing$$

3. Одреди ја дефиниционата област на равенките:

а) $\sqrt{2x} + \sqrt{x+2} = 0$ б) $\dfrac{1}{\sqrt{x-5}} = \sqrt{7-x}$;

в) $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-5} = \sqrt[3]{1-4x}$

При решавање на ирационалните равенки решенијата треба да ги бараме во нејзината дефинициона област. Ако $D = \varnothing$, тогаш дадената равенка нема решение. Затоа, пред да пристапиме кон решавање на дадена ирационална равенка, пожелно е да се увериме дека нејзината дефинициона област не е празно множество.

4. Покажи дека следниве равенки немаат решение:

а) $\sqrt{x-8} + 3\sqrt{1-x} = 2$ б) $\sqrt{x-4} + \sqrt{4-x} = 1$

b. **Сведување на ирационални равенки на рационални.** Основниот метод за решавање на ирационалните равенки се состои во ослободувањето од корените во нив, со што тие се сведуваат на некоја рационална равенка (линеарна, квадратна, биквадратна, или друга). Со таа цел двете страни на равенката ги степенуваме со ист показател. Повторувајќи ја оваа постапка конечен број пати, дадената ирационална равенка се сведува на рационална равенка.

Се поставува прашањето: дали со ваквата постапка се добива равенка што е еквивалентна на дадената? Одговорот е одречен.

Ќе покажеме дека, ако бројот n е парен, тогаш степенувањето на двете страни на една равенка со степен n не е еквивалентна трансформација.

Доволно е тоа да го докажеме за $n = 2$.

T

Ако двете страни на равенката

$$(1) \quad f(x) = \varphi(x)$$

ги квадрираме, ќе ја добиеме равенката

$$(2) \quad [f(x)]^2 = [\varphi(x)]^2$$

која, во општ случај, не е еквивалентна на дадената равенка.

Доказ. Имаме

$$[f(x)]^2 = [\varphi(x)]^2 \Leftrightarrow [f(x)]^2 - [\varphi(x)]^2 = 0 \Leftrightarrow [f(x) - \varphi(x)][f(x) + \varphi(x)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) - \varphi(x) = 0 \\ f(x) + \varphi(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = \varphi(x) \\ f(x) = -\varphi(x) \end{array}\right.$$

Значи равенката (2) е задоволена освен за решенијата на равенката (1) уште и за решенијата на равенката

$$(3) \qquad f(x) = -\varphi(x)$$

Според тоа, равенката (2) не е еквивалентна со равенката (1). Во овој случај велиме дека равенката (2) е **последица** од равенката (1), и пишуваме

$$f(x) = \varphi(x) \Rightarrow [f(x)]^2 = [\varphi(x)]^2 \quad \blacktriangle$$

Од оваа теорема заклучуваме дека треба да провериме дали секој корен на добиената рационална равенка е корен на појдовната ирационална равенка.

Степенувањето, пак на равенките на трет степен (и воопшто на непарен степен) е еквивалентна трансформација.

5. Во множеството на реалните броеви, равенките

$$f(x) = g(x) \text{ и } [f(x)]^3 = [g(x)]^3$$

се еквивалентни. Докажи!

Вежби

6. Кои од следниве равенки се ирационални:

а) $\sqrt{x^2 - 5x + 3} = x - 4$ б) $x^2 - 4x + \sqrt{7} = 0$

в) $x^x + \sqrt{x} - 7 = 0$ г) $\sqrt{x^2} = 3x - 5$

д) $\sqrt{x} - \sin x + 1 = 0$ ѓ) $x^{1/2} - 3x + 4 = 0$

7. Одреди ја дефиниционата област на равенките:

а) $\sqrt{x - 1} + \sqrt{-x - 4} = 5$ б) $\sqrt{x} + \sqrt{-x} + \frac{1}{x} = 5$

в) $\sqrt{\frac{3 - 2x}{5 - x}} = \frac{1}{2}$ г) $\sqrt{6 + x - x^2} + \sqrt{x + 1} = 2$

8. Докажи дека следниве равенки немаат решение:

а) $\sqrt{x - 3} \cdot \sqrt{3 - x} = 5$ б) $\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 3} = 0$

9.* Одреди ги напамет решенијата на равенките:

а) $\sqrt{(x - 1)(x + 2)} + \sqrt{x - 1} = 0$ б) $\sqrt{x(x^2 - 4)} + \sqrt{x(x + 2)} = 0$

10. Реши ги равенките:

а) $\sqrt{x} = 4$ б) $\sqrt{x - 1} = 3$ в) $\sqrt{x + 1} = 2$

V. 7. Решавање на ирационални равенки – 1

Преку неколку примери ќе покажеме како се решаваат одделни ирационални равенки што се сведуваат на линеарни или квадратни равенки.

а. За почеток ќе ги разгледаме ирационалните равенки кои содржат еден корен. Таквите равенки можат да се доведат во видот

$$\sqrt[n]{f(x)} = \varphi(x)$$

Со степенување на двете страни од равенката со степен n дадената ирационална равенка се сведува на рационална равенка.

Пример 1. *Реши ја равенката* $\sqrt{5x+1} = 4$

Решение. Дефиниционата област на равенката е множеството $D = [-\frac{1}{5}, +\infty)$. Со квадрирање на двете страни од дадената равенка, ја добиваме линеарната равенка $5x+1=16$, а оттука $x = 3$. Бидејќи $3 \in D$, следува дека $x = 3$ може да е решение на дадената равенка. Со проверка утврдуваме дека $x = 3$ е решение на равенката.

1. Реши ги равенките:

а) $\sqrt{4x-3} = 5$ б) $3 + \sqrt{13-9x} = 10$

Пример. 2. *Реши ја равенката* $x - \sqrt{x-1} = 3$.

Решение. Дефиниционата област е множеството $D = [1, +\infty)$. За да можеме да се ослободиме од коренот со едно квадрирање, го издвојуваме квадратниот корен:

$$x - 3 = \sqrt{x-1}$$

Сега со квадрирање, добиваме:

$$(x-3)^2 = x - 1$$

Ја доведуваме равенката во нормален вид

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

од каде што добиваме: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$.

Бидејќи и двата корени припаѓаат на множеството D за секој од нив ќе извршиме проверка.

За $x_1=2$ левата страна на равенката е еднаква на

$$x_1 - \sqrt{x_1 - 1} = 2 - \sqrt{2-1} = 2 - 1 = 1!$$

а десната на 3, па $x_1=2$ не е решение на дадената ирационална равенка.

За $x_2 = 5$ левата страна на равенката е еднаква на

$$x_2 - \sqrt{x_2 - 1} = 5 - \sqrt{5-1} = 5 - 2 = 3,$$

а бидејќи и десната страна е еднаква на 3, следува дека $x_2 = 5$ е решение на дадената равенка.

Според тоа, ирационалната равенка $x - \sqrt{x-1} = 3$ има само едно решение: $x = 5$.

2. Реши ги равенките:

а) $x + \sqrt{8-x} = 2$ б) $x - \sqrt[3]{x^3 - 4x - 7} = 1$

Пример 3. *Реши ја равенката* $\sqrt{3x+1} = x - 2$.

Решение. Дефинициoната област е множеството $\mathbf{D} = \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

Со квадрирање добиваме

$$3x + 1 = (x-2)^2 \quad \text{т. е.} \quad x^2 - 7x + 3 = 0,$$

а оттука

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{37}}{2}$$

Очигледно, проверката дали броевите x_1 или x_2 се корени и на ирационалната равенка, во овој случај не е лесна (увери се во тоа сам).

Затоа, ако сакаме без проверка да утврдиме дали добиените вредности за x се корени на ирационалната равенка, потребно е во текот на степенувањето да вршиме ограничување за x. Во врска со тоа ќе го користиме следново својство:

Равенката $\sqrt{f(x)} = \varphi(x)$, во множеството на реалните броеви, е еквивалентна со системот

$$\begin{cases} f(x) = [\varphi(x)]^2 \\ \varphi(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

Навистина, равенката $f(x) = [\varphi(x)]^2$ е еквивалентна со вкупноста од две равенки:

$$\sqrt{f(x)} = \varphi(x) \quad \text{и} \quad \sqrt{f(x)} = -\varphi(x)$$

Но при условот $\varphi(x) > 0$, втората равенка нема решение, бидејќи $\sqrt{f(x)} \geqslant 0$ (по дефиницијата за аритметичкиот корен), а при $\varphi(x) = 0$ двете равенки се совпаѓаат.

Во нашиов случај, од условот $x - 2 \geqslant 0$, т.е. $x \geqslant 2$, следува дека само $x_1 = \dfrac{7+\sqrt{37}}{2}$ е корен на ирационалната равенка, додека $x_2 = \dfrac{7-\sqrt{37}}{2}$ не е корен.

Значи, дадената равенка има еден корен: $x = \dfrac{7+\sqrt{37}}{2}$.

3. Реши ги равенките:

а) $3\sqrt{x+2} = 2x - 5$ б) $\sqrt{21-4x} = 2x - 7$

Ако равенката има два корена што ја содржат променливата, тогаш нејзиното решавање е посложено. Таквите равенки се сведуваат на рационални – со две последователни степенувања.

Пример 4. *Реши ја равенката* $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = 2$.

Решение. Дефиниционата област на равенката ја добиваме од условите $2x+1 \geqslant 0$ и $x-3 \geqslant 0$. Следствено, $\mathbf{D} = [3, +\infty)$.

Издвојуваме само еден корен од една страна на равенката:

$$\sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-3}.$$

Со квадрирање на двете страни добиваме:

$$2x+1 = 4 + 4\sqrt{x-3} + x - 3,$$

т. е.

$$4\sqrt{x-3} = x.$$

Оваа равенка е пак ирационална, но со еден корен. Со повторно квадрирање, ја добиваме равенката

$$16(x-3) = x^2, \quad \text{т.е.} \quad x^2 - 16x + 48 = 0,$$

чии корени се: $x_1 = 4$, $x_2 = 12$.

Со проверка се уверуваме дека x_1 и x_2 се решенија на ирационалната равенка.

Дадената равенка можеме да ја решиме и без издвојување на еден корен, но во тој случај постапката е посложена. Реши ја равенката на тој начин!

4. Реши ја равенката:

а) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x} = 1$ б) $\sqrt{2x+11} + 2\sqrt{8-x} = 9$

Равенките од видот $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$ со едно степенување, со показател n, се сведуваат на рационалната равенка $f(x) = g(x)$.

5. Реши ги равенките:

а) $\sqrt[4]{3x-5} = \sqrt[4]{9-4x}$ б) $\sqrt[3]{x^2-3x+7} = \sqrt[3]{10-x}$

Да ги разгледаме сега ирационалните равенки со три, односно четири корени.

Пример 5. *Реши ја равенката*

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = \sqrt{7x+4}$$

Решение. Двете страни на равенката се ненегативни, па по квадрирање добиваме

$$\begin{cases} x + 1 + 2\sqrt{(x+1)(2x+3)} + 2x + 3 = 7x + 4 \\ x \geq -1,\ x \geq -\frac{3}{2},\ x \geq -\frac{4}{7}, \end{cases}$$

или по средувањето

$$\begin{cases} \sqrt{(x+1)(2x+3)} = 2x \\ x \geq -1,\ x \geq 0 \end{cases}$$

Со повторно квадрирање, и средување, добиваме

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x - 3 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Корените на квадратната равенка се $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$, од кои само x_2 го задоволува неравенството $x \geq 0$. Според тоа, равенката има еден корен: $x = 3$.

6. Реши ги равенките:

а) $2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} = \sqrt{5(x-2)}$

б) $\sqrt{8-x} + \sqrt{5+x} = \sqrt{9+5x} + \sqrt{4-5x}$

Вежби

Реши ги равенките:

7. а) $\sqrt[3]{x+14} = 3$ б) $\sqrt[4]{3x-7} = 2$ в) $\sqrt{-x-5} = 4$

8. а) $x + \sqrt{x+1} = 11$ б) $\sqrt{2x^2+17} = x + 3$

9. а) $\sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} = 4$ б) $2\sqrt{3x+2} - \sqrt{6x} = 2$

10. а) $\sqrt{4x+9} - \sqrt{7x+4} - \sqrt{11x+1} = 0$

б) $\sqrt{x+6} + \sqrt{6x-2} = \sqrt{2x+3} + \sqrt{5x+1}$

11. а) $\frac{3x-9}{\sqrt{x+3}} = \sqrt{x+3}$ б) $\frac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+2}} = \frac{3\sqrt{x-1}}{\sqrt{3x-2}}$.

V. 8. Решавање на ирационални равенки –2

а. Честопати при решавање на ирационални равенки го применуваме методот на воведување на нова променлива. Да го илустрираме тоа со неколку примери.

За почеток, ќе покажеме уште еден начин на решавање на ирационални равенки што содржат два корени.

Пример 1. *Реши ја равенката* $3\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 7.$

Решение. Воведуваме нова променлива со смената $\sqrt{x-2} = y$, $y \geq 0$. Тогаш $x - 2 = y^2$, а оттука $x = y^2 + 2$, а $x + 3 = y^2 + 5$, па ја добиваме равенката

$$3\sqrt{y^2+5} - y = 7,$$

којашто содржи еден корен. Понатаму имаме:

$$3\sqrt{y^2+5} = y + 7$$
$$9(y^2+5) = y^2 + 14y + 49$$
$$4y^2 - 7y - 2 = 0,$$

од каде што добиваме $y_1 = -\frac{1}{4}$, $y_2 = 2$.

Условот $y \geq 0$ го задоволува само коренот y_2.
Тогаш $x = y^2+2 = y_2^2 + 2 = 2^2 + 2 = 6$.
Според тоа, равенката има само еден корен $x = 6$.

1. Со воведување нова променлива, реши ја равенката:

   а) $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+11} = 8$ б) $\sqrt{x+3} + \sqrt{22-x} = 7$

б. Равенката од видот

$$a\sqrt[n]{[f(x)]^2} + b\sqrt[n]{f(x)} + c = 0$$

со смената $\sqrt[n]{f(x)} = y$ се сведуваат на квадратна равенка по y.

Пример 2. *Реши ја равенката* $\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} + 6 = 0$

Решение. Со смената $\sqrt[3]{x} = y$ (тогаш $\sqrt[3]{x^2} = y^2$) равенката се сведува на квадратната равенка:

$$y^2 - 5y + 6 = 0,$$

чии корени се $y_1 = 2$ $y_2 = 3$. Но $x = y^3$, следствено:

$$x_1 = 8, \qquad x_2 = 27$$

2. Реши ја равенката:

   а) $\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x} + 3 = 0$ б) $\sqrt{x+7} + 2 = 3\sqrt[4]{x+7}$

в. Равенката од видот

$$ax^2 + bx + c_1 + \sqrt{ax^2 + bx + c_2} = d$$

ја решаваме со смената $ax^2 + bx + c_2 = y$

Пример 3. *Реши ја равенката*

$$x^2 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 7$$

Решение. Ако ставиме $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = y$, $y \geqslant 0$, тогаш $x^2 - 3x + 5 = y^2$, $x^2 - 3x = y^2 - 5$, па равенката го добива видот

$$y^2 - 5 + y = 7$$

Оттука $y_1 = -4$, $y = 3$. Но условот $y \geqslant 0$ го задоволува само коренот y_2, па следува

$$x^2 - 3x + 5 = 9$$

од каде што: $x_1 = -1$, $x_2 = 4$. Со проверка утврдуваме дека двата корени ја задоволуваат дадената равенка.

3. Реши ги равенките:
   а) $x^2 + 7x + \sqrt{x^2 + 7x + 18} = 24$
   б) $(x - 5)^2 + \sqrt{x^2 - 10x + 32} = 13$

г. Равенката од видот

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \pm \sqrt{a_1x^2 + b_1x + c_1} = d$$

по ослободување од корените се сведува на равенката од четврти степен, која засега не знаеме како се решава. Но ако $a = a_1$ тогаш равенката можеме да ја решиме.

Пример 4. *Реши ја равенката*

$$\sqrt{x^2 + 4x - 3} - \sqrt{x^2 - 2x + 4} = 1$$

Решение. Ја множиме равенката со ирационалниот израз – конјугиран на нејзината лева страна, т.е. со $\sqrt{x^2 + 4x - 3} + \sqrt{x^2 - 2x + 4}$, па добиваме

$$(x^2 + 4x - 3) - (x^2 - 2x + 4) = \sqrt{x^2 + 4x - 3} + \sqrt{x^2 - 2x + 4}$$

од каде што

$$\sqrt{x^2 + 4x - 3} + \sqrt{x^2 - 2x + 4} = 6x - 7$$

Ако го собереме последното равенство со даденото, и средиме, добиваме

$$\sqrt{x^2 + 4x - 3} = 3x - 3$$

Со квадрирање добиваме

$$x^2 + 4x - 3 = 9x^2 - 18x + 9 \quad \text{т.е.} \quad 4x^2 - 11x + 6 = 0,$$

од каде што: $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = 2$.

Со проверка утврдуваме дека корен на равенката е само бројот $x = 2$.

4. Реши ја равенката

$$\sqrt{x^2+3x-3}+\sqrt{x^2-2x+2}=2$$

При решавање на равенката од видот

$$\sqrt[3]{ax+b}+\sqrt[3]{cx+d}=e$$

ја користиме формулата

$$(a\pm b)^3=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b)$$

Пример 5. *Реши ја равенката*

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}=2$$

Решение. Ги кубираме двете страни на равенката и добиваме

$$x+1+7-x+3\sqrt[3]{(x+1)(7-x)}\;(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x})=8$$

или

$$3\sqrt[3]{(x+1)(7-x)}\cdot(2)=0$$

од каде што $x_1=-1,\ x_2=7$.

Бидејќи кубирањето е еквивалентна трансформација, нема потреба да проверуваме дали добиените вредности за x се корени на појдовната равенка.

Следствено, $x_1=-1$, $x_2=7$ се корени на ирационалната равенка.

5. Реши ја равенката $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=0$

Да решиме сега еден пример на ирационална равенка со параметри.

Пример 6. *Реши ја равенката*

$$\frac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x+2a}+\sqrt{x-2a}}=\frac{x}{2a}$$

Решение. Очигледно е дека $a\neq 0$, $x\geqslant 2|a|$.

Ја трансформираме левата страна на равенката:

$$\frac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x+2a}+\sqrt{x-2a}}=\frac{(\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a})^2}{(x+2a)-(x-2a)}=$$

$$=\frac{x+2a+x-2a-2\sqrt{x^2-4a^2}}{x+2a-x+2a}=\frac{x-\sqrt{x^2-4a^2}}{2a}$$

Сега равенката ја запишуваме во видот

$$\frac{x-\sqrt{x^2-4a^2}}{2a}=\frac{x}{2a},$$

а оттука

$x-\sqrt{x^2-4a^2}=x$, т.е. $\sqrt{x^2-4a^2}=0$

Корените на последната равенка се $x_1 = 2a$, $x_2 = -2a$.
Проверка: i) $x_1 = 2a$, левата страна е:

$$\frac{\sqrt{2a+2a} - \sqrt{2a-2a}}{\sqrt{2a+2a} + \sqrt{2a-2a}} = \frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{4a}} = 1,$$ ако $a > 0$; (ако $a < 0$

левата страна нема смисла), а десната: $\frac{2a}{2a} = 1$.
Значи, ако $a > 0$, тогаш $x = 2a$ е корен на равенката, а при $a < 0$, не е корен.

ii) $x_2 = -2a$, левата страна е:

$$\frac{\sqrt{-2a+2a} - \sqrt{-2a-2a}}{\sqrt{-2a+2a} + \sqrt{-2a-2a}} = \frac{-\sqrt{-4a}}{\sqrt{-4a}} = -1,$$ ако $a < 0$

(ако $a > 0$ левата страна нема смисла), а десната: $\frac{-2a}{2a} = -1$.

Значи, ако $a < 0$, тогаш $x = -2a$ е корен на равенката, а при $a > 0$, не е корен.

Конечно: Ако $a > 0$, тогаш $x = 2a$ е корен на равенката; а ако $a < 0$, тогаш $x = -2a$ е корен на равенката.

Следствено, корен на равенката е бројот $x = 2\,|a|$.

6* Реши ја равенката $\sqrt{5a+x} + \sqrt{5a-x} = \frac{12a}{\sqrt{5a-x}}$.

Вежби

Реши ги равенките

7. $x\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x} + 4 = 0$
8. $\sqrt{5\sqrt[3]{x}} + \sqrt{5 - \sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{x}$
9. $x^2 - 4x - 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$
10. $(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$
11. $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7$
12. $\sqrt[3]{5x+7} - \sqrt[3]{5x-12} = 1$
13.* $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$
14.* $\sqrt[4]{x+8} - \sqrt[4]{x-8} = 2$. (Стави $\sqrt[4]{x-8} = y$)

$\boxed{15.}$ Реши го со методот на замена системот равенки

а) $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ y = x + 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 7y = 19 \\ 4x - y = 17 \end{cases}$

V. 9. Систем од една линеарна и една квадратна равенка со две променливи

Веќе научи да решаваш систем од две (три) линеарни равенки со две (три) променливи. Сега ќе покажеме како се решава систем од една линеарна и една квадратна равенка со две променливи.

Равенката од видот

$$(1) \qquad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

е **општ вид** на квадратна равенка со две променливи, при што барем еден од коефициентите пред квадратните членови a, b или c е различен од нула. Решение на секоја равенка со две променливи, се броевите па според тоа равенката (1) е секоја подредена двојка броеви што ја задоволува равенката.

Според тоа, системот

$$(2) \qquad \begin{cases} mx + ny + p = 0 \\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \end{cases}$$

е **општ вид** на систем од една линеарна и една квадратна равенка со две променливи.

Овој систем го решаваме со методот на замена, имено, од линеарната равенка ја изразуваме едната од променливите и ја заменуваме во квадратната.

Да го покажеме тоа на следниве примери:

Пример 1. *Реши го системот равенки*

$$\begin{cases} 3x - y - 5 = 0 \\ 2x^2 - xy - 3x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Решение. Ја изразуваме променливата y од првата равенка и добиваме

$$(*) \qquad y = 3x - 5$$

Со замена на овој израз за y во втората равенка ја добиваме квадратната равенка по x:

$$2x^2 - x(3x - 5) - 3x + (3x - 5) - 1 = 0$$

т.е.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

чии корени се: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Од смената (*) ги добиваме соодветните вредности за y:

$$y_1 = 3 \cdot x_1 - 5 = 1, \quad y_2 = 3x_2 - 5 = 4$$

Значи, решенија на системот се подредените двојки броеви (2, 1) и (3, 4).

Дека се тоа решенија на дадениот систем, се уверуваме со директна проверка. Секое решение треба да ги задоволува и двете равенки. За првото решение имаме:

$$3x_1 - y_1 = 3 \cdot 2 - 1 - 5 = 6 - 6 = 0,$$

$$2x_1^2 - x_1y_1 - 3x_1 + y_1 - 1 = 2 \cdot 4 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 - 1 = 8 - 2 - 6 = 0$$

За второто решение провери сам.

1. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

6. Системот равенки од видот

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$$

можеме да го решиме на поедноставен начин, користејќи ги својствата на квадратната равенка, т.е. Виетовите формули. Да го покажеме тоа на еден пример.

Пример 2. *Реши го системот равенки*

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = -10 \end{cases}$$

Решение. Воведуваме помошна променлива z, чии корени се x и y. Тогаш од условот на задачата и формулите на Виет ја добиваме квадратната равенка по z:

$$z^2 - 3z - 10 = 0,$$

чии корени се $z_1 = -2,\ z_2 = 5$.

Следствено, решенија на дадениот систем равенки се подредените двојки $(-2, 5)$ и $(5, -2)$.

2. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -8 \end{cases}$$

б Системот равенки од видот

$$\begin{cases} x - y = a \\ xy = b \end{cases}$$

е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} x + (-y) = a \\ x(-y) = -b \end{cases}$$

со што се сведува на претходниот случај

3. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x - y = 8 \\ xy = 20 \end{cases}$$

Бидејќи $\begin{cases} ax + by = c \\ xy = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = c \\ (ax)(by) = abd \end{cases}$

тоа значи дека и за овој вид системи можеме да ги користиме Виетовите формули.

4. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ xy = 35 \end{cases}$$

Упатство. Реши ја квадратната равенка $z^2 + z - 210 = 0$

г Да решиме сега еден пример, а потоа добиениот резултат да го интерпретираме графички.

Пример 3. *Реши го системот равенки*

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 2x^2 - 8x - y + 6 = 0 \end{cases}$$

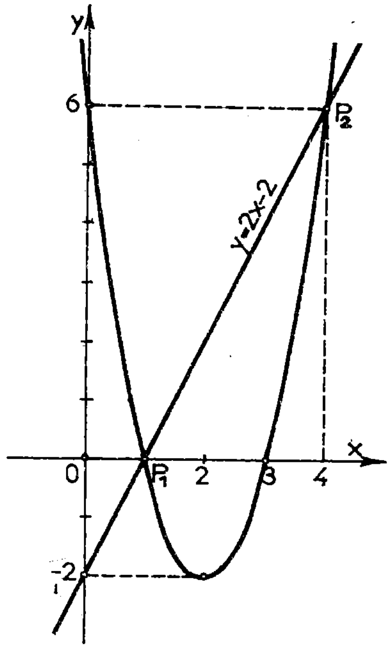
Решение. Од првата равенка имаме $y = 2x - 2$, па со замена во втората равенка добиваме

$$2x^2 - 8x - (2x - 2) + 6 = 0$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$

од каде што $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, а потоа и $y_1 = 0$, $y_2 = 6$.

Значи, решенија на системот се подредените двојки броеви (1, 0) и (4, 6).

Графикот на линеарната равенка е правата $y = 2x - 2$, а на квадратната равенка е параболата $y = 2x^2 - 8x + 6$ (црт. 1), а решенијата на системот се координатите на нивните пресечни точки P_1 и P_2.



црт. 1

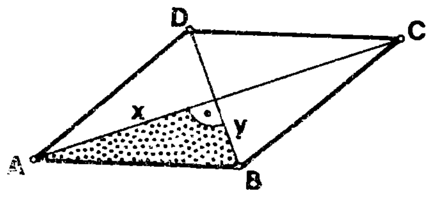
Значи, решавајќи го дадениот систем, ние всушност ги наоѓаме координатите на пресечните точки на графиците на линеарната и квадратната равенка.

Дали секогаш постои овој пресек?

5. Најди го пресекот на параболата $y = x^2 - 6x + 5$ и правата $y = x - 1$.

9. Освен за барање на пресечните точки на двата графика, со системите равенки можеме да решиме голем број задачи. Да наведеме еден пример од геометријата.

Пример 4. *Пресметај ја плоштината на ромб со страна 25, ако неговите дијагонали се разликуваат за 34.*



црт. 2

Решение. Ако со x и y ги означиме полудијагоналите (црт.2), тогаш

$$\begin{cases} x - y = 17 \\ x^2 + y^2 = 625 \end{cases}$$

Од првата равенка имаме $y = x - 17$, па со замена во втората равенка добиваме

$x^2 + (x - 17)^2 = 625$, т.е. $x^2 - 17x - 168 = 0$,

од каде што: $x_1 = -7$, $x_2 = 24$. Задоволува само позитивната вредност на x, па оттука $y = 7$.

Значи, дијагоналите на ромбот се 48 и 14, а неговата плоштина е

$$P = \frac{48 \cdot 14}{2} = 336$$

6. Пресметај ги страните на правоаголникот, со периметар 36 и плоштина 72.

Вежби

7. Реши го системот равенки:

а) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ xy = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x^2 - 5xy + y^2 - 3y + 6 = 0 \end{cases}$

8. Најди го пресекот на правата $y = x + 1$ и параболата $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

9.* За која вредност на периметарот c правата $y = 2x$ ја допира параболата $y = x^2 + c$?

Нема решени проблеми, има само помалку или повеќе решени проблеми.

Х. Поенкаре

ОДГОВОРИ УПАТСТВА И РЕШЕНИЈА

I СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

I. 1.

1. *б, в* **2.** а) $\mathbf{M} = \{1, 2, 3\}$, б) (1, 6), (6, 1), (3, 2), (2, 3). **3.** а) (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2) б) (3, 2), (6, 1)

4. а) невозможна, б) возможна, в) невозможна **5.** а) да, б) да **6.** б), в) **7.** а) невозможна, б) возможна за вредности на $x > 2$; в) возможна за вредности на $x < 3$. **8.** Исказни функции се а) и б) **9.** $\mathbf{M} = \{3, 6, 9\}$ **10.** б) равенка (бидејќи може да се запише и вака $x = y + 1$), в) е неравенка;

11. $\{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ **12.** а) идентитет, $\mathbf{M} = \mathbf{N}$,б) возможна $\mathbf{M} = \mathbf{Z}$,в) $\mathbf{M} = \varnothing$. **13.** а) $x \neq 1$ и $y \neq 0$, б) $x \neq -1$ и $x \neq \frac{1}{3}$ **14.** $(1, -\frac{2}{3})$, $(-1, -2)$ **15.** а) да, б) да, в) да, г) не

I. 2.

1. $x - 7y - 8 = 0$ $(a = 1,\ b = -7,\ c = -8)$ **2.** (2, 4), (– 2, 6), (14, – 2), бесконечно. **3.**

а) $\mathbf{M} = \left\{\left(a, \frac{3a-3}{5}\right) | a \in \mathbf{R}\right\}$ (1, 0), $\left(0, -\frac{3}{5}\right)$ $\left(-1, -\frac{6}{5}\right)$

б) $\mathbf{M} = \left\{\left(a, \frac{29-7a}{15}\right) | a \in \mathbf{R}\right\}$;

$\left(0, \frac{29}{15}\right)$, $\left(1, \frac{22}{15}\right)$, $\left(-1, \frac{36}{15}\right)$ **5.** а) $x + 10y + 1 = 0$, б) $7x - 10y + 42 = 0$

6. а) $\mathbf{M} = \{(a, -a + 12) \mid a \in \mathbf{R}\}$, (1, 11), (2, 10), (– 1, 13)

б) $\mathbf{M} = \left\{\left(a, \frac{6-7a}{15}\right) | a \in \mathbf{R}\right\}$, $\left(1, -\frac{1}{15}\right)$, $\left(0, \frac{6}{15}\right)$

9. $b = 4$ **10.** $a = -5$

I. 3.

1. а) $9x - 25y = 13 \wedge 3x + 5y = 39$ б) $4x + 3y = -13 \wedge 10x + 24y = -7$ **2.**

а) $4x + y = 6 \wedge 2x + 3y = 1$ б) $7x + 30y = 9 \wedge 5x - 3y = -2$ в) $x - 3y = 0 \wedge 3x - y = 1$

г) $bx - ay = b^2 + 2ab - a^2 \wedge (a + b)x - (a - b)y = 4ab$ **3.** а) (1, 1), б) (0, – 2), в) (3, 5), г) (5, 4)

4. а) $a = 3,\ b = 2$, б) $a = 0,\ b = 6$

I. 4.

1. а) (– 1, 3) б) (5, 6), в) $(4a, -a)$ **2.** а) (3, 2), б) (3, 3), в) $(6a - 5b, -3a + 6b)$ **3.** а) да б) не **4.** а) (2, 3), б) (– 4, – 2), (3, 2) **5.** а) $\left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$ б) (47, – 38) **6.** а) (3, 2), б) (3, 3) **7.** а) $\left(4, -\frac{1}{a}\right)$ за $a \neq 0$, б) $\left(\frac{5}{a+4}, \frac{2(1-a)}{a+4}\right)$ за $a \neq -4$. в) Системот има смисла само при $a \neq 0 \wedge a \neq -1$. При $a \neq \frac{-1}{2}$ системот има решение $(1, a + 1)$. Ако $a = -\frac{1}{2}$ системот е неопределен и негови решенија се сите решенија на равенката $y = x - \frac{1}{2}$.

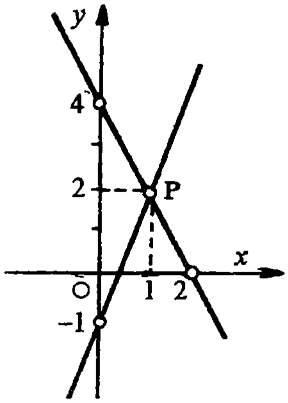
I. 5.

1. а) 3, б) 1, в) $-b^2$ **2.** а) да **3.** а) да, б) да **4.** да, б) да **5.** а) да, б) да **6.** а) да, б) да **7.** а) да, б) да **8.** а) $\left(2, \frac{51}{68}\right)$ б) (2, 3) **9.** а) 10. б) 3. в) 1. г) 1. **10.** а) да (промена на редица и колона), б) да, в) да (промена на колоните), г) да, д) да (извлечен множител пред детерминанта), ѓ) да, е) да (пропорционални се елементите во колоните), ж) да, з) да, ѕ) да и) да, ј) да. **11.** а) (1, 1), б) (6, 1) **12.** (– 2, 1) **13.** При $a \cdot b \neq 0$ има решение (0, 1) **14.** $(6a - 5b, 6b - 3a)$

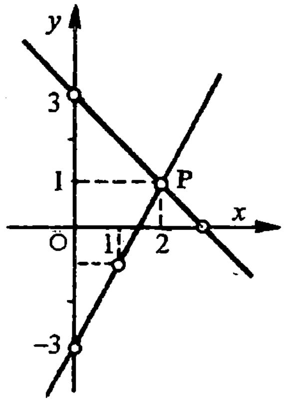
I. 6.

1. а) $(1, -1)$; б) $(1, 1)$. **2.** а) Системот е противречен; б) системот е противречен. **3.** а) Системот е неопределен; б) системот е неопределен. **4.** За секој $a \in \mathbf{R}$ системот има единствено решение $\left(\dfrac{2a+5}{a^2+2}, \dfrac{4-5a}{a^2+2}\right)$.

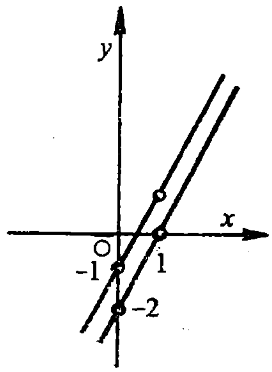
5. а) $(1, 2)$



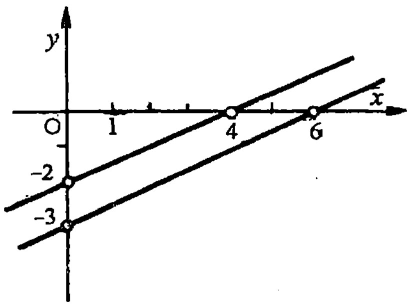
5. б) $(1, 2)$



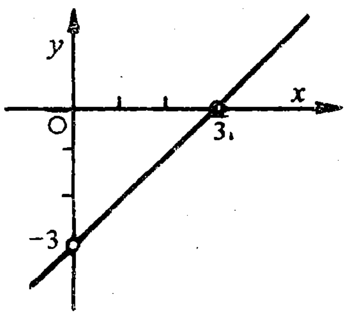
6. а) Системот е невозможен



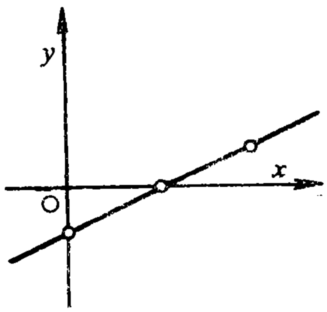
6. б) Системот е невозможен



7. а) Системот е неопределен



7. б) Системот е неопределен



I. 7.

1. 38 и 9 **2.** 48 **3.** 4 браќа и 3 сестри **4.** $\frac{20}{24}$. **5.** 39. **6.** 6 и 12. **7.** 45 и 30. **8.** 35 и 30. **9.** 2 000 и 10 000 **10.** 13, 17, 20 **11.** 19 и 11.

I. 8.

1. а) $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 3x - 7y - z = 0 \\ 2x - 3z = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} (a-2)x - y + z = a(a-2) \\ 5x - y - 6az = 0 \\ ax - 2y - az = -1 \end{cases}$

2. а) $(0, 1, -2)$, б) $(1, 1, 1)$
3. а) $(4, 3, 2)$, б) $(2, 3, 4)$

4. а) $\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 2 \\ 4x - y - 2z = -1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y - 4z = -4 \\ 2x + 3y - 3z = 2 \\ 2ax - y + z = 2a \end{cases}$

5. $(2, 1, -3)$ **6.** $(1, 2, 3)$
7. $(1, -1, 2)$ **8.** $(3, 4, 5)$

9. $(a + b, a - b, a)$ **10.** $(1, -a, 1)$ **11.** $(18, 6, 57)$

I. 9.

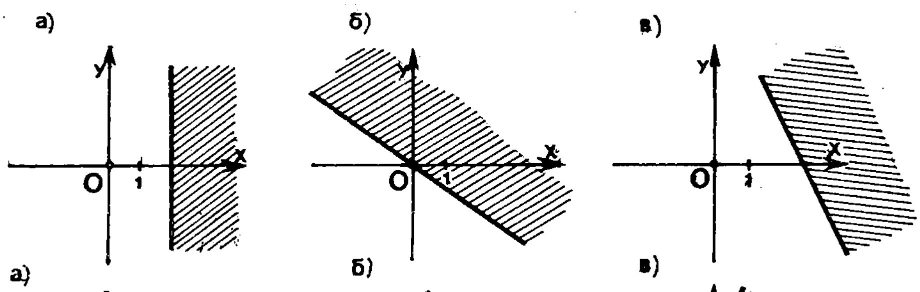
1. а) -1, б) 1 **2.** а) -17, б) -1 **3.** а) -11, б) -9 **4.** а) -3, б) -1 **5.** а) 7, б) 0, в) 0, г) $2abc$, д) 0, ѓ) $(a-4)(a+2)^2$, е) $(a^2 + b^2 + c^2 + 1)$, ж) $2a^2x^2y^2$ **6.** а) $x = 2$, б) $x=0$ и $x=-3$, в) $x=-4$, $x=-2$, $x=2$ г) $x=0$

I. 10.

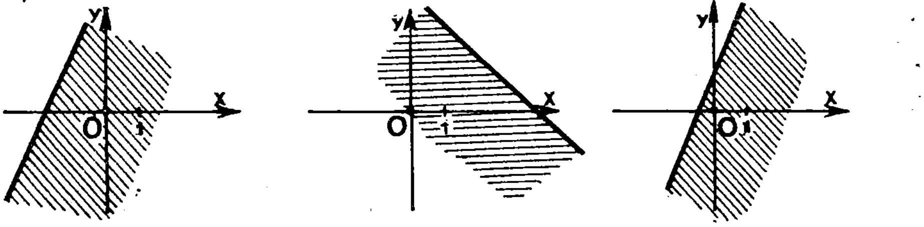
1. $(0, -1, 1)$, **2.** а) $(1, -1, 0)$, б) $(2, 0, -3)$, в) $(a+b, a-b, a)$, г) $(1, 2, 1)$, д) $(6, 9, 12)$, ѓ) $(4, 3, 2)$ **3.** $(32, 15, 66)$ **4.** 425 **5.** $\left(\frac{2mnp}{mn + np - mp}, \frac{2mnp}{np + pm - nm}, \frac{2mnp}{np + pm - np}\right)$

I. 11.

1.

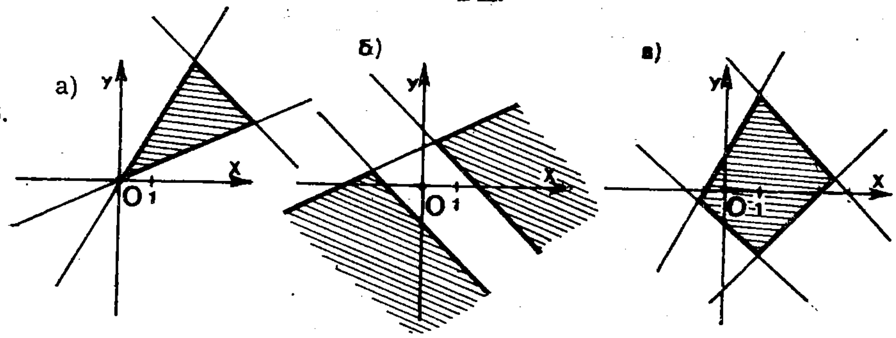


4.



I. 12.

5.

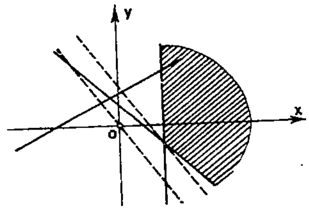


I. 13.

1. Минималната вредност функцијата ја постигнува, во точката во која се сечат правите $3x + y = 4$ и $x + 5y = 4$, односно $min\ L = 4$

2. Овде немаме единствено оптимално решение, бидејќи секоја точка на отсечката AB (направи цртеж) е оптимално решение, што значи има бесконечно многу решенија.

5.



$min\ L = 5$, за $x = 3,\ y = -2$

I. 14.

1. Математички проблемот може да се формира на следниот начин

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 60$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 40$$
$$x_{11} + x_{21} = 30$$
$$x_{12} + x_{22} = 50$$
$$x_{13} + x_{23} = 20$$
$$x_{ij} \geqslant 0,\ i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3$$

за

$$min\ Z = 40x_{11} + 20x_{12} + 50x_{21} + 25x_{21} + 100x_{22} + 30x_{23}$$

II КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

II. 1.

1. *a, b,* **2.** *a, б, г, д* **3.** *l* **4.** не секогаш **5.** *a, б* **6.** *a,* во множествата **N, Z, Q** и **R**; б–во **Z, Q, R**; г – во **Q** и **R** **7.** со **Q** **8.** Решлива е само ако $ab > 0$ **9.** *а–N, б–а, в–∅.*

II. 2.

1. а) $Re(z) = -5$, $Jm(z) = 2$; б) $Re(z) = -\sqrt{7}$, $Jm(z) = 4$; в) $Re(z) = \frac{a}{a^2+b^2}$ $Jm(z) = \frac{b}{a^2+b^2}$ **2.** а) $(z) = 2 + i$, б) $(z) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ **3.** а) да б) да **4.** а) $x = 2, y = -2$, б) $x = 1, y = 1$
6. а) $Re(z) = 2$, $Jm(z) = -1$; б) $Re(z) = \frac{2}{3}$, $Jm(z) = \frac{1}{3}$; в) $Re(z) = x + 1$ г) $Re(z) = 0$, $Jm(z) = 5$ **7.** а) $x = 2, y = 2$; б) $x = 1, y = 1$ г) $x = -3, y = -3$; д) $x = 11, y = 11$

II. 3.

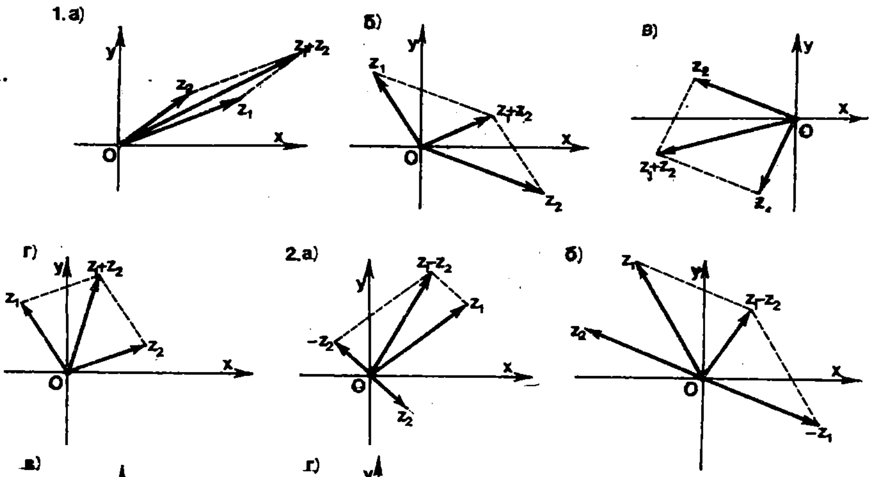
1. а) $7 - i$; б) -1; в) 0 **2.** а) $5 + i$; б) 13; в) $10 + 15i$ **3.** а) $-2 + i$; *b)* $2 + 4i$; в) $-2 - i$
4. а) $\frac{1}{a+2i}$; б) $2x - 1$ **5.** а) $10i$; б) $3 - 15i$; в) $\frac{1}{2} - 5i$; г) $1 - \sqrt{2} - 15i$ **6.** а) $\frac{8}{13} + \frac{1}{13}i$; б) $-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$; в) $-\frac{5}{13} + \frac{1}{13}i$; г) $\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}i$ **7.** а) $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$; б) $-\frac{9}{10} + \frac{7}{10}i$; в) $-i$
8. $1, -1, -i, -1, i$ **9.** а) $5 - 10i$; б) $3 + \frac{3}{2}i$; в) $-\frac{21}{4} - \frac{13}{4}i$ **10.** а) $4 + 3i$; б) $5 - 3i$; в) $1 + i$; г) $\frac{1}{2}$; д) $2a + 3ci$; ѓ) $(n + m) + (m - 2n)i$ **11.** а) $-3 + 6i$; б) $-2c + 3bi$; в) $\sqrt{2} - 5i\sqrt{3}$; г) $(a - b)(a + b)i$
12. а) $-2 + 2i$; б) $2m + (m^2 - 1)i$; в) $5 + i$; г) $4\sqrt{3} + i$; д) $m^2 - n^2 + mn + (n^2 + m^2)i$; ѓ) i; е) $-2 + 2i\sqrt{3}$; ж) $3\sqrt{2} + \sqrt{3}$; з) $48i$ **13.** а) $-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$; б) $\frac{3}{2}(1 - i)$; в) $\frac{1}{2}(1 + 3i)$ г) $-\frac{1}{10}(9 + 7i)$; д) $-3 + 2i$; ѓ) $2 + 3i$; е) $\frac{2}{13}(3 - 2i)$; ж) $\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{11} - \frac{2 + 3\sqrt{6}}{11}i$; з) $\frac{2a + a^2i\sqrt{3}}{a^2 + 2}$ ѕ) $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{4} + \frac{3 + \sqrt{5}}{4}i$; и) $\frac{1}{35}(19 + 12i\sqrt{6})$. **14.** а) $2i$; б) $2 - 4i\sqrt{2}$; в) $-6(1 + i\sqrt{3})$
15. а) $34 - 2i$; б) $1 - 2i$; в) -1; г) -9; д) -3; ѓ) $\frac{1}{2}(1 - i)$ **16.** а) $-48i$; б) $-1 + i$
17. а) $x + y - (xy - 1)i$ б) $-\frac{4}{125}(11 - 2i)$; в) -2; г) $-\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$ **18.** а) $4 + i$; б) $2 - 5i$; в) $9 + 7i$; г) $-\frac{1}{10}(3 + 11i)$; д) $11 + 2i$; ѓ) $15 + 3i$ **19.** а) $x = -3,\ y = 11$; б) $x = 2,\ y = -3$
20. $x = -1,\ y = 1$ **21.** а) $1;\ i;\ -1;\ -i;\ i;\ -i;\ i$; б) $-2(4 + 3i)$ в) $-17 + 6i$; г) $\frac{1}{2}(2 - 11i)$; д) $\frac{3}{2}(1 - i)$

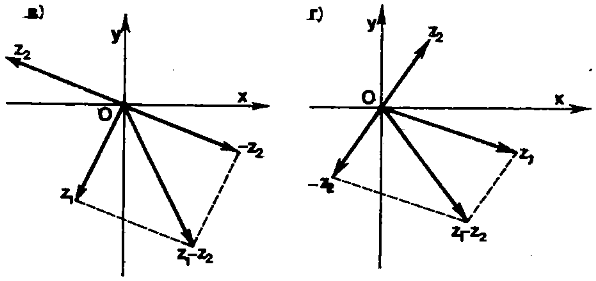
II. 4.

1. а) $\sqrt{1[illegible]}$; б) $\frac{\sqrt{13}}{[illegible]}$; г) [illegible]
2. а) $\sqrt{3}$; б) [illegible]; в) $\sqrt{2,5}$ **4.** а) $\sqrt{13}$; б) $\sqrt{13}$; в) 3; г) $\sqrt{6}$; д) $\frac{5}{6}$ **5.** а) $\sqrt{130}$; б) $\frac{\sqrt{130}}{10}$; в) $\frac{13}{5}$ г) $\frac{13}{10}$ **6.** д) и б) [illegible] модули.

П. 5.

1.





3. а) 5; б) $\sqrt{661}$; в) $\sqrt{5}$

П. 6.

1. а) (0, 0), (– 5, 12); б) $\left(1, -\frac{5}{6}\right)$, $\left(\frac{1}{12}, -\frac{5}{12}\right)$ **2.** а) (– 2, 2), (3, 2) **3.** $z_1 = (3, -2)$, $z_2 = (-\sqrt{3}, 1)$, $z_3 = \left(-\frac{1}{3}, 2\right)$, $z_4 = (0, 2)$ **4.** а) (1, 0), б) $\left(-\frac{7}{4}, -3\right)$; в) (0, – 3)

5. а) $\mathbf{Jm}\,(z_1 + z_2) = \mathbf{Jm}\,\big((a, b) + (c, d)\big) = \mathbf{Jm}\,(a + c, b + d) = b + d = 0$;

б) $\mathbf{Re}\,(z_1 + z_2) = a + c = 0$

6. а) (– 7, 4); б) (– 3, 7; 2, 6); в) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$; г) $\left(-\frac{7}{4}, \frac{7}{2}\right)$. **7.** а) $x = -5$, $y = 1$; б) $x = 2$, $y = -3$; в) $x = \frac{1}{2}$, $y = -2$; г) $x = 7$, $y = -4$ д) $x = 4$, $y = 7$, ѓ) $x = 1$, $y = -2$

8. а) $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right)$; б) (0, – 1); в) $\left(\frac{1}{26}, -\frac{5}{26}\right)$; г) $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$.

П. 7.

3. Множеството C_Q е група по однос на операцијата собирање, а множеството $C_Q \setminus \{0\}$ е група по однос на операцијата множење. Треба уште да се покаже дистрибутивноста на собирањето во однос на множењето. Тоа својство во C_Q е последица од соодветното својство во множеството **Q**.

III. КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

III.1.

1. а) $a = -9$, $b = 1$, $c = -5$; б) $a = -1$, б $= 3$, $c = 0$; в) $a = \sqrt{2}$, $b = -4$, $c = \sqrt{3}$.

2. а) и д). 3. а) $k \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}$; б) $k \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$. 4. а) $k = 2{,}5$; б) $k = -2$. 5. а) $3x^2 - 4x - 5 = 0$; б) $x^2 - x - 3 = 0$; в) $x^2 - 6x - 2 = 0$.

6. а) $k \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$; б) $k = -1$; в) $k = 0$; г) $k = \frac{4}{5}$ д) $k = -\frac{2}{3}$.

7. а) 2; б) 0; в) 12; г) 0. 8. а) $-\frac{1}{3}$ и 1. 9. а) $x(x-5)$; б) $(x-3)(x+3)$. в) $(x-1)(x+3)$.

III.2

1. а) $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 2. $x_1 = x_2 = 0$. 3. $x_1 = 0$, $x_2 = 5$. 4. $x_{1,2} = \pm 0{,}5$.
5. $p \in (-\infty, 3] \cup [1, +\infty)$.

6. $x_{1,2} = \pm 1$, ако $ab \neq 1$; секој реален број, ако $ab = 1$.

7. а) $x_1 = -5$, $x_2 = 4$; б) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. 8. а) $x_1 = 1$, $x_2 = -5$; б) $x_1 = 2$, $x_2 = -5$.
9. а) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; б) $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$.

10. а) $k > -2$; б) $k \in (-\infty, -5] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 11. а) $x_{1,2} = \pm \frac{k-1}{k}$, ако $k \neq 0$; нема решение за $k = 0$; б) $x_1 = 0$, $x_2 = a + b$, ако $a \neq b$; секој реален број, ако $a = b$.

12. $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{a^2 + a + 2b}{1 - a}$, за $a \neq 1$; $x_1 = 0$, за $a = 1$ и $b \neq -1$; секој реален број, за $a = 1$ и $b = -1$. 13. а) $(a+b)^2 - b^2$; б) $(x-1)^2 - 1)^2$; в) $(x+3)^2 - 2^2$. 14. а) $(x+1)(x+3)$; б) $(x-1)(x-7)$. **Решение.** $x^2 - 8x + 7 = x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 - 4^2 + 7 = (x-4)^2 - 3^2 = (x - 4 + 3)(x - 4 - 3) = (x-1)(x-7)$.

III.3.

1. $x_1 = -1$, $x_2 = 5$. 2. $x_1 = x_2 = -5$. 3. а) $x_1 = 5$, $x_2 = 7$; б) $x_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$; в) $x_1 = x_2 = 3$.
4. а) $x_1 = -10$, $x_2 = -2$; б) $x_1 = 2a$, $x_2 = 3a$. 5. а) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{5}{2}$; б) $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$.
6. $x_1 = -2$, $x_2 = 8$. 7. $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{25}{12}$. 8. $x_1 = -1$, $x_2 = \sqrt{3}$.
Упатство. $D = (\sqrt{3} - 1)^2 + 4\sqrt{3} = 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 4\sqrt{3} = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} + 1)^2$.
9. а) $x_1 = 2$; $x_2 = 2a$ б) $x_1 = -\frac{a}{2}$, $x_2 = \frac{a}{3}$.
10. а) $\mathbf{R} \setminus \{-7, 7\}$; б) $\mathbf{R} \setminus \{-2, 7\}$; в) $\mathbf{R}$. 11. Не, тоа зависи од знакот на поткорениот израз, т.е. равенката ќе има реални корени само ако $b^2 - 4ac \geqslant 0$.

III. 4.

1. а) Конјугирано комплексни (бидејќи $D = -24 < 0$); б) реални и еднакви ($D = 0$); в) реални и различни.

2. $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. 3. Корените се: различни реални броеви за $k < \frac{13}{4}$; еднакви реални броеви за $k = \frac{13}{4}$, конјугирано комплексни броеви за $k > \frac{13}{4}$.

4. За $a = 0$ равенката е линеарна од видот $-x + 1 = 0$, има корен $x = 1$; за $a \neq 0$ равенката има два корена: $x_1 = a$, $x_2 = \frac{1}{a}$, и притоа, ако $a = 1$ таа има двократен корен $x_1 = x_2 = 1$.

5. а) Реални и различни; б) реални и еднакви; в) конјугирано комплексни. 6. а) $m_{1,2} = \pm 12$; б) $m_1 = 2$, $m_2 = \frac{10}{9}$. 7. а) $m_{1,2} = \pm\frac{4}{3}$; б) $m = 9$. 8. а) $a \geqslant 3$; б) $a) \geqslant -\frac{1}{3}$. 9. Корените се: а) реални и различни за $k < 4$; реални и еднакви за $k = 4$, конјугирано комплексни за $k > 4$; б) реални за $k \leqslant \frac{16}{15}$, конјугирано комплексни за $k > \frac{16}{15}$; в) реални за $k = 0$; конјугирано комплексни за $k \in \mathbf{R} \setminus \{ 0 \}$; г) реални за секој $k \in \mathbf{R}$. 10. $-\frac{1}{4} \leqslant k \leqslant \frac{1}{4}$.

11. а) Секој реален број, ако $ab = 0$; $x = 0$, ако $a = 0$, $b \neq 0$ или $a \neq 0$, $b = 0$; $x_1 = \frac{a}{b}$, $x_2 = \frac{b}{a}$, ако $ab \neq 0$, и притоа $x_1 = x_2 = 1$ за $|a| = |b|$; б) $x_1 = a - 2b$, $x_2 = b - 2a$, притоа $x_1 = x_2 = -a$, ако $b = a$. 12. а) $x_1 + x_2 = 5$, $x_1x_2 = 6$; б) $x_1 + x_2 - 4$, $x_1 \cdot x_2 = 4$; б) $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 \cdot x_2 = 5$. (види ја наредната лекција!).

III. 5.

2. а) $x_1 + x_2 = \frac{7}{2}$, $x_1x_2 = \frac{5}{2}$; б) $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1x_2 = 0$; в) $x_1 + x_2 = 0$, $x_1x_2 = -23$. 3. а) $x^2 - 9x + 14 = 0$; б) $x^2 - (1 + n)x + n = 0$; в) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$.

4. а) $x_1 + x_2 = \frac{5a}{2}$, $x_1x_2 = \frac{7a^2}{2}$; б) $x_1 + x_2 = \frac{4(m + 2)}{m^2}$ $(m \neq 0)$, $x_1 x_2 = \frac{1 - 2m}{m^2}$ $(m \neq 0)$. 5. а) $x^2 - 1{,}6x + 0{,}28 = 0$ или $25x^2 - 40x + 7 = 0$; б) $6x^2 - ax - a^2 = 0$.

6. а) $x_1 = 3$, $x_2 = 5$; б) $x_1 = -3$, $x_2 = -4$; в) $x_1 = -3$, $x_2 = 5$; г) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{5}{2}$. Ако x_1 е корен на равенката $ax^2 + bx + c = 0$, тогаш очигледно важи равенството $a + b + c = 0$. Обратно, нека важи равенството $a + b + c = 0$, т.е. $a + c = -b$, тогаш $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$

$$= \frac{a + c \pm \sqrt{(a + c)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{a + c \pm \sqrt{(a - c)^2}}{2a} = \frac{a + c \pm (a - c)}{2a}; \quad x_1 = 1,\ x_2 = \frac{c}{a}.$$

Значи, ако важи равенството $a + b + c = 0$, тогаш еден корен на равенката $ax^2 + bx + c = 0$ е еднаков на 1. Со тоа тврдењето е докажано.

7. Да. 8. $x_{1,2} = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4P}}{2.}$ **Упатство.** Ако бараните броеви ги означиш со x_1 и x_2, тогаш од условите $x_1 + x_2 = S$, $x_1x_2 = P$, ќе ја добиеш равенката $x^2 - Sx + P = 0$. 9. а) $x^2 - 4x + 1 = 0$; б) $x^2 - x + \sqrt{2} - 2 = 0$.

III. 6

1. **Решение.** Нека $x_1 = a + b\sqrt{c}$, $x_2 = a - b\sqrt{c}$, тогаш:

$-p = x_1 + x_2 = (a + b\sqrt{c}) + (a - b\sqrt{c}) = 2a \qquad q = x_1x_2 = (a + b\sqrt{c}) \cdot (a - b\sqrt{c}) = a^2 - b^2c$,

па равенката гласи: $x^2 - 2ax + a^2 - b^2c = 0$ Нејзините коефициенти се рационални броеви.

2. а) $x^2 - 2x - 1 = 0$; б) $49x^2 - 98x + 37 = 0$. 3. а) $x^2 - 4x + 13 = 0$; б) $x^2 - 2x + 3 = 0$; в) $2x^2 - 6x + 9 = 0$ 4. а) $-\frac{7}{6}$; б) $\frac{85}{36}$, в) $-\frac{85}{18}$.

Решение. Виетовите формули за равенката се: $x_1 + x_2 = \frac{7}{3}$, $x_1x_2 = -2$ па имаме:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{\frac{49}{9} + 4}{-2} = \frac{49 + 36}{-18} = -\frac{85}{18}.$$

5. $cx^2 + bx + a = 0$. Коефициентите a и c „си ги заменија" местата. 6. $m = -2$.

7. а) $\frac{18}{23}$; б) $\frac{76}{35}$. 8. в) **Упатство.** $x_1 - x_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}$.

9. $x^2 + (p - q)x - pq = 0$. 10. $k_1 = -3, k_2 = 1$. 11. $q = 8$.

Упатство. Искористи ги Виетовите формули за дадената равенка и условот $x_1 = 3x_2$.

12. а) $q > 0$; б) $q < 0$. 13. а) $q > 0, p < 0$; б) $q > 0, p > 0$.

III. 7.

1. Корените се: а) позитивни; б) негативни; в) ниту позитивни, ниту негативни (конјугирано комплексни броеви). 2. $m \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$. 3. Од таблицата

k	$-\infty$	-9		-8		-6		0	$+\infty$
D	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
q	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$+$
$-p$	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$+$

за знаците на дискриминантата D, производот q и збирот $-p$, ги читаме следниве резултати:

1° За $k \in (-\infty, -9)$ корените се конјугирано комплексни броеви.

2° За $k \in (-9, -8) \cup (0, +\infty)$ корените се позитивни броеви, т.е. $0 < x_1 < x_2$.

3° За $k \in (-8, -6)$ корените се со различни знаци, т.е. $x_1 < 0 < x_2$, и притоа $|x_1| < |x_2|$.

4° За $k \in (-6, 0)$ корените се со различни знаци, т.е. $x_1 < 0 < x_2$, но сега $|x_1| > |x_2|$.

5° За $k = -9$ равенката има двократен корен $x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$.

6° За $k = -8$ еден корен е нула, а другиот е позитивен, т. е. $x_1 = 0 < x_2 = 1$.

7° За $k = -6$ корените се спротивни броеви, и притоа $|x_1| = |x_2| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

8° За $k = 0$ равенката е линеарна и има корен $x = \frac{2}{3}$.

4. а) $0 < x_1 < x_2$; б) $x_1 < x_2 < 0$; в) $x_1 < 0 \leq x_2$ и $|x_1| < |x_2|$; г) $x_1 < 0 < x_2$ и $|x_1| > |x_2|$.

5. $a \in (-4, -2) \cup (4, +\infty)$. 6. $m \in \{-4, -3\}$. 7. а) $k = 2$; б) $k \in (0, 2)$.

8. а) $k \in (2, 3)$; б) $k \in (3, 5)$. 9. Види ја наредната таблица и протолкувај ги резултатите.

k	$-\infty$	0		2		3		4	$+\infty$
D	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$
q	$+$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$-p$	$+$		$-$	0	$+$		$+$		$+$

$0 < x_1 < x_2$ | $x_1 < 0 < x_2$, $|x_1| > |x_2|$ | $x_1 < 0 < x_2$, $|x_1| < |x_2|$ | $0 < x_1 < x_2$ | конјугирано комплексни

линеарна $x = -\frac{3}{4}$ | $x_1 < 0 < x_2$, $|x_1| = |x_2|$ | $x_1 = 0 < x_2$, $x_2 = \frac{2}{3}$ | $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$

10. а) $2x(x+2)$; б) $(x+2)(x+3)$; в) $(x+3)(x-5)$

III. 8.

1. $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{7}{2}$. **2.** а) $(x+4)(3x-1)$; б) $(2x-3)^2$; в) $(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$; г) $(x-k)(x+2k)$. **3.** а) $\frac{a+3}{a}$, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0, -2\}$; б) $\frac{2a+5}{3a-2}$, $a \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}, 3\right\}$.
4. а) $(x-1)(x-8)$; б) $(a-2)(a+6)$. **5.** а) $x(x+1)(3x+1)$; б) $x^2(x-4)(2x+1)$.
6. а) $(4x-3)(5x+2)$; б) $(5y-1)(7y+6)$. **7.** а) $(x+2a)(x-3a)$; б) $(x-a+b)(x-a-b)$.
8. а) Не, бидејќи неговата дискриминанта е негативна. **9.** а) $\frac{x+4}{x+3}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 4\}$; б) $\frac{3a+2}{a+3}$, $a \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$; в) $\frac{5x+2a}{2x+a}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{a}{2}, \frac{a}{3}\right\}$. **10.** а) $\mathbf{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$; б) $\mathbf{R}$; в) $\mathbf{R} \setminus \left\{-1, 0, \frac{1}{2}\right\}$.

III. 9.

1. а) $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$; б) $\mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 5\}$. **2.** а) $x = 6$; б) $x = -2$. **3.** $\mathbf{M} = \left\{-\frac{3}{7}, 3\right\}$.
4. Ако $a \neq b$, тогаш $x_1 = x_2 = \frac{a+b}{2}$; ако $a = b$, тогаш нема решение.
5. $\mathbf{R} \setminus \{-3, 0, 1, 2\}$. **6.** а) $x = -1$; б) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ **7.** а) Ако $a \neq 0$, тогаш $x_1 = -5a$, $x_2 = 2a$; ако $a = 0$, тогаш нема решение; б) ако $|a| \neq |b|$, тогаш $x_1 = -\frac{ab}{a+b}$, $x_2 = -\frac{a^2+b^2}{a+b}$; ако $a = b$, тогаш равенката има еден корен $x = -\frac{a}{2}$; ако $a = -b$, тогаш равенката нема решение. **8.** а) $|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$,
б) $|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -(x-1), & x < 1, \end{cases}$ в) $|2x+3| = \begin{cases} 2x+3, & x \geq -\frac{3}{2} \\ -(2x+3), & x < -\frac{3}{2}. \end{cases}$

III. 10.

1. а) $x_1 = -5$, $x_2 = 3$; б) нема решение; в) $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$.

2. а) $x_{1,2} = \pm 2$, $x_{3,4} = \pm 3$; б) $x_{1,2} = \pm 1$. 3. а) $x = 1$, б) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.
4. а) $M = \{0\} \cup [1 + \infty)$; б) $M = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$. 5. а) $M = \emptyset$; б) $M = \emptyset$.
6. а) $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm \frac{1}{2}$; б) $x_1 = 0$, $x_{2,3}$ ± 3. 7. а) $x_{1,2} = \pm 4$; б) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.
8. $x_1 = -3$, $x_2 = 7$. 9. $x = 1$.

III. 11.

1. 75. **Упатство.** Ако x е цифрата на десетките, тогаш $(x - 2)$ е цифрата на единиците. Од условот на задачата следува равенката

$$(10x + (x - 2)) \cdot (x + (x + 2)) = 900.$$

2. 8km/h. **Упатство.** Ако x е брзината на чамецот во мирна вода, тогаш $x + 2$, односно $x - 2$ се брзините на чамецот по течението на реката и – спротивно. Од условот на задачата следува равенката

$$\frac{30}{x+2} + \frac{12}{x-2} = 5$$

3. 12 часа и 10 часа. **Упатство.** Ако првата цевка го полни базенот за x часа, тогаш втората ќе го полни за $(x - 2)$ часа. За 1 час првата полни $\frac{6}{x}$–ти дел, а втората $\frac{5}{x-2}$–ти дел од базенот, па ја имаме равенката

$$\frac{6}{x} + \frac{5}{x-2} = 1$$

4. $20 + 2\sqrt{541}$ или $21 + 13\sqrt{5}$. 5. 7, 9 и 11. 6. $\frac{5}{3}$ или $-\frac{3}{5}$. 7. 6 и 24. 8. 2 и 5.
9. 36 cm. 10. 16. 11. 9 cm и 16 cm. 12. 10 часа и 15 часа. 13. 21 час.
Упатство. Реши ја равенката $\frac{420}{x-0,5} - \frac{420}{x} = 2$ (x е времето) или равенката $\frac{420}{y} - \frac{420}{y+2} = \frac{1}{2}$ (y е брзина). 14. 18 km/h и 24 km/h.

Упатство. $(2x)^2 + (2(x + 6))^2 = 60^2$. 15. 9,6 минути, т.е. 9 минути и 36 секунди. **Упатство.** Реши ја равенката $\frac{96}{-10} + \frac{96}{+10} = 4$, каде што x е брзината на возот.

IV. КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА

IV. 1.

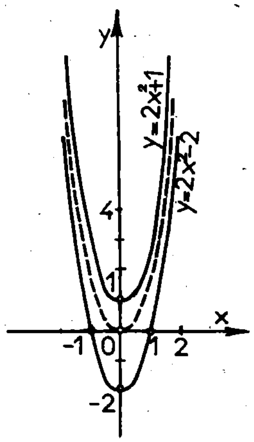
2. $G_x(-1, 0)$, $G_y(0, 2)$ и $H_x(1, 0)$, $H_y(0, -2)$. 3. а) $f(x) = 2(x - \frac{3}{2})$; б) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 4)$.
5. а). 6. а) $x_o = \frac{5}{2}$; б) $x_o = \frac{1}{3}$; в) $x_o = 2$. 7. а) $f(x) = -x + 2$; б) $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$.

IV. 2.

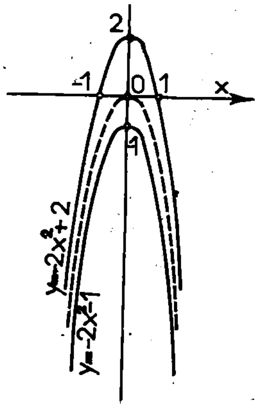
1. а), б), и г). 2. а) $f(0) = 3$; б) $f(1) = 0$; в) $f(-2) = -1$; г) $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.
4. Види го текстот пред самата задача. 5. $m = -3$.
Упатство. Реши ја равенката: $2 = 1^2 + m \cdot 1 + 4$. 6. $m = 1$. 7. а) опаѓа; б) расте.
9. Види ја наредната лекција и првиот решен пример.

IV. 3.

1. Види црт.1 2. Нулите на функцијата се $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ (црт.1)



црт. 1



црт. 2

3. Нулите на функцијата f се $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; функцијата g нема нули (црт.2).

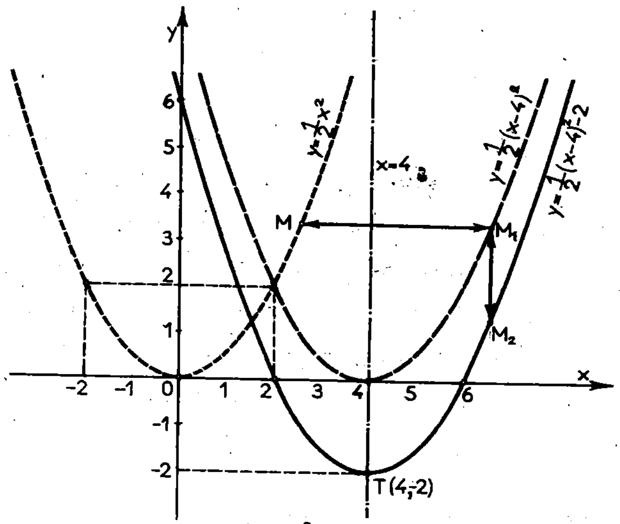
4. а) $f(x) = ax^2 + 3$; б) $f(x) = ax^2 - 2$. 5. Во правец на y–оската, за 3 единици надолу.

6. $a < 0$, $c > 0$. 9. а) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$; б) $f(x) = 2x - \frac{3}{2}$.

10. $g(1) = f(2) = 4$, $g(2) = f(3) = 9, \ldots, g(5) = f(6) = 36$. Функцијата g ги прима истите вредности како и функцијата f, за вредности на x кои се за 1 помали, т.е. $g(x-1) = \big((x-1)+1\big)^2 = x^2 = f(x)$.

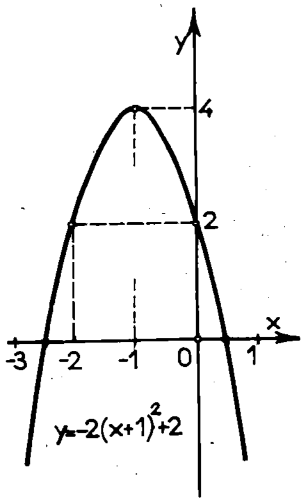
IV. 4.

2. Во однос на x–оската. 3. Графикот е даден на црт. 3.

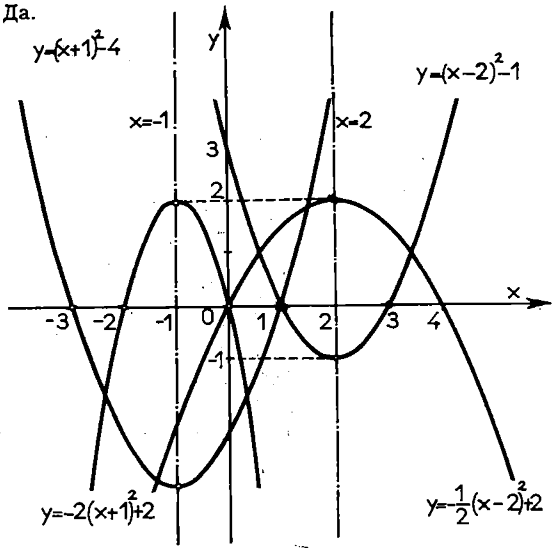


црт. 3

4. Графикот е даден на црт. 4. **5.** Да.



црт. 4



црт. 5

6. Во правец на y–оската, за 5 единици надолу. **7.** а) $T(1, 4)$; б) $T(-2, -3)$; в) $T(-4, 0)$; г) $T\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ **8.** На функциите: $f(x) = 3(x + 6)^2 + 1$ и $f(x) = -3(x + 6) + 1$.

10. Види црт. 5. **11.** а) $a = -\frac{1}{2}$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$; б) $a = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = -5$.

12. $y = -x^2 + 4x - 2$, $(a = -1,\ \beta = 2)$. **13.** $f(x) = 2(x + 1)^2 + 1$; не постојат вредности на $x \in \mathbf{R}$, за кои $f(x) = 0$; $f(o) = 1$.

IV. 5.

2. а) $T(2, 5)$; б) $T\left(3, -\frac{9}{2}\right)$. **4.** а) $f(x) = 2(x + 1)^2$; б) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2$; в) $f(x) = (x - 1)^2 - 1$; г) $f(x) = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{9}{4}$. **5.** а) $T(1, -1)$; б) $T(3, 7)$; в) $T(0, -2)$; г) $T\left(\frac{5}{2}, -\frac{25}{2}\right)$.
7. $p = 4$, $q = 9$. **8.** а) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$; б) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{5}{2}$; в) $f(x) = 2x^2 - 4x$.
9. а) $y = -x^2 - 4x + 3$; б) $y = ax^2 + 4ax + 3a + 6$, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ **Забелешка.** Дадените услови не ја определуваат параболата еднозначно, т.е. постојат безброј параболи што минуваат низ точките A и B, а оска на симетрија им е правата $x = -2$. Велиме дека со дадените услови е определена **фамилија параболи.** За $a = -1$ ја добиваме параболата од а). Нацртај неколку параболи, земајќи различни вредности за параметарот a. Што се добива за $a = 0$? **10.** Функцијата g достигнува минимум за $x = 2$, и тој изнесува -1, а функцијата h за $x = -3$ достигнува максимум еднаков на 5.

IV. 6.

1. а) $y_{min} = 14$, за $x = -3$; б) $y_{max} = -2$, за $x = 3$.

3. $x = 6$. **Упатство.** Вториот работник произведува $(12 - x)$, а третиот $(12 + 4x)$ примероци на ден. Времето y е збирот од времињата на: *i*) заедничката работа на првите два работника, а тоа е $\frac{c}{4} : \left(12 + (12 - x)\right)$, и *ii*) заедничката работа на сите три работника, а тоа е $\frac{3c}{4} \left(12 + (12 - x) + (12 + 4x)\right)$, т.е. $y = \frac{c}{4(24 - x)} + \frac{3c}{4(36 + 3x)} = \frac{9c}{-x^2 + 12x + 288}$.

4. а) $y_{min} = -\frac{7}{2}$ за $x = -\frac{5}{2}$; б) $y_{max} = -1$ за $x = 11$; в) $y_{min} = -\frac{9}{4}$ за $x = \frac{3}{2}$; г) $y_{max} = 4$ за $x = 1$. 5. Дропката постигнува: а) најголема вредност за $x = 1$, и таа изнесува $\frac{1}{2}$; б) најмала вредност за $x = 2$, и таа изнесува -6. 6. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. 7. Краците на трапезот се еднакви на радиусот, а периметарот е еднаков на $5r$. 8. Функцијата опаѓа во интервалот $(-\infty, 1)$, расте во интервалот $(1, +\infty)$, а множеството вредности е интервалот $[2, +\infty)$, т.е. $\mathbf{V}_f = [2, +\infty)$.

IV. 7

1. а) Опаѓа во интервалот $(-\infty, 3)$, расте во интервалот $(3, +\infty)$, а множеството вредности $\mathbf{V}_f = \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right)$; б) расте во интервалот $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$, опаѓа во интервалот $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$, а $\mathbf{V}_f = (-\infty, 5]$. 2. а) $\mathbf{V}_f = (-\infty, 0]$; б) $\mathbf{V}_f = \left[-\frac{9}{2}, +\infty\right)$. 3. а) Расте во интервалот $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$, опаѓа во интервалот $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$; б) опаѓа во интервалот $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, расте во интервалот $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. 4. $\mathbf{V}_f \cap \mathbf{V}_g = \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right) \cap (-\infty, 15] = \left[-\frac{1}{3}, 15\right]$.
5. За $x \in (-1, 2)$ функцијата е позитивна, а за $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ – е негативна.

IV. 8

1. а) $f(x) > 0$ за секој $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$; б) $f(x) > 0$ за секој $x \in \mathbf{R}$; в) $f(x) > 0$ за $x \in \left(-\frac{5}{2}, 1\right)$, $f(x) < 0$ за $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup (1, +\infty)$; г) $f(x) < 0$ за секој $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$. 2. $k = 2, p = 7$.
3. а) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (2, +\infty)$; б) $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{3}{4}\right\}$; в) $x \in (-2, 3)$.
4. а) $x \in \left(-3, \frac{1}{4}\right)$; б) за ниеден $x \in \mathbf{R}$; в) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$.
5. а) $f(x) > 0$ за секој $x \in \mathbf{R}$; б) $f(x) > 0$ за $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$, а $f(x) < 0$ за $x \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$.
6. $k \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$. 7. $p = 3, k = -1$.
Упатство. Треба да бидат условите $f(1) = 0, f(3) = 0, D < 0$. 8. а) $x < \frac{5}{2}$; б) $x > -5$.

IV. 9

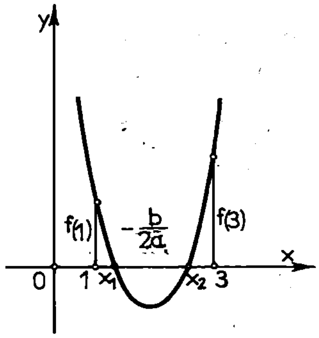
1. $\mathbf{M} = (-1, 3)$. 2. $\mathbf{M} = \mathbf{R} \setminus [-4, 2]$. 3. $x = -2$. 4. а) $\mathbf{M} = \mathbf{R}$; б) $\mathbf{M} = \{-3\}$; в) $\mathbf{M} = \varnothing$; г) $\mathbf{M} = \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{7}{5}\right\}$ 5. а) $\mathbf{D}_f = [-2, 2]$; б) $\mathbf{D}_f = \mathbf{R}$. 6. $k \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$.
7. $\mathbf{V}_f = [-3, 2]$. 8. а) $\mathbf{M} = (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$; б) $\mathbf{M} = \varnothing$; в) $\mathbf{M} = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$; г) $\mathbf{M} = \left[1, \frac{3}{2}\right]$; д) $\mathbf{M} = \varnothing$. 9. а) $\mathbf{D}_f = [-1, 3]$; б) $\mathbf{D}_f = \mathbf{R}$. 10. $x \in \{-2, -1, 0\}$.
11. а) $\mathbf{M} = \left(-3, \frac{1}{2}\right)$; б) $\mathbf{M} = \varnothing$.

IV. 10.

1. $\mathbf{Z} \setminus \{2, 3, 4, 5\}$. **2.** $\mathbf{M} = (-3, 7) \cap (-1, 9) = (-1, 7)$. **3.** $\mathbf{M} = (-5, 1] \cup \left[\frac{5}{3}, 3\right)$.
4. $\mathbf{M} = (-\infty, -6] \cup \{0\} \cup [1, 3) \cup \left(3, \frac{11}{2}\right]$. **5.** а) $\mathbf{M} = \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (2, +\infty)$;
б) $\mathbf{M} = \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right] \cup (4, +\infty)$. **6.** а) $\mathbf{M} = \left(-\frac{5}{2}, 5\right]$; б) $\mathbf{M} = [-5, 0] \cup \{4\}$.
7. а) $\mathbf{M} = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right] \cup [2, +\infty)$; б) $= \mathbf{M}\ (-4, -3) \cup (3, 4)$; в) $\mathbf{M} = \left(-4, -\frac{5}{2}\right] \cup [3, 5)$. **8.** $k \in (2, 5)$.
Упатство. Треба да бидат исполнети условите $\mathbf{D} > 0$, $q < 0$.

9. $p \in \left[4, \frac{13}{3}\right.$ **Упатство.** Треба да бидат исполнети условите: $\mathbf{D} \geqslant 0$, $f(1) > 0$, $f(3) > 0$ и $1 < -\frac{b}{2a} < 3$ (црт. 6).

10. а) За секој $k \in (0, 4)$; б) не постои таков $k \in \mathbf{R}$. **11.** $m \in (1, 2) \cup (2, +\infty)$.



црт. 6

V РАВЕНКИ ШТО СЕ СВЕДУВААТ НА КВАДРАТНИ

V. 1

1. $x_1 = 3$, $x_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **2.** $x_1 = -1$, $x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **3.** а) $x_{1,2} = \pm 1$; б) $x_{1,2} = \pm i$.

4. а) $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_{2,3} = -\frac{3}{4} \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}i$; б) $x_1 = -4$, $x_{2,3} = 2 \pm 2i\sqrt{3}$. **5.** а) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm i$.

6. Да. **7.** а) $x_1 = 2$, $x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$; б) $x_1 = -7$, $x_{2,3} = \frac{7}{2} \pm \frac{7\sqrt{3}}{2}i$.

8. а) $x_1 = \sqrt[3]{-5}$, $x_{2,3} = \sqrt[3]{5}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\sqrt[3]{5}}{2} \pm \frac{\sqrt[6]{675}}{2}i$; б) $x_1 = \sqrt[3]{7}$, $x_{2,3} = -\frac{\sqrt[3]{7}}{2} \pm \frac{\sqrt[6]{1323}}{2}i$.

9. а) $x_1 = \sqrt[3]{6}$, $x_{2,3} = -\frac{\sqrt[3]{6}}{2} \pm \frac{\sqrt[6]{972}}{2}i$; б) $x_1 = \sqrt[3]{-\frac{9}{5}}$, $x_{2,3} = \sqrt[3]{\frac{9}{25}}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

10. а) $x_{1,2} = \pm 3$, $x_{3,4} = \pm 3i$; б) $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}$, $x_{3,4} = \pm 2i\sqrt{2}$.

11. а) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_{5,6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$; б) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm i$, $x_{5,6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $x_{7,8} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$. **Упатство.** Искористи го идентитетот $x^8 - 1 \equiv (x^4 - 1)(x^4 + 1) \equiv (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$ и решениот пример 4. **12.** а) $x_{1,2} = 0$, $x_{3,4} = \pm 4$;
б) $x_{1,2} = 0$, $x_{3,4} = \pm \frac{5}{2}$.

V.2

1. а) $x_{1,2} = \pm 2$, $x_{3,4} = \pm 3$, б) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm \frac{1}{2}$. **3.** а) $x_{1,2} = \pm 3$, $x_{3,4} = \pm 2i$;

б) $x_{1,2} = 5i$, $x_{3,4} = -5i$. **4.** а) $x_{1,2,3,4} = 0$; б) $x_{1,2} = 0$, $x_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{14}}{2}$; в) $x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$, $x_{3,4} = \pm \frac{1}{2}i$.

5. а) $(x - 2i)(x + 2i)(x\sqrt{2} - 1)(x\sqrt{2} + 1)$; б) $(x - i)(x + i)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.

6. а) $x_1 = -1$, $x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_4 = -2$, $x_{5,6} = 2 \pm i\sqrt{3}$; б) $x_1 = 2$, $x_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$, $x_4 = 3$, $x_{5,6} = -\frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i$. 7. а) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 3$; б) $x_{1,2} = \pm 3$, $x_{3,4} = i$. 8. $x_{1,2} = \pm 2$, $x_{3,4} = \pm 3$.
9. $x_{1,2} = \pm a$, $x_{3,4} = \pm \frac{b}{a}$. 10. а) $x_1 = 1$, $x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_4 = 3$, $x_{5,6} = -\frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i$;
б) $x_1 = 3$, $x_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $x_4 = -2$, $x_{5,6} = 1 \pm i\sqrt{3}$. 11. $x_1 = 1$, $x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_4 = \sqrt[3]{3}$, $x_{5,6} = -\frac{\sqrt[3]{3}}{2} \pm \frac{\sqrt[6]{243}}{2}i$. 12. $x_{1,2} = \pm i$, $x_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $x_{5,6} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.
13. $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 3$, $x_4 = \frac{1}{3}$. **Упатство.** Стави $x + \frac{1}{x} = y$, ќе ја добиеш равенката $6y^2 + 35y + 50 = 0$, чии корени се $y_1 = \frac{5}{2}$, $y_2 = \frac{10}{3}$, а потоа искористи ја смената и реши ги равенките: $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ и $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$.

V. 3

1. а) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$; б) $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$. 2. $x_1 = -5$, $x_2 = 1$.
3. а) $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$. 4. $x_1 = -4$, $x_2 = -3$, $x_3 = -2$, $x_4 = -1$. 5. $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. 6. $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{1}{2}$. 7. $x_1 = -5$, $x_2 = 1$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{6}$.
8. $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2}i$. 9. $x_1 = x_2 = 1$, $x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.
10. а) $(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$; б) $(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$.

V. 4

1. $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = \frac{1}{3}$. 2. $x_1 = -1$, $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$. 3. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{1}{2}$.
Решение. Бидејќи
$$\begin{aligned} 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 &\equiv 2(x^3 - 1) - 7x(x-1) \\ &\equiv 2(x-1)(x^2 + x + 1) - 7x(x-1) \\ &\equiv (x-1)(2x^2 - 5x + 2), \end{aligned}$$
следува дека дадената равенка е еквивалентна со вкупноста равенки
$$x - 1 = 0 \quad \text{и} \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0,$$
па корените на дадената равенка се: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{1}{2}$. 4. $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
5. $x_1 = -1$, $x_{2,3} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \pm \frac{i}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$, $x_{4,5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \pm \frac{i}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.
6. а) $x_1 = -1$, $x_2 = -4$, $x_3 = -\frac{1}{4}$; б) $x_1 = -1$, $x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$. 7. а) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = \frac{1}{3}$;
б) $x_1 = 1$, $x_{2,3} = -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{5}}{3}i$. 8. а) $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 3$, $x_4 = \frac{1}{3}$;
б) $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. 9. а) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$; б) $3x^3 + 7x^2 - 7x - 3 = 0$;
в) $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$. 10 $(x-1)^2 \cdot (x-2)(2x-1)$. 11. $x = \frac{a}{4}$ или $x = \frac{3-\sqrt{8}}{8}a$.
Упатство. Волуменот е $V = (a-2x)^2 \cdot x$, од каде што: $(a-2x)^2 x = \frac{a^3}{16}$, т.е.
$$64x^3 - 64ax^2 + 16a^2x - a^3 = 0$$

Стави $x = \frac{az}{4}$, ќе добиеш $z^3 - 4z^2 + 4z - 1 = 0$, па за корените искористи дека: $0 < x < \frac{a}{2}$.

V. 5.

1. $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = -3$, $x_5 = -\frac{1}{3}$. **2.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_{4,5} = 2 \pm \sqrt{3}$. **3.** $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{5}$. **4.** $x_{1,2} = \pm 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{1}{2}$. **5.** $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 3$, $x_5 = \frac{1}{3}$. **6.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = -\frac{3}{2}$, $x_5 = -\frac{2}{3}$. **7.** $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$, $x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$. **8.** $x_{1,2} = \pm i$, $x_3 = -3$, $x_4 = -\frac{1}{3}$.
10. а) $x \geqslant \frac{3}{2}$; б) $x \in \mathbf{R}$; в) $x \geqslant 5$.

V. 6.

1. а) и в). **2.** б) Збирот на два негативни броеви не може да биде негативен број. **3.** а) $\mathbf{D} = [0, +\infty)$; б) $\mathbf{D} = [5, 7]$; в) $\mathbf{D} = \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$. **4.** а) $\mathbf{D} = \varnothing$; б) $\mathbf{D}=\{4\}$, но за $x = 4$ левата страна е еднаква на 0 ($\neq 1$). **5. Доказ.** Да ги означиме кратко равенките со $f = g$ и $f^3 = g^3$. Равенката $f^3 = g^3$ е еквивалентна со равенката $f^3 - g^3 = 0$, т.е. $(f-g)(f^2 + fg + g^2) = 0$. Бидејќи $f^2 + fg + g^2 = \frac{1}{4}\ ((2f + g)^2 + 3g^2) \geqslant 0$, следува дека равенката $f^2 + fg + g^2 = 0$ нема реални корени за $f \neq 0$ и $g \neq 0$.

Според тоа, равенките $f = g$ и $f^3 = g^3$ се еквивалентни во множеството $\mathbf{R}$.

6. а) и ѓ). **7.** а) $\mathbf{D} = \varnothing$; б) $\mathbf{D} = \varnothing$; в) $\mathbf{D} = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup [5, +\infty)$; г) $\mathbf{D} = [-1, 3]$.
9. а) $x = 1$; б) $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. **10.** а) $x = 16$; б) $x = 10$; в) $x = 7$.

V. 7 .

1. а) $x = 7$; б) $x = -4$. **2.** а) $x = -1$; б) $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{2}{3}$. **3.** а) $x = 7$; б) $x = 3 \pm \sqrt{2}$. **4.** а) $x = 1$; б) $x = -1$. **5.** а) $x = 2$; б) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. **6.** а) $x = 2$; б) $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{6}$. **7.** а) $x = 13$; б) $x = 13$; в) $x = -21$. **8.** а) $x = 3$; б) $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. **9.** а) $x_{1,2} = \pm 4$; б) $x = \frac{2}{3}$. **10.** а) $x = 0$; б) $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{5}{4}$. **11.** а) $x = 6$; б) $x = 2$.

V. 8.

1. а) $x = 7$; б) $x_1 = 6$, $x_2 = 13$. **2.** а) $x_1 = 1$, $x_2 = 27$; б) $x_1 = -6$, $x_2 = 9$. **3.** а) $x_1 = -2$, $x_2 = 9$; б) $x_1 = 2$, $x_2 = 8$. **Упатство.** Запиши ја равенката во видот

$$x^2 - 10x + 32 + \sqrt{x^2 - 10x + 32} = 20$$

а потоа стави $\sqrt{x^2 - 10x + 32} = y$, $y \geqslant 0$. **4.** $x = 1$. **5.** $x = -1$. **6.** $x_1 = 3a$, $x_2 = 4a$, $a > 0$.

7. $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}$. 8. $x = 64$. 9. $x_1 = -2$, $x_2 = 6$. 10. $x_1 = -7$, $x_2 = 2$. 11. $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$.
12. $x_1 = -3$, $x_2 = 4$. 13. $x_1 = -6$, $x_2 = -\frac{11}{2}$, $x_3 = -5$. 14. $x = 8$. 15. а) (2, 3); б) (4, –1).

V. 9.

1. (0, 1), $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. 2. (2, –4), (–4, 2). 3. (10, 2), (–2, –10) 4. (7, 5), $\left(-\frac{15}{2}, -\frac{14}{3}\right)$.
5. P_1 (1, 0), P_2 (6, 5). 6. 12 и 6. 7. а) (1, 2), $\left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right)$; б) (–2, 2), (4, 1).
8. P_1 (–1, 0), P_2 (5, 6). 9. $c = 1$.

СОДРЖИНА

Мак-Морис
070 230 303

ОП за издавање на учебници и наставни средства
„Просветно дело“ – Скопје, ул. Вељко Влаховиќ бр. 15
Градски ѕид блок 4.

За издавачот:
М-р Павле Петров

*

Илија Јанев * Иван Трајков * Никола Петрески * Глигор Тренчевски

МАТЕМАТИКА – 1
за II година на природно-математичка струка

*

Лектура
Саветка Димитрова

*

Илустрации
дипл. инж. Зоран Токиќ

*

Технички уредник
Новко Груевски

*

Корицата ја илустрирал
Илија Богоевски

*

Коректор
Благоја Гагалевски

*

Ракописот е предаден во печат мај 1996 година. Печатењето е завршено во јули 1996 година. Обем: 204 стр. Формат: 17 x 24 cm. Тираж: 2.000 примероци. Книгата е отпечатена во Графички завод „Гоце Делчев“ Скопје.

Според мислењето на Министерството за култура бр. 08-95/956-956 од 28.05.1996 година, за учебникот се плаќа повластена даночна стапка.

CIP – Каталогизација во публикација, Народна и универзитетска библиотека „Климент Охридски“, Скопје

512 (075.3)

МАТЕМАТИКА: за II година на природно-математичка струка / Илија Јанев, Никола Петрески, Иван Трајков, Глигор Тренчевски. 2. изд.– Скопје: Просветно дело, 1996. – 199 стр. : илустр. ; 24 cm

1. ЈАНЕВ, Илија