

Јово Стефановски

# ЗБИРКА ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКА

ОСМО ОДДЕЛЕНИЕ



деветгодишно  
основно образование



2013

## ПРЕДГОВОР

Оваа збирка задачи е наменета за учениците и оние кои работат со нив. Збирката е работена според новата наставна програма по физика за VIII одделение на деветгодишно основно образование.

Во збирката се застапени задачи за следните тематски целини:

1. Тела, супстанции, физички величини и мерење на физички величини;
2. Движење и сили;
3. Енергија;
4. Внатрешна енергија и топлина.

На почетокот на секоја тематска целина дадени се физичките величини, мерните единици и законите (формулите) што треба да се знаат при решавањето на задачите од соодветната тема.

Во збирката доследно е применет Меѓународниот систем (SI) на мерни единици.

Збирката содржи 858 решени задачи.

Задачите се решавани постапно, пропратени се со соодветно објаснување и коментар. Тоа треба да им помогне на учениците да се оспособат да решаваат задачи од физика. Со тоа, можеби кај учениците ќе го снема стравот од задачите и одбојноста кон нив.

Задачите во најголем дел се подредени по тежина, од поедноставни, во кои треба да се заменат бројните вредности и да се пресмета, до посложени, за кои е потребно поголемо размислување и користење на стекнатите знаења.

На крајот на секоја тема дадени се *задачи ѝлус*. Овие задачи се со посложени барања и се наменети за подобрите ученици и учениците кои се подготвуваат за натпревари по физика.

Изборот на задачите во збирката е прилично широк и им дава можност на наставниците да избираат според способностите на секој ученик.

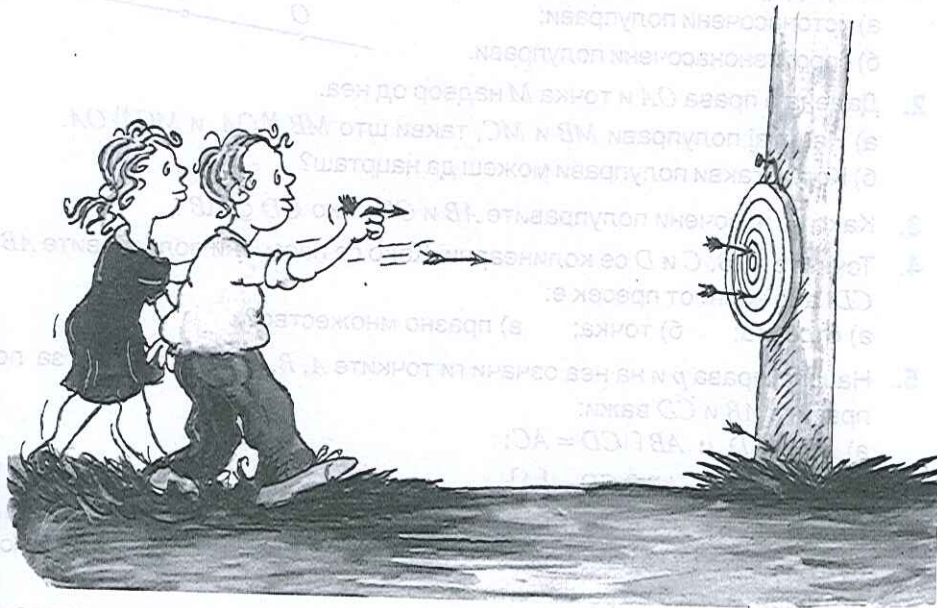
Учениковата оригиналност и самостојност, како и неговото размислување, на што посебно се инсистира во современата настава по физика, најмногу доаѓа до израз при решавањето на задачите.

Збирката обилува со слики, графици и илустрации со кои настојваме да ги осмислиме текстовите на задачите, да ги направиме поочигледни и разбирливи.

Авторите

## Содржина на шемаџа

1	Насоченост на полуправите. Насока .....	4	7	Својства на транслацијата ...	13
2	Вектори .....	6	8	Примена на транслацијата .	15
3	Еднаквост на вектори .....	8	9	Насочен агол .....	16
4	Собирање на вектори .....	9	10	Ротација .....	18
5	Одземање на вектори .....	11	11	Примена на ротацијата .....	20
6	Транслагција .....	12	12	Задачи плус за тема 1 .....	21



## Треба да знаеш

Две полуправи  $AB$  и  $CD$  се истонасочени ако лежат на една права и  $CD \subseteq AB$  (или  $AB \subseteq CD$ ) или ако лежат на паралелни прави и припаѓаат на иста полурамнина со гранична права  $AC$ .

Означуваме:  $AB \uparrow CD$

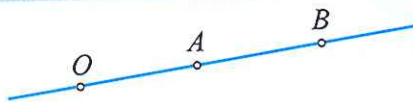
Две полуправи  $MN$  и  $PQ$  се спротивнонасочени ако лежат на иста права и нивниот пресек е точка, отсечка или празно множество, или ако лежат на паралелни прави и во различни полурамнини со гранична права  $MP$ .

Означуваме:  $MN \downarrow PQ$

Множеството од сите истонасочени полуправи определува една иста насока  $S$ .

- а) Ако  $AB \uparrow CD$  и  $CD \uparrow MN$ , тогаш  $AB \uparrow MN$ .  
 б) Ако  $AB \downarrow CD$  и  $CD \downarrow MN$ , тогаш  $AB \downarrow MN$ .

- Според цртежот именувај две:
  - истонасочени полуправи;
  - спротивнонасочени полуправи.
- Дадена е права  $OA$  и точка  $M$  надвор од неа.
  - Нацртај полуправи  $MB$  и  $MC$ , такви што  $MB \uparrow OA$  и  $MC \downarrow OA$ .
  - Колку такви полуправи можеш да нацрташ?
- Како се насочени полуправите  $AB$  и  $CD$ , ако  $CD \subseteq AB$ ?
- Точките  $A, B, C$  и  $D$  се колинеарни. Како се насочени полуправите  $AB$  и  $CD$ , ако нивниот пресек е:
  - отсечка;
  - точка;
  - празно множество?
- Нацртај права  $p$  и на неа означи ги точките  $A, B, C$  и  $D$ , така што за полуправите  $AB$  и  $CD$  важи:
  - $AB \uparrow CD$  и  $AB \cap CD = AC$ ;
  - $AB \downarrow CD$  и  $AB \cap CD = \{A\}$ .
- Полуправата  $AB$  е подмножество на правата  $m$ , а во истата рамнина полуправата  $CD$  е подмножество на правата  $p$ . Каква е заемната положба на правите  $m$  и  $p$  во рамнината ако:
  - $AB \uparrow CD$ ;
  - $AB \downarrow CD$ ;
  - $AB$  и  $CD$  не се ниту истонасочени, ниту спротивнонасочени полуправи?



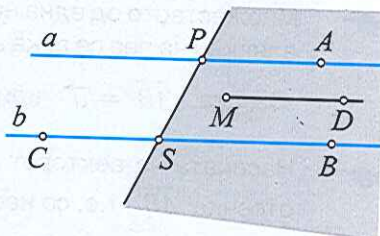
7. Полуправите  $XY$  и  $XZ$  лежат на една права. Одреди го нивниот пресек ако:  
 а)  $XY \uparrow XZ$ ; б)  $XY \downarrow XZ$ .
8. Полуправите  $OA$ ,  $O_1A_1$  и  $O_2A_2$  лежат на три различни паралелни прави. Како се насочени полуправите  $OA$  и  $O_2A_2$  ако:  
 а)  $OA \uparrow O_1A_1$  и  $O_1A_1 \uparrow O_2A_2$ ; б)  $OA \downarrow O_1A_1$  и  $O_1A_1 \downarrow O_2A_2$ ?

9. Правите  $a$  и  $b$  на цртежот се паралелни. Воочи ги означените полуправи.

а) Именувај ги сите полуправи што припаѓаат на обоената полурамнина со гранична права  $SP$ ;

б) Именувај две истонасочени и две спротивнонасочени полуправи;

в) Во кој случај  $MD \uparrow PA$ ?



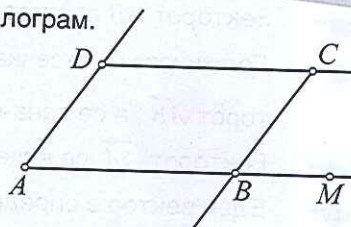
10. Четириаголникот  $ABCD$  на цртежот е паралелограм.

Според ознаките на цртежот именувај:

а) три истонасочени полуправи;

б) две спротивнонасочени полуправи;

в) гранична права на полурамнината во која  $DC \uparrow BM$ .

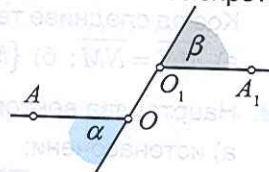


11. Колку најмногу истонасочени полуправи можеш да нацрташ во една полурамнина? Што определува множеството од тие полуправи?

12. Во триаголникот  $ABC$  точките  $M$  и  $N$  се средини на страните  $AC$  и  $BC$ , соодветно. Докажи дека полуправите  $AB$  и  $MN$  се истонасочени.

13. Нека  $S$ ,  $M$ ,  $N$  и  $P$  се соодветно средни точки на страните  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  на четириаголникот  $ABCD$ . Докажи дека полуправите  $SP$  и  $NM$  се спротивнонасочени.

14. На цртежот аглите  $\alpha$  и  $\beta$  се еднакви. Докажи дека полуправите  $OA$  и  $O_1A_1$  се спротивнонасочени.

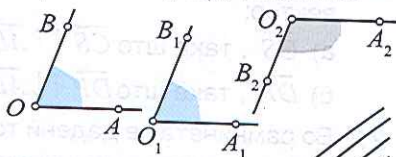


15. На цртежот се дадени три агли со заемно паралелни краци, така што:

$$\angle AOB = \angle A_1O_1B_1 \text{ и } \angle AOB + \angle A_2O_2B_2 = 180^\circ.$$

Како се насочени краците на аглите:

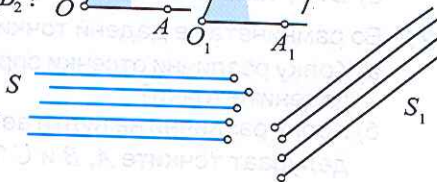
а)  $\angle AOB$  и  $\angle A_1O_1B_1$ ; б)  $\angle AOB$  и  $\angle A_2O_2B_2$ ?



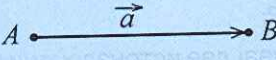
16. На цртежот се претставени две множества со истонасочени полуправи.

Колку различни насоки определуваат

множествата  $S$  и  $S_1$ ?

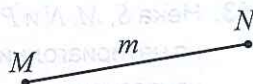


## Треба да знаеш

- Отсечката  $AB$  на која едната крајна точка се зема за почеток, а втората точка за крај се вика *насочена отсечка* и се означува со  $\overrightarrow{AB}$ .
- Множеството од една насочената отсечка  $\overrightarrow{AB}$  и сите насочени отсечки еднакви на неа се вика *вектор*.
- Ознака:  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  или на цртеж 
- Насоката на векторот  $\overrightarrow{AB}$  е определена со насоката на насочената отсечка  $\overrightarrow{AB}$ , т.е. со насоката на полуправата  $AB$ .
- Векторот  $\overrightarrow{AB}$  претставува подреден пар точки  $(A, B)$ .
- Должината на отсечката  $AB$  се вика *должина* (или *инџензијет*) на векторот  $\overrightarrow{AB}$ , а се означува  $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}| = \overline{AB} = a$ .
- Векторот  $\overrightarrow{AA}$  се вика *нулти* вектор, т.е.  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ , а  $|\overrightarrow{AA}| = |\vec{0}| = 0$ .
- Еден вектор е определен ако е дадена неговата насока и должината или ако е даден неговиот подреден пар точки  $(A, B)$ .
- Векторите што имаат иста насока или спротивни насоки се викаат *колинеарни* вектори. Нултиот вектор е колинеарен со секој друг вектор.

17. Запиши ги векторите што се определени со подредените парови точки:  $(A, B)$ ,  $(C, D)$  и  $(E, F)$ .

18. Нека  $M$  и  $N$  се крајни точки на отсечката  $m$ .



Кое од следниве тврдења е точно:

а)  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NM}$ ; б)  $\{M, N\} = \{N, M\}$ ; в)  $(M, N) = (N, M)$ ?

19. Нацртај два вектори  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$ , така што тие се:

а) истонасочени; б) спротивнонасочени.

20. Нацртај вектор  $\overrightarrow{AB}$  и означи точки  $C$  и  $D$  (како на цртежот). Нацртај вектор:



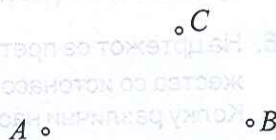
а)  $\overrightarrow{CS}$ , така што  $\overrightarrow{CS} \uparrow \overrightarrow{AB}$ ;

б)  $\overrightarrow{DP}$ , така што  $\overrightarrow{DP} \downarrow \overrightarrow{AB}$ .

21. Во рамнината се дадени точките  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

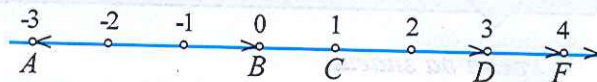
а) Колку различни отсечки определуваат дадените точки?

б) Колку различни не нулти вектори определуваат точките  $A$ ,  $B$  и  $C$ ?

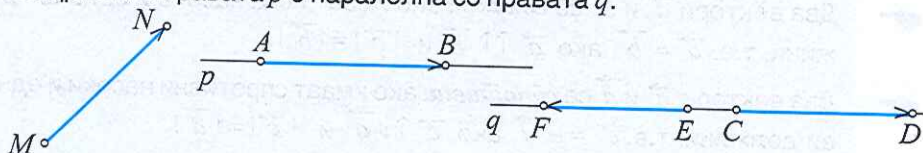


22. На цртежот е дадена бројна права со единична отсечка од 1 cm. Одреди го интензитетот на секој од векторите:

$\vec{AB}$ ,  $\vec{CD}$ ,  $\vec{CF}$  и  $\vec{BA}$ .



23. На цртежот правата  $p$  е паралелна со правата  $q$ .

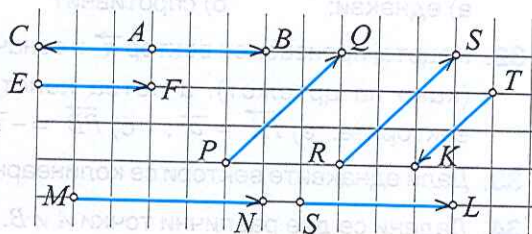


Кои од векторите на цртежот се колинеарни?

24. Познато е дека векторите  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$  се колинеарни. Дали се колинеарни векторите: а)  $\vec{AB}$  и  $\vec{DC}$ ; б)  $\vec{BA}$  и  $\vec{DC}$ ?

25. На цртежот се дадени неколку вектори во квадратна мрежа.

- а) Како се насочени векторите со почетна точка  $A$ ?  
 б) Кои вектори се колинеарни со векторот  $\vec{EF}$ ?



26. Нацртај правоаголник  $ABCD$ , а потоа на неговите страни означи два вектори:  
 а) со иста насока и еднаков интензитет;  
 б) со ист интензитет, а спротивни насоки.

27. Нацртај два вектори кои имаат заедничка почетна точка, ист интензитет, а различни насоки.

28. Дадени се четири точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  (како на цртежот). Од сите вектори со почеток во една точка, а со крај во друга точка, определи:

- а) три истонасочени вектори;  
 б) една тројка колинеарни вектори од кои два со иста насока и еден со спротивна насока.



29. Покажи дека три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  се колинеарни, ако и само ако векторите  $\vec{AB}$  и  $\vec{BC}$  се колинеарни.

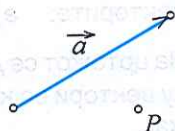
30. Точките  $P$  и  $S$  се средини на страните  $AC$  и  $BC$  на триаголникот  $ABC$  со страна  $\overline{AB} = 7$  cm.

- а) Одреди го интензитетот на векторот  $\vec{PS}$ .  
 б) Означи вектор  $\vec{AD}$ , таков што  $\vec{AD} \uparrow \uparrow \vec{PS}$  и  $|\vec{AD}| = |\vec{PS}|$ .

## Треба да знаеш

- Два вектори  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  се **еднакви** ако имаат иста насока и еднакви должини, т.е.  $\vec{a} = \vec{b}$  ако  $\vec{a} \uparrow \vec{b}$  и  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ .
- Два вектори  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  се **спротивни** ако имаат спротивни насоки и еднакви должини, т.е.  $\vec{c} = -\vec{d}$  ако  $\vec{c} \updownarrow \vec{d}$  и  $|\vec{c}| = |\vec{d}|$ .
- За два вектори велеме дека се **надоврзани** ако крајот на едниот вектор се совпаѓа со почетокот на другиот вектор.

31. Кои од векторите на цртежот во задача 25 се:  
а) еднакви;      б) спротивни?
32. Нацртај произволен вектор  $\vec{a}$  и означи точка  $P$  (како на цртежот), а потоа конструирај ги векторите: а)  $\vec{PA} = \vec{a}$ ; б)  $\vec{PB} = -\vec{a}$ .
33. Дали еднаквите вектори се колинеарни? Образложи.
34. Дадени се две различни точки  $A$  и  $B$ . Покажи дека  $\vec{AB} = -\vec{BA}$ .
35. Даден е вектор  $\vec{a}$ . Колку вектори можеш да нацрташ во рамнината што се еднакви со дадениот вектор? Колку вектори еднакви со дадениот вектор можеш да нацрташ со дадена почетна точка  $O$ ?
36. Нацртај правоаголник  $ABCD$  и на неговите страни означи два еднакви и два спротивни вектори. Дали векторите  $AC$  и  $BD$  се еднакви?
37. Нека  $ABCD$  е паралелограм и  $S$  е пресекот на неговите дијагонали. Провери кои од следниве парови вектори се еднакви, а кои се спротивни:  
а)  $\vec{AB}, \vec{CD}$ ; б)  $\vec{AB}, \vec{BC}$ ; в)  $\vec{AS}, \vec{SC}$ ; г)  $\vec{BS}, \vec{DS}$ ; д)  $\vec{SA}, \vec{CS}$ .
38. Покажи дека е точно тврдењето:  
а)  $\vec{AB} = \vec{AB}$ , за секој вектор  $\vec{AB}$ ;  
б) ако  $\vec{AB} = \vec{CD}$ , тогаш и  $\vec{CD} = \vec{AB}$ ;  
в) ако  $\vec{AB} = \vec{CD}$  и  $\vec{CD} = \vec{EF}$ , тога  $\vec{AB} = \vec{EF}$ .
39. Нацртај два истонасочени вектори  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , а потоа на векторот  $\vec{a}$  надоврзи го векторот  $\vec{b}$ .
40. Нацртај два спротивнонасочени вектори  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , и на векторот со помал интензитет надоврзи го другиот вектор.





41. Нацртај триаголник  $ABC$  и означи ги неговите страни така што да бидат надоврзани вектори.
42. Нацртај три неколинеарни вектори  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  и  $\vec{OC}$ , а потоа на секој од нив надоврзи ги другите два вектори.

## 4

## СОБИРАЊЕ НА ВЕКТОРИ

### Треба да знаеш

- Збирот на два или повеќе надоврзани вектори е вектор чиј почеток се совпаѓа со почетокот на првиот вектор, а крајот му се совпаѓа со крајот на последниот вектор (правило на полигон), т.е.

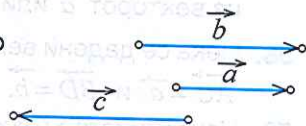
$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \dots + \vec{KL} + \vec{LM} = \vec{AM}.$$

- За кои било вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  е точно равенството:
  - а)  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} = \vec{0} + \vec{a}$ ;      б)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  (комутативно својство);
  - в)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  (асоцијативно својство).

43. Нацртај два истонасочени вектори  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и два спротивнонасочени вектори  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$ . Конструирај го векторот:
- а)  $\vec{OA} = \vec{a} + \vec{b}$ ;      б)  $\vec{SB} = \vec{c} + \vec{d}$ .

44. Дадени се колинеарните вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  (како на цртежот).

Конструирај го векторот  $\vec{AB} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .



45. Нацртај неколинеарни вектори  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и конструирај го векторот  $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$  по правило на: а) триаголник; б) паралелограм.

46. Нека точките  $M$ ,  $N$  и  $P$  припаѓаат на една права и нека  $N$  лежи меѓу  $M$  и  $P$ . Одреди го векторот:

а)  $\vec{MN} + \vec{NP}$ ;      б)  $\vec{MP} + \vec{PN}$ ;      в)  $\vec{MN} + \vec{NM} + \vec{MP}$ .

47. Дадени се неколинеарни вектори  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$ . Кој вектор треба да се додаде (надоврзе) на векторот  $\vec{AB}$  за да се добие векторот  $\vec{AC}$ ?

48. Во рамнината нацртај ги неколинеарните вектори  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  и  $\vec{OC}$ , а потоа конструирај го збирот:

а)  $\vec{OA} + \vec{OB}$ ;      б)  $\vec{OA} + \vec{OC}$ ;      в)  $\vec{OB} + \vec{OC}$ ;      г)  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ .

49. Нацртај триаголник  $ABC$  и одреди го векторот што е еднаков на збирот:

а)  $\vec{AB} + \vec{BC}$ ;      б)  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$ ;

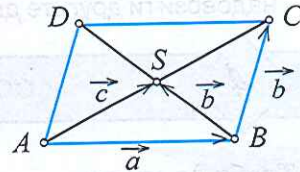
50. Нацртај произволен вектор  $\vec{a}$  и претстави го како збир од три вектори.

51. Даден е петаголник  $ABCDE$ . Докажи дека е точно равенството:

а)  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AE} + \vec{ED} + \vec{DC}$ ; б)  $\vec{CD} + \vec{DA} + \vec{EA} = \vec{CB} + \vec{BA}$ .

52. Четириаголникот  $ABCD$  е паралелограм. Со помош на означените вектори на цртежот одреди го збирот:

а)  $\vec{a} + \vec{b}$ ; б)  $\vec{c} + \vec{b}$ ; в)  $\vec{a} + \vec{d}$ .



53. Дадени се векторите  $|\vec{a}| = 4\text{ cm}$  и  $|\vec{b}| = 3\text{ cm}$ . Објасни во кој случај:

а)  $|\vec{a} + \vec{b}| = 7\text{ cm}$ ; б)  $|\vec{a} + \vec{b}| = 1\text{ cm}$ .

54. Нека  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  се истонасочени вектори. Одреди ги насоката и интензитетот на векторот  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ .

55. Нека  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  се спротивнонасочени вектори. Одреди ги насоката и интензитетот на векторот  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ .

56. Векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  се колинеарни и притоа:  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 5$ . Одреди го интензитетот на векторот  $\vec{a} + \vec{b}$ , ако векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  се:

а) истонасочени; б) спротивнонасочени.

57. Дали должината на векторот  $\vec{a} + \vec{b}$  може да биде помала од должината на векторот  $\vec{a}$  или од должината на векторот  $\vec{b}$ ?

58. Нека се дадени векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Конструирај паралелограм  $ABCD$  во кој  $\vec{AC} = \vec{a}$  и  $\vec{BD} = \vec{b}$ .

59. Нека точката  $S$  е пресек на дијагоналите на паралелограмот  $ABCD$ . Упрости ги изразите (дадениот збир изрази го со еден вектор):

а)  $(\vec{BC} + \vec{SA}) + \vec{SC}$ ; б)  $(\vec{AB} + \vec{DS}) + \vec{SA}$ ;

в)  $\vec{DS} + (\vec{SA} + \vec{BC})$ ; г)  $\vec{DS} + \vec{BC} + \vec{SA} + \vec{AB}$ .

60. Точката  $O$  лежи во рамнината на паралелограмот  $ABCD$ , надвор од него. Конструирај ги векторите  $\vec{OA} + \vec{OC}$  и  $\vec{OB} + \vec{OD}$ . Што воочуваш?

61. Дадени се неколинеарните точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Конструирај точка  $X$ , така што  $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AX} = \vec{0}$ .

62. Водата во една река тече со брзина  $6\text{ m}$  во секунда. Еден чамец има сопствена брзина  $8\text{ m}$  во секунда. Одреди ги насоката и брзината на чамецот во реката ако тој се движи:

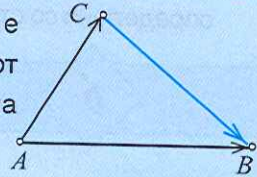
а) во иста насока со водата; б) спротивно од текот на водата; в) од едниот брег нормално на другиот брег.

63. Даден е векторот  $\vec{a}$ . Запиши го скратено збирот:

а)  $\vec{a} + \vec{a}$ ; б)  $(-\vec{a}) + (-\vec{a}) + (-\vec{a})$ .

## Треба да знаеш

Разликата на два вектори со заеднички почеток е векторот чиј почеток се совпаѓа со крајот на векторот намалител, а крајот му се совпаѓа со крајот на векторот намаленик, т.е.  $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$ .



64. Дадени се векторите  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$ . Одреди ја разликата:  
а)  $\vec{OA} - \vec{OB}$ ; б)  $\vec{OB} - \vec{OA}$ .
65. Нацртај два неколинеарни вектори  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$  и конструирај го векторот  $\vec{MN} = \vec{AB} - \vec{CD}$ .
66. Избери на цртеж два истонасочени вектори  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и конструирај го векторот  
а)  $\vec{AX} = \vec{a} - \vec{b}$ ; б)  $\vec{BY} = \vec{a} - (-\vec{a})$ .
67. Претстави на цртеж два спротивнонасочени вектори  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  и конструирај го векторот:  
а)  $\vec{MN} = \vec{m} - \vec{n}$ ; б)  $\vec{PS} = \vec{n} - \vec{m}$ .
68. Даден е триаголник  $ABC$ . Одреди го векторот:  
а)  $\vec{AB} - \vec{AC}$ ; б)  $\vec{CA} - \vec{CB}$ ; в)  $\vec{AB} + \vec{BC} - \vec{AC}$ .
69. Нацртај правоаголник  $ABCD$  и означи  $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{BC} = \vec{b}$ . Со помош на векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  изрази го векторот:  
а)  $\vec{AC}$ ; б)  $\vec{BD}$ .
70. Нацртај произволен вектор  $\vec{x}$  и претстави го како разлика од два:  
а) колинеарни вектори  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ; б) неколинеарни вектори  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ .
71. Точката  $O$  е пресек на дијагоналите на паралелограмот  $ABCD$ . Нека  $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{BO} = \vec{b}$ ,  $\vec{BC} = \vec{d}$  и  $\vec{AC} = \vec{c}$ . Одреди ги векторите:  
а)  $\vec{d} - \vec{a}$ ; б)  $\vec{b} - \vec{c}$ ; в)  $\vec{d} + \vec{c} - \vec{b}$ .
72. Даден е векторот  $\vec{AB} = \vec{p}$ . Одреди вектор  $\vec{q}$ , таков што  $\vec{p} - \vec{q} = \vec{0}$ .
73. Во еден паралелограм  $ABCD$  се означени векторите  $\vec{AB} = \vec{x}$  и  $\vec{AC} = \vec{y}$ . Изрази го секој од векторите  $\vec{AD}$ ,  $\vec{BC}$  и  $\vec{DB}$  со помош на векторите  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$ .
74. Нацртај произволен четириаголник  $MNPQ$  и стави  $\vec{MN} = \vec{a}$ ,  $\vec{MP} = \vec{b}$  и  $\vec{MQ} = \vec{c}$ . Со помош на именуваните вектори изрази ги сите вектори што се определени со темињата на четириаголникот.

75. Нацртај петаголник  $ABCDE$  и на неговите страни или дијагонали означи три пара вектори чија разлика е векторот  $\vec{AB}$ .
76. Даден е четириаголник  $ABCD$  и точка  $O$ . Нека  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$  и  $\vec{OD} = \vec{d}$ . Со помош на дадените вектори изрази ги сите вектори што се определени со страните и дијагоналите на дадениот четириаголник.

## 6

## ТРАНСЛАЦИЈА

### Треба да знаеш

Ако за секој пар точки  $A$  и  $A_1$  од фигурите  $F$  и  $F_1$  е исполнет условот  $\vec{AA}_1 = \vec{a}$ , тогаш велиме дека фигурата  $F_1$  е слика на фигурата  $F$  при **транслација** (или паралелно поместување) во рамнината за вектор  $\vec{a}$ , а запишуваме:

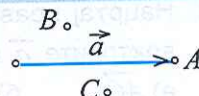
$$A \xrightarrow{\vec{a}} A_1 \text{ или } A_1 = t_{\vec{a}}(A), \text{ т.е. } F_1 = t_{\vec{a}}(F).$$

Транслацијата за вектор  $\vec{0}$  се вика идентична транслација.

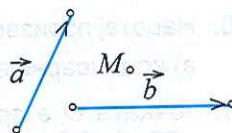
Една транслација е определена ако се дадени:

$$F \text{ и } \vec{a}, F \text{ и } t_{\vec{a}}(F), \vec{a} \text{ и } t_{\vec{a}}(F).$$

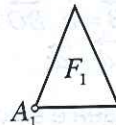
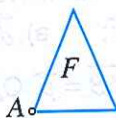
77. Дадени се векторот  $\vec{a}$  и точките  $A, B$  и  $C$ . Изврши транслација на точките  $A, B$  и  $C$  за векторот  $\vec{a}$ .



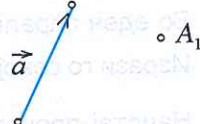
78. Нацртај вектори  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и означи точка  $M$  (како на цртежот), а потоа конструирај ги точките  $t_{\vec{a}}(M)$  и  $t_{\vec{b}}(M)$ .



79. На цртежот фигурата  $F_1$  е слика на фигурата  $F$  при транслација за некој вектор  $\vec{a}$ . Одреди го векторот на оваа транслација ако  $t_{\vec{a}}(A) = A_1$ .

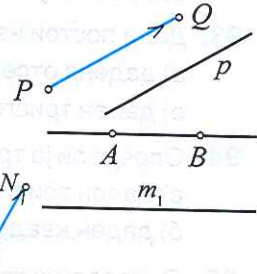


80. Одреди ја точката  $A$ , ако е дадена нејзината слика  $A_1$  при транслација за векторот  $\vec{a}$ .



81. Во рамнината се дадени триаголник  $ABC$  и точка  $M$  надвор од него. Изврши транслација на  $\triangle ABC$ , така што темето  $A$  да се преслика во точката  $M$ .

82. Нацртај правоаголник  $ABCD$  и изврши транслација за векторот:  
а)  $\vec{AC}$ ;      б)  $\vec{BD}$ .
83. Нацртај отсечка  $\overline{AB} = 4\text{ cm}$  и означи точка  $S_1$  која не припаѓа на таа отсечка. Изврши транслација на отсечката  $AB$ , така што нејзината средина  $S$  да се преслика во точката  $S_1$ .
84. Нацртај кружница  $k(O, r = 3\text{ cm})$  и означи точка  $T \in k$ . Конструирај ја кружницата  $k_1 = t_{\vec{OT}}(k)$ .
85. Направи цртеж сличен на дадениот и нацртај ги правите што се слики на правите  $AB$  и  $p$  ( $p \parallel PQ$ ) при транслација за векторот  $\vec{PQ}$ .
86. Нацртај ја правата  $m$  која при транслација за векторот  $\vec{MN}$  се пресликува во правата  $m_1$ .
87. Нацртај неколинеарни вектори  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и точка  $A$ . Изврши транслација на точката  $A$  за векторот  $\vec{a} + \vec{b}$ .

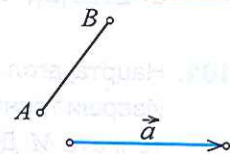


## 7 СВОЈСТВА НА ТРАНСЛАЦИЈАТА

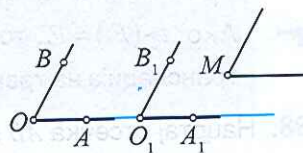
### Треба да знаеш

- ☛ Секоја точка од рамнината е слика на друга точка од таа рамнина при некоја транслација  $t_{\vec{a}}$ .
- ☛ Ако отсечката  $A_1B_1$  е слика на отсечката  $AB$  при транслацијата  $t_{\vec{a}}$ , тогаш  $\overline{A_1B_1} = \overline{AB}$  и  $A_1B_1 \parallel AB$ .
- ☛ При секоја транслација дадена права се пресликува во права паралелна со дадената.
- ☛ Ако фигурата  $F_1$  е слика на фигурата  $F$  при транслацијата  $t_{\vec{a}}$ , тогаш  $F_1$  е складна на  $F$ ,  $F_1 \cong F$ .
- ☛ Ако  $t_{\vec{a}}(F) = F_1$ , тогаш  $t_{-\vec{a}}(F_1) = F$ , т.е.  $t_{-\vec{a}}$  претставува инверзна транслација на транслацијата  $t_{\vec{a}}$ .

88. Нацртај отсечка  $AB$  и вектор  $\vec{a}$  (како на цртежот) и изврши транслација на отсечката  $AB$  за векторот  $\vec{a}$ . Докажи дека точките  $A, B, t_{\vec{a}}(A)$  и  $t_{\vec{a}}(B)$  се темиња на паралелограм.

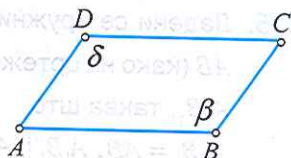


89. Дадени се триаголник  $ABC$  и вектор  $\vec{a}$ . Докажи дека  $\Delta ABC \cong t_{\vec{a}}(\Delta ABC)$ .
90. Даден е вектор  $\vec{AB}$ . Нацртај неколку прави кои при трансляција за векторот  $\vec{AB}$  се пресликуваат сами на себе.
91. Дадена е права  $a$ . Нацртај неколку вектори на трансляции при кои правата  $a$  се пресликува сама на себе.
92. Правите  $a$  и  $b$  се паралелни. Определи ја трансляцијата при која правата  $a$  се пресликува во правата  $b$ .
93. Дали постои не нулти вектор, така што при трансляција за тој вектор:  
а) дадена отсечка се пресликува сама на себе;  
б) даден триаголник се пресликува сам на себе.
94. Определи ја трансляцијата при која една страна на:  
а) даден триаголник се пресликува во друга страна на тој триаголник;  
б) даден квадрат се пресликува во друга страна од истиот квадрат.
95. Определи ја трансляцијата при која дадена отсечка се пресликува во друга отсечка која со дадената има точно една заедничка точка.
96. Отсечките  $AB$  и  $CD$  се паралелни и еднакви. Дали секогаш при трансляција за векторот  $\vec{AC}$  отсечката  $AB$  се пресликува во отсечката  $CD$ ?
97. Полуправите  $OA$  и  $O_1A_1$  се истонасочени. Определи ги сите трансляции при кои полуправата  $OA$  се пресликува:  
а) на полуправата  $O_1A_1$ ;  
б) во полуправа  $O_1A_1$ .
98. При некоја трансляција триаголникот  $ABC$  е пресликан во триаголник  $A_1B_1C_1$ . Определи ја трансляцијата при која триаголникот  $A_1B_1C_1$  ќе се преслика в триаголникот  $ABC$ .
99. Отсечката  $AB$  со една трансляција е пресликана во отсечка  $A_1B_1$ , а отсечката  $A_1B_1$  со друга трансляција е пресликана во отсечка  $A_2B_2$ .  
а) Дали отсечките  $A_2B_2$  и  $AB$  се еднакви?  
б) Со која трансляција отсечката  $AB$  може непосредно да се преслика во отсечката  $A_2B_2$ ?
100. Според цртежот, определи ја трансляцијата при која аголот  $AOB$  е пресликан во:  
а)  $\angle A_1O_1B_1$ ; б)  $\angle M$ .
101. Нацртај агол  $AOB$  и на кракот  $OB$  означи точка  $M$ , различна од точката  $O$ . Изврши трансляција на аголот  $AOB$ , така што точката  $O$  да се помести во точката  $M$ . Докажи дека аголот  $AOB$  и неговата слика се еднакви.



102. Докажи дека е точно тврдењето:  
 а) Два агли со пар по пар спротивнонасочени краци се еднакви.  
 б) Два агли на кои едниот пар краци им се истонасочени, а другиот пар спротивнонасочени се суплементни.
103. Кој агол има својство да е еднаков со секој агол кој со него има паралелни краци?

104. За паралелограмот  $ABCD$  на цртежот точно е тврдењето дека спротивните агли се еднакви, т.е.  $\beta = \delta$ . Докажи ја точноста на ова тврдење, така што со примена на транслација аглие  $\beta$  и  $\delta$  ќе ги поместиш во накрсни агли.



105. Нацртај две паралелни прави  $a$  и  $b$  и пресечи ги со трета права  $t$ . Именувај ги сите 8 агли кои притоа се добиваат.  
 а) Покажи дека кои било два од аглие се агли со паралелни краци.  
 б) Избери еден од аглие и неговата големина спореди ја со големините на останатите агли.

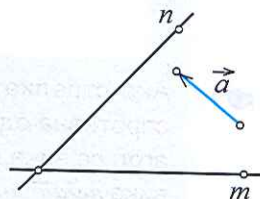
106. Одреди ги аглие  $\alpha$  и  $\beta$ , ако краците им се паралелни, а нивниот збир е:  
 а)  $240^\circ$ ; б)  $130^\circ$ ; в)  $180^\circ$ .
107. Краците на аглие  $\alpha$  и  $\beta$  се паралелни, а нивниот пресек е четириаголник. Кој вид е тој четириаголник и каков вид е аголот  $\beta$ , ако  $\alpha$  е остар агол?

108. Во рамнината се дадени агли со паралелни краци  $\alpha$  и  $\beta$ . Одреди ги тие али ако се знае дека аголот  $\alpha$  е три пати поголем од аголот  $\beta$ .

109. Аглие  $\alpha$  и  $\beta$  се агли со паралелни краци, а нивната разлика е  $50^\circ$ . Одреди ги нивните големини.

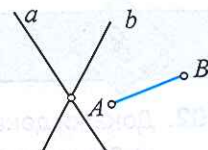
110. Со примена на транслација докажи дека збирот на алите во четириаголник е  $360^\circ$ .

111. На цртежот се дадени правите  $m$  и  $n$  и векторот  $\vec{a}$ . На правата  $n$  конструирај точка  $A_1$  која е слика на точка  $A$  од полуправата  $m$  при транслацијата  $t_{\vec{a}}$ .

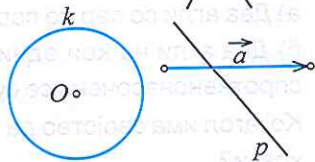


112. Во внатрешната област на остриот агол  $POQ$  е дадена отсечка  $AB$ , таква што правата  $AB$  ги сече краците на аголот  $POQ$ . Конструирај отсечка што е паралелна и еднаква на отсечката  $AB$  и нејзините крајни точки лежат на краците на дадениот агол.

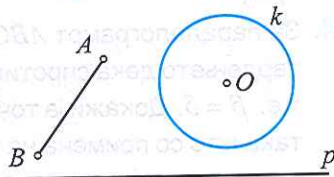
113. Дадени се прави  $a$  и  $b$  што се сечат и отсечка  $AB$  (како на цртежот). Конструирај отсечка паралелна и еднаква на отсечката  $AB$ , чии крајни точки лежат на дадените прави.



114. На цртежот се дадени кружница  $k$ , вектор  $a$  и права  $p$ . На правата  $p$  конструирај точка  $P_1$ , која е слика на точка  $P$  од кружницата  $k$  при трансформација за вектор  $\vec{a}$ .



115. Дадени се кружница  $k$ , права  $p$  и отсечка  $AB$  (како на цртежот). Конструирај отсечка  $A_1B_1$ , таква што  $A_1B_1 = AB$ ,  $A_1B_1 \parallel AB$ ,  $A_1 \in k$  и  $B_1 \in p$ .



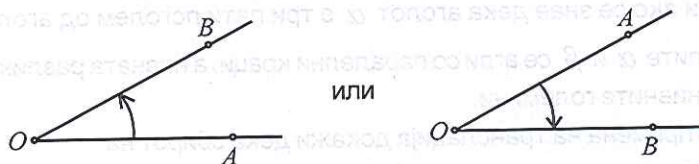
116. Конструирај трапез ако се познати основите и дијагоналите.

## 9

## НАСОЧЕН АГОЛ

### Треба да знаеш

- Аголот чии краци претставуваат подреден пар полуправи се вика **насочен агол**.
- Со подредениот пар полуправи  $(OA, OB)$  е определен насочениот агол  $\angle AOB$ , кој е претставен на цртежот што следува.



- Ако стрелката на лакот од аголот означува насока на движење спротивна од насоката на движење на стрелките од часовникот, тој агол се вика **позитивно насочен агол**. Во спротивен случај, аголот се вика **негативно насочен**.
- Големината на позитивно, односно негативно насочен агол се изразува со позитивен, односно негативен број.
- Два истонасочени агли со еднакви големини се викаат **еднакви насочени агли**.



117. Нацртај еден позитивно насочен тап агол и еден остар агол што е негативно насочен.

118. Нацртај полуправа  $OA$  и конструирај ги аглите  $\overrightarrow{\angle AOB} = 45^\circ$ ,  $\overrightarrow{\angle AOC} = -90^\circ$  и  $\overrightarrow{\angle AOM} = 60^\circ$ . Одреди ја големината на:  
а)  $\overrightarrow{\angle BOC}$ ; б)  $\overrightarrow{\angle COB}$ ; в)  $\overrightarrow{\angle MOB}$ .

119. На цртежот се претставени насочени агли.



а) Именувај го секој од насочените агли. б) Запиши ги складните агли. в) Запиши ги истонасочените агли. г) Запиши ги еднаквите насочени агли.

120. Колку насочени агли се определени со подредување на краците на даден агол  $XOY$ ? Именувај ги тие агли.

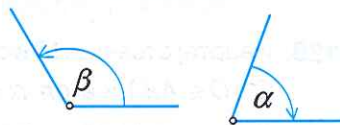
121. Правите  $a$  и  $b$  се сечат во точката  $O$ . Користејќи ги добиените полуприви означи  $\overrightarrow{\angle AOB} = \overrightarrow{\angle COD}$  и одреди ги големините на  $\overrightarrow{\angle COA}$  и  $\overrightarrow{\angle AOC}$ .

122. Нека  $\overrightarrow{\angle MON} = 42^\circ 30'$ . На што е еднаков  $\overrightarrow{\angle NOM}$ ?

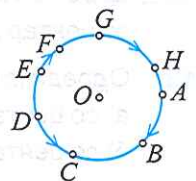
123. Дадени се насочените агли  $\alpha = 45^\circ 30'$ ,  $\beta = -60^\circ$  и  $\gamma = 100^\circ 30'$ . Одреди ја вредноста на изразот:

а)  $\alpha + \beta$ ; б)  $\alpha + \gamma$ ; в)  $\alpha - \beta - \gamma$ .

124. Дадени се насочените агли  $\alpha$  и  $\beta$  (како на цртежот). Конструирај ги насочените агли  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ , такви што  $\alpha_1 = \alpha$  и  $\beta_1 = \beta$ .

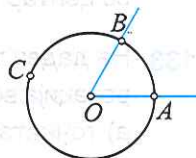


125. Според цртежот, одреди кои од означените кружни лаци се истонасочени. Како е насочен кружниот лак  $\widehat{DC}$ ?



126. Точката  $A$  припаѓа на кружницата  $k(O, r)$ . На истата кружница одреди точки  $M$  и  $N$ , такви што  $\overrightarrow{\angle AOM} = 90^\circ$  и  $\overrightarrow{\angle AON} = 270^\circ$ .

127. Нацртај кружница  $k(O, r)$  и на неа означи ги точките  $A, B$  и  $C$ , како на цртежот. На кружницата конструирај точка  $D$ , така што  $\overrightarrow{\angle COD} = \overrightarrow{\angle AOB}$ .



128. На една кружница  $k(O, r)$  се дадени точките  $A$  и  $A_1$ , така што точката  $A_1$  ја претставува положбата на точката  $A$  при нејзиното движење во позитивна насока по кружницата за кружен лак што е еднаков на  $\frac{2}{9}$  од кружницата. Одреди ја големината на  $\overrightarrow{\angle AOA_1}$ .

## Треба да знаеш

- ➔ **Ротација** со центар  $O$  и агол  $\alpha$  претставува поместување (пресликување) во рамнината, при што  $O$  се пресликува сама на себе, а секоја друга точка  $X$  од рамнината се пресликува во точка  $X_1$ , така што  $\angle XOX_1 = \alpha$  и  $OX = OX_1$ . Означуваме:

$$r(O, \alpha)(X) = X_1 \text{ или } X_1 = r(X).$$

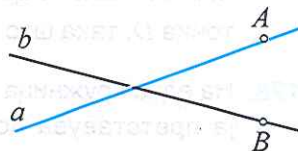
- ➔ Една ротација  $r$  е определена ако се дадени: центарот  $O$  и аголот  $\alpha$ , или центарот  $O$  и две точки  $X$  и  $X_1$  (оригинал и слика), или најмалку два пара точки,  $X$  и  $X_1$ ,  $Y$  и  $Y_1$  (оригинал и слика).

- ➔ При секоја ротација:

- колинеарни точки се пресликуваат во колинеарни точки;
- отсечка се пресликува во складна отсечка на неа;
- права се пресликува во права.

Општо, ако  $r(F) = F_1$ , тогаш  $F \cong F_1$ .

129. Нацртај отсечка  $AB$  и одреди ја нејзината слика  $A_1B_1$  при ротација со центар  $O$  ( $O \notin AB$ ) и агол  $\alpha = 45^\circ$ .
130. Даден е триаголникот  $ABC$ . Одреди ја неговата слика  $A_1B_1C_1$  при ротација со центар  $A$  и насочен агол  $\overrightarrow{CAB}$ , а потоа докажи дека  $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ .
131. Одреди ја сликата  $p_1$  на дадена права  $p$  при ротација:
- со центар  $O$  ( $O \notin p$ ) и агол  $\alpha = 90^\circ$ ;
  - со центар  $O$  ( $O \in p$ ) и агол  $\alpha = -90^\circ$ .
132. Во рамнината се дадени точките  $O$ ,  $A$  и  $B$ . Во кој случај постои релација  $r$  со центар  $O$ , така што  $r(A) = B$ ?
133. На даден триаголник  $ABC$  изврши ротација за агол  $\alpha = -60^\circ$  и центар на ротација во:
- точката  $A$ ;
  - точката  $O$  ( $O \notin \triangle ABC$ ).



134. Одреди ја ротацијата при која правата  $a$  се пресликува во правата  $b$  и  $r(A) = B$  (види цртеж).

135. Одреди го центарот на ротацијата при која дадена точка  $A$  се пресликува во дадена точка  $A_1$ .

136. Во рамнината се дадени две еднакви отсечки  $AB$  и  $A_1B_1$ . Утврди дали постои ротација при која отсечката  $AB$  се пресликува во отсечката  $A_1B_1$ . Ако постои, конструирај го центарот  $O$  на таа ротација.

137. Одреди ја ротацијата при која дадена права  $p$  се пресликува:

- а) сама на себе;                      б) во права  $p_1$ , така што  $p_1 \perp p$ ;  
в) во права  $p_1$ , така што  $p_1 \parallel p$ .

138. Одреди при која ротација се пресликува сама на себе фигурата:

- а) права;                      б) рамностран триаголник;  
в) квадрат;                  г) кружница.

139. Нека  $\angle AOC$  е произволен конвексен агол и  $B$  е точка во неговата внатрешна област. Докажи дека  $\angle AOB + \angle BOC + \angle COA = 0^\circ$ .

140. Во рамнината избери две точки  $O$  и  $A$ , а потоа одреди ги точките

$$A_1 = r(O, 90^\circ)(A) \text{ и } A_2 = r(O, -90^\circ)(A).$$

Покажи дека постои ротација со центар  $O$ , така што  $r(A_1) = A_2$ .

141. Дадени се правите  $p$  и  $q$ . Во кој случај постои ротација  $r$ , така што правата  $q$  е слика на правата  $p$ ?

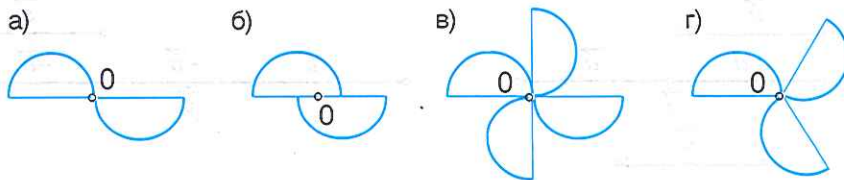
142. Во иста рамнина се дадени две кружници  $k_1(O_1, r_1)$  и  $k_2(O_2, r_2)$ . Дали постои ротација  $r$ , така што  $r(k_1) = k_2$ ?

143. Дадени се две паралелни прави и точка  $S$  (како на цртежот).

а) Ротирај ги дадените прави околу точката  $S$  за \_\_\_\_\_  
агол од  $180^\circ$ . \_\_\_\_\_

б) Одреди точка  $O$ , така што при ротацијата  $r(O, 180^\circ)$  унијата од дадените паралелни прави \_\_\_\_\_  
ќе се преслика сама на себе.  $\overset{\circ}{S}$

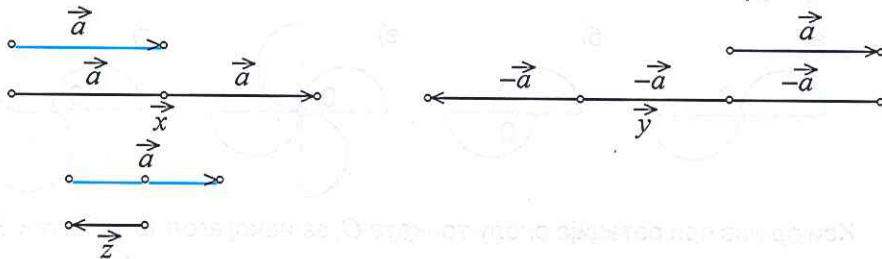
144. На цртежот се претставени четири фигури кои се составени од складни полукругови.



Кои од нив при ротација околу точката  $O$ , за некој агол  $\alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 360^\circ$ , се пресликуваат сами на себе? Одреди го тој агол за секоја ротација.

145. Со примена на ротација докажи дека два агли со заемно нормални краци се или еднакви или суплементни.
146. Отсечката  $CD$  е висина кон хипотенузата  $AB$  во правоаголниот триаголник  $ABC$ . Докажи дека:  
а)  $\angle ABC = \angle ACD$ ;    б)  $\angle BAC = \angle BCD$ .
147. Збирот на два агли со заемно нормални краци е  $160^\circ$ . Пресметај ги тие агли.
148. Одреди ги аглиите  $\alpha$  и  $\beta$ , ако тие имаат заемно нормални краци и аголот  $\beta$  е пет пати поголем од аголот  $\alpha$ .
149. Правата  $p$  ги содржи точките  $A, B$  и  $C$ , така што  $B$  лежи меѓу  $A$  и  $C$ . Над отсечките  $AB$  и  $BC$ , од иста страна на правата  $p$ , конструирани се рамнострани триаголници  $ABE$  и  $BCF$ . Нека  $M$  и  $N$  се средини на отсечките  $AF$  и  $CE$ , соодветно. Докажи дека триаголникот  $BMN$  е рамностран.
150. Над страните  $AB$  и  $BC$  на триаголникот  $ABC$  конструирани се квадратите  $ABMN$  и  $BCPQ$ , така што квадратот  $ABMN$  и триаголникот  $ABC$  се на различни страни од правата  $AB$ , а квадратот  $BCPQ$  и триаголникот  $ABC$  се преклопуваат.  
Докажи дека  $\overline{MQ} = \overline{AC}$  и  $MQ \perp AC$ .
151. Нацртај две паралелни прави  $a$  и  $b$  и на правата  $a$  означи точка  $A$ . Конструирај рамностран триаголник  $ABC$ , таков што  $A, B \in a$  и  $C \in b$ .
152. Дадени се прави  $a$  и  $b$  и точка  $A$ . Конструирај рамностран триаголник  $ABC$ , така што  $B \in a, C \in b$ .

153. Векторите  $\vec{x}, \vec{y}$  и  $\vec{z}$  на цртежот изрази ги со помош на векторот  $\vec{a}$ .



## Треба да знаеш

Производот на векторот  $\vec{a}$  и бројот  $k$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) е вектор  $k\vec{a}$  определен на следниот начин:

1) Должината на векторот  $k\vec{a}$  е еднаква на бројот  $|k| \cdot |\vec{a}|$ .

2) Векторот  $k\vec{a}$  има иста насока со векторот  $\vec{a}$  ако  $k > 0$ , а има спротивна насока на векторот  $\vec{a}$  ако  $k < 0$ .

За кои било вектори  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и кои било реални броеви  $n$  и  $k$  важат следните својства.

$$\text{а) } (n \cdot k)\vec{a} = n \cdot (k\vec{a}) = k \cdot (n \cdot \vec{a});$$

$$\text{б) } (n+k)\vec{a} = n \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{a};$$

$$\text{в) } n \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = n\vec{a} + n\vec{b}.$$

154. Како се насочени векторите: а)  $\vec{a}$  и  $2\vec{a}$ ; б)  $\vec{m}$  и  $-3\vec{m}$ ; в)  $-\vec{c}$  и  $-\frac{1}{2}\vec{c}$ ?

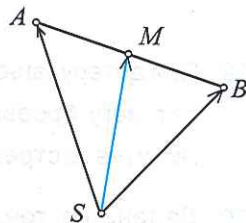
155. Спореди ги должините и насоките на векторите:

а)  $1 \cdot \vec{a}$  и  $\vec{a}$ ; б)  $-1 \cdot \vec{a}$  и  $\vec{a}$ ; в)  $-1 \cdot \vec{a}$  и  $-\vec{a}$ ; г)  $0 \cdot \vec{a}$  и  $\vec{0}$ ; д)  $k \cdot \vec{0}$  и  $\vec{0}$ .

156. Дадени се векторите  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  (неколинеарни). Запиши и конструирај вектор еднаков на: а)  $3 \cdot (2\vec{a})$ ; б)  $3\vec{b} + 2\vec{b}$ ; в)  $2\vec{a} + 2\vec{c}$ .

157. Векторите  $a$  и  $b$  не се колинеарни. Кои од следните вектори се колинеарни:  $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ;  $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b}$ ;  $\vec{p} = 4\vec{a} + 2\vec{b}$ ;  $\vec{q} = 6\vec{a} + 3\vec{b}$ ?

158. Дадена е отсечката  $AB$  и точката  $S$  надвор од неа, како на цртежот. Нека  $M$  е средина на отсечката  $AB$ . Изрази го векторот  $\vec{SM}$  со помош на векторите  $\vec{SA}$  и  $\vec{SB}$ .



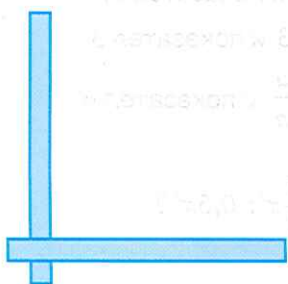
159. Нека  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  се тежишни линии на триаголникот  $ABC$ . Одреди го збирот  $\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1}$ .

160. Ако четириаголникот  $ABCD$  е паралелограм, тогаш дијагоналите  $AC$  и  $BD$  се преполовуваат. Докажи.

161. Нека  $P$  и  $Q$  се соодветно средини на страните  $AD$  и  $BC$  на четириаголникот  $ABCD$ . Докажи дека  $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$ .
162. Ако четириаголникот  $ABCD$  е трапез со основи  $AB$  и  $CD$ , тогаш за средната линија  $MN$  важи:  $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC})$ . Докажи.
163. Нека  $M$  и  $N$  се средини на страните  $AC$  и  $BC$  на триаголникот  $ABC$ . Докажи дека  $MN \parallel AB$  и  $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ .
164. Над страните  $AB$  и  $CD$  на паралелограмот  $ABCD$  се конструирани квадрати  $AMNB$  и  $DPQC$ , така што векторите  $AM$  и  $DP$  се истонасочени. Ако  $S_1$  и  $S_2$  се центри на квадратите, докажи дека  $\overline{S_1S_2} = \overline{BC}$ .
165. Конструирај трапез  $ABCD$  ако се дадени основите  $\overline{AB} = a$  и  $\overline{CD} = b$  и дијагоналите  $\overline{AC} = e$  и  $\overline{BD} = f$ .
166. Дадени се две кружници  $k(O, r)$  и  $k_1(O, r_1)$  и права  $a$ . Конструирај права  $p$  што е паралелна со  $a$  и при сечење на кружниците  $k$  и  $k_1$  формира еднакви тетиви.
167. Правата  $p$  ги сече паралелните прави  $a$  и  $b$ . Конструирај рамностран триаголник  $ABC$  со дадена страна  $a$ , чии две темиња лежат на паралелните прави, а третото теме лежи на правата  $p$ .
168. Одреди ја големината на аголот и неговата насока што го опишува минутната стрелка на часовникот меѓу 2 часот и 5 минути и 2 часот и 25 минути.
169. При дотерувањето на часовникот минутната стрелка е поместена по најкус пат меѓу броевите 7 и 4. Одреди го насочениот агол што го образува минутната стрелка при тоа поместување.
170. Дадени се точка  $A$ , права  $m$  и кружница  $k$ . Конструирај рамностран триаголник  $ABC$ , така што  $B \in m$  и  $C \in k$ .
171. Дадени се две концентрични кружници  $k_1$  и  $k_2$  и произволна точка  $A$ . Конструирај рамностран триаголник  $ABC$ , така што  $B \in k_1$ ,  $C \in k_2$ .

## Содржина на шемајта

- |    |  |    |    |  |    |
|----|--|----|----|--|----|
| 1  | Степен со показател природен број .....                              | 24 | 15 | Множење на полином со моном .....  | 48 |
| 2  | Претставување број во вид на степен . Пресметување броен израз ..... | 26 | 16 | Множење на полиноми .....  | 48 |
| 3  | Множење и делење на степени со еднакви основи .....                  | 28 | 17 | Производ од збир и разлика на два изрази .....   | 50 |
| 4  | Степенување на степен, производ и количник .....                     | 31 | 18 | Квадрат на бином .....   | 50 |
| 5  | Квадрат на број. Квадратен корен .....                               | 33 | 19 | Делење на мономи. Делење на полином со моном .....   | 51 |
| 6  | Пресметување квадратен корен .....                                   | 35 | 20 | Делење на полином со полином .....   | 53 |
| 7  | Ирационални броеви.....  | 36 | 21 | Рационални изрази .....  | 54 |
| 8  | Множество реални броеви...   | 36 | 22 | Разложување полином на множители со извлекување заеднички множител пред загради .....            | 56 |
| 9  | Изрази .....   | 37 | 23 | Разложување на полиноми од видот $A^2 - B^2$ на прости множители .....                           | 57 |
| 10 | Мономи .....   | 39 | 24 | Разложување на полиноми од видот $A^2 + 2AB + B^2$ и $A^2 - 2AB + B^2$ на прости множители ..... | 58 |
| 11 | Собирање и одземање на мономи .....                                  | 41 | 25 | Задачи плус за тема 2 .....  | 59 |
| 12 | Полиноми .....   | 42 |    |  |    |
| 13 | Множење и степенување на мономи .....                                | 43 |    |  |    |
| 14 | Собирање и одземање на полиноми .....                                | 45 |    |  |    |



## Треба да знаеш

- Краток запис на производ од  $n$  ( $n \geq 2$ ) еднакви множители е степен.  
 $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = a^n$ ,  $a$  е основа, а  $n$  е експонент (показател).
- $a^n > 0$ , ако  $a < 0$  или  $a > 0$ , а  $n$  е парен број;  
 $a^n > 0$ , ако  $a > 0$ , а  $n$  непарен број;  
 $a^n < 0$ , ако  $a < 0$ , а  $n$  непарен број;  
 по договор:  $a^1 = a$ ;  $a^0 = 1$  за  $a \neq 0$ . За  $n \geq 1$ :  $0^n = 0$ .

## 1. Запиши ги како степен производите:

- а)  $m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m$ ;      б)  $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ ;      в)  $3,2 \cdot 3,2 \cdot 3,2$ ;  
 г)  $0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4$ ;      д)  $\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7}$ ;      е)  $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$ ;  
 е)  $(x+y) \cdot (x+y)$ ;      ж)  $(a-4) \cdot (a-4) \cdot (a-4) \cdot (a-4)$ ;  
 з)  $\frac{a-1}{b+2} \cdot \frac{a-1}{b+2} \cdot \frac{a-1}{b+2}$ ;      с)  $\left(\frac{x}{y}-3\right) \cdot \left(\frac{x}{y}-3\right) \cdot \left(\frac{x}{y}-3\right)$ .

## 2. Кое од равенствата е точно:

- а)  $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3^4}{8}$ ;      б)  $\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4^3}$ ;  
 в)  $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -2^6$ ;      г)  $-2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -2^6$ ?

## 3. Следниве производи запиши ги како степен, а потоа прочитај ги.

- а)  $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ ;      б)  $ab \cdot ab \cdot ab$ ;  
 в)  $bac \cdot bac \cdot bac \cdot bac \cdot bac \cdot bac$ ;      г)  $\frac{5}{x} \cdot \frac{5}{x} \cdot \frac{5}{x} \cdot \frac{5}{x} \cdot \frac{5}{x} \cdot \frac{5}{x}$ ;  
 д)  $(a+2) \cdot (a+2) \cdot (a+2) \cdot (a+2)$ ;      е)  $2(a-b) \cdot 2(a-b)$ .

## 4. Запиши степен со :

- а) основа 3 и показател 1;      б) основа  $-9$  и показател 5;  
 в) основа  $-2a$  и показател 4;      г) основа  $x-3$  и показател 3;  
 д) основа  $\frac{3}{4}$  и показател 7;      е) основа  $\frac{5-a}{5+a}$  и показател 6.

## 5. Кој од записите е степен:

- $3a^3$ ;  $(3a)^3$ ;  $5^4 x^4$ ;  $(a-3)^4$ ;  $6(x+y)^6$ ;  $a^2(3+a)^2$ ;  $\frac{5}{8}x^3$ ;  $0,5x^5$ ?



6. Пополни ја табелата.

Степен	$x^6$			$(2x+3)^5$	$\left(\frac{4}{5}a^2\right)^7$	$\frac{1}{8}$	1
Основа		$2p$	$\frac{5}{9}$		-0,7	$\frac{2}{3}-a$	5
Показател		3	4		2	5	

7. Запиши ги како производ степените:

$$c^4; 2^7; \left(-\frac{5}{9}\right)^5; 0,7^3; (-8a)^8; \left(\frac{1}{4}b\right)^4; (5+x)^3; \left[\frac{3}{7}(x+y)\right]^2.$$

8. Пресметај ја вредноста на степенот:

а)  $2^5$ ; б)  $12^3$ ; в)  $5^4$ ; г)  $10^6$ ; д)  $\left(\frac{4}{7}\right)^4$ ; е)  $\left(\frac{2}{3}\right)^6$ ; е)  $1,2^3$ ; ж)  $0,3^4$ .

9. Пополни ја табелата.

$n$	0	1	2	3	4	5	6
$(-1)^n$							
$2^n$							
$(-3)^n$							
$4^n$							
$(-5)^n$							

10. Пресметај:

а)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ ; б)  $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$ ; в)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$ ; г)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$ ; д)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$ ;  
 е)  $(-0,1)^2$ ; ж)  $(-0,2)^3$ ; з)  $(-0,01)^5$ ; д)  $(-0,03)^3$ ; е)  $(-0,1)^6$ .

11. Без да пресметуваш определи кои вредности на степените се позитивни, а кои негативни.

$$(-5)^{15}; (-0,5)^{12}; (-1)^{202}; (-202)^1; (-0,9)^{11}; (-2002)^0; \left(-\frac{15}{16}\right)^{22}; \left(-\frac{6}{7}\right)^{100}; (-1)^{2n}; (-1)^{2n+1}.$$

12. Спореди ги броевите:

а)  $(-6,3)^5$  и 0; б) 0 и  $\left(-3\frac{2}{5}\right)^6$ ; в)  $(-6)^6$  и  $(-66)^9$ ;  
 г)  $(-0,02)^2$  и  $(-2,02)^7$ ; д)  $\left(-\frac{5}{6}\right)^{11}$  и  $\left(-\frac{5}{6}\right)^4$ ; е)  $\left(-3\frac{7}{8}\right)^{41}$  и  $(-3,5)^{14}$ .

13. За која вредност на  $a \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$  ќе биде точно:  
 $a^5 > a^4$ ;  $a^5 = a^4$ ;  $a^5 < a^4$ .
14. Провери ја вистинитоста на равенствата:  
 а)  $(-4)^2 = -4^2$ ; б)  $-1^6 = (-1)^6$ ; в)  $-1^5 = (-1)^5$ ;  
 г)  $(-0,2)^4 = 0,2^4$ ; д)  $(-3,2)^3 = -(3,2)^3$ ; ё)  $\left(-2\frac{3}{4}\right)^3 = -\left(-2\frac{3}{4}\right)^3$ .
15. Претстави ги како степен со најголем можен показател следните броеви:  
 а) 9;  $-3 \cdot 2$ ;  $-125$ ; 256;  $-343$ ; 100000.  
 б) 0,008;  $-0,125$ ; 0,216; 0,0625; 1,331;  $-0,00001$ .  
 в)  $\frac{16}{49}$ ;  $-\frac{64}{125}$ ;  $\frac{16}{81}$ ;  $-\frac{1}{27}$ ;  $\frac{625}{1296}$ ;  $\frac{343}{512}$ .
16. За која вредност на  $a$  е точно равенството:  
 а)  $a^5 = 0$ ; б)  $a^{12} = 1$ ; в)  $a^{23} = -1$ ; г)  $a^1 = -8$ ;  
 д)  $3^a = 81$ ; ё)  $(-13)^a = 1$ ; е)  $(-5)^a = 25$ ; ж)  $(-2)^a = -32$ ?

## 2

### ПРЕТСТАВУВАЊЕ БРОЈ ВО ВИД НА СТЕПЕН. ПРЕСМЕТУВАЊЕ БРОЕН ИЗРАЗ

#### Треба да знаеш

$$\underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10}_n = 10^n; \quad \underbrace{0,1 \cdot 0,1 \cdot \dots \cdot 0,1}_n = 0,1^n.$$

Во броен израз, прво се степенува, па се множи и дели, а на крајот се собира и одзема. Заградите можат да го изменат овој редослед.

17. Запиши ги како степен со основа 10 броевите:  
 100; 100000; 1000000; 100000000; 10000000000.
18. Колку нули има бројот:  $10^1$ ;  $10^5$ ;  $10^9$ ;  $10^{12}$ ?
19. Кои декадни единици се претставени со степените:  $10^3$ ;  $10^4$ ;  $10^7$ ;  $10^8$ ;  $10^{11}$ ?
20. Запиши ги како производ од природен број и степен со основа 10 броевите:  
 3000; 1200000; 15000000; 730000000; 180000000000;  
 2050000; 60010000; 40005000.
21. Растојанието од Сонцето до секоја од планетите запиши го како степен со основа 10.  
 Меркур 58000000 km; Сатурн 1430000000 km; Венера 108000000 km;  
 Уран 2880000000 km; Земја 150000000 km; Нептун 4500000000 km;  
 Марс 228000000 km; Плутон 5900000000 km; Јупитер 780000000 km.

22. Според податоците од претходната задача запиши го на ист начин растојанието од Земјата до секоја од останатите планети.
23. Дадените изрази запиши ги како производ од кои едниот множител е 10 со најголем можен показател:  $200 \cdot 300000$ ;  $600 \cdot 100 \cdot 30000$ ;  $400 \cdot 3000 \cdot 20000$ ;  $500 \cdot 2000$ ;  $20 \cdot 700 \cdot 5000$ ;  $1250 \cdot 80 \cdot 90000$ ;  $250 \cdot 200 \cdot 4000 \cdot 50000$ ;  $5000 \cdot 140000$ .
24. Запиши ги како производ од кои едниот множител е  $10^6$  броевите:  $23000000$ ;  $1070000000$ ;  $5700000$ ;  $40030000$ ;  $953800000$ ;  $60730000$ ;  $2800000$ ;  $730000$ ;  $30000$ ;  $400$ .
25. Запиши го бројот:  
 а)  $6 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 4 \cdot 10^0$ ; б)  $3 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^0$ ;  
 в)  $7 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^2$ ; г)  $10^4 + 4 \cdot 10^2 + 3$ ; д)  $2 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3$ .
26. Запиши ги како степен со основа 0,1 броевите:  $0,01$ ;  $0,0001$ ;  $0,000001$ ;  $0,00000001$ ;  $0,0000000001$ .
27. Кој број е запишан со изразот:  $5 \cdot 0,1^3$ ;  $4 \cdot 0,1^4$ ;  $12 \cdot 0,1^5$ ;  $23 \cdot 0,1^2$ ;  $306 \cdot 0,1^2$ ;  $450 \cdot 0,1^4$ ?
28. Пресметај ги првите шест степени на броевите:  
 $-1$ ;  $0,1$ ;  $1,1$ ;  $-2$ ;  $-0,2$ ;  $\frac{1}{2}$ .
29. Кои од равенствата се точни:  
 а)  $43 + 43 + 43 + 43 = 4 \cdot 43$ ; б)  $4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 = 4^4$ ;  
 в)  $2^{12} - 2^{11} = 2^{11}$ ; г)  $2^8 - 2^7 - 2^6 = 2^6$ ;  
 д)  $5^n + 5^n + 5^n + 5^n + 5^n = 5^{n+1}$ ; е)  $2^{n+4} - 2^{n+3} - 2^{n+2} - 2^{n+1} - 2^n = 2^n$ ?
30. Што е поголемо  $(-0,2)^5$  или  $(-0,1)^3$  и за колку?
31. Пресметај ја вредноста на изразот:  
 а)  $3 \cdot 2^4$ ; б)  $2 \cdot 5^3$ ; в)  $4 \cdot 3^3$ ; г)  $8 \cdot 0,5^3$ ; д)  $100 \cdot 0,2^3$ ; е)  $0,25 \cdot 4^2$ ;  
 е)  $\frac{1}{4} \cdot 2^3$ ; ж)  $\frac{5}{6} \cdot 3^4$ ; з)  $\frac{3}{5} \cdot 5^2$ ; с)  $2\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2$ .
32. Одреди ја бројната вредност на изразите:  
 а)  $2^2 + 3 \cdot 4^3 - 7 \cdot 5^2$ ; б)  $8 \cdot 4^2 - 4 \cdot 3^3 + 5^4$ ; в)  $10 \cdot 5^3 + 12 \cdot 1^{21} + 10^3 - 14^2$ ;  
 г)  $5 \cdot 9^2 - 3 \cdot 4^3 + 7^3 - 5^2$ ; д)  $2^3 \cdot 3^2 + 5^2 - 4^3$ ; е)  $12^2 : (3 \cdot 2^4) + 5 \cdot 1^3$ ;  
 ж)  $10^4 - 10^3 + 10^2 - 10$ ; з)  $0,5^2 \cdot 10^3 - 0,6 \cdot 10^2$ ;  
 д)  $1,5^2 \cdot 10^2 + 1,3 \cdot 10^3 - 4 \cdot 10^2$ ; е)  $10^3 : 5^2 + (6^4 : 2^3) : 3^2$ .

33. Пресметај:

а)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{6}$ ;

б)  $\left(1\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-1\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{13}{25}$ ;

в)  $\frac{0,1 \cdot (-0,2)^2}{0,2 \cdot (-0,1)}$ ;

г)  $\frac{(0,1 \cdot 0,4) \cdot (-0,4)^2}{0,1 \cdot 0,4 \cdot (-0,02)}$ .

34. Изврши ги назначените операции:

а)  $(0,2+1,3)^2$ ; б)  $3^0 - 3^2$ ; в)  $7 - 3 \cdot (-2)^3$ ; г)  $(-1)^{12} \cdot (-5) - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2$ ;

д)  $(3,2^2 - 9,24)^4 - 0,1$ ; е)  $\left[(-0,2)^3 + (-0,1)^3\right] : 0,9$ ; ж)  $-20 : 2^2 - 9^0 \cdot (-3)^3$ ;

з)  $-5^2 + \frac{3}{7} \cdot \left(2\frac{1}{3}\right)^2$ ;

и)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{2^2}{3} - \left(-1\frac{1}{2}\right)^2$ .

3

### МНОЖЕЊЕ И ДЕЛЕЊЕ НА СТЕПЕНИ СО ЕДНАКВИ ОСНОВИ

*Треба да знаеш*

Ако  $a \in \mathbb{Q}$ , а  $m, n \in \mathbb{N}$ , тогаш:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a^m : a^n = a^{m-n} \text{ за } a \neq 0 \text{ и } m > n$$

$$a^m : a^n = \frac{1}{a^{m-n}} \text{ за } a \neq 0 \text{ и } m < n; \quad a^m : a^m = a^0 = 1 \text{ за } a \neq 0.$$

35. Помножи ги степените:

а)  $2^4 \cdot 2^3$ ;  $7^2 \cdot 7^5$ ;  $(-3)^3 \cdot (-3)^5$ ;  $(-12)^{18} \cdot (-12)^6$ ;  $23^{14} \cdot 23^9$ ;

б)  $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6$ ;  $\left(-\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^7$ ;  $\left(\frac{3}{8}\right)^9 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^{11}$ ;  $\left(-2\frac{3}{5}\right)^{23} \cdot \left(-2\frac{3}{5}\right)^{25}$ ;  $\left(-15\frac{1}{7}\right)^7 \cdot \left(-15\frac{1}{7}\right)^{15}$ ;

в)  $(0,5)^2 \cdot (0,5)^3$ ;  $(-1,4)^6 \cdot (-1,4)^8$ ;  $(-3,7)^5 \cdot (-3,7)^5$ ;  $(2,03)^7 \cdot (2,03)^3$ ;  
 $(-7,011)^{11} \cdot (-7,011)^{14}$ .

36. Одреди го производот на степените:

а)  $x^3 \cdot x^8$ ; б)  $a^4 \cdot a^4$ ; в)  $b^4 \cdot b^8 \cdot b$ ; г)  $x^3 \cdot x \cdot x^5$ ; д)  $(-y)^3 \cdot (-y)^5 \cdot (-y)^7$ ;

е)  $(3a)^3 \cdot (3a)$ ; ж)  $\left(-\frac{3}{4}c\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}c\right)^4$ ; з)  $(-0,6x) \cdot (-0,6x)^2 \cdot (-0,6x)^5$ .

37. Одреди ја вредноста на  $x$ , за да бидат точни равенствата:

а)  $a^3 \cdot x^4 = a^7, (a \neq 0)$ ;      б)  $a^8 \cdot x = a^9, (a \neq 0)$ ;

в)  $a^2 \cdot x = a^7, (a \neq 0)$ ;      г)  $a \cdot x = a^5, (a \neq 0)$ .

38. Пресметај го производот на степените:

а)  $x^4 \cdot x^2$ ; б)  $y \cdot y^2 \cdot y^4$ ; в)  $a \cdot (-a)^6$ ; г)  $-x^2 \cdot x \cdot x^3$ ; д)  $(-5a)^4 \cdot (5a)^3$ ;

ѓ)  $(a-2) \cdot (a-2)$ ; е)  $(x+y) \cdot (y+x)^3$ ; ж)  $(3-x)^0 \cdot (3-x) \cdot (3-x)^2$ ;

з)  $2^n \cdot 2^n$ ;      с)  $5^n \cdot 5^{n+1} \cdot 5^{n+2}$ .

39. Пресметај го количникот на степените:

а)  $3^5 : 3^3$ ;  $8^7 : 8^4$ ;  $(-5a)^9 : (-5a)^4$ ;  $(-10)^6 : (-10)^5$ ;  $(-4)^5 : (-4)^5$ ;

б)  $\left(\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{2}{3}\right)^2$ ;  $\left(-\frac{3}{7}\right)^7 : \left(-\frac{3}{7}\right)^3$ ;  $\left(-\frac{5}{6}\right)^9 : \left(-\frac{5}{6}\right)^8$ ;  $\left(1\frac{3}{8}\right)^3 : \left(1\frac{3}{8}\right)^3$ ;  $\left(-3\frac{2}{5}\right)^7 : \left(-3\frac{2}{5}\right)^2$ ;

в)  $(0,3)^6 : (0,3)^2$ ;  $(-2,5)^2 : (-2,5)$ ;  $(3,16)^9 : (3,16)^3$ ;  $(-15,3)^{12} : (-15,3)^6$ ;  $(63,17)^{10} : (63,17)^7$ .

40. Одреди го количникот на степените:

а)  $a^7 : a^5 (a \neq 0)$ ;      б)  $x^8 : x^5 (x \neq 0)$ ;      в)  $c^5 : c^4 (c \neq 0)$ ;

г)  $y^6 : y^6 (y \neq 0)$ ;      д)  $(-a)^9 : (-a)^5 (a \neq 0)$ ;      ѓ)  $(5a)^{15} : (5a)^8 (a \neq 0)$ ;

е)  $\left(-\frac{2}{7}b\right)^5 : \left(-\frac{2}{7}b\right) (b \neq 0)$ ; ж)  $(0,5x) : (0,5)^0 (x \neq 0)$ .

41. Подели ги степените:

а)  $a^5 : a^8 (a \neq 0)$ ; б)  $x^7 : x^{12} (x \neq 0)$ ; в)  $x^3 : x^4 (x \neq 0)$ ; г)  $(3a)^4 : (3a)^7 (a \neq 0)$ ;

д)  $(0,6x)^6 : (0,6x)^{10} (x \neq 0)$ ; ѓ)  $(-4,5x)^4 : (-4,5x)^5 (x \neq 0)$ ;

е)  $\left(\frac{2}{5}a\right)^3 : \left(\frac{2}{5}a\right)^5 (a \neq 0)$ ; ж)  $\left(-\frac{5x}{7}\right)^{12} : \left(-\frac{5x}{7}\right)^{13} (x \neq 0)$ .

42. Упрости го изразот:

- а)  $(a^4 \cdot a^3) : a^5$  ( $a \neq 0$ ); б)  $(x^8 : x^5) \cdot x$  ( $x \neq 0$ ); в)  $(y^{12} : y^6) : y^2$  ( $y \neq 0$ );  
г)  $b^2 \cdot (b^5 : b^3)$  ( $b \neq 0$ ); д)  $a^9 : (a^2 \cdot a^3)$  ( $a \neq 0$ ); е)  $x^8 : (x^8 : x^3)$  ( $x \neq 0$ );  
е)  $(y^7 : y^3) : y^4$  ( $y \neq 0$ ); ж)  $(m^3 \cdot m^6) : m^{10}$  ( $m \neq 0$ ); з)  $p^{15} : (p^8 \cdot p^9)$  ( $p \neq 0$ ).

43. Скрати ја дробката:

- а)  $\frac{a^5 \cdot a^3 \cdot a^9}{a^8 \cdot a^5}$  ( $a \neq 0$ ); б)  $\frac{c^{15} \cdot c^9}{c^4 \cdot c^5 \cdot c^{10}}$  ( $c \neq 0$ ); в)  $\frac{x^9}{x^2 \cdot x^3 \cdot x^4}$  ( $x \neq 0$ );  
г)  $\frac{a^6 \cdot a^8}{a^4 \cdot a^6 \cdot a^8}$  ( $a \neq 0$ ); д)  $\frac{b^3 \cdot b \cdot b^5}{b^{10}}$  ( $b \neq 0$ ); е)  $\frac{x^n \cdot x^{n+2}}{x^{n+1} \cdot x^{n+3}}$  ( $x \neq 0$ ).

44. Пресметај ја бројната вредност на изразот:

а)  $\frac{5^3 \cdot 5^5 \cdot 5^2}{5^8 \cdot 5}$ ; б)  $\frac{235^7}{235^2 \cdot 235^3 \cdot 235}$ ; в)  $\frac{11^5 \cdot 11 \cdot 11^6}{11^{10}}$ ; г)  $\frac{(-3)^7 \cdot (-3)^9 \cdot (-3)}{(-3)^6 \cdot (-3)^8}$ ;

д)  $\frac{(-2)^5 \cdot (-2)^8}{(-2)^6 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)}$ ; е)  $\frac{(-12)^5 \cdot (-12) \cdot (-12)^4}{(-12)^{12}}$ ;

е)  $\frac{(-0,1)^8 \cdot (-0,1)^{11}}{(-0,1)^5 \cdot (-0,1)^6 \cdot (-0,1)^7}$ ; ж)  $\frac{0,2^9 \cdot 0,2^5}{0,2 \cdot 0,2^4 \cdot 0,2^6}$ ; з)  $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2}{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^7}$ .

45. Пресметај ја бројната вредност на изразот:

а)  $\frac{5^{5+x}}{5^{3+x}} - 2^{2+x} \cdot 2^{3-x}$ ; б)  $3^{2-x} \cdot 3^{2+x} - \frac{4^{x+1}}{4^{x-2}}$ .

46. Реши ја равенката: а)  $x \cdot 5^3 = 5^5$ ; б)  $\frac{x \cdot 7^5}{8^4} = \frac{7^5 \cdot 8^3}{8^8}$ ;

в)  $\frac{x}{5 \cdot 3^2 \cdot 2} = \frac{3^2 \cdot 2^2}{2^3 \cdot 3^4}$ ; г)  $x^{2003} = \frac{2003^{2003} + 2003^{2004}}{2004^{2004}}$ .

*Треба да знаеш*

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}; \quad (a:b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} (b \neq 0)$$

47. Степенувај ги степените:

а)  $(x^2)^3$ ;   б)  $(a^5)^3$ ;   в)  $(2x^4)^2$ ;   г)  $(7a^6)^4$ ;   д)  $(-3^3 y^3)^3$ ;  
 е)  $(0,3^5 a^2 b^4)^3$ ;   ж)  $(-1,2^4 x^3 yz^5)^2$ ;   з)  $\left(\frac{2^5}{5^2} a^3 b^5\right)^4$ .

48. Пресметај:

а)  $(10^3)^4$ ;   б)  $((-10)^4)^3$ ;   в)  $((-10)^3)^4$ ;   г)  $\left(\left(\frac{1}{10}\right)^4\right)^3$ ;  
 д)  $\left(\left(-\frac{1}{10}\right)^3\right)^4$ ;   е)  $((0,1)^2)^3$ ;   ж)  $((-0,1)^3)^2$ ;   з)  $\left(\left(-\frac{1}{0,1}\right)^3\right)^2$ .

49. Пресметај:

а)  $(2^2)^3$ ;   б)  $((-2)^3)^2$ ;   в)  $(0,2^3)^2$ ;   г)  $(-0,2^2)^3$ ;  
 д)  $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^3$ ;   е)  $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right)^2$ ;   ж)  $\left(-\left(\frac{1}{0,2}\right)^3\right)^2$ ;   з)  $\left(\left(-\frac{1}{0,2}\right)^3\right)^2$ .

50. Претстави го  $x^{24}$  како степен со основа:

а)  $x^2$ ;   б)  $x^3$ ;   в)  $x^4$ ;   г)  $x^6$ ;   д)  $x^8$ .

51. Запиши го  $2^{60}$  како степен со основа:

а) 4;   б) 8;   в) 16;   г) 32;   д) 64.

52. Степенувај го производот:

а)  $(x \cdot a)^4$ ;   б)  $(a \cdot x \cdot b)^3$ ;   в)  $(5 \cdot a)^2$ ;   г)  $(2xy)^5$ ;  
 д)  $(a^2 b)^6$ ;   е)  $(-2^4 \cdot x)^3$ ;   ж)  $(-0,2a^3)^4$ ;   з)  $\left(\frac{1}{2} x^3 y^4\right)^5$ .

53. Дадениве производи од степен, запиши ги како степени од производи:

а)  $x^3 \cdot y^3$ ; б)  $a^5 \cdot b^5 \cdot c^5$ ; в)  $5^7 a^7$ ; г)  $8x^3$ ;

д)  $27a^3b^3$ ; е)  $x^4y^8$ ; ж)  $\frac{1}{32}a^{10}b^5c^{15}$ ; з)  $0,001x^6y^9$ .

54. Пресметај со степенување на производ:

а)  $2^4 \cdot 5^4$ ; б)  $(-2)^5 \cdot 5^5$ ; в)  $2^6 \cdot (-5)^6$ ; г)  $(-2)^7 \cdot (-5)^7$ ;

д)  $1,25^6 \cdot 8^6$ ; е)  $1,25^7 \cdot (-0,8)^7$ ; ж)  $(-1,25)^8 \cdot 0,8^8$ ; з)  $(-1,25)^9 \cdot (-0,8)^9$ .

55. Пресметај:

а)  $0,5^6 \cdot 2^6$ ; б)  $0,25^7 \cdot 4^7$ ; в)  $\left(\frac{3}{8}\right)^9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9$ ; г)  $\left(-2\frac{3}{4}\right)^{13} \cdot \left(\frac{4}{11}\right)^{13}$ ;

д)  $\left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot 5^5$ ; е)  $245^8 \cdot \left(\frac{1}{245^2}\right)^4$ ; ж)  $\left(-\frac{3}{154}\right)^4 \cdot 154^4$ ; з)  $\left(-\frac{1}{24}\right)^5 \cdot 8^5$ .

56. Пресметај:

а)  $0,2^8 \cdot 5^{10}$ ; б)  $125^5 \cdot 0,08^4$ ; в)  $(-0,25)^7 \cdot 40^6$ ; г)  $0,16^9 \cdot 625^8$ ;

д)  $\left(\frac{3}{7}\right)^5 \cdot \left(2\frac{1}{3}\right)^6$ ; е)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^5$ ; ж)  $(-207)^{12} \cdot \left(\frac{1}{207}\right)^{11}$ ; з)  $357^{14} \cdot \left(-\frac{1}{357}\right)^{15}$ .

57. Степенувај го количникот:

а)  $\left(\frac{a}{b}\right)^4$ ; б)  $\left(\frac{x}{c}\right)^8$ ; в)  $\left(\frac{3}{a}\right)^5$ ; г)  $\left(\frac{5a}{4}\right)^3$ ;

д)  $\left(\frac{3x}{4y}\right)^5$ ; е)  $\left(-\frac{x}{2}\right)^7$ ; ж)  $\left(\frac{4xy}{-5ab}\right)^3$ .

58. Степенувај го количникот:

а)  $\left(\frac{3a^2}{5}\right)^5$ ; б)  $\left(\frac{2x^3}{5y^2}\right)^4$ ; в)  $\left(\frac{a^2bc^3}{3x^4}\right)^3$ ; г)  $\left(-\frac{6xy^3}{7a^2b^5}\right)^2$ .

59. Запиши ги дробките како степен од количник:

а)  $\frac{x^5}{y^5}$ ; б)  $\frac{32}{a^5}$ ; в)  $\frac{81a^4}{625}$ ; г)  $-\frac{125}{a^3b^3}$ ;

д)  $-\frac{1}{243x^5}$ ; е)  $\frac{a^4}{b^8}$ ; ж)  $\frac{a^{10}b^5}{32c^{15}}$ ; з)  $-\frac{0,001}{x^6y^3}$ .



60. Пресметај ја вредноста на изразот:

а)  $26^5 : 13^5$ ;      б)  $3^4 : 0,3^4$ ;      в)  $1,4^6 : 0,7^6$ ;      г)  $1 : 0,1^7$ ;  
д)  $\frac{2,3^3}{4,6^3}$ ;      е)  $\frac{(-1,5)^5}{0,75^5}$ ;      ж)  $54^4 \cdot \frac{1}{18^4}$ ;      з)  $\frac{2,4^5}{0,8^5 \cdot 0,3^5}$ .

61. Пресметај ја вредноста на изразот:

а)  $(-2)^7 : \left( \frac{(-2)^4 \cdot (-2)^3}{(-2) \cdot (-2)^5} \right)^3$ ;      б)  $\frac{(-5^6 \cdot (-3)^5)^2}{(-3^3 \cdot 5^4)^3}$ ;      в)  $\frac{(-2^6 + 2^2 \cdot 2^4)^2}{(-3^5 \cdot 5^3)^{53}}$ .

62. Пресметај:

а)  $27 \cdot 111^3 - 333^3$ ;      б)  $(-205,87 \cdot 56,73)^{19} + 56,73^{19} \cdot 205,87^{19}$ ;  
в)  $109^8 \cdot \left( -\frac{1}{109} \right)^7 + 100^{18} \cdot 0,01^{17}$ ;      г)  $\frac{3^{17} + 3^{17} + 3^{17}}{3 \cdot 3^{17}}$ ;  
д)  $\frac{2^7 + 2^7 + 2^7}{2^9} + 2^5 \cdot \frac{2}{4^5}$ ;      е)  $\frac{3^7 + 3^7 + 3^7}{3 \cdot 3^6} - 27 \cdot \frac{3}{(-3)^2}$ .

63. Одреди ја вредноста на изразот:

а)  $\left( \frac{x^5 \cdot x \cdot x^4}{x^3 \cdot x^6} \right)^5$  за  $x = -2$ ;      б)  $\left( \frac{a^3 \cdot a^5}{a \cdot a^2 \cdot a^6} \right)^4$  за  $a = 0,3$ ;  
в)  $\left( \frac{c^5 \cdot c^6 \cdot c^7}{c^8 \cdot c^9} \right)^4$  за  $c = \frac{1}{5}$ ;      г)  $\left( \frac{y^2 \cdot y \cdot y^5}{y^4 \cdot y^2} \right)^3$  за  $y = -10$ .

## 5

## КВАДРАТ НА БРОЈ. КВАДРАТЕН КОРЕН

### Треба да знаеш

Ако  $x \in \mathbb{Q}$ , тогаш  $x \cdot x = x^2 \geq 0$ .

Ако  $a \geq 0$  и  $b^2 = a$ , тогаш  $b$  се вика квадратен корен на  $a$ ; за  $b \geq 0$  се запишува:  $b = \sqrt{a}$ .

64. Квадрирај го секој од броевите:

а)  $7; -6; 12; -15; 19; -25$ ;      б)  $\frac{1}{3}; -\frac{2}{5}; \frac{3}{8}; -3\frac{1}{4}; 5\frac{2}{3}; -1\frac{5}{8}$ ;  
в)  $1,2; -3,6; 0,15; -0,08; 1,01; -2,256$

65. Пресметај на што е еднакво  $3^2$ , а потоа одреди ги следниве квадрати:  
 $30^2$ ;  $300^2$ ;  $3000^2$ ;  $0,3^2$ ;  $0,03^2$ ;  $0,003^2$ .
66. Пресметај го квадратот на бројот 15, а потоа одреди ги следниве  
 квадрати:  $150^2$ ;  $1500^2$ ;  $1,5^2$ ;  $0,15^2$ ;  $0,015^2$ .
67. Ако  $1,1^2 = 1,21$ , одреди ги квадратите на следниве броеви:  
 $11$ ;  $110$ ;  $1100$ ;  $0,11$ ;  $0,011$ .
68. Нива со квадратна форма има страна долга 76 m. Колку овошки можат да  
 се насадат во нивата, ако се знае дека на секоја овошка ѝ е потребна  
 површина од еден квадрат со страна долга 4 m?
69. Пресметај ја вредноста на изразот:  
 а)  $(16^2 + 20^2) : 8^2$ ; б)  $(36^2 - 24^2) : 12^2$ ;  
 в)  $0,7^2 \cdot (2,8^2 - 1,4^2)$ ; г)  $(5,8^2 - 0,8^2) : 33$ .
70. Пресметај ја вредноста на изразот:  $4x^2 - \frac{y^2}{3}$  ако:  
 а)  $x = 3$ ;  $y = -6$ ; б)  $x = -0,5$ ;  $y = 1,2$ ; в)  $x = \frac{1}{2}$ ;  $y = -3$ .
71. Провери ја вистинитоста на равенствата:  
 а)  $3^2 + 5^2 + 8^2 = 7^2 + 7^2$ ; б)  $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$ ;  
 в)  $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$ ; г)  $9^2 + 25^2 + 64^2 = 49^2 + 49^2$ ;  
 д)  $1^2 + 1,1^2 + 1,2^2 = 1,3^2 + 1,4^2$ ; е)  $2,1^2 + 2,2^2 + 2,3^2 + 2,4^2 = 2,5^2 + 2,6^2 + 2,7^2$ .
72. Одреди го  $x$  во равенката:  
 а)  $x^2 = 9$ ; б)  $x^2 = 121$ ; в)  $x^2 = 625$ ; г)  $3x^2 = 48$ ; д)  $5x^2 = 245$ ;  
 е)  $7x^2 = 112$ ; ж)  $\frac{x^2}{2} = 32$ ; з)  $\frac{x^2}{3} = 27$ ; и)  $\frac{x^2}{6} = 24$ .
73. Пресметај ја вредноста на изразот:  
 а)  $3 \cdot 7^2 + 2 \cdot \sqrt{36}$ ; б)  $(18^2 - 6^2) : \sqrt{81}$   
 в)  $(\sqrt{64} + 2 \cdot \sqrt{25}) : 3^2$ ; г)  $(\sqrt{100} - \sqrt{49}) : \sqrt{9}$ .
74. Пресметај:  
 а)  $\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$ ; б)  $\frac{3^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \frac{3^2}{7 \cdot 9} + \frac{3^2}{9 \cdot 11} + \frac{3^2}{11 \cdot 13}$ .

**Упражнение:** б) За  $a \neq 0, b \neq 0$  и  $a \neq b$  користи го својството:

$$\frac{m}{a \cdot b} = \frac{m}{a \cdot b} \cdot \frac{b-a}{b-a} = \frac{b-a}{ab} \cdot \frac{m}{b-a} = \left( \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} \right) \cdot \frac{m}{b-a} = \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \cdot \frac{m}{b-a}$$

Во задачите од 75 до 94 одреди колку класи од по две цифри има поткореновата величина.

75.  $\sqrt{27}$ .    76.  $\sqrt{3065}$ .    77.  $\sqrt{172304}$ .    78.  $\sqrt{8}$ .    79.  $\sqrt{434}$ .  
 80.  $\sqrt{93517}$ .    81.  $\sqrt{7032054}$ .    82.  $\sqrt{222}$ .    83.  $\sqrt{13,42}$ .    84.  $\sqrt{5,63}$ .  
 85.  $\sqrt{0,48}$ .    86.  $\sqrt{15,7}$ .    87.  $\sqrt{6,6}$ .    88.  $\sqrt{237,41}$ .    89.  $\sqrt{736,256}$ .  
 90.  $\sqrt{0,07}$ .    91.  $\sqrt{0,026}$ .    92.  $\sqrt{0,009}$ .    93.  $\sqrt{0,0005}$ .    94.  $\sqrt{1,1}$ .

95. Одреди број  $a$ , таков што  $a^2 \leq x$ , ако:

- а)  $x=3$ ;    б)  $x=7$ ;    в)  $x=12$ ;    г)  $x=16$ ;    д)  $x=20$ ;  
 ф)  $x=28$ ;    е)  $x=37$ ;    ж)  $x=51$ ;    з)  $x=73$ ;    с)  $x=92$ .

Во задачите од 96 до 119 пресметај квадратен корен.

96.  $\sqrt{289}$ .    97.  $\sqrt{529}$ .    98.  $\sqrt{1369}$ .    99.  $\sqrt{2304}$ .    100.  $\sqrt{3025}$ .  
 101.  $\sqrt{5776}$ .    102.  $\sqrt{9216}$ .    103.  $\sqrt{10816}$ .    104.  $\sqrt{190969}$ .    105.  $\sqrt{367236}$ .  
 106.  $\sqrt{793881}$ .    107.  $\sqrt{4088484}$ .    108.  $\sqrt{0,09}$ .    109.  $\sqrt{0,81}$ .    110.  $\sqrt{0,0441}$ .  
 111.  $\sqrt{0,5776}$ .    112.  $\sqrt{5,29}$ .    113.  $\sqrt{40,96}$ .    114.  $\sqrt{94,09}$ .    115.  $\sqrt{761,76}$ .  
 116.  $\sqrt{930,25}$ .    117.  $\sqrt{32,1489}$ .    118.  $\sqrt{123,4321}$ .    119.  $\sqrt{901,8009}$ .

120. Пресметај  $\sqrt{961}$ , а потоа одреди на што е еднакво:

- а)  $\sqrt{96100}$ ;    б)  $\sqrt{9610000}$ ;    в)  $\sqrt{9,61}$ ;    г)  $\sqrt{0,0961}$ .

Во задачите од 121 до 135 пресметај го коренот со точност од 0,01:

121.  $\sqrt{8}$ .    122.  $\sqrt{17}$ .    123.  $\sqrt{34}$ .    124.  $\sqrt{67}$ .    125.  $\sqrt{85}$ .  
 126.  $\sqrt{173}$ .    127.  $\sqrt{438}$ .    128.  $\sqrt{661}$ .    129.  $\sqrt{1358}$ .    130.  $\sqrt{2536}$ .  
 131.  $\sqrt{1,9}$ .    132.  $\sqrt{3,8}$ .    133.  $\sqrt{0,8}$ .    134.  $\sqrt{0,047}$ .    135.  $\sqrt{0,009}$ .

136. Одреди ги позитивните решенија на равенките:

- а)  $5x^2 = 125$ ;    б)  $7x^2 = 1792$ ;    в)  $\frac{x^2}{6} = 294$ ;  
 г)  $\frac{2}{3}x^2 = 864$ ;    д)  $1\frac{1}{8}x^2 + 36 = 198$ ;    ф)  $1,4x^2 - 2,13 = 4,044$ .



149. Дадено е множеството  $S$ .

$$S = \left\{ -8\frac{3}{5}; -\sqrt{8}; 3\frac{5}{7}; -\sqrt{6}; \sqrt{4}; -4\frac{5}{8}; \frac{7}{10}; \sqrt{9}; 2\frac{3}{4}; \sqrt{11}; -\sqrt{25}; 16 \right\}.$$

Одреди ги елементите на множествата:  $A = \{x | x \in S, x \in \mathbb{N}\}$ ;

$B = \{x | x \in S, x \in \mathbb{Z}\}$ ;  $C = \{x | x \in S, x \in \mathbb{Q}\}$ ;  $D = \{x | x \in S, x \in \mathbb{R}\}$ ;

$E = \{x | x \in S, x \in \mathbb{R}^-\}$ .

150. Определи на што е еднаков изразот:

а)  $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{N} \cap \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{N} \cap \mathbb{R}^-$ ,  $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}$ ; б)  $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{N} \cup \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{N} \cup \mathbb{R}^+$ ,  $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^+$ ;

в)  $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Z} \cup \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Z} \cap \mathbb{J}$ ; г)  $\mathbb{N} \cap \mathbb{J}$ ,  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{J}$ ,  $\mathbb{R} \cap \mathbb{J}$ ,  $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R} \cup \mathbb{J}$ .

9

## ИЗРАЗИ

### Треба да знаеш



Записите образувани од константи и променливи поврзани, на соодветен начин, со знаците за математички операции се викаат **изрази**.

**Бројна вредност** на изразот е крајниот резултат што се добива по извршувањето на сите операции во изразот.

**Идентични** се изрази што имаат еднаква бројна вредност.

Равенство од идентични изрази се вика **идентичност**.

**Домен** на променливата е множеството допуштени вредности за променливата.

Пресметај ја бројната вредност на изразот во задачите од 151 до 160.

151.  $157 + 36 : 12 - 11 \cdot 4$ .

152.  $13 \cdot 12 - 128 : 16 + 2 \cdot 6$ .

153.  $1,4^2 \cdot 10^2 + 1,3^2 \cdot 10^2 - 2 \cdot 2^2$ .

154.  $5 \cdot 18 - 45 : 3 + 5^2 - 8 \cdot \sqrt{25}$ .

155.  $\sqrt{4} \cdot 5^2 + 2 \cdot 3 - 6 : 8 - 7 \cdot \sqrt{9}$ .

156.  $(\sqrt{256} - 6^2) : (2^2 - 3^2) + 2 \cdot (56 : 7 - \sqrt{324})$ .

157.  $\frac{7^2 - 2 \cdot 3^2}{74 : 2 + 5^2}$ .

158.  $\frac{3 \cdot 4^2 + 72 : 6}{8^2 - (6^2 + 3)}$ .

159.  $\frac{(34 + 6^2) : 2}{9^2 - (5^2 + 4^2)}$ .

160.  $\frac{(2^2 + 1)^2 + 120 : (2^2 \cdot 2)}{4^2 \cdot 3 - (3^3 : 3 + 1)}$ .

161. Кој од бројните изрази нема математичка смисла:

а)  $\frac{5 \cdot 7 - 1}{6^2 - 4 \cdot 9}$ ; б)  $\frac{8 \cdot 3 - 84 : 7}{8^2 - (5^2 + 1) \cdot 2}$ ; в)  $\frac{112 : 4^2 - \sqrt{49}}{153 : \sqrt{81} - 5 \cdot \sqrt{4}}$ ;

г)  $\frac{126 : 14 - \sqrt{64}}{\sqrt{1296} - 4 \cdot 3^2}$ ; д)  $\frac{\sqrt{676} : 2 - 345 : 23}{4^2 \cdot 18 - 17^2}$ ; е)  $\frac{\sqrt{625} - 2 \cdot \sqrt{169}}{2^2 \cdot \sqrt{144} - 2 \cdot \sqrt{576}}$ ?

162. Одреди кои од следниве изрази се изрази со променлива:

а)  $5+3a-7^2$ ; б)  $4 \cdot 0,6-3^2 \cdot 0,04+2^3 \cdot 0,002$ ; в)  $\frac{x}{4}-\frac{7}{4}+4$ ; г)  $6 \cdot \sqrt{20}+\frac{1}{3} \cdot 9^3-\sqrt{3}$ ;

д)  $(2-x)^2+2^2$ ; е)  $\sqrt{a}-5a+9$ ; ж)  $\frac{23:3+\sqrt{17}}{7 \cdot 8+3^5}$ ; з)  $\frac{6 \cdot \sqrt{13}-x}{6 \cdot \sqrt{13}+x}$ .

Пресметај ја бројната вредност на изразот во задачите од 163 до 176.

163.  $4x^2-6x+1$  за  $x \in \{-2; 0; 2\}$ . 164.  $18x^2+27x-3$  за  $x \in \left\{-\frac{1}{3}; 1; \frac{1}{3}\right\}$ .

165.  $2x^2-5x-7$  за  $x \in \{0; 1; 0,5; \sqrt{2}\}$ . 166.  $a^3-a^2+a$  за  $a \in \{-3; -1; 0; 2\}$ .

167.  $8a^3-12a^2+6a+2$  за  $a \in \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -2; 2\right\}$ .

168.  $54a^3+27a^2-6a-3$  за  $a \in \left\{-3; -\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}; 1\right\}$ . 169.  $\frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}$  за  $x = -\frac{1}{2}$ .

170.  $\frac{a^3-a^2+a-1}{a^3+a^2-a+1}$  за  $a = -0,1$ .

171.  $\frac{x^2+2x+1}{x+1}$  за  $x = -0,5$ .

172.  $\frac{a^2+a+1}{a^2-a-1}$  за  $a = -\frac{3}{4}$ .

173.  $(3x^2-6x+1) \cdot (6x^2+2)$  за  $x = -\frac{2}{3}$ .

174.  $(6a^2-3a+2) \cdot (3a^3+1)$  за  $x = \frac{1}{3}$ . 175.  $(5a^3-1) \cdot (5a^2-10a+5)$  за  $a = 0,2$ .

176.  $(x+2) \cdot (x^2-2x+4)$  за  $x = -1,5$ .

За која вредност на променливата следниве изрази (177-197) немаат смисла?

177.  $\frac{9x^2-5}{x}$ .

178.  $\frac{4x+1}{x-1}$ .

179.  $\frac{0,5-3x}{x+2}$ .

180.  $\frac{5x}{3x-9}$ .

181.  $\frac{7+3x^2}{2x-1}$ .

182.  $\frac{17}{17-x}$ .

183.  $\frac{x^2-1}{5+x}$ .

184.  $\frac{0,6+x^3}{18-6x}$ .

185.  $\frac{x^2+9x^3}{2-3x}$ .

186.  $\frac{5x-1}{x \cdot (x-1)}$ .

187.  $\frac{x^2-3}{3x \cdot (x+3)}$ .

188.  $\frac{6x-1}{6x \cdot (1-2x)}$ .

189.  $\frac{2x}{(x-2) \cdot (x-5)}$ .

190.  $\frac{x^2+5}{(x+3) \cdot (x-3)}$ .

191.  $\frac{6+x}{(5+x) \cdot (4+x)}$ .

192.  $\frac{2x+3}{4+(x-1)}$ .

193.  $\frac{x^2+1}{(x-3)+2}$ .

194.  $\frac{x^2+25}{x^2-25}$ .

195.  $\frac{5}{x^2}$ .

196.  $\frac{2x-5}{(x-6)^2}$ .

197.  $\frac{x-3}{3 \cdot (x+3)^2}$ .

Во задачите од 198 до 202 одреди кои од изразите се идентични и запиши го идентитетот.

198.  $A(x) = 2x - 3; B(x) = 3x - 2; C(x) = 2(x - 2) + 1$ , при што  $D = \{-1; 0; 1; 2\}$ .
199.  $A(x) = x(x + 3) + 2x; B(x) = x^2 + 5x; C(x) = x(x + 3)$  при што  $D = \{0; 1; 2; 3\}$ .
200.  $A(x) = x^2 - 2x - 3; B(x) = (x - 1)(x + 3); C(x) = x^2 + 2x - 3$  при што  $D = \{-3; -1; 1; 3\}$ .
201.  $A(x) = (2x + 3)(x - 2); B(x) = x^2 - x + 6; C(x) = 2x^2 - x - 6$  при што  $D = \{-2; -1; 0; 1\}$ .
202.  $A(x) = \frac{5x - 3}{2x + 6}; B(x) = \frac{7x - (2x + 3)}{2(x + 3)}; C(x) = \frac{3x - 5}{2x + 6}$  при што  $D = \{0; 1; 2; 3\}$ .

10

## МОНОМИ

### Треба да знаеш

- ☛ Мономи се: константи, променливи или изрази со константи и променливи во кои се застапени само операциите множење и степенување.
- ☛ Коефициент на мономот е константата, а неговата главна вредност е производот од променливите земени на некој степен.
- ☛ Слични мономи се мономите што имаат иста главна вредност.
- ☛ Степен на моном е збирот од експонентите на променливите во мономот.

203. Кои од следниве изрази се мономи:

- а)  $3x$ ; б)  $3 + x$ ; в)  $\frac{x}{7}$ ; г)  $x^7$ ; д)  $8$ ; е)  $\frac{5}{8}a^2b$ ; ж)  $(a - 3)^2$ ;
- ж)  $\frac{-3x^2}{(5 + x)}$ ; з)  $\frac{4x^2y^3}{5}$ ; с)  $\frac{0,5x^3yz^2}{2\frac{3}{4}}$ ; и)  $\frac{(x + y)(x - y)}{0,2 + \frac{1}{3}}$ ;
- ј)  $\frac{-3,2a^5bc^2}{8 - 5,6}$ ; к)  $\frac{a^2b^3 + 3ab}{5}$ ; л)  $\frac{9ab^2c^3}{a + b + c}$ ?

204. Запиши моном со:

- а) коефициент 3 и главна вредност  $x^5$ ;  
 б) коефициент  $-1$  и главна вредност  $a^3$ ;  
 в) коефициент  $0,6$  и главна вредност  $xy^3$ ;  
 г) коефициент  $1$  и главна вредност  $a^4b^2$ ;  
 д) коефициент  $-\frac{3}{5}$  и главна вредност  $x^3y^5$ ;  
 е) коефициент  $2\frac{5}{7}$  и главна вредност  $a^3b^2c$ .

Запиши ги во нормален вид мономите во задачите од 205 до 218.

205.  $xyyu$ .

206.  $bb \cdot 3c \cdot 5aab$ .

207.  $2,5abc \cdot 8ac \cdot 0,4$ .

208.  $abab$ .

209.  $0,75xxx \cdot 8y \cdot 0,2xyz$ .

210.  $\frac{5}{9}aa \cdot 0,18b \cdot 10^2 aabb$ .

211.  $a \cdot a^2$ .

212.  $3^3 \cdot 2a^5$ .

213.  $3x^2 \cdot 0,2xy \cdot 5xy^2$ .

214.  $2x^2 \cdot \left(-\frac{3}{10}xy\right) \cdot 5y$ .

215.  $x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4$ .

216.  $\frac{1}{6}a^2bc^3 \cdot (-0,2ab^2) \cdot (-0,3bc^2)$ .

217.  $\left(-1\frac{3}{5}x^3y^2z\right) \cdot \left(\frac{3}{4}x^2z^3\right) \cdot \left(-\frac{5}{9}xyz\right)$ .

218.  $\frac{a^2(-2) \cdot a^5(-3)}{6:7}$ .

219. Во задачите од 205 до 218 одреди ги: а) коефициентот; б) главната вредност; в) степенот на секој од добиените мономи.

220. Дадено е множеството  $M$ :

$$M = \left\{ y^2x^2; 0,3xy; 3xy^2; 5x^2; xy^2; -\frac{3}{4}y^2; -\frac{1}{9}x^2y^2; 12xy; -15y^2; -\frac{1}{9}x^2y; \right.$$

$$\left. \frac{0,25x^2}{11}; -\frac{2}{7}xy; -0,12xy^2 \right\}. \text{ Одреди ги подмножествата на } M:$$

$$A = \{x \mid x \in M \text{ и } x \text{ е сличен моном на } x^2\};$$

$$B = \{x \mid x \in M \text{ и } x \text{ е сличен моном на } y^2\};$$

$$C = \{x \mid x \in M \text{ и } x \text{ е сличен моном на } -3xy \};$$

$$D = \left\{ x \mid x \in M \text{ и } x \text{ е сличен моном на } \frac{1}{3}x^2y^2 \right\};$$

$$E = \{x \mid x \in M \text{ и } x \text{ е сличен моном на } -0,5x^2y\};$$

$$F = \left\{ x \mid x \in M \text{ и } x \text{ е сличен моном на } \frac{2}{5}xy^2 \right\}.$$

221. Запиши три мономи слични на мономот:

а)  $4a^2b^3$ ; б)  $-\frac{7}{8}ac^3x$ ; в)  $0,36a^3$ ; г)  $-\frac{3a^2bc^3}{5}$ .

222. Запиши ги спротивните мономи на мономите од множеството  $M$  во задача број 220.



223. Определи три слични мономи од петти степен со променливите:

а)  $x$ ; б)  $ab$ ; в)  $xyz$ ; г)  $abxy$ ; д)  $abcxy$ ;

а потоа за секој од нив одреди ги: коефициентот, главната вредност и неговиот спротивен моном.

11

## СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА МОНОМИ

### Треба да знаеш

Собирањето (одземањето) на слични мономи се сведува на собирање (одземање) на нивните коефициенти, а главната вредност се препишува.

Пресметај го збирот на мономите.

224. а)  $3x + 5x$ ; б)  $6a + 2a$ ; в)  $\frac{3}{4}b + \frac{5}{4}b$ ; г)  $0,4y + 0,3y$ .

225. а)  $4ab + 9ab$ ; б)  $(-7x) + (-2x)$ ; в)  $x^2 + 2x^2$ ; г)  $(-0,9a^2) + (-1,3a^2)$ .

226. а)  $9c + (-4c)$ ; б)  $(-5a) + 4a$ ; в)  $\left(-\frac{5}{8}x\right) + \frac{x}{8}$ ; г)  $2,6b + (-1,3b)$ .

227. а)  $12a^2 + (-12a^2)$ ; б)  $-3,6x^2y + 3,6x^2y$ ; в)  $-\frac{5}{7}c^2 + \frac{5}{14}c^2$ ; г)  $3ab^2 + \left(-\frac{2}{5}ab^2\right)$ .

228. а)  $12x^3 + 5x^3 + 10x^3$ ; б)  $3,6a^2b + 6,4a^2b + 5,3a^2b$ ;

в)  $(-17ab^2c) + (-12ab^2c) + (-14ab^2c)$ ; г)  $\left(-\frac{2}{3}x^2y\right) + \left(-1\frac{1}{2}x^2y\right) + \left(-\frac{5}{6}x^2y\right)$ .

Одреди ја разликата на мономите.

229. а)  $(7x^3) - (9x^3)$ ; б)  $(16ab) - (9ab)$ ;

в)  $(-12a^2x) - (-8a^2x)$ ; г)  $(-6xy^2) - (-16xy^2)$ .

230. а)  $(6,4x^2) - (3,8x^2)$ ; б)  $(0,9b) - (1,1b)$ ;

в)  $(-7,2cx) - (-2,7cx)$ ; г)  $(-3,8a^2y) - (-5,9a^2y)$ .

231. а)  $\left(\frac{3}{5}xy\right) - \left(\frac{2}{5}xy\right)$ ; б)  $\left(2\frac{3}{4}a^4\right) - \left(1\frac{3}{4}a^4\right)$ ;

в)  $\left(-\frac{7}{8}x^3y^2\right) - \left(-\frac{3}{8}x^3y^2\right)$ ; г)  $\left(-\frac{5}{12}ax\right) - \left(-\frac{7}{12}ax\right)$ .

232. а)  $(15a^2x^2) - (-5a^2x^2)$ ; б)  $(9x^5) - (-14x^5)$ ;

в)  $(-3a^3b^3) - (7a^3b^3)$ ; г)  $(-18x^2) - (9x^2)$ .

233. а)  $(6,09a) - (3,9a)$ ; б)  $(-9,12a^2) - (-3,06a^2)$ ;  
 в)  $\left(\frac{5}{6}x^4\right) - \left(2\frac{3}{4}x^4\right)$ ; г)  $\left(-3\frac{2}{3}a^3b\right) - \left(-2\frac{5}{6}a^3b\right)$ .
234. а)  $(3,03a^3) - (3,03a^3)$ ; б)  $(3,03a^3) - (-3,03a^3)$ ;  
 в)  $(-3,03a^3) - (3,03a^3)$ ; г)  $(-3,03a^3) - (-3,03a^3)$ .
235. а)  $5c - 3c$ ; б)  $3b - 4b$ ; в)  $x^2 - \frac{1}{2}x^2$ ; г)  $6p^3 - p^3$ .
236. а)  $-9x - x$ ; б)  $0,6a^2 - a^2$ ; в)  $-\frac{2}{5}b^3 - b^3$ ; г)  $-c^4 - c^4$ .

Упрости го изразот.

237. а)  $4x + 3x + 2x + x$ ; б)  $-5a^2 - 4a^2 - a^2 - 2a^2$ ;  
 в)  $-0,5p^2 - 0,04p^2 - 0,02p^2 - 0,1p^2$ ; г)  $\frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t + \frac{1}{4}t + t$ .
238. а)  $4y - 2y + y - 3y$ ; б)  $-9c^2 + 3c^2 - 2c^2 + 5c^2$ ;  
 в)  $1,3p^3 - 0,5p^3 + 4,8p^3 - 4,6p^3$ ; г)  $0,28y^5z^3 + 1,32y^5z^3 - 2,3y^5z^3 + 1,9y^5z^3$ .
239. а)  $17xy - 19xy + 13xy - 17xy$ ; б)  $-6,18ab + 3,09ab - 2,15ab + 3,09ab$ ;  
 в)  $-a + \frac{3}{4}a - \frac{1}{2}a + \frac{3}{2}a$ ; г)  $\frac{x^2}{5} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{10} - \frac{x^2}{2}$ .

## 12

## ПОЛИНОМИ

### Треба да знаеш

- ☛ Полиномот е во нормален вид ако неговите членови (мономи) се во нормален вид и нема слични мономи.
- ☛ Момот со највисок степен, од членовите на полиномот, го определува степенот на полиномот.
- ☛ Два полиноми се спротивни, ако нивните коефициенти се спротивни броеви.

240. Одреди кои од дадените полиноми се: мономи, биноми, а кои триноми.

- а)  $2x^2 + 5x$ ; б)  $0,2a^3 - \frac{1}{2}a^2 + 2a$ ; в)  $56y$ ;  
 г)  $xy^2z^2$ ; д)  $4x - 7x^2 + 3x^3 - 5x^4$ ; ё)  $3p - 7$ ;  
 е)  $a + b - c$ ; ж)  $13a^3b^3 + 23x^3y^3$ ; з)  $6x^2 + 5xy + 2y^2$ .

Трансформирај ги во нормален вид полиномите (241 - 251).

241.  $5a + 3a \cdot 2a - a \cdot 4a \cdot 5a + 6a^2 \cdot (-2a) \cdot a$ .
242.  $\frac{1}{6}xy \cdot 9x^2 \cdot 2y - 5x^2 \cdot 0,2xy \cdot x + 4xy^2 \cdot \left(-\frac{3}{8}x^3\right) \cdot (-2xy)$ .
243.  $2 - 2a + 5 + 5b - a + 4a - 3b - 1 - b$ .
244.  $5x + 3 + 4y - 1 - y + x + 3y + 4 - 6x$ .
245.  $8x - 9x^2 - 10 - 7x^2 + 6x - 5 + 4 - 3x + 2x^2$ .
246.  $14y^2 - 13y + 12 + 16y - 17 - 18y^2 + 19 - 20y + 21y^2$ .
247.  $2a^2 - 4ab - 5b^2 + 6ab - 3a^2 + 2b^2 + 2ab - a^2 + 4b^2$ .
248.  $-3a + 4ab - 5abc - 6ab + 7abc + 8a - 9abc + 10ab - 11a$ .
249.  $8xy + 7yz - 9xz - 10yz - 11xy - 22xz + 13xy - 14yz + 15xz$ .
250.  $x^3y^2 + x^2y - x - 5x^2y - 3x^3y^2 + 4x + 8x^3y^2 - 2x^2y - 5x$ .
251.  $-7a^3b^2c + a^2b - 3 + 12a^3b^2c - 8a^2b + 5 - 2a^3b^2c + 4 + 3a^2b$ .
252. Одреди го степенот на полиномите во задачите од 241 до 251.  
Во задачите од 253 до 259 сведи го полиномот во нормален вид и подреди го по степенот на променливата, почнувајќи од најголемиот степен.
253.  $3 + 3x - 5x^2 - x - 7 + 9x^2$ .
254.  $-a^2 + 4a + 7 + 3a^2 - 3a - 3$ .
255.  $7x^2 - x + 5x^3 - 1 + x^4 - 2x + 5 - 3x^3$ .
256.  $5a^2 - 4a + 3 - 2a^2 + 3a - 2 + a - 3a^2$ .
257.  $17a^4b^3 - 12a^3b^2 - 7a^2b + 5a + 12a^2b - 8a - 10a^4b^3 + 6a^3b^2$ .
258.  $6x^4y^2z + 9x^2y - 4 - 7x^2y + 10 - 5x^4y^2z$ .
259.  $13x^4 + 10x^3 - 7x + 3 - 10x^3 + 7x - 3 - 9x^4$ .
260. Одреди ги коефициентите на полиномите запишани во нормален вид, во задачите од 253 до 259.
261. Запиши ги спротивните полиноми на полиномите (253 - 259).

13

## МНОЖЕЊЕ И СТЕПЕНУВАЊЕ НА МОНОМИ

Треба да знаеш

- При множење на мономи посебно се множат коефициентите, а посебно главните вредности.
- При степенување на моном секој негов множител се степенува со дадениот експонент.

Пресметај го производот на мономите (262-267).

262. а)  $(5x) \cdot 9$ ; б)  $(3xy^2) \cdot (7a^2b^3)$ ; в)  $(-4ab^3) \cdot (6a^2b)$ ; г)  $(8a^2x) \cdot (-3a^2x^3)$ .

263. а)  $\left(\frac{2}{5}a^2bc^3\right) \cdot \left(\frac{7}{3}ab^2c^3\right)$ ; б)  $\left(-\frac{8}{9}x^2y^2\right) \cdot \left(-\frac{15}{16}x^2y^4\right)$ ;

в)  $\left(\frac{18}{25}xy^2z^3\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}x^2yz\right)$ ; г)  $\left(-\frac{3}{7}x^4y^3\right) \cdot \left(-2\frac{1}{3}x^2y\right)$ .

264. а)  $(0,3a^2) \cdot (2,3a^3)$ ;

б)  $(-4,5x^3y^2) \cdot (-0,8x^3y^4)$ ;

в)  $(-3,25xyz) \cdot (8x^2yz^3)$ ;

г)  $(1,25a^2b^2c) \cdot (-2,8a^3bc^5)$ .

265. а)  $(16a^5b^2) \cdot \left(\frac{3}{8}a^2b^2c^3\right)$ ;

б)  $(3,2at^2p) \cdot (-6,25a^3bc^5)$ ;

в)  $\left(-\frac{5}{16}x^3a^2c\right) \cdot \left(-\frac{80}{225}p^3t^2\right)$ ; г)  $(-x^4t^3p^2) \cdot (-2^2)$ .

266. а)  $(3a) \cdot (4b) \cdot (5c)$ ;

б)  $(-2x^2) \cdot (7y^3) \cdot (-5z^2)$ ;

в)  $(2x^2) \cdot (7y^3) \cdot (-5z^2)$ ;

г)  $(-2,45ap^2t^4) \cdot (2a^2t^3) \cdot \left(-\frac{1}{7}p^3\right)$ .

267. а)  $x^2 \cdot xy^2 \cdot xyz$ ;

б)  $(abx) \cdot (bcx) \cdot (acx)$ ;

в)  $(-0,25axt) \cdot (-a^2x^3) \cdot (-4a^3t^4)$ ;

г)  $\left(4\frac{2}{3}a^4b^3c^2\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}a^5c^6\right) \cdot \left(1\frac{2}{7}ab^2\right)$ .

Изврши го степенувањето на мономите (268-272).

268. а)  $(3)^5$ ;

б)  $(a)^5$ ;

в)  $(3a)^5$ ;

г)  $(3a^2)^5$ .

269. а)  $(7x)^2$ ;

б)  $\left(\frac{1}{7}x^2\right)^2$ ;

в)  $(0,7x^3)^2$ ;

г)  $(0,07x^4)^2$ .

270. а)  $(-5a^2b)^3$ ; б)  $(6xy^3)^3$ ; в)  $(-7a^3b^3)^3$ ; г)  $(3a^6b^3)^3$ .

271. а)  $(2xy^2)^4$ ; б)  $(-0,2x^2y^3)^4$ ; в)  $\left(-\frac{1}{2}a^5b^4\right)^4$ ; г)  $\left(\frac{3}{5}a^3b^5\right)^4$ .

272. а)  $(-7,5a^4b^3c^5)^2$ ; б)  $(1,5x^3yz^2)^3$ ; в)  $\left(\frac{2}{3}ap^3t\right)^4$ ; г)  $\left(-\frac{1}{2}x^3y^2z\right)^5$ .

Изврши ги назначените операции (273-276).

273. а)  $(9xy)^2 \cdot \left(\frac{1}{18}x^2y^3\right)$ ;

б)  $(-0,3a^5b^3) \cdot (-10ax^4)^2$ ;

в)  $(-0,5a^4bc^3)^3 \cdot (2bc^2x^3)^4$ ;

г)  $(4xyt)^4 \cdot \left(-\frac{1}{2}ypt\right)^5$ .

274. а)  $(-1,2x^4y^2)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}y^2z\right)^3 \cdot (-20xz^3)^2$ ; б)  $(-5a^3b)^2 \cdot (0,1bx^3)^4 \cdot (-2ax)^3$ .

275. а)  $\left((2a^2)^2\right)^3$ ; б)  $\left((-xy^2)^3\right)^4$ ; в)  $\left(\left(-\frac{1}{2}ax\right)^3\right)^2$ ; г)  $\left((-a^2bc^3)^4\right)^3$ .
276. а)  $\left((-3x^2y^3)^3\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}x^2y\right)^3$ ; б)  $\left(0,6 \cdot (-2ab^2)^3\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a^2b\right)^4 \cdot \left(4 \cdot (5ab)^2\right)$ .

## 14

## СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА ПОЛИНОМИ

### Треба да знаеш

При ослободување од загради важи следново:

- ако пред заградите има "+", тогаш тој знак и заградите се изоставаат, а членовите од заградите се запишуваат со истите знаци;
- ако пред заградите стои "-", тогаш тој знак и заградите се изоставаат, а членовите од заградите се запишуваат со спротивни знаци.

Пресметај го збирот на полиномите (277-282).

277. а)  $(3a + 2) + (5b + c)$ ; б)  $(2x - y) + (5z - 2)$ ;  
 в)  $(-7c + 3) + (9a - 4b)$ ; г)  $(0,6a^2 - a) + \left(\frac{1}{3}a^3 - 6\right)$ .
278. а)  $(8a - 15b) + (-6a + 9b)$ ; б)  $(5x + 3y) + (2x - 7y)$ ;  
 в)  $(4x^2 + 5y^2) + (6x^2 + 3y^2)$ ; г)  $(-12a^2 - 11b^2) + (15b^2 + 18a^2)$ .
279. а)  $(x^2 - 3xy + y^2) + (2x^2 + 5xy - 3y^2)$ ; б)  $(a^2 + 4ab - b^2) + (a^2 - 4ab + b^2)$ ;  
 в)  $(2 + 5x - 7x^2) + (9x^2 - 7x - 5)$ ; г)  $(8a^2 - 5b^2 + 3) + (-3 + 8b^2 - 8a^2)$ .
280. а)  $(3x - 4) + (4x + 5) + (-6x + 1)$ ; б)  $(7a - 5b) + (-9a + 4b) + (2a - b)$ ;  
 в)  $(a^2 - a) + (-2a^2 + 3a) + (a^2 - a)$ ; г)  $(2xy + yz) + (-xz + 3yz) + (4xz - xy)$ .
281. а)  $(2x^2 - 3xy + y^2) + (4xy - 5x^2 - 3y^2) + (2y^2 - 5xy + 4x^2)$ ;  
 б)  $(1 - x - x^2) + (x - 1 + x^2) + (x^2 - x - 1)$ ;  
 в)  $(4a - 3b + 2) + (-5 - 6a + 7b) + (8 - 3a - 2b)$ ;  
 г)  $(7a + 5ab + 3abc) + (2ab - 4abc - 6a) + (abc + 2a - 3ab)$ .
282. а)  $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 5) + (7x - 6 + x^3 - 7x^2) + (7 + 4x^2 - 9x^3 + 5x)$ ;  
 б)  $(9a - 11b + 12c - 13d) + (-4a + 15b - 16c + 17d) + (2a - 3b + 4c - 5d) + (-6a + 4b - 8c + 3d)$ ;  
 в)  $(2x^3 - x^2 + 3x + 5) + (3x^2 - 5x - 6) + (7x - 4x^3 + x^2) + (8x^3 - x - 2)$ ;  
 г)  $(4a^3 - 3a^2b + 5ab^2 + 6b^3) + (9a^2b - 5ab^2 - 2a^3 + 4b^3) + (12a^2b - 6a^3 - 7b^3 + 3ab^2) + (2b^3 - 15a^2b - 7ab^2 + 5a^3)$ .

Пресметај ја разликата на полиномите (283-286).

283. а)  $(2x + 3x^2) - (5 + x^3)$ ; б)  $(6a + 5b) - (3c - 2)$ ;  
в)  $(4x - 3y) - (7z + 5)$ ; г)  $(-8a^3 - 2a^2) - (-8 - a)$ .
284. а)  $(2x + 3y) - (2y + 5x)$ ; б)  $(4a - 5b) - (2a - 3b)$ ;  
в)  $(4x^2 + x) - (3x - x^2)$ ; г)  $(9a^2b - 5a^2) - (8a^2b + 10a^2)$ .
285. а)  $(14a^2 - 13ab + 12b^2) - (12a^2 - 10ab + 9b^2)$ ; б)  $(7a^2 - 6a + 5) - (5a^2 + 2a + 4)$ ;  
в)  $(8a^3 - 7a^2 + 6a) - (5a^3 - 9a^2 + 3a)$ ; г)  $(5a + 8b - 3c) - (4a + 8b - 5c)$ .
286. а)  $(0,7x - 0,6y + 0,4z) - (0,5x - 0,3y + 0,2z)$ ;  
б)  $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{8}\right)$ ; в)  $(xy + xz - yz) - \left(\frac{3}{4}xy + \frac{4}{5}xz - \frac{1}{6}yz\right)$ ;  
г)  $\left(0,25x^2 - \frac{1}{2}xy + 0,4y^2\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - 0,5xy - \frac{1}{5}y^2\right)$ .

Трансформирај ги во полином во нормален вид изразите (287-288).

287. а)  $(2x - 3) - (5x + 4) + (7x + 9)$ ; б)  $(x - 3y) + (2x - 5y) - (7x + 4y)$ ;  
в)  $(5a - 3b) - (17a - b) + (4a - 2b)$ ; г)  $(5x^2 + 2x) - (4x^2 - 3x) - (2x^2 - x)$ .
288. а)  $(2x - 3y + 4) - (4y - 5 + 6x) + (7 - 8x + 9y)$ ;  
б)  $(12a - 10b - 7c) - (8b - 6c + 9a) + (4c - 5a + 6b)$ ;  
в)  $(14x - 11y - 12z) - (7x - 8y + 9z) - (8x - 9y + 10z)$ ;  
г)  $(17a + 14b - 11c) - (3a + 16b - 5c) - (7a - 8b - 6c)$ .
289. За полиномите  $A = x^2 - 2x + 1$ ,  $B = 3x^2 - 4x + 5$  и  $C = 3 - 5x - 4x^2$  одреди:  
а)  $A + B + C$ ; б)  $B - C + A$ ; в)  $C - B - A$ ; г)  $A - B - C$ .
290. Разликата на полиномите  $A$  и  $B$  намали ја за нивниот збир, ако:  
а)  $A = 5x - 2y$ ,  $B = 3x - 5y$ ; б)  $A = 3x^2 - x + 2$ ,  $B = 5x^2 + 4x - 3$ ;  
в)  $A = 7x^2 + 9x - 8$ ,  $B = 6x^2 + 9x + 8$ ; г)  $A = 5x^2 - 11xy + 8y^2$ ,  $B = 5xy - 7x^2 + 2y^2$ .
291. Збирот на полиномите  $A$  и  $B$  намали го за нивната разлика, ако:  
а)  $A = 5x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ ,  $B = -5 + 3x + 4x^2 - 7x^3$ ;  
б)  $A = 3x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ ,  $B = 2x^3 + 7x^2 - 2x + 7$ ;  
в)  $A = 3x^4 - 6x^2 + 5x + 2$ ,  $B = 3x^2 - 4x^3 - 7$ ;  
г)  $A = 3 + 2x - 5x^2 + 4x^3$ ,  $B = 5x^3 - 2x^2 - 3x + 7$ .
292. За полиномите  $A = 3x^2 - 4x - 5$ ,  $B = 2x^2 - 3x + 4$  и  $C = 3x^2 - 5x + 6$  одреди:  
а)  $P(2)$ , ако  $P(x) = A + B - C$ ; б)  $Q(0)$ , ако  $Q(x) = B - A + C$ ;  
в)  $R\left(\frac{1}{2}\right)$ , ако  $R(x) = A - C + B$ ; г)  $T(-3)$ , ако  $T(x) = A - B - C$ ;  
д)  $S(-1)$ , ако  $S(x) = A - (B - C)$ .

Трансформирај го во полином од нормален вид изразот (293-295).

293. а)  $9x - [10x - (3x + 2)]$ ; б)  $(5a - 2) - [4a + (3a - 1)]$ ;  
в)  $(7a - 4b) - [5a - (4b + 3a) + 2b]$ ;  
г)  $9x^2 - [3x + (4x^2 - 5x)] + 2x + [7x - (6x^2 - x)]$ .
294. а)  $x - \{y + [x - (y - x)]\}$ ; б)  $(a - b) - \{a - [b - a - (a - b)] - b\}$ ;  
в)  $-(a + b) - \{(a - b) - [a - (b - a) - b - (a - b)]\}$ ;  
г)  $-[x - (x - y)] - \{y - [x - (y - x)] + x\} + (x - y)$ .
295. а)  $12a - \{-6b + [9a - 7b - (3a - b) + 7a] - 4b\}$ ;  
б)  $7a^2 - \{6a - [5a^2 - (4a - 3a^2)] + [2a - (a^2 - 8a)]\}$ ;  
в)  $(2x - 3y) - \{4x - [5y - (6x - 7y) + 4x] + [7y - (3x - 6y)]\}$ ;  
г)  $[3x^2 - (4x - 10)] - \{4x - [-5 + (6x - x^2) - (7x^2 - 6x + 5)] + 3x^2\}$ .

296. Докажи дека:

- а) Збирот на два парни броја е парен број.  
б) Збирот на два непарни броја е парен број.  
в) Збирот на три последователни броја, од кои првиот е непарен, е парен број.  
г) Збирот на три последователни броја, од кои првиот е парен, е непарен број.
297. Ако на четвртината од еден парен број го додадеме збирот на следните два последователни парни броја ќе се добие 33. Кои се тие броеви?
298. Ако третината на еден непарен број, ја одземеш од збирот на неговите два последователни непарни броја, ќе добиеш 31. Кои се тие броеви?
299. Збирот на три последователни природни броја намален за нивниот четврти последователен број изнесува 22. Кои се тие броеви?
300. Одреди го збирот на три последователни парни броја, ако збирот на петтината од првиот, третината од вториот и половината од третиот изнесува 13.

## Треба да знаеш

- Полином се множи со моном така што секој член од полиномот се множи со мономот, а збирот од добиените производи се претставува како полином во нормален вид.

Одреди ги производите (301-304).

301. а)  $5 \cdot (3x + 2)$ ; б)  $-4 \cdot (5x - 7)$ ; в)  $\frac{1}{2} \cdot (6a^2 + 4a)$ ; г)  $0,5 \cdot (4a - 8)$ .

302. а)  $x \cdot (2x - 5)$ ; б)  $3x \cdot (2a + 5b)$ ; в)  $-2a \cdot (5a - 4)$ ; г)  $\frac{1}{3} a^2 \cdot (-6a + 12b)$ .

303. а)  $(3a^2 - 2a + 2) \cdot (-6a)$ ; б)  $(5a - ab + 3) \cdot (-4a^2)$ ;  
в)  $(-3b^2 + 7b - 8) \cdot (-3b^2)$ ; г)  $(1 - 3b + b^2) \cdot (-5a^2b)$ .

304. а)  $(4x^3 - 3x^2 + 5x - 9) \cdot (-3x^3)$ ; б)  $(3x^4 - 5x^2 - 2x + 11) \cdot 4x$ ;  
в)  $-5ab^2 \cdot (-7a^4 + 5a^3 - 3a - 2)$ ; г)  $5a^3x^4 \cdot (3ax^2 - 0,2a^2x - a)$ .

Претстави ги како полином во нормален вид изразите (305-306).

305. а)  $4a \cdot (5a - 2) - 10 \cdot (2a^2 - a - 2)$ ; б)  $2 \cdot (6x^3 - 3x^2) + (4x^2 - 2x + 1) \cdot (-3x)$ ;  
в)  $(4x^2 - 3x + 2) \cdot (-2x) + (1 - x + x^2) \cdot (8x)$ ; г)  $x \cdot (x^2 - 2y) - y \cdot (2x - y^2)$ .

306. а)  $(a^2 - 2ab + 3b^2) \cdot (5a) - 5b \cdot (2a^2 - 1,2ab + 0,4b^2)$ ;  
б)  $(0,2 + 0,4a + 0,6a^2) \cdot (-10a) - (3a^2 + 2a - 1) \cdot (2a)$ ;

в)  $(0,5x^2y - 3xy^2 + 2y^3) \cdot (2x) - 3y \cdot \left(2x^3 - 1\frac{1}{3}x^2y + xy^2\right)$ ;

г)  $-\frac{1}{2}x^2 \cdot (6x^2 - 8x - 10) - 0,5x \cdot (-4x^3 + 10x^2 - 2x)$ .

## Треба да знаеш

- Полином со полином се множи така што секој член од првиот полином се множи со секој член од вториот полином, а добиениот збир од производи се претставува како полином во нормален вид.



307. а)  $(5x+2) \cdot (2y+3)$ ; б)  $(4x-3) \cdot (3x+1)$ ; в)  $(x-6) \cdot (5y-2)$ ;  
 г)  $(3+x) \cdot (x-2)$ .

308. а)  $(2a+3b) \cdot (4a+3b)$ ; б)  $(5a-4b) \cdot (3a+2b)$ ;  
 в)  $(3a^2+2b) \cdot (4a^2-5b)$ ; г)  $(a^2-2b^2) \cdot (3a^2-7b^2)$ .

309. а)  $(a^2+ab+b^2) \cdot (a-b)$ ; б)  $(b^2-ab+a^2) \cdot (a+b)$ ;  
 в)  $(4a^2-6ab+9b^2) \cdot (2a+3b)$ ; г)  $(16b^2+20ab+25a^2) \cdot (4b-5a)$ .

310. а)  $(2a^2-3a+4) \cdot (a+1)$ ; б)  $(2-5x) \cdot (7-8x-9x^2)$ ;  
 в)  $(7a^2-6a-5) \cdot (4a-3)$ ; г)  $(4x-3) \cdot (2+5x-10x^2)$ .

311. а)  $(a-b+c) \cdot (a+b-c)$ ; б)  $(x-y-z) \cdot (x+y-z)$ ;  
 в)  $(x+2) \cdot (x-3) \cdot (x+4)$ ; г)  $(a+b) \cdot (b+c) \cdot (a-c)$ .

Помножи ги полиномите, а потоа подреди ги по степенот на променливата почнувајќи од највисокиот (312-315).

312. а)  $(a+1) \cdot (a-a^2+a^3-1)$ ; б)  $(2x^2-3x-1) \cdot (5x+2)$ ;  
 в)  $(2a^2-3a+4) \cdot (a+1)$ ; г)  $(7x^2-6x+5) \cdot (4x-3)$ .

313. а)  $(2+5x) \cdot (-9x^2+7-8x)$ ; б)  $(4a-5) \cdot (5a-10a^2+2)$ ;  
 в)  $(x^4+2x^3+4x^2+8x+16) \cdot (x-2)$ ; г)  $(2a+1) \cdot (16a^4-8a^3+4a^2-2a+1)$ .

314. а)  $(1,2a^5-3a^4+5a^3-8a-16) \cdot (5a^2-7a+0,25)$ ;

б)  $(0,35y^3-0,75y^2-1,6y-4) \cdot (10y-2)$ ;

в)  $(0,125x^3+0,25x^2+0,5x+1) \cdot (1-4x)$ ; г)  $\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{6}a-1\right) \cdot (12-6a)$ .

315. а)  $(2a-3) \cdot (3a+4) + (4a+5) \cdot (5a-6)$ ;

б)  $(x^2-2x) \cdot (x-1) + (3x^2-x) \cdot (x+2)$ ;

в)  $(3x+2y) \cdot (4x-3y) - (5x-4y) \cdot (6x+5y)$ ;

г)  $(4a+3b) \cdot (2a+b) - (3a+b) \cdot (a+3b)$ .

316. Ако  $n$  е цел број, пресметај го производот на:

а) три последователни броја, од кои  $n-1$  е најмал;

б) три последователни парни броја, од кои  $2n$  е среден;

в) три последователни непарни броја, од кои  $2n+1$  е најголем.

Треба да знаеш

$$\bullet \quad (A+B) \cdot (A-B) = A^2 - B^2$$

Пресметај ги производите (317 - 321)

317. а)  $(a+2) \cdot (a-2)$ ; б)  $(x+y) \cdot (x-y)$ ; в)  $(5+a) \cdot (5-a)$ ; г)  $(9+x) \cdot (9-x)$ .

318. а)  $(5x-2) \cdot (5x+2)$ ; б)  $(7-5a) \cdot (7+5a)$ ;  
в)  $(3a+5b) \cdot (3a-5b)$ ; г)  $(8x+13y) \cdot (8x-13y)$ .

319. а)  $\left(\frac{2}{3}x+6\right) \cdot \left(\frac{2}{3}x-6\right)$ ; б)  $\left(\frac{3}{4}a-\frac{1}{3}b\right) \cdot \left(\frac{3}{4}a+\frac{1}{3}b\right)$ ;  
в)  $(0,2-x) \cdot (0,2+x)$ ; г)  $(1,1a+0,5b) \cdot (1,1a-0,5b)$ .

320. а)  $(5x^2-3y^3) \cdot (5x^2+3y^3)$ ; б)  $\left(\frac{1}{5}x^2-5y\right) \cdot \left(\frac{1}{5}x^2+5y\right)$ ;  
в)  $\left(\frac{1}{7}a^5+\frac{2}{9}b^3\right) \cdot \left(\frac{1}{7}a^5-\frac{2}{9}b^3\right)$ ; г)  $\left(\frac{2}{3}a^2b+0,1c\right) \cdot \left(\frac{2}{3}a^2b-0,1c\right)$ .

321. а)  $(6x^2-0,6y^3) \cdot (6x^2+0,6y^3)$ ; б)  $\left(1\frac{1}{3}a-1\frac{1}{2}b\right) \cdot \left(1\frac{1}{3}a+1\frac{1}{2}b\right)$ ;  
в)  $\left(\frac{2}{5}xy^2-0,2z\right) \cdot \left(\frac{2}{5}xy^2+0,2z\right)$ ; г)  $(2,5a^2-1,5b^2) \cdot (2,5a^2+1,5b^2)$ .

Ако  $33 \cdot 27 = (30+3) \cdot (30-3) = 30^2 - 3^2 = 900 - 9 = 891$ , пресметај со истата постапка на што е еднакво:

322. а)  $83 \cdot 77$ ; б)  $98 \cdot 102$ ; в)  $196 \cdot 204$ ; г)  $1010 \cdot 990$ ; д)  $512 \cdot 488$ ;  
ѓ)  $5,9 \cdot 6,1$ ; е)  $7,05 \cdot 6,95$ ; ж)  $5\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{2}$ .

Треба да знаеш

$$\bullet \quad (A+B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2; \quad (A-B)^2 = A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2.$$

Одреди го квадратот на биномите (323-327).

323. а)  $(x+3)^2$ ; б)  $(x-2)^2$ ; в)  $(15+x)^2$ ; г)  $(6-x)^2$ .

324. а)  $(3a+5b)^2$ ; б)  $(2a-7b)^2$ ; в)  $(2a-3)^2$ ; г)  $(9+5x)^2$ ;  
 325. а)  $\left(2x-\frac{1}{2}y\right)^2$ ; б)  $\left(\frac{1}{4}x+8\right)^2$ ; в)  $(0,2x-5y)^2$ ; г)  $(4x+0,5y)^2$ .  
 326. а)  $(x^3-5y)^2$ ; б)  $(6x^2+7y^3)^2$ ; в)  $(5x^2-6y^5)^2$ ; г)  $\left(x^4+\frac{1}{4}y^4\right)^2$ .  
 327. а)  $(a^2b-c)^2$ ; б)  $(1+a^3b^2)^2$ ; в)  $(x^n+2)^2$ ; г)  $(x^n-3y^n)^2$ .

Согледај ја постапката за квадрирање на број:

$$32^2 = (30+2)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 2 + 2^2 = 900 + 120 + 4 = 1024,$$

328. Според претходната постапка пресметај:

а)  $31^2$ ; б)  $98^2$ ; в)  $997^2$ ; г)  $1002^2$ ; д)  $7,2^2$ ; е)  $\left(8\frac{1}{2}\right)^2$ .

Сведи го во нормален вид полиномот (329 и 330)

329. а)  $(5a-3b)^2 - 3 \cdot (3a-5b)^2$ ; б)  $2 \cdot (7x-3a)^2 - 3 \cdot (x-5a)^2$ ;  
 в)  $(2a-1)^2 - (2a+1) \cdot (2a-1)$ ; г)  $(5x+4y)^2 - 4 \cdot (x-2y) \cdot (x+2y)$ .  
 330. а)  $(4a-b)^2 - (5a-b) \cdot (5a+b) + (3a-7b) \cdot (2a+b)$ ;  
 б)  $(x^2-x+1) \cdot (x+1) - (x^2+1)^2 - (x-1) \cdot (x+1)$ ;  
 в)  $2(5a+6x) \cdot (3a+2x) - (4a+7x)^2 - (3a+5x) \cdot (3a-5x)$ ;  
 г)  $(x+5)^2 + 2(x+5) \cdot (7-x) + (x-7)^2$ .

19

## ДЕЛЕЊЕ НА МОНОМИ. ДЕЛЕЊЕ НА ПОЛИНОМ СО МОНОМ.

### Треба да знаеш

- ☛ Моном со моном се дели така што посебно се делат коефициентите, а посебно главните вредности и добиените количници се запишуваат како производ.
- ☛ Полином се дели со моном така што секој член на полиномот се дели со мономот, а добиените количници се запишуваат во збир како полином од нормален вид.
- ☛ Во задачите при делење со моном општите броеви во мономот имаат вредност различна од нула.

Одреди го количникот на мономите (331 - 339)

331. а)  $9x:3$ ; б)  $-15y:5$ ; в)  $6a:(-2)$ ; г)  $-12b:(-6)$ .  
 332. а)  $7x:2$ ; б)  $11y:(-5)$ ; в)  $-8a:3$ ; г)  $(-4b):(-7)$ .

333. а)  $8x : x$ ; б)  $-5y : y$ ; в)  $20a : (-4a)$ ; г)  $(-16b) : (-4b)$ .
334. а)  $18a^5 : 6a^2$ ; б)  $-36b^4 : 9b^3$ ; в)  $25x^6 : (-5x)$ ; г)  $(-14y^3) : (-7y^2)$ .
335. а)  $32xy : 8y$ ; б)  $27ab^2 : (-3a)$ ; в)  $-56x^2y : 7x^2$ ; г)  $(-49a^3b^2) : (-7a^3)$ .
336. а)  $28a^2b^3 : 7ab$ ; б)  $-42a^5b^2 : 6a^3b^2$ ;  
в)  $54x^6y^4 : (-9x^2y^2)$ ; г)  $-45x^3y^4 : (-15x^2y^3)$ .
337. а)  $36a^3b^2c : 12abc$ ; б)  $-72a^4b^2c^3 : 8a^2b^2c^2$ ;  
в)  $3x^2y^4z^6 : (-6x^2y^3z^4)$ ; г)  $-7xy^3z^2 : (-14yz^2)$ .
338. а)  $1,6a^3b^4 : 0,8ab^3$ ; б)  $-5a^2b^5 : 0,5a^2b^4$ ;  
в)  $\frac{1}{2}x^5y^6 : \left(\frac{1}{2}x^5y^5\right)$ ; г)  $\left(-2\frac{1}{2}x^4y^5\right) : \left(-3\frac{1}{3}x^3y^2\right)$ .
339. а)  $2\frac{1}{3}a^4b : 1\frac{1}{6}a^2b^3$ ; б)  $-0,2a^2b^5 : 5a^4b^3$ ;  
в)  $3xy^2z^3 : (-2x^2y^2z^2)$ ; г)  $-xy^3z^2 : (-3x^3y^5z^4)$ .

Сведи ги во нормален вид изразите (340 и 341).

340. а)  $15a : 5 - 2a^2 : a - 9a^4 : (-3a^3)$ ; б)  $3x : 2x - x^3 : 2x^3 - 21x^4 : 7x^4$ ;  
в)  $(7x^3 - x^3 + 12x^3) : (-9x^2)$ ; г)  $(14a^4 : 7a + 26a^3 : 2) : (27a^5 : 9a^3 - 48a^4 : 6a^2)$ .
341. а)  $-32a^4b^2 : 4ab^2 + 4a \cdot (-3a^2) - 20a^3b^4 : (-2b^4)$ ;  
б)  $36a^3b^2c^4 : (9ab^2c^3 - 3ab^2c^3) - 12a^3b^2c : 3ab^2$ ;  
в)  $[60x^3 : 4x - (17x^4 + 7x^4) : 8x^2] : (-6x)$ ;  
г)  $[24x^8 : (-6x^2) - 12x^7 : 3x] : (16x^4 : 2x)$ .

Пресметај ги количниците (342-346).

342. а)  $(9a + 12b) : 3$ ; б)  $(35x - 21y) : (-7)$ ; в)  $(75a^2 - 5b) : 5$ ;  
г)  $(18x^2 - 24x + 6) : (-6)$ ; д)  $(16a - 8b + 12c) : 4$ ; е)  $(9ab + 7bc + 5ac) : (-2)$ .
343. а)  $(3a^3 - 2a) : a$ ; б)  $(11a^5 + 6a^3 - 2a^2) : a^2$ ;  
в)  $(a^2x + b^3x + cx) : x$ ; г)  $(x - 2x^2 + 3x^3) : x$ .
344. а)  $(1,4xy - 2,8xz + 3,5x^2) : 7x$ ; б)  $(12x^3 - 13x^2 + 14x) : (-10x)$ ;  
в)  $(40ax - 35bx + 30cx) : 5x$ ; г)  $\left(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}ax - \frac{1}{6}a\right) : \left(-\frac{1}{6}a\right)$ .

345. а)  $(26x^3y^4 - 52x^4y^3 - 39x^5y^5) : 13x^3y^3$ ; б)  $(60a^2b^3 + 45a^3b^4 - 75a^4b^5) : (-15a^2b^3)$ ;  
 в)  $(-22ab^2c^3 + 55a^3bc^2 - 33a^2b^3c) : 11abc$ ;  
 г)  $(-34x^5y^3z^4 + 85x^2y^4z^5 + 51x^4y^5z^3) : (-17x^2y^3z^3)$ .

346. а)  $(a^5 - 2a^3 - 3a^2) : \left(-\frac{1}{3}a^2\right)$ ; б)  $(2a^2b + 4ab - 6ab^2) : \frac{1}{2}ab$ ;  
 в)  $(0,6x^3y^2z^4 - 0,3x^2yz^3 + 1,2x^2y^3z^2) : (-0,3x^2yz^2)$ ;  
 г)  $\left(-\frac{8}{3}a^4b^5c^3 + 2a^3b^4c^5 - \frac{4}{3}a^5b^3c^4\right) : \left(-\frac{2}{3}a^3b^3c^3\right)$ .

Сведи ги на полином во нормален вид изразите (347-349).

347. а)  $(6a^2 - 14a^3) : 2a + (12a + 15a^2) : 3$ ; б)  $x \cdot (x - 2) - (9x^3 - 18x^2) : 9x$ ;  
 в)  $(14a^2b - 35ab^2) : 7ab + (80a^2 - 40ab) : (-10a)$ ;  
 г)  $(64x^3yz^3 - 48x^3z^2) : 16x^2z^2 - (24x^4y^2z - 16x^4y) : 8x^3y$ .

348. а)  $(28x^2 - 21x) : (-7x) - (3x - 4) \cdot 5 + (54 - 36x) : (-9)$ ;  
 б)  $(32x^3 - 24x^2) : (-4x) - (60x^2 - 96x) : 12 + \left(1 - \frac{3}{4}x\right) \cdot (-16x)$ ;  
 в)  $(2,7a - 1,8a^2) : 9a - (2,4 - 0,8a) : 0,8 + (0,4 - 6a) \cdot (-5)$ ;  
 г)  $\left(\frac{3}{4}a^2 - a^3\right) : \left(-\frac{3}{4}a\right) - \left(\frac{2}{3}a - 1\right) \cdot 1\frac{1}{2}a + (a^4 - 3a^3) : \frac{1}{3}a^2$ .

349. а)  $[(x + y)^2 + (x + y) \cdot (x - y) - 4x \cdot (1 - y)] : (-2x)$ ;  
 б)  $(8a^2b - 10ab^2) : [(a - b)^2 + (a - b)(a + b) - 2a(a - 2b)]$ ;  
 в)  $\left[\frac{2}{3}(x - 3y) \cdot (x + 3y) - \frac{1}{6}(2x - 1,5y)(2x + 6y)\right] : \left(-\frac{1}{4}y\right)$ ;  
 г)  $\{3x^2(a^2 + b^2) - 3a^2b^2 + 3[x^2 + (a + b)x + ab]\} \cdot [x(x - a) - b(x - a)] : 2x^2$ .

20

## ДЕЛЕЊЕ НА ПОЛИНОМ СО ПОЛИНОМ

*Треба да знаеш*



Кога се дели полином со полином, прво треба членовите во деленикот и делителот да се подредат по степенот на една од променливите, почнувајќи од највисокиот степен, а потоа се делат со постапката за делење на полиноми.

Подели ги полиномите (350-356).

350. а)  $(x^2 + 5x + 6) : (x + 2)$ ; б)  $(x^2 - x - 12) : (x + 3)$ ;  
 в)  $(x^2 + x - 12) : (x + 4)$ ; г)  $(x^2 - 7x + 10) : (x - 5)$ .
351. а)  $(2x^2 - 3xy + y^2) : (x - y)$ ; б)  $(6x^2 - 7xy + 2y^2) : (2x - y)$ ;  
 в)  $(9x^2 - 24xy + 16y^2) : (3x - 4y)$ ; г)  $(8x^2 + 2xy - 15y^2) : (2x + 3y)$ .
352. а)  $(6x^4 - x^3 - x^2 + 26x - 10) : (2x^2 - 3x + 5)$ ;  
 б)  $(5x^3 - 6x^2 + 7x + 12) : (x^2 - 2x + 3)$ ; в)  $(x^4 + x^2 + 1) : (x^2 + x + 1)$ ;  
 г)  $(3a^4 - 8a^3b + 6a^2b^2 - ab^3) : (3a^2 - 5ab + b^2)$ .
353. а)  $(x^2 - 4xy + 3y^2) : (x - 3y)$ ; б)  $(6x^2 - 13xy + 6y^2) : (2x - 3y)$ ;  
 в)  $(6x^3 - 23x^2 + 24x - 10) : (2x - 5)$ ; г)  $(x^4 + 2x^3 + 5x + 10) : (x + 2)$ .
354. а)  $(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x + 10) : (x^2 - 3x + 5)$ ;  
 б)  $(x^3 - 7x + 2x^4 + 2 - 10x^2) : (1 + 2x^2 - 5x)$ ;  
 в)  $(10x - 2 - 16x^2 + 30x^4 + 2x^3) : (4x - 2 + 6x^2)$ ;  
 г)  $(8x^3 - 8x^4 + 3x + 3x^5 - 5x^2 - 1) : (2x - 1 - x^2)$ .
355. а)  $(a^3 - 8) : (a - 2)$ ; б)  $(a^4 - 16) : (a + 2)$ ;  
 в)  $(a^5 + 1) : (a + 1)$ ; г)  $(64a^6 - 125) : (4a^2 - 5)$ .
356. а)  $(a^2 + 2a + 1) : (a + 1)$ ; б)  $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) : (a - b)$ ;  
 в)  $(8a^3 + 12a^2b + 3ab^2 + b^3) : (2a + b)$ ;  
 г)  $(27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3) : (3a - 2b)$ .
- Трансформирај го изразот во полином од нормален вид.
357. а)  $(6x^2 - 9xy) : 3x - (12y^2 - 4xy) : 4y - 2(x - y)$ ;  
 б)  $10 \cdot (0,5x^3 - 1) + (-3,6x^6 + x^3) : (-12x^3) - \left(8x^2 - 8\frac{1}{12}\right)$ ;  
 в)  $(4x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 4x - 3) : \left[(3x^2 - 2x) - (x^2 - 2x + 1)\right]$ ;  
 г)  $\left\{\left[(x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1) : (x^2 - 1)\right] : (x^2 - 1)\right\} : (x - 1)$ .

*Треба да знаеш*



Рационалниот израз е составен од константи и променливи поврзани со операциите: собирање, одземање, множење, делење или степенување со природен број и само константа, односно променлива претставува рационален израз.

- Целите рационални изрази не ја содржат операцијата делење со променлива, а во дробните рационални изрази застапено е делењето со променлива.
- Делењето со нула нема смисла, па затоа вредностите на променливата за кои именителот на дробниот рационален израз добива вредност нула не се допуштени.

**358.** Кои од изразиве се бројни, а кои рационални:

а)  $3^2 - 5 \cdot 4 \cdot 6$ ;      б)  $a^2 + 3b$ ;      в)  $\frac{2}{3} - 5a$ ;      г)  $6 + 2^3 : 4$ ;  
 д)  $\frac{1}{2}a - 3b + c$ ;      е)  $\frac{5-32}{3^4 : 3}$ ;      ж)  $\frac{7+2 \cdot 3}{a}$ ;      з)  $\frac{8a-5b}{3}$ ?

**359.** Одреди кои од следниве изрази се цели рационални изрази:

а)  $3a + 5 : a$ ;      б)  $\frac{2}{5}a - a : 5$ ;      в)  $24 \cdot 5 - 25 \cdot 4$ ;  
 г)  $0,6a + 3,6a^2 - 6$ ;      д)  $a^3 : 3 - a^2 : 2 + a$ ;      е)  $4a^3 : a^5 + 3a^2 : a^3 - 2a : a^2$ .

**360.** Кои од рационалните изрази се дробни:

а)  $-5x^4y^5$ ;      б)  $\frac{9x}{5}$ ;      в)  $\frac{a+b}{c}$ ;      г)  $\frac{1}{a}$ ;      д)  $\frac{a-b}{5}$ ;  
 е)  $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}x - \frac{4}{5}x^2$ ;      ж)  $\frac{xy-1}{xy+1}$ ;      з)  $\frac{a}{b} - 5$ ?

Пресметај ја бројната вредност на изразот (361-363).

**361.** а)  $(2x^2 - 4x + 5) \cdot (6x^3 - 3)$ , за  $x = -2$ ;      б)  $(8x^3 - 5) \cdot (x^2 + 4x - 2)$ , за  $x = -\frac{1}{4}$ ;

в)  $(4x^2 + 2x - 3) \cdot (x - 1)$ , за  $x = -0,5$ ;

г)  $75 - x \cdot \{x[x - 3 \cdot (x + 4)] - 5\}$ , за  $x = -\frac{1}{2}$ .

**362.** а)  $\frac{2x^2 - 4x^3}{1 - x^2}$ , за  $x = -\frac{2}{3}$ ;      б)  $\frac{x^3 - 3x}{x - 3}$ , за  $x = 2$ ;

в)  $\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^2 + x}$ , за  $x = \frac{1}{3}$ ;      г)  $\frac{x^4 - x^2}{x^2 + x}$ , за  $x = 1$ .

**363.** а)  $5a^3 - 2b$ , за  $a = -1$  и  $b = -5$ ;      б)  $\frac{3xy - 3}{5x^2y}$ , за  $x = -2$  и  $y = -3$ ;

в)  $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}$ , за  $x = 0,9$  и  $y = -0,1$ ;      г)  $(2a - 3b)^{2003}$ , за  $a = 2,5$  и  $b = 2$ .

Одреди го множеството допуштени вредности на променливата во рационалниот израз (364-368).

364. а)  $\frac{5}{x}$ ; б)  $\frac{x-1}{x}$ ; в)  $\frac{x-2}{2x}$ ; г)  $\frac{3-x+x^2}{0,5x}$ .
365. а)  $\frac{x+5}{x-3}$ ; б)  $\frac{x}{x-8}$ ; в)  $\frac{x+2}{x+5}$ ; г)  $\frac{2x}{2+x}$ .
366. а)  $\frac{5x}{2x-5}$ ; б)  $\frac{3-y}{3y+2}$ ; в)  $\frac{-4}{4x-1}$ ; г)  $\frac{5x+1}{2x-6}$ .
367. а)  $\frac{2x^2-1}{x^2-1}$ ; б)  $\frac{9}{9-x^2}$ ; в)  $\frac{x}{x^2+1}$ ; г)  $\frac{5-x^2}{5+x^2}$ .
368. а)  $\frac{3x-2}{(x-1)(x-5)}$ ; б)  $\frac{x+2}{(x+3)(x+4)}$ ; в)  $\frac{6}{x(x-6)}$ ; г)  $\frac{7x-3}{(x-7)(x+3)}$ .

369. Одреди го множеството на допуштени вредности во изразот за пресметување на:

а) периметар на рамностран триаголник,  $(3a)$ ;

б) плоштина на квадрат,  $(a^2)$ ;

в) вкупниот број на дијагонали во многуаголник,  $\left(\frac{n(n-3)}{2}\right)$ ;

г) големина на внатрешен агол во правилен многуаголник,  $\left(\frac{(n-2)180^\circ}{n}\right)$ .

22

## РАЗЛОЖУВАЊЕ ПОЛИНОМ НА МНОЖИТЕЛИ СО ИЗВЛЕКУВАЊЕ ЗАЕДНИЧКИ МНОЖИТЕЛ ПРЕД ЗАГРАДИ

*Треба да знаеш*

Да го користиш дистрибутивното својство на множење во однос на собирање;  $ax + ay = a(x + y)$ .

370. Разложи ги на прости множители броевите:

15; 24; 36; 60; 72; 120; 196; 210; 512; 1212.

Разложи ги на прости множители изразите (371-380).

371. а)  $2x+2y$ ; б)  $7x-7y$ ; в)  $10x+5y$ ; г)  $9x-18y$ ;  
 д)  $6x+12$ ; ё)  $8-24x$ ; е)  $5+5x$ ; ж)  $3x-3$ .
372. а)  $ax-bx$ ; б)  $ax-a$ ; в)  $cd+bc$ ; г)  $xy-yz$ ;  
 д)  $x^2+xy$ ; ё)  $a^4-a^3$ ; е)  $8ab+4b$ ; ж)  $4x^2+12x^2y$ .
373. а)  $4x^3y^3-8x^2y^2$ ; б)  $9a^3-6a^2b$ ; в)  $-10ay-25by$ ;  
 г)  $8a^2b^3+6a^3b$ ; д)  $2a^2bx+6ax^2$ ; ё)  $5a^3b^2c-20ab^2$ .




374. а)  $3x+6y-9z$ ; б)  $14x-21y+7$ ; в)  $ax+ay-az$ ; г)  $5ab-5ac+5ad$ .
375. а)  $5x^2-10xy-5xy^2$ ; б)  $4ax-8ax^2+12ax^3$ ;  
в)  $15x^3y^2+10x^2y-20x^2y^3$ ; г)  $3ab-6a^2b^2+9a^3b^3$ .
376. а)  $ma+mb+mc+md$ ; б)  $ax-bx-cx+dx$ ;  
в)  $2ax+4ay-6az-8at$ ; г)  $ax-abx^2+acx^3-adx^4$ .
377. а)  $a(x-y)+b(x-y)$ ; б)  $x(a-b)-y(a-b)$ ;  
в)  $5x(a-2)+3y(a-2)$ ; г)  $4a(x-4)-9b(x-4)$ .
378. а)  $(3x+2)(y+1)-(2x-1)(y+1)$ ; б)  $12x^2+8x-5(3x+2)$ ;  
в)  $ax-ay+b(x-y)$ ; г)  $a+b-3x(a+b)$ .
379. а)  $3a(x+y)-x-y$ ; б)  $2x(y-5)-y+5$ ;  
в)  $a(b+c)-2b-2c$ ; г)  $2x(y-3)-3y+9$ .
380. а)  $a(x-2)+b(x-2)-c(x-2)$ ; б)  $2a(x^2+1)-3b(x^2+1)+5c(x^2+1)$ ;  
в)  $3x(a-c)-2y(a-c)-(c-a)$ ; г)  $4a(x-y)-5b(x-y)-3x+3y$ .

23

**РАЗЛОЖУВАЊЕ НА ПОЛИНОМИ ОД ВИДОТ  $A^2 - B^2$  НА ПРОСТИ МНОЖИТЕЛИ**

*Треба да знаеш*

  $A^2 - B^2 = (A+B) \cdot (A-B)$ , за кои било изрази  $A$  и  $B$ .

Разложи ги на прости множители полиномите (381-389).

381. а)  $x^2-9$ ; б)  $25-y^2$ ; в)  $121-x^2$ ; г)  $x^2-1$ .
382. а)  $9x^2-49$ ; б)  $225-16y^2$ ; в)  $81x^2-100$ ; г)  $4x^2-169$ .
383. а)  $x^2-36y^2$ ; б)  $16x^2-121y^2$ ; в)  $289x^2-225y^2$ ; г)  $625x^2-576y^2$ .
384. а)  $20x^2-5$ ; б)  $2x^2-18y^2$ ; в)  $45-5x^2$ ; г)  $28x^2-63y^2$ .
385. а)  $\frac{4}{9}x^2-\frac{25}{49}y^2$ ; б)  $\frac{1}{64}-\frac{4}{25}y^2$ ; в)  $0,25x^2-0,04y^2$ ; г)  $0,01-1,21x^2$ .
386. а)  $x^3-25x$ ; б)  $2x^3-2x$ ; в)  $162y-2y^3$ ; г)  $xy^3-4xy$ .
387. а)  $(a+b)^2-c^2$ ; б)  $a^2-(a+b)^2$ ; в)  $(x-3)^2-9$ ; г)  $64-(x-8)^2$ .
388. а)  $(a+b)^2-(a-b)^2$ ; б)  $(x-y)^2-(x+y)^2$ ;  
в)  $(a+5)^2-(a-5)^2$ ; г)  $(x-4)^2-(x+4)^2$ .
389. а)  $(a+6)^2-(a-5)^2$ ; б)  $(a-1)^2-(a+3)^2$ ;  
в)  $(3x-4y)^2-(5x+2y)^2$ ; г)  $(2xy-3)^2-(3xy+5)^2$ .

Со примена на формулата  $A^2 - B^2 = (A+B) \cdot (A-B)$ , пресметај (390-392).

390. а)  $67^2 - 33^2$ ; б)  $36^2 - 14^2$ ; в)  $52^2 - 48^2$ ; г)  $317^2 - 316^2$ ; д)  $54,3^2 - 45,7^2$ ;

ѓ)  $672,25^2 - 327,75^2$ ; е)  $\left(6\frac{2}{3}\right)^2 - \left(3\frac{1}{3}\right)^2$ ; ж)  $\left(17\frac{5}{8}\right)^2 - \left(2\frac{3}{8}\right)^2$ .


391. а)  $\frac{40^2 - 17^2}{44^2 - 25^2}$ ; б)  $\frac{53^3 - 32^2}{61^2 - 44^2}$ .

392. а)  $35 \cdot 45$ ; б)  $102 \cdot 98$ ; в)  $197 \cdot 203$ ; г)  $604 \cdot 596$ ; д)  $1010 \cdot 990$ .

24

**РАЗЛОЖУВАЊЕ НА ПОЛИНОМИ ОД ВИДОТ**  
 **$A^2 + 2AB + B^2$  И  $A^2 - 2AB + B^2$  НА ПРОСТИ МНОЖИТЕЛИ**

*Треба да знаеш*

  $A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$  и  $A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$ , за кои било изрази  $A$  и  $B$ .

Разложи ги на прости множители полиномите (393-400).

393. а)  $x^2 + 10x + 25$ ; б)  $y^2 - 14y + 49$ ; в)  $a^2 + 22a + 121$ ; г)  $b^2 - 18b + 81$ .

394. а)  $36x^2 + 24xy + 4y^2$ ; б)  $25x^2 - 30xy + 9y^2$ ;  
в)  $49a^2 + 56ab + 16b^2$ ; г)  $4a^2 - 12ab + 9b^2$ .

395. а)  $121x^2 - 22x + 1$ ; б)  $1 + 10x + 25x^2$ ; в)  $1 - 2x + x^2$ ; г)  $16x^2 + 8x + 1$ .

396. а)  $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}$ ; б)  $\frac{9}{16}x^2 - xy + \frac{4}{9}y^2$ ;

в)  $\frac{25}{36}a^2 + ab + \frac{9}{25}b^2$ ; г)  $4x^2 - 2x + \frac{1}{4}$ .

397. а)  $25x^2 + x + 0,01$ ; б)  $0,25 - x + x^2$ ;  
в)  $0,04x^2 + 1,2xy + 0,09y^2$ ; г)  $0,16x^2 - 2xy + 6,25y^2$ .

398. а)  $25 + 40x + 16x^2$ ; б)  $4x^2 - 28xy + 49y^2$ ;  
в)  $256 - 96x + 9x^2$ ; г)  $16x^2 + 120xy + 225y^2$ .

399. а)  $2x^2 + 4x + 2$ ; б)  $27x^2 - 36xy + 12y^2$ ;  
в)  $x^3 - 8x^2 + 16x$ ; г)  $9a^2b + 6ab^2 + b^3$ .

400. а)  $7x^2y + 28xy + 28y$ ; б)  $6ax^2 - 36a^2x + 54a^3$ ;  
в)  $75x^2y^2 - 30xy + 3$ ; г)  $15x^3y^2 - 90x^2y^3 + 135xy^4$ .

Со помош на формулите за скратено множење разложи ги полиномите на прости множители:

401. а)  $x^2 - 2xy + y^2 - 9$ ; б)  $9x^2 - 6x + 1 - y^2$ ;  
в)  $25 - a^2 + 2ab - b^2$ ; г)  $96 + 8y - 8y^2$ .
402. а)  $9x^2 - 4 + (3x + 2)^2 - (3x + 2)(x + 3)$ ; б)  $4x^2 - 1 - (2x - 1)(4x + 7)$ ;  
в)  $(x + 1)(2x - 3) + x^2 + 2x + 1$ ; г)  $(3x - 1)(4x + 7) + 9x^2 - 6x + 1$ .

25

## ЗАДАЧИ ПЛУС ЗА ТЕМА 2

403. Подреди ги по големина броевите почнувајќи од најмалиот:  $2^{14}; 4^4; 16^3; 8^5$ .
404. Колку пати треба да се собере бројот 5 за да се добие  $5^5$ ?
405. Колку цифри има бројот:  
а)  $1000^{19}$ ; б)  $10000^{11}$ ; в)  $0,01^9$ ; г)  $0,001^{13}$ ?
406. Во две седми одделенија има 60 ученици. По колку ученици има во секое одделение, ако во второто има  $\frac{7}{8}$  од првото?
407. Одреди трцифрен број делив со 9, таков што цифрата на единиците му е двапати поголема од цифрата на десетките, а цифрата на стотките трипати поголема од цифрата на десетките.
408. Одреди го најголемиот петцифрен број чии први три цифри се добиени од квадратот на некој природен број, а последните три цифри од кубот (третиот степен) на некој природен број.
409. Докажи дека производот на два последователни парни броја е делив со 8.
410. Докажи дека збирот на секој двоцифрен број и бројот запишан со истите цифри, но во обратен ред е еднаесет пати поголем од збирот на цифрите со кои е запишан тој број.
411. Докажи дека разликата на секој двоцифрен број и бројот запишан од истите цифри, но во обратен ред, е делив со 3.
412. Докажи дека квадратот на секој цел број намален за производот од неговиот претходник и следбеник е еднаков на еден.
413. Користејќи ја задача 412 пресметај:  $\frac{10,5^2 - 9,5^2}{505505^2 - 505504 \cdot 505506}$ .
414. Пронајди скратена постапка и пресметај:  
 $2004^2 - 2003^2 + 2002^2 - 2001^2 + \dots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1$ .
415. Докажи:  $2^{5n} - 2^{5n+3} + 2^{5n+5} + 7 \cdot 2^{5n} = (2^{n+1})^5$ .

**416.** Пресметај го збирот на сите производи во табелата, множејќи само еднаш.

21 · 21	22 · 21	23 · 21	24 · 21	25 · 21
21 · 22	22 · 22	23 · 22	24 · 22	25 · 22
21 · 23	22 · 23	23 · 23	24 · 23	25 · 23
21 · 24	22 · 24	23 · 24	24 · 24	25 · 24
21 · 25	22 · 25	23 · 25	24 · 25	25 · 25

**417.** Производот на два последователни парни броја е за 120 помал од производот на следните два последователни парни броја. Кои се тие броеви?

**418.** Разликата од квадратите на два последователни природни броја е 99. Кои се тие броеви?

**419.** Разликата од квадратите на два последователни парни броја е 100. Кои се тие броеви?

**420.** Провери ја вистинитоста на равенствата.

а)  $(25^{n+2} \cdot 4^{3n}) : (5^{2n+3} \cdot 8^{2n-1}) = 40$ ; б)  $\frac{3^n + 3^n + 3^n}{3^{n-2} \cdot 27} = 1$ ; в)  $\frac{9^{n+2} \cdot 2^{6n}}{3^{2n+3} \cdot 8^{2n-1}} = 24$ .

**421.** Докажи дека збирот на кои било пет последователни природни броја е сложен број.

**422.** Докажи дека збирот на квадратите на пет последователни броја е делив со 5.

**423.** Докажи дека секој трицифрен број запишан со исти цифри е делив со 37.

**424.** Докажи дека разликата  $333^{222} - 222^{333}$ , е делива со 37.

**425.** Со разложување на прости множители пресметај:

а)  $\frac{2 \cdot 3^{20} - 5 \cdot 3^{19}}{9^9}$ ; б)  $\frac{(3 \cdot 2^{20} + 7 \cdot 2^{19}) \cdot 52}{(13 \cdot 8^3)^2}$ ;

в)  $\frac{5 \cdot (180 \cdot 6^7 - 108 \cdot 6^6)}{216^3 - 36^4}$ ; г)  $\frac{(3^{15} + 3^{13}) \cdot 2^9}{16^2 \cdot (3^{14} + 3^{12})}$ .

**426.** Докажи дека разликата на еден четирицифрен број чија цифра на десетки е 0 и бројот запишан со истите цифри, но во обратен ред е делива со 9.

**427.** Докажи дека збирот на трицифрен број чија средна цифра е 0 и бројот запишан со истите цифри, но во обратен ред е делив со збирот од цифрите од тој број.

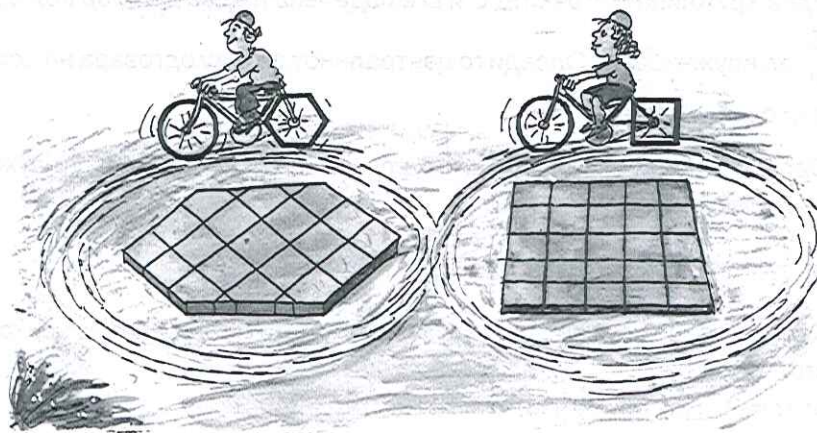
**428.** Ако на производот на два последователни цели броја се додаде поголемиот од нив се добива квадратот од поголемиот број. Докажи го тврдењето.

**429.** Покажи дека ако производот на два последователни парни броја се зголеми за 1 се добива квадрат на бројот кој се наоѓа помеѓу нив.

**430.** Ако производот на два последователни непарни броја се зголеми за 1 се добива квадратот на бројот што се наоѓа помеѓу нив. Докажи го тврдењето.

## Содржина на шемајџа

1	Централен агол .....	62	11	Задачи со примена на Питагоровата теорема .....	78
2	Периферен агол .....	63	12	Поим за плоштина .....	79
3	Талесова теорема .....	65	13	Плоштина на правоаголник и квадрат .....	81
4	Тетивен четириаголник .....	67	14	Плоштина на паралелограм	83
5	Тангентен четириаголник .....	68	15	Плоштина на триаголник .....	84
6	Правилни многуаголници. Агли и периметар .....	69	16	Плоштина на траpez и делоид .....	86
7	Својства на правилен многуаголник .....	71	17	Плоштина на правилен многуаголник .....	87
8	Конструкција на правилни многуаголници .....	72	18	Задачи за плоштина на многуаголници .....	88
9	Питагорова теорема .....	74	19	Периметар на круг. Должина на кружен лак .....	90
10	Примена на Питагоровата теорема кај правоаголник, квадрат и рамностран триаголник .....	76	20	Плоштина на круг, кружен исечок и кружен прстен .....	91
			21	Задачи плус за тема 3 .....	92



## Треба да знаеш

- ☛ Ако два централни агли во една кружница или во две складни кружници се еднакви, тогаш нивните соодветни тетиви се еднакви и нивните соодветни кружни лаци се еднакви.
- ☛ Ако две тетиви во една кружница или во две складни кружници се еднакви, тогаш се еднакви и нивните соодветни централни агли и соодветните кружни лаци.
- ☛ Ако во иста кружница или во складни кружници два кружни лаци се еднакви, тогаш тетивите, односно централните агли што одговараат на тие лаци се еднакви.



1. Во кружницата  $k(O, r)$  нанесени се еднакви тетиви  $AB$  и  $CD$ . Одреди го аголот  $AOB$ , ако  $\angle COD = 54^\circ$ .
2. Во кружницата  $k(O, r)$  се нацртани тетивите  $\overline{AB} = 5,7 \text{ cm}$ ;  $\overline{BC} = 4,5 \text{ cm}$  и  $\overline{CD} = 57 \text{ mm}$ . Кои од централните агли  $AOB$ ,  $BOC$  и  $COD$  се еднакви?
3. Во иста кружница  $k(O, r)$  се дадени централните агли  $\angle AOB = 63^\circ$ ,  $\angle BOC = 72^\circ$  и  $\angle COD = 63^\circ$ . Кои од исказите се вистинити:  
 а)  $\overline{AB} = \overline{CD}$ ;   б)  $\overline{AB} \neq \overline{BC}$ ;   в)  $\overline{BC} = \overline{CD}$ ;  
 г)  $\overline{AB} = \overline{BC}$ ;   д)  $\overline{AB} = \overline{CD}$ ;   е)  $\overline{BC} \neq \overline{CD}$ ?
4. Со точките  $A$  и  $B$  кружницата  $k(O, r)$  е поделена на два кружни лаци од кои едниот е 4 пати подолг од другиот. Одреди ја големината на централниот агол што му одговара на помалиот кружен лак.
5. Една кружница со точките  $C$  и  $D$  е поделена на два дела од кои едниот е  $\frac{5}{9}$  од кружницата. Одреди го централниот што му одговара на помалиот дел од кружницата.
6. Одреди го централниот агол што одговара на кружен лак што од кружницата претставува:  
 а)  $\frac{1}{5}$ ;   б)  $\frac{1}{18}$ ;   в)  $\frac{2}{9}$ ;   г)  $\frac{4}{15}$ ;   д)  $\frac{3}{20}$ .
7. Колкав дел од кружницата е кружниот лак што му одговара на централниот агол  $\alpha$ , ако:  
 а)  $\alpha = 40^\circ$ ;   б)  $\alpha = 90^\circ$ ;   в)  $\alpha = 144^\circ$ ;   г)  $\alpha = 240^\circ$ ?

8. Нацртај кружница  $k(O, r)$  и две нејзини тетиви  $AB$  и  $BC$  еднакви со радиусот на кружницата. Одреди ја големината на аголот  $AOC$ .
9. Во кружницата  $k(O, r)$  е впишан триаголникот  $ABC$ , така што  $\angle AOB = 156^\circ 15'$  и  $\angle AOC = 98^\circ 32'$ . Одреди го аголот  $BOC$ .
10. Околу рамнокракиот триаголник  $ABC$  со агол при врвот  $C$  од  $40^\circ$  е опишана кружница  $k(O, r)$ . Одреди ги аглите  $AOB$ ,  $BOC$  и  $AOC$ . Какви се меѓу себе  $\angle AOC$  и  $\angle BOC$ ?
11. На кружницата  $k(O, r)$  се дадени точките  $A, B, C$  и  $D$ , така што  $\widehat{AB}$  е 10% од кружницата,  $\widehat{BC}$  е 20% од кружницата и  $\widehat{CD}$  е 30% од кружницата. Одреди ги аглите  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$  и  $AOD$ .
12. Во кружницата  $k(O, r)$  се повлечени заемно нормални дијаметри  $AC$  и  $BD$ . Докажи дека четириаголникот  $ABCD$  има четири еднакви страни.
13. Во кружницата  $k(O, r = 38 \text{ mm})$  е нацртана тетива што одговара на централен агол од  $120^\circ$ . Одреди го растојанието од центарот на кружницата до тетивата.
14. Тетивата  $\overline{AB} = 16 \text{ cm}$  одговара на централен агол од  $90^\circ$ . Одреди го растојанието од тетивата  $AB$  до центарот на кружницата.
15. Аголот при врвот  $C$  на рамнокракиот триаголник  $ABC$  е  $58^\circ$ . Кракот  $BC$  е дијаметар на кружницата  $k(O, r)$ , која ги сече основата и другиот крак во точките  $D$  и  $E$ , соодветно. Одреди ги аглите  $BOD$ ,  $DOE$  и  $EOC$ .

## 2

## ПЕРИФЕРЕН АГОЛ

### Треба да знаеш

-  Аголот чиешто теме лежи на кружницата, а краците ја сечат таа кружница се вика **периферен агол**.
-  Периферниот агол во една кружница е еднаков на половината од централниот агол над истиот кружен лак.

16. Одреди го периферниот агол, ако централниот агол над истиот кружен лак има:
  - а)  $124^\circ$ ;      б)  $56^\circ 20'$ ;      в)  $92^\circ 31' 20''$ .
17. Одреди го централниот агол, ако соодветниот периферен агол е:
  - а)  $13^\circ$ ;      б)  $57^\circ 15'$ ;      в)  $27^\circ 31' 45''$ .
18. Нацртај кружница  $k(O, r)$  и во неа произволен централен агол  $\alpha$ . Само со линијар конструирај агол  $\beta = \frac{1}{2}\alpha$ .

19. Како ќе се промени големината на периферниот агол, ако соодветниот централен агол:
- а) се зголеми два пати;                      б) се намали два пати;  
 в) се зголеми за  $34^\circ$ ;                      г) се намали за  $18^\circ$ ?
20. Одреди го периферниот агол над кружниот лак што од кружницата претставува:
- а)  $\frac{2}{9}$ ;                      б)  $\frac{1}{15}$ ;                      в)  $\frac{5}{8}$ .
21. Колкав дел од кружницата е лакот што одговара на периферен агол од:
- а)  $90^\circ$ ; б)  $45^\circ$ ; в)  $36^\circ$ ; г)  $22^\circ 30'$ ?
22. Збирот од еден периферен агол и неговиот соодветен централен агол е  $159^\circ$ . Колку степени има секој од нив?
23. Во кружницата  $k(O, r)$  се дадени дијаметрите  $MN$  и  $PS$ , такви што  $\angle MOS = 76^\circ$ . Одреди го аголот  $PSN$ .
24. Тетивите  $AB$  и  $CD$  во една кружница се сечат и притоа  $\angle BAC = 26^\circ$  и  $\angle ADC = 44^\circ$ . Одреди го аголот  $ADB$ .
25. Во една кружница последователно се нанесени тетивите  $MN, NP, PS$  и  $ST$ , еднакви со радиусот на кружницата. Одреди ги аглие  $MPT$  и  $MPN$ .
26. Тетивите  $AC$  и  $BD$  се сечат, така што  $\angle ABD = 50^\circ$  и  $\angle ADC = 70^\circ$ . Пресметај го аголот  $CAD$ .
27. Централните агли над тетивите  $AB$  и  $BC$  во опишаната кружница  $k(O, r)$  околу триаголникот  $ABC$  се соодветно  $158^\circ$  и  $74^\circ$ . Одреди ги внатрешните агли на тој триаголник.
28. Еден триаголник е впишан во кружница, а две негови страни определуваат кружни лаци што се соодветно еднакви на  $\frac{1}{3}$  и  $\frac{1}{4}$  од кружницата. Одреди ги внатрешните агли на триаголникот.
29. Во една кружница е впишан рамнокрак триаголник над чија основа одговара кружен лак што е  $\frac{2}{5}$  од кружницата. Одреди ги аглие на тој рамнокрак триаголник.
30. Над кракот на рамнокрак триаголник одговара централен агол од  $145^\circ$  во кружницата опишана околу триаголникот. Одреди ги аглие на тој триаголник.
31. Околу правоаголник со помала страна  $7\text{ cm}$  и агол меѓу дијагоналите  $120^\circ$  е опишана кружница. Одреди ги централниот и периферниот агол што одговараат на помалата страна, а потоа и дијагоналите на правоаголникот.






32. Во триаголникот  $ABC$  се дадени аглие  $\alpha = 48^\circ$  и  $\beta = 62^\circ$ . Пресметај ги големините на аглие  $AOB$ ,  $BOC$  и  $COA$ , ако  $O$  е:
- а) центар на опишаната кружница околу  $\triangle ABC$ ;
  - б) центар на впишаната кружница во  $\triangle ABC$ .
33. Во една кружница  $k(O, r)$ , низ средината на произволен радиус и нормално на него е повлечена тетивата  $AB$ . Колкав е периферниот агол што одговара на оваа тетива?

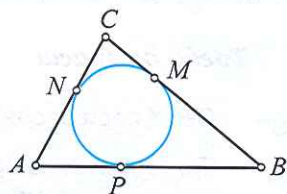
### 3

## ТАЛЕСОВА ТЕОРЕМА

### Треба да знаеш




-  Секој периферен агол над дијаметарот на кружницата е прав агол.
  -  Тангентата  $t$  на кружницата  $k(O, r)$  во допирната точка  $T$  е нормална на радиусот  $OT$ .
  -  Тангентните отсечки на двете тангенти повлечени од една точка кон кружницата се еднакви.
34. Нацртај кружница  $k(O, r)$  и на неа означи точки  $A$  и  $B$  што не припаѓаат на ист дијаметар. Користејќи само линијар, на кружницата одреди точки  $C$  и  $D$ , такви што  $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$ .
35. Во остроаголен триаголник  $ABC$  се повлечени висините  $AA_1$  и  $BB_1$ . Докажи дека постои кружница која минува низ точките  $A$ ,  $B$ ,  $B_1$  и  $A_1$  и одреди го нејзиниот центар.
36. Тежишната линија кон хипотенузата на правоаголен триаголник го дели триаголникот на два рамнокраки триаголници. Докажи.
37. Дадена е полукружница со дијаметар  $AB$ . Нека  $C$  е произволна точка во истата полурамнина. Докажи дека:
- а) ако точката  $C$  е во внатрешната област на полукружницата, тогаш аголот  $ACB$  е тап;
  - б) ако точката  $C$  е надвор од полукружницата, тогаш аголот  $ACB$  е остар.
38. Конструирај правоаголен триаголник со хипотенуза  $c = 4,9$  cm и една катета  $b = 3,7$  cm.
- Упийсиџво:** Примени ја Талесовата теорема.
39. Конструирај правоаголен триаголник со хипотенуза  $c = 6$  cm и висина кон хипотенузата  $h_c = 2,5$  cm.

40. Конструирај правоаголен триаголник ако се дадени отсечките  $p$  и  $q$  на кои подножјето на висината ја дели хипотенузата.
41. Дадени се кружница  $k(O, r = 2,5 \text{ cm})$  и точка  $M$  на растојание  $4 \text{ cm}$  од центарот на кружницата. Низ точката  $M$  конструирај тангента на дадената кружница.
42. Нацртај кружница  $k(O, r)$  и права  $p$ . Конструирај тангента на кружницата  $k$  што е:
- а) паралелна со правата  $p$ ;                      б) нормална на правата  $p$ .
43. Конструирај кружница којашто допира две дадени прави, а едната од нив во дадена точка.
44. Пресметај го периметарот на триаголникот  $ABC$  на цртежот, ако  $\overline{AP} = 5,8 \text{ cm}$ ,  $\overline{AB} = 12 \text{ cm}$  и  $\overline{CN} = 2,5 \text{ cm}$ .



45. Аголот меѓу тангентите повлечени од точка што лежи надвор од кружницата е суплементен со аголот меѓу радиусите повлечени во допирните точки. Докажи.
46. Кружницата  $k(O, r)$  е поделена со точките  $A, B$  и  $C$  на три дела од кои едниот е  $\frac{1}{3}$ , а другиот е  $\frac{1}{5}$  од кружницата. Во точките  $A, B$  и  $C$  се конструирани тангенти на кружницата кои образуваат триаголник. Одреди ги аглите на добиениот триаголник.
47. Докажи дека аголот што тетивата  $AB$  го гради со тангентата на кружницата во точката  $A$  е еднаков со периферниот агол над тетивата  $AB$ .
48. Отсечката  $AB$  е тетива на кружницата  $k(O, r)$ , а правата  $t$  е тангента на кружницата во точката  $A$ . Одреди го аголот  $AOB$ , ако аголот образуван со тетивата  $AB$  и тангентата  $t$  е  $50^\circ$ .
49. Периметарот на правоаголен триаголник е  $36 \text{ cm}$ , а едната катета е за  $3 \text{ cm}$  подолга од другата. Одреди ги должините на страните на триаголникот, ако радиусот на неговата впишана кружница е  $3 \text{ cm}$ .
50. Докажи дека збирот од катетите на правоаголен триаголник е еднаков на збирот од дијаметарот на опишаната и дијаметарот на впишаната кружница на триаголникот.
51. Правите  $T_1T_2$  и  $S_1S_2$  се заеднички тангенти на кружниците  $k_1$  и  $k_2$  со различни радиуси, каде  $T_1, T_2, S_1$  и  $S_2$  се допирни точки и притоа  $T_1, S_1 \in k_1$  и  $T_2, S_2 \in k_2$ . Докажи дека  $\overline{T_1T_2} = \overline{S_1S_2}$ .

## Трѐба да знаеш

-  Четириаголникот чишто темиња припаѓаат на една кружница се вика *тетивен четириаголник*. Неговите страни се тетиви на кружницата.
-  Во секој тетивен четириаголник *спротивните агли се суплементни*.
-  Ако во еден четириаголник еден пар спротивни агли се суплементни, тогаш тој четириаголник е тетивен.

52. На една кружница се означени по ред точките  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  и  $\angle ABC = \beta$ . Изрази го аголот  $CDA$  преку аголот  $\beta$ .
53. Даден е четириаголник  $ABCD$  со  $\angle A = 70^\circ$  и  $\angle B = 105^\circ$ . Околу четириаголникот може да се опише кружница ако  $\angle C$  и  $\angle D$  имаат соодветно по:  
а)  $100^\circ$  и  $90^\circ$ ; б)  $110^\circ$  и  $80^\circ$ ; в)  $110^\circ$  и  $75^\circ$ ; г)  $50^\circ$  и  $140^\circ$ .
54. Одреди ги аглите во темињата  $C$  и  $D$  на тетивниот четириаголник  $ABCD$ , ако:  
а)  $\angle A = 85^\circ$  и  $\angle B = 69^\circ$ ; б)  $\angle A = 53^\circ$  и  $\angle B = 118^\circ 30'$ .
55. Одреди ги аглите во темињата  $A$  и  $B$  на тетивниот четириаголник  $ABCD$ , ако  $\angle C = 74^\circ 34'$  и  $\angle D = 106^\circ$ .
56. Еден од аглите на тетивен четириаголник е два пати поголем од спротивниот агол, а другите два агли се еднакви меѓу себе. Одреди ги аглите на тој четириаголник.
57. Во тетивниот четириаголник  $ABCD$ , аголот во темето  $A$  е за  $16^\circ$  помал од аголот во темето  $B$ , а за  $20^\circ$  поголем од аголот во темето  $C$ . Одреди ги аглите на тој четириаголник.
58. Во еден тетивен четириаголник три соседни агли се такви што првиот е два пати помал од вториот, а три пати помал од третиот. Одреди ги аглите на тој четириаголник.
59. Во тетивниот четириаголник  $ABCD$ , аголот во темето  $A$  е  $73^\circ$ , а аголот во темето  $B$  е за  $8^\circ$  помал од аголот во темето  $C$ . Одреди ги аглите на четириаголникот.
60. Во кружница е впишан трапез  $ABCD$ .  
а) Докажи дека трапезот  $ABCD$  е рамнокрак.  
б) Кој заклучок следува за секој трапез што може да се впише во кружница?  
в) Дали секој рамнокрак трапез е тетивен четириаголник?

61. Во еден рамнокрак трапез едниот остар агол е  $\frac{1}{5}$  од неговиот спротивен агол. Одреди ги аглите на тој трапез.
62. Докажи дека околу правоаголен трапез не може да се опише кружница.
63. Докажи дека околу паралелограм што не е правоаголник не може да се опише кружница.
64. Во остроаголен триаголник  $ABC$  се повлечени висините  $AA_1$  и  $BB_1$ . Докажи дека четириаголникот  $ABA_1B_1$  е тетивен четириаголник.
65. Во тетивниот четириаголник  $ABCD$  дијагоналите  $AC$  и  $BD$  се заемно нормални и  $AC$  ја преполовува  $BD$ . Одреди ги аглите на тој четириаголник, ако  $\angle A = 70^\circ$ .
66. Кои од следните искази се вистинити:  
 а) Околу секој трапез може да се опише кружница.  
 б) Ни еден паралелограм не е тетивен четириаголник.  
 в) Околу правоаголен трапез не може да се опише кружница.  
 г) Правоаголникот е тетивен четириаголник?

## 5

## ТАНГЕНТЕН ЧЕТИРИАГОЛНИК

### Треба да знаеш

- ☛ Четириаголникот чии страни допираат една кружница се вика **тангентен четириаголник**.
  - ☛ Ако четириаголникот  $ABCD$  е тангентен, тогаш збирите од должините на неговите спротивни страни се еднакви, т.е.  

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}.$$
  - ☛ Ако во еден четириаголник збирот од должините на две спротивни страни е еднаков со збирот од должините на другите две спротивни страни, тогаш четириаголникот е тангентен.
67. Дали во четириаголникот  $ABCD$  може да се впише кружница ако должините на неговите страни се последователно:  
 а) 8 см, 9 см, 5 см и 4 см;                      б) 5 см, 8 см, 4 см и 7 см?
68. Одреди ја должината на страна  $\overline{AD}$  на тангентниот четириаголник  $ABCD$  ако  $\overline{AB} = 18\text{ см}$ ,  $\overline{BC} = 18\text{ см}$  и  $\overline{CD} = 11\text{ см}$ .
69. Одреди ја должината на четвртата страна на тангентниот четириаголник  $ABCD$ , ако трите страни се:  
 а)  $\overline{AB} = 8\text{ см}$ ,  $\overline{BC} = 7\text{ см}$  и  $\overline{CD} = 9\text{ см}$ ;  
 б)  $\overline{AB} = 4,8\text{ см}$ ,  $\overline{BC} = 5,6\text{ см}$  и  $\overline{AD} = 4\text{ см}$ ;  
 в)  $\overline{BC} = 3,4\text{ см}$ ,  $\overline{CD} = 8,6\text{ см}$  и  $\overline{AD} = 11,6\text{ см}$ .

70. Одреди ги страните и периметарот на тангентниот четириаголник  $ABCD$ , ако  $\overline{AB} = 15 \text{ dm}$ ,  $\overline{BC} = \frac{3}{5}\overline{AB}$  и  $\overline{CD} = \frac{2}{3}\overline{BC}$ .
71. Ако  $ABCD$  е тангентен четириаголник со периметар  $L$ , тогаш  $\overline{AB} + \overline{CD} = \frac{L}{2}$ . Докажи.
72. Периметарот на тангентниот четириаголник  $ABCD$  е  $48 \text{ cm}$ . Одреди ги должините на страните  $AD$  и  $CD$ , ако  $\overline{AB} = 8 \text{ cm}$  и  $\overline{BC} = 14 \text{ cm}$ .
73. Периметарот на тангентниот четириаголник  $ABCD$  е  $34 \text{ cm}$ , а две негови страни се  $\overline{BC} = 8,5 \text{ cm}$  и  $\overline{CD} = 6,2 \text{ cm}$ . Пресметај ги должините на другите две страни.
74. Периметарот на тангентниот четириаголник  $ABCD$  е  $L = 36 \text{ cm}$ . Одреди ги должините на страните  $AB$  и  $AD$ , ако  $\overline{CD} = 11 \text{ cm}$  и  $\overline{BC} = \frac{1}{3} \cdot L$ .
75. Одреди го периметарот на тангентниот четириаголник  $ABCD$ , ако се познати  $\overline{AB} = 17 \text{ cm}$  и  $\overline{CD} = 13 \text{ cm}$ .
76. Докажи дека средната линија на тангентен трапез е еднаква на четвртина од неговиот периметар.
77. Одреди го периметарот на тангентен трапез чија средна линија е  $4,5 \text{ cm}$ .
78. Еден трапез има периметар  $128 \text{ cm}$  и во него може да се впише кружница. Одреди ја средната линија на тој трапез.
79. Докажи дека во правоаголник што не е квадрат не може да се впише кружница.
80. Во рамнокрак трапез со крак  $8 \text{ cm}$  и остар агол од  $60^\circ$  е впишана кружница. Колку се долги основите на тој трапез?
81. Докажи дека периметарот на тангентен рамнокрак трапез е 4 пати поголем од должината на кракот.

## 6

## ПРАВИЛНИ МНОГУАГОЛНИЦИ. АГЛИ И ПЕРИМЕТАР

### Треба да знаеш

- ☛ Збирот на внатрешните агли на  $n$ -аголник е  $(n-2) \cdot 180^\circ$ .
- ☛ Збирот на надворешните агли на секој  $n$ -аголник е  $360^\circ$ .
- ☛ Многуаголник со  $n$  темиња има вкупно  $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$  дијагонали.
- ☛ Многуаголник на кој сите страни му се еднакви и сите агли му се еднакви се вика **правилен многуаголник**.

➤ Периметарот на правилен  $n$ -аголник со страна  $a$  се пресметува со формулата  $L = n \cdot a$ .

➤ Внатрешниот агол  $\alpha$  на правилен  $n$ -аголник се пресметува со формулата  $\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$ .

➤ Надворешниот агол на правилен  $n$ -аголник е  $\frac{360^\circ}{n}$ .




82. Колку страни има многуаголникот во кој збирот на внатрешните агли изнесува: а)  $540^\circ$ ; б)  $1620^\circ$ ; в)  $1800^\circ$ ?
83. Дали може збирот на внатрешните агли на многуаголник да изнесува  $1520^\circ$ ?
84. Два внатрешни агли во шестаголник се еднакви. Одреди ги тие агли, ако останатите четири се:  $100^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $150^\circ$  и  $120^\circ$ .
85. Аглите:  $145^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $140^\circ$ ,  $110^\circ$ ,  $150^\circ$  и  $135^\circ$  се внатрешни агли на седумаголник. Одреди го седмиот агол на многуаголникот.
86. Во еден многуаголник збирот на внатрешните агли е за  $4140^\circ$  поголем од збирот на надворешните агли. Колку темиња има тој многуаголник?
87. Кај кој многуаголник збирот на внатрешните агли е пет пати поголем од збирот на надворешните агли?
88. Кај кој многуаголник збирот на внатрешните агли е еднаков со збирот на надворешните агли?
89. Збирот на внатрешните агли на еден многуаголник е  $1260^\circ$ . Колку дијагонали има тој многуаголник?
90. Колку страни има правилниот многуаголник чиј надворешен агол е  $30^\circ$ ?
91. Одреди го внатрешниот агол на правилниот многуаголник во кој збирот на внатрешните агли е  $1080^\circ$ .
92. Пресметај го збирот на внатрешните агли на правилниот многуаголник чиј надворешен агол е: а)  $36^\circ$ ; б)  $20^\circ$ ; в)  $15^\circ$ .
93. Одреди го внатрешниот агол на правилниот многуаголник ако неговиот надворешен агол е: а)  $12^\circ$ ; б)  $60^\circ$ .
94. Внатрешниот агол на правилен многуаголник е  $162^\circ$ . Колку вкупно дијагонали може да се повлечат во тој многуаголник?
95. Во кој правилен многуаголник внатрешниот агол е 3 пати поголем од надворешниот агол?
96. Одреди го збирот на внатрешните агли на правилен многуаголник ако еден внатрешен агол е  $144^\circ$ .

97. На кој правилен многуаголник надворешниот агол е  $\frac{2}{3}$  од внатрешниот?
98. Дали постои правилен многуаголник со внатрешен агол од  $155^\circ$ ?
99. Во правилниот петаголник  $ABCDE$  се повлечени дијагоналите од темето  $A$ . Одреди ги внатрешните агли на  $\triangle ABC$  и  $\triangle ACD$ .
100. Пресметај го периметарот на правилниот седумаголник со страна  $a = 8,3$  см.
101. Периметарот на правилен осумаголник е  $25,2$  см. Пресметај ја должината на неговата страна.
102. Правилен многуаголник со страна  $a = 6,2$  см има периметар  $L = 68,2$  см. Колку страни има тој многуаголник?
103. Одреди го периметарот на правилен многуаголник со страна  $15$  см, ако од едно негово теме може да се повлечат  $8$  дијагонали.

## 7

## СВОЈСТВА НА ПРАВИЛЕН МНОГУАГОЛНИК

### Треба да знаеш

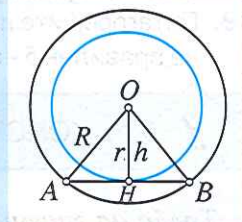
-  Околу секој правилен многуаголник може да се опише кружница.
-  Во секој правилен многуаголник може да се впише кружница.
-  Впишаната и опишаната кружница на правилен многуаголник се концентрични. Нивниот центар се вика центар на правилниот многуаголник.

Нека  $O$  е центар, а  $\overline{AB} = a$  е страна на правилниот  $n$ -аголник (цртеж).

Рамнокракиот  $\triangle AOB$  се вика карактеристичен триаголник на правилниот  $n$ -аголник.

Централниот агол е  $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$ ;

$\overline{OA} = R$  е радиус на опишаната кружница;  $r = h$  е радиус на впишаната кружница или апотема на правилниот  $n$ -аголник.



104. Одреди ја големината на централниот агол на:
- а) рамностран триаголник;    б) правилен седумаголник;  
в) правилен десетаголник.
105. Одреди ги аглиите на карактеристичниот триаголник на правилен петнаесетаголник.
106. Даден е правилен шестаголник  $KLMNPQ$ . Одреди го аголот  $MKN$ .

107. Докажи дека дијагоналите повлечени од едно теме на правилен петаголник го делат аголот во тоа теме на три еднакви агли.
108. Одреди го аголот при основата на карактеристичниот триаголник на правилен деветаголник.
109. Колку страни има правилниот многуаголник чиј централен агол изнесува:  
а)  $18^\circ$ ; б)  $22^\circ 30'$ ; в)  $30^\circ$ ; г)  $9^\circ$ ?
110. Дали постои правилен многуаголник со централен агол од  $16^\circ$ ?
111. За правилниот многуаголник со 12 страни пресметај го:  
а) внатрешниот агол; б) надворешниот агол; в) централниот агол.
112. Одреди го внатрешниот агол на правилниот многуаголник чиј централен агол е: а)  $20^\circ$ ; б)  $10^\circ$ ; в)  $90^\circ$ .
113. Докажи дека кај секој правилен многуаголник централниот агол и надворешниот агол се еднакви меѓу себе.
114. Колку најмногу степени може да има централниот агол во правилен многуаголник?
115. Централниот агол на еден правилен многуаголник е  $24^\circ$ . Колку дијагонали има тој многуаголник?
116. Во кој правилен многуаголник апотемите на два соседни карактеристични триаголници образуваат агол од  $15^\circ$ ?
117. Во еден правилен многуаголник симетралата на една страна и симетралата на аголот што таа страна го зафаќа со соседната страна образуваат агол од  $18^\circ$ . Кој е тој многуаголник?
118. Нека  $A$ ,  $B$  и  $C$  се три соседни темиња на правилен многуаголник, а симетралите на  $\sphericalangle A$  и  $\sphericalangle C$  се сечат под агол од  $24^\circ$ . Одреди го внатрешниот агол на тој многуаголник.
119. Питагорејците имале симбол ѕвезда со 5 крака, чиешто врвови се темиња на правилен 5 - аголник. Одреди го аголот при врвот на ѕвездата.

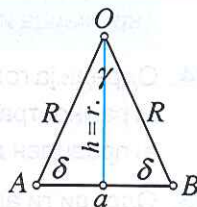
## 8

## КОНСТРУКЦИЈА НА ПРАВИЛНИ МНОГУАГОЛНИЦИ

### Треба да знаеш

Нека  $\triangle AOB$  е карактеристичен триаголник на правилен  $n$  - аголник. Тогаш неговите елементи се:

- Агол при врвот (централен агол)  $\gamma = \frac{360^\circ}{n}$ ;
- Агол при основата  $\delta = \frac{180^\circ - \gamma}{2}$ ;
- Страни:  $\overline{AB} = a$ ,  $\overline{OB} = \overline{OA} = R$ ; апотема  $h = r$ .



Апотемата  $h$  претставува висина на карактеристичниот триаголник, а истовремено и симетрала на аголот при врвот.

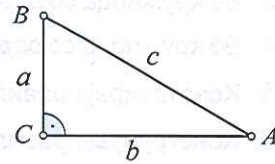


120. Конструирај рамностран триаголник впишан во кружница со радиус 3,5 cm.
121. Конструирај квадрат впишан во кружница со радиус  $R = 3,8$  cm.
122. Конструирај правилен шестаголник со страна:  
а)  $a = 3$  cm; б)  $a = 2,5$  cm; в)  $a = 0,32$  dm.
123. Во кружница со радиус  $R = 0,29$  dm впиши правилен петаголник.
124. Во кружница со радиус  $R = 3$  cm конструирај правилен осумаголник.
125. Конструирај правилен петаголник со страна: а)  $a = 4$  cm; б)  $a = 3,5$  cm.
126. Конструирај правилен осумаголник со страна: а)  $a = 2$  cm; б)  $a = 15$  mm.
127. Во кружница со радиус  $R = 3,5$  cm конструирај правилен 10 - аголник.
128. Конструирај правилен 12 - аголник впишан во кружница со  $R = 4$  cm.
129. Конструирај правилен шестаголник во којшто радиусот на впишаната кружница е: а)  $r = 2,5$  cm; б)  $r = 0,28$  dm.
130. Конструирај правилен шестаголник во кој поголемата дијагонала е 8 cm.
131. Конструирај правилен шестаголник во кој помалата дијагонала е 4,5 cm.
132. Околу кружница со радиус  $r = 3$  cm опиши:  
а) правилен четириаголник; б) правилен осумаголник.
133. Конструирај правилен осумаголник  $ABCDEFGH$  ако е дадена неговата дијагонала  $\overline{AC} = 3,2$  cm.
134. Дадени се кружница  $k(O, r)$  и точка  $S$ . Во дадената кружница впиши правилен шестаголник, така што симетралата на една негова страна да минува низ дадената точка  $S$ .
135. Дадени се кружница  $k(O, r)$  и точка  $S$  надвор од неа. Околу дадената кружница опиши правилен шестаголник, така што една негова страна лежи на права што минува низ точката  $S$ .
136. Дадени се права  $p$  и точка  $O$ ,  $O \notin p$ . Конструирај правилен осумаголник чиј центар е точката  $O$ , а една негова страна лежи на правата  $p$ .
137. Одреди го бројот на страните на правилниот многуаголник  $ABCD\dots$  и конструирај го тој многуаголник ако:  
а)  $\overline{AC} = 5$  cm и  $\angle BAC = 36^\circ$ ; б)  $\overline{AC} = 4$  cm и  $\angle BAC = 22^\circ 30'$ ;  
в)  $\overline{AD} = 5$  cm и  $\angle BAD = 36^\circ$ .
138. Дадена е отсечка  $AB$ . Конструирај кружници  $k$  и  $k_1$ , така што отсечката  $AB$  е нивна заедничка тетива и  $AB$  е истовремено страна на правилен шестаголник впишан во кружницата  $k$  и страна на правилен осумаголник впишан во кружницата  $k_1$ .

## Треба да знаеш

- Во секој правоаголен триаголник квадратот на хипотенузата е еднаков со збирот од квадратите на катетите, т.е.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

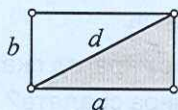


139. Дали е правоаголен триаголникот ако мерните броеви на должините на неговите страни се:  
 а) 14, 48 и 50; б) 17, 25 и 30; в) 9, 40 и 41; г)  $10\frac{4}{5}$ ,  $14\frac{2}{5}$  и 18?
140. Одреди ја должината на третата страна на правоаголниот триаголник со катети  $a$ ,  $b$  и хипотенуза  $c$ , ако:  
 а)  $a = 7\text{ cm}$ ,  $b = 19\text{ cm}$ ; б)  $a = 16\text{ cm}$ ,  $c = 20\text{ cm}$ ; в)  $b = 65\text{ cm}$ ,  $c = 97\text{ cm}$ ;  
 г)  $b = 24\text{ cm}$ ,  $c = 25\text{ cm}$ ; д)  $a = 36\text{ cm}$ ,  $c = 85\text{ cm}$ ; е)  $a = \frac{1}{4}\text{ dm}$ ,  $b = \frac{1}{3}\text{ dm}$ .
141. Во правоаголен триаголник висината  $h$  ја дели хипотенузата на отсечки  $p$  и  $q$ . Одреди го периметарот на триаголникот ако:  
 а)  $p = 9\text{ cm}$ ,  $q = 5\text{ cm}$ ,  $h = 12\text{ cm}$ ; б)  $p = 5\text{ cm}$ ,  $q = 16\text{ cm}$ ,  $h = 12\text{ cm}$ ;  
 в)  $p = 15\text{ cm}$ ,  $q = 6\text{ cm}$ ,  $h = 8\text{ cm}$ .
142. Пресметај го периметарот на правоаголниот триаголник во кој:  
 а) едната катета е 20 cm, а другата е за 5% поголема од дадената катета;  
 б) хипотенузата е 25 cm, а едната катета е за 4% помала од хипотенузата.
143. Катетите на еден правоаголен триаголник се 12 cm и 16 cm. За колку проценти ќе се зголеми периметарот на триаголникот, ако помалата катета се намали за 25%, а поголемата катета се зголеми за 25%?
144. Пресметај го периметарот на остроаголен триаголник  $ABC$  со страни  $a = 51\text{ cm}$ ,  $c = 53\text{ cm}$  и висина  $h_b = 45\text{ cm}$ .
145. Одреди го периметарот на правоаголниот триаголник ако се дадени едната катета и тежишната линија кон таа катета:  
 а)  $a = 6\text{ cm}$ ,  $t_a = 5\text{ cm}$ ; б)  $b = 7\text{ cm}$ ,  $t_b = 25\text{ cm}$ .
146. Одреди го периметарот на правоаголниот триаголник ако се дадени едната катета и тежишната линија кон другата катета:  
 а)  $a = 12\text{ cm}$ ,  $t_b = 13\text{ cm}$ ; б)  $b = 55\text{ cm}$ ,  $t_a = 73\text{ cm}$ .

147. Пресметај го периметарот на триаголникот  $ABC$ , ако се дадени:  $a = 8$  cm,  $h_a = 4$  cm и  $t_a = 5$  cm.
148. Одреди го периметарот на правоаголниот триаголник ако се дадени едната катета и тежишната линија кон хипотенузата:  
 а)  $a = 6$  cm,  $t_c = 5$  cm;      б)  $b = 4$  cm,  $t_c = 3$  cm.
149. Одреди го растојанието меѓу ортоцентарот и центарот на опишаната кружница во правоаголен триаголник со катети 12 cm и 16 cm.
150. Скала долга 13 m е потпрена на ѕид, така што долниот крај од скалата е оддалечен 5 m од ѕидот. До која висина на ѕидот допира скалата?
151. Една бандера висока 9 m стои прекршена, така што врвот на бандерата го допира тлото на растојание 3 m од подножјето на бандерата. На која висина е прекршена бандерата?
152. Едно дете држи летало врзано за конец долг 146 m, а друго дете стои на хоризонтален терен точно под леталото, на растојание 96 m од првото дете. На која висина е леталото?
153. Две улици се сечат под прав агол. На едната улица, на растојание 8 km од раскрсницата се наоѓа трафостаница, а на другата улица, на растојание 15 km од раскрсницата се наоѓа друга трафостаница. Колкаво е растојанието меѓу трафостаниците?
154. Две улици се сечат под прав агол. Од раскрсницата истовремено поаѓаат автомобил по едната и велосипедист по другата улица. Автомобилот се движи со брзина 48 km/h, а велосипедистот со брзина 14 km/h. Колкаво е растојанието меѓу нив после 30 минути?
155. Пешак и велосипедист истовремено тргнуваат од една раскрсница и се движат по две различни улици што се сечат под прав агол. Пешакот се движи со брзина 5 km/h, а велосипедистот со 12 km/h.  
 а) Колкаво е растојанието меѓу нив после 3 часа?  
 б) После колку време од поаѓањето растојанието меѓу нив ќе биде 52 km?
156. Хипотенузата на правоаголен триаголник е 100 cm и таа со подножјето на висината е поделена на две отсечки од кои едната е за 28 cm подолга од другата. Одреди ги должините на тие отсечки и должините на катетите на триаголникот.
157. Периметарот на правоаголен триаголник е 40 cm, а едната катета е 15 cm. Одреди ја должината на другата катета.
158. Одреди ги должините на катетите на правоаголен триаголник ако нивната разлика е 6 cm, а хипотенузата е 30 cm.

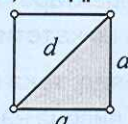
## Треба да знаеш

а) правоаголник



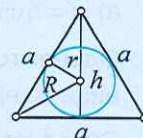
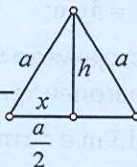
$$d^2 = a^2 + b^2$$

б) квадрат



$$d = a\sqrt{2} \text{ и } a = \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

в) рамностран триаголник



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ и } R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Спроти остар агол од  $30^\circ$  во правоаголен триаголник лежи катета што е половина од хипотенузата, т.е.  $x = \frac{a}{2}$ .

159. Одреди ја дијагоналата на правоаголникот со страни:  
 а)  $a = 8\text{ cm}$ ,  $b = 6\text{ cm}$ ;      б)  $a = 16\text{ cm}$ ,  $b = 63\text{ cm}$ ;  
 в)  $a = 24\text{ cm}$ ,  $b = 10\text{ cm}$ ;      г)  $a = 1,2\text{ cm}$ ,  $b = 3,5\text{ cm}$ .
160. Пресметај го периметарот на правоаголникот за кој се дадени:  
 а)  $d = 15\text{ cm}$ ,  $a = 12\text{ cm}$ ;      б)  $d = 2,6\text{ dm}$ ,  $b = 1\text{ dm}$ ;  
 в)  $d = 65\text{ cm}$ ,  $a = 63\text{ cm}$ ;      г)  $d = 25\text{ cm}$ ,  $b = 18\text{ cm}$ .
161. Одреди го периметарот на правоаголникот чијашто должина е два пати поголема од ширината, а неговата дијагонала е:  
 а)  $d = 45\text{ cm}$ ;      б)  $d = 80\text{ cm}$ .
162. Фудбалско игралиште има должина  $120\text{ m}$  и ширина  $60\text{ m}$ .  
 а) Одреди го растојанието од корнер – знаменцето до центарот на игралиштето.  
 б) Колку се оддалечени двајца играчи, ако едниот изведува корнер, а другиот се наоѓа на местото од кое се изведува единастерец (пенал)?
163. Одреди го радиусот на опишаната кружница околу правоаголник со периметар  $92\text{ cm}$  и страна  $16\text{ cm}$ .
164. Димензиите на правоаголникот  $ABCD$  се  $\overline{AB} = 12\text{ cm}$  и  $\overline{BC} = 7\text{ cm}$ . Точките  $E$  и  $F$  ја делат страната  $AB$  на три еднакви дела, а точката  $G$  ја преполовува страната  $CD$ . Одреди го периметарот на:  
 а) триаголникот  $AGD$ ;      б) триаголникот  $FBC$ ;      в) триаголникот  $EFC$ .

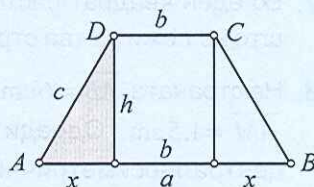
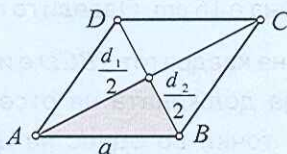
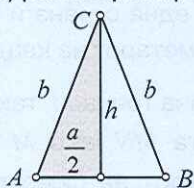
165. Одреди ја дијагоналата на квадрат со периметар:  
а)  $L = 24 \text{ cm}$ ; б)  $L = 80 \text{ cm}$ .
166. Одреди ги страната и периметарот на квадратот околу кој може да се опише кружница со радиус:  
а)  $R = 4 \text{ cm}$ ; б)  $R = 0,7 \text{ dm}$ .
167. Во еден квадрат растојанието меѓу средината на една страна и темето што не лежи на таа страна е  $16 \text{ cm}$ . Одреди го периметарот на квадратот.
168. На страната  $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$  на квадратот  $ABCD$  е избрана точка  $M$ , таква што  $\overline{AM} = 1,5 \text{ cm}$ . Одреди ја должината на отсечката  $MN$ , ако  $M$  и  $N$  се централносиметрични точки во однос на центарот на симетрија на квадратот.
169. Збирот од страната и дијагоналата на квадрат е  $9,64 \text{ cm}$ . Одреди го периметарот на квадратот.
170. Даден е квадрат  $ABCD$  со страна  $4 \text{ cm}$ . Низ темето  $B$  е повлечена права  $p \parallel AC$ , која ги сече правите  $AD$  и  $CD$  во точките  $E$  и  $F$ . Одреди го периметарот на триаголникот  $EFD$ .
171. Одреди ги висината  $h$ , радиусот  $R$  на опишаната кружница и радиусот  $r$  на впишаната кружница на рамностран триаголник со страна:  
а)  $a = 16 \text{ cm}$ ; б)  $a = 2\frac{2}{3} \text{ dm}$ .
172. Одреди го периметарот на рамностран триаголник со висина:  
а)  $h = 6 \text{ cm}$ ; б)  $h = 1,5 \text{ dm}$ .
173. Дијагоналите на еден правоаголник се долги по  $8 \text{ cm}$  и се сечат под агол од  $60^\circ$ . Пресметај го периметарот на тој правоаголник.
174. Во правоаголникот  $ABCD$  дијагоналата со помалата страна зафаќа агол од  $60^\circ$ . Одреди го периметарот на правоаголникот ако:  
а)  $\overline{AC} = 6 \text{ cm}$ ; б)  $\overline{BC} = 4 \text{ cm}$ .
175. Точката  $M$  лежи на страната  $AB$  на рамностраниот триаголник  $ABC$ . Докажи дека збирот на растојанијата од точката  $M$  до страните  $AC$  и  $BC$  на триаголникот е еднаков со висината на триаголникот.
176. Над страните на рамностраниот триаголник  $ABC$  се конструирани квадрати  $AA_1C_2C$ ,  $AA_2B_1B$  и  $BCC_1B_2$ . Одреди го периметарот на шестаголникот  $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ , ако страната на рамностраниот триаголник е  $4 \text{ cm}$ .

## Треба да знаеш

а) рамнокрак триаголник

б) ромб

в) рамнокрак трапез



$$b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$

$$x = \frac{a-b}{2}, c^2 = h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

- 177.** Одреди го периметарот на рамнокрак триаголник за кој се дадени основата и висината:  
 а)  $a = 10\text{ cm}$ ,  $h = 8\text{ cm}$ ; б)  $a = 16\text{ cm}$ ,  $h = 15\text{ cm}$ .
- 178.** Пресметај го периметарот на рамнокракиот триаголник со дадени висина кон основата и кракот:  
 а)  $h = 24\text{ cm}$ ,  $b = 30\text{ cm}$ ; б)  $h = 10\text{ cm}$ ,  $b = 26\text{ cm}$ .
- 179.** Одреди ја висината на рамнокракиот триаголник со дадени една страна и периметарот:  
 а)  $L = 16\text{ cm}$ ,  $a = 6\text{ cm}$ ; б)  $L = 36\text{ cm}$ ,  $b = 13\text{ cm}$ .
- 180.** За колку ќе се зголеми периметарот на рамнокрак триаголник со основа  $a = 10\text{ cm}$  и висина  $h = 12\text{ cm}$ , ако основата се зголеми за  $22\text{ cm}$ ?
- 181.** Во еден рамнокрак триаголник висината кон основата е  $h = 3\text{ cm}$ , а тежишната линија кон кракот е  $t = 6\text{ cm}$ . Одреди го периметарот на тој рамнокрак триаголник.
- 182.** Пресметај го периметарот на ромб со дијагонали:  
 а)  $d_1 = 16\text{ cm}$ ,  $d_2 = 12\text{ cm}$ ; б)  $d_1 = 36\text{ cm}$ ,  $d_2 = 28\text{ cm}$ .
- 183.** Одреди ја должината на дијагоналата на ромбот ако се познати страната и едната дијагонала:  
 а)  $a = 15\text{ cm}$ ,  $d_2 = 18\text{ cm}$ ; б)  $a = 10\text{ cm}$ ,  $d_1 = 16\text{ cm}$ .
- 184.** Одреди ги дијагоналите на ромбот со страна  $6\text{ cm}$  и внатрешен агол од  $60^\circ$ .
- 185.** Во ромб со остар агол од  $60^\circ$  поголемата дијагонала е  $6\text{ cm}$ . Пресметај го периметарот на ромбот.
- 186.** Едната дијагонала на ромбот е 3 пати поголема од другата. Покажи дека периметарот на ромбот е  $L = 2d\sqrt{10}$ , каде што  $d$  е помалата дијагонала.

187. Одреди ја висината на рамнокракиот трапез ако се познати основите  $a$  и  $b$  и кракот  $c$ :
- а)  $a = 9\text{ cm}$ ,  $b = 3\text{ cm}$ ,  $c = 5\text{ cm}$ ;    б)  $a = 16\text{ cm}$ ,  $b = 6\text{ cm}$ ,  $c = 13\text{ cm}$ .
188. Одреди го периметарот на рамнокракиот трапез ако се дадени едната основа, кракот и висината:
- а)  $a = 28\text{ cm}$ ,  $c = 25\text{ cm}$ ,  $h = 24\text{ cm}$ ;    б)  $a = 40\text{ cm}$ ,  $c = 37\text{ cm}$ ,  $h = 35\text{ cm}$ ;  
 в)  $b = 5\text{ cm}$ ,  $c = 10\text{ cm}$ ,  $h = 6\text{ cm}$ ;    г)  $b = 35\text{ cm}$ ,  $c = 97\text{ cm}$ ,  $h = 72\text{ cm}$ .
189. Одреди го периметарот на рамнокракиот трапез ако се дадени основите и висината:
- а)  $a = 25\text{ cm}$ ,  $b = 9\text{ cm}$ ,  $h = 15\text{ cm}$ ;    б)  $a = 30\text{ cm}$ ,  $b = 10\text{ cm}$ ,  $h = 10\text{ cm}$ .
190. Основите на рамнокрак трапез се  $17\text{ cm}$  и  $7\text{ cm}$ , а периметарот е  $5\text{ dm}$ . Одреди ја висината на трапезот.
191. Одреди го периметарот на рамнокрак трапез ако се дадени две негови страни и аголот во темето  $A$ :
- а)  $a = 8\text{ cm}$ ,  $b = 3\text{ cm}$ ,  $\sphericalangle A = 45^\circ$ ;    б)  $a = 7\text{ cm}$ ,  $c = 4\text{ cm}$ ,  $\sphericalangle A = 60^\circ$ ;  
 в)  $a = 9\text{ cm}$ ,  $c = 4\text{ cm}$ ,  $\sphericalangle A = 30^\circ$ ;    г)  $a = 6\text{ cm}$ ,  $b = 4\text{ cm}$ ,  $\sphericalangle A = 60^\circ$ .
192. Во еден рамнокрак трапез поголемата основа е  $8\text{ cm}$ , кракот е еднаков на помалата основа и едениот агол е два пати поголем од другиот. Одреди ги периметарот и дијагоналата на трапезот.
193. Двокрилна врата на гаража е широка  $5\text{ m}$ . Таа е отворена така што слободниот долен кош на секое крило е оддалечен  $2\text{ m}$  од прагот. Колкава е ширината на отворот меѓу слободните краеве на крилата?
194. Правоаголен трапез има основи  $6\text{ cm}$  и  $3\text{ cm}$  и висина  $4\text{ cm}$ . Одреди ги периметарот и дијагоналите на трапезот.

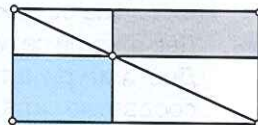
## 12

## ПОИМ ЗА ПЛОШТИНА

### Треба да знаеш:

- За плоштината на многуаголник важат следните **основни својства**:
1. Плоштината на еден многуаголник се искажува со позитивен број.
  2. Ако два многуаголници се складни, тогаш тие имаат еднакви плоштини.
  3. Ако многуаголникот е составен од два или повеќе многуаголници што не се преклопуваат, тогаш неговата плоштина е еднаква на збирот од плоштините на тие многуаголници.
  4. Плоштината на квадрат со страна  $1\text{ m}$  се зема за основна мерна единица; таа се вика квадратен метар и се означува  $1\text{ m}^2$ .
- Две фигури се **еднаквојлошни** ако имаат еднакви плоштини. Две фигури што можат да се состават или разделат на ист број соодветно складни фигури се еднаквоплошни.

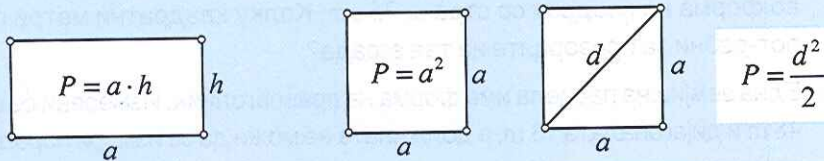
195. Даден е произволен правоаголник. Повлечи една негова дијагонала и од добиените два дела состави триаголник. Зошто дадениот правоаголник и добиениот триаголник се еднаквоплошни?
196. Нацртај паралелограм, а потоа претвори го во правоаголник што има една заедничка страна со паралелограмот и еднаква плоштина со него.
197. Нацртај паралелограм, а потоа претвори го во триаголник што има иста висина и иста плоштина како паралелограмот.
198. Даден произволен триаголник претвори го паралелограм, така што триаголникот и паралелограмот да имаат еднакви висини и еднакви плоштини.
199. Нацртај правоаголен трапез и претвори го во правоаголник што има еднаква плоштина со плоштината на трапезот.
200. Нацртај произволен трапез и претвори го во правоаголник што има еднаква плоштина со трапезот.
201. Даден трапез со висина  $h$  претвори го во триаголник со висина  $h$  и плоштина еднаква со плоштината на трапезот.
202. Произволен правоаголен триаголник претвори го во правоаголник што има иста плоштина со триаголникот и една негова страна е еднаква на едната катета на триаголникот.
203. Произволен остроаголен триаголник претвори го во правоаголник што има еднаква плоштина со плоштината на триаголникот и една негова страна е еднаква на висината на триаголникот.
204. Произволен тапоаголен триаголник претвори го правоаголник чија плоштина е еднаква со плоштината на триаголникот и една негова страна е еднаква на најдолгата висина на триаголникот.
205. Нацртај конвексен четириаголник  $ABCD$ . Низ точките  $A$  и  $C$  повлечи прави паралелни на дијагоналата  $BD$ , а низ  $B$  и  $D$  прави паралелни на дијагоналата  $AC$ . Овие четири прави определуваат четириаголник  $KLMN$ . Покажи дека плоштината на четириаголникот  $KLMN$  е два пати поголема од плоштината на четириаголникот  $ABCD$ .
206. Даден е произволен квадрат. Покажи дека квадратот чија страна е дијагоналата на дадениот квадрат има два пати поголема плоштина од плоштината на дадениот квадрат.
207. Даден е квадрат  $ABCD$ . Нацртај квадрат  $KLMN$  со поголема страна од дадениот, а темето  $K$  да се совпаѓа со центарот на дадениот квадрат. Колкав дел од плоштината на помалиот квадрат покрива квадратот  $KLMN$ ?
208. На цртежот е претставен еден правоаголник. Докажи дека обоените делови на правоаголникот се еднаквоплошни.



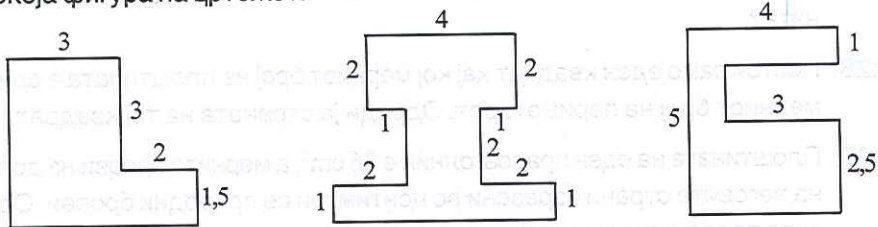


## Треба да знаеш

$P$  - плоштина;  $a$  - основа;  $h$  - висина;  $d$  - дијагонала

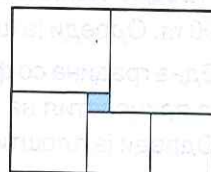


- 209.** Одреди ја страната на правоаголникот ако се дадени другата страна и плоштината:  
 а)  $a = 42\text{cm}$ ,  $P = 672\text{cm}^2$ ;    б)  $a = 4,5\text{m}$ ,  $P = 9,9\text{m}^2$ .
- 210.** Одреди ја дијагоналата на правоаголник со страна  $a = 8\text{cm}$  и плоштина  $P = 40\text{cm}^2$ .
- 211.** Пресметај ја плоштината на квадрат ако е дадено:  
 а) периметарот  $L = 22\text{cm}$ ;    б) дијагоналата  $d = \sqrt{8}\text{cm}$ .
- 212.** Правоаголник и квадрат имаат еднакви периметри. Страните на правоаголникот се  $15\text{cm}$  и  $17\text{cm}$ . Кој од нив има поголема плоштина и за колку?
- 213.** Едната страна на правоаголник е три пати поголема од другата, а неговата плоштина е  $432\text{cm}^2$ . Одреди го периметарот на тој правоаголник.
- 214.** Едната страна на правоаголник е  $\frac{3}{4}$  од другата, а неговиот периметар е  $28\text{cm}$ . Одреди ја плоштината на тој правоаголник
- 215.** Според димензиите изразени во центиметри, одреди ја плоштината на секоја фигура на цртежот.

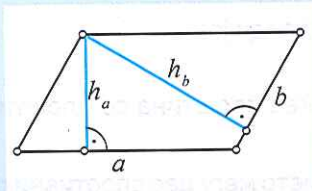


- 216.** На една леплива лента пишува дека содржи  $4,5\text{m}^2$  лента и има должина  $90\text{m}$ . Одреди ја ширината на лентата.
- 217.** Една градина со форма на квадрат, Трајче ја заградил со 5 реда жица, која ја прицврстил на 24 столбови поставени на растојание  $4\text{m}$  еден од друг. Одреди ја плоштината на градината. Колку метри жица употребил Трајче за заградување на градината?

218. Колку правоаголни плочки со димензии 25 cm и 12 cm се потребни за да поплочиме патека широка 1,20 m поставена околу градина во форма на квадрат со страна 15 m?
219. Во една зграда има 24 стана, а во секој стан има по 12 двојни прозорци во форма на правоаголник со димензии 1,30 m и 55 cm и по 4 двојни прозорци во форма на квадрат со страна 75 cm. Колку квадратни метри стакло се потребни за прозорците на таа зграда?
220. Една земјишна парцела има форма на правоаголник. Измерени се ширината 48 m и дијагоналата 73 m, а должината не може да се измери поради непристапност на теренот. Колку ари има таа нива?
221. Едно фудбалско игралиште има форма на правоаголник со димензии 114 m и 73 m, а треба да се засее со семе за трева не само игралиштето, туку и 1 m ширина од надворешната страна по неговата граница. Колку килограми семе ќе се потроши, ако за 1 ар (1 a) се потребни 3,5 kg семе?
222. Колку плочки во форма на квадрат со дијагонала  $12\sqrt{2}$  cm се потребни за поплочување на ходник долг 2,3 m и широк 1,8 m?
223. Симе го измерил растојанието меѓу две спротивни темиња на својата градина во форма на квадрат и добил 28,3 m. Врз основа на тој податок тој ги одредил плоштината и должината на градината. Како и кои резултати ги добил Симе?
224. Ако едната страна на правоаголник се зголеми за 4 cm, а другата се намали за исто толку, се добива квадрат со плоштина  $121 \text{ cm}^2$ . Колкава е плоштината на правоаголникот?
225. Ако страната на квадратот се зголеми за 3 cm, неговата плоштина ќе се зголеми за  $57 \text{ cm}^2$ . Колку проценти изнесува зголемувањето на плоштината?
226. Постои само еден квадрат кај кој мерниот број на плоштината е еднаков на мерниот број на периметарот. Одреди ја страната на тој квадрат.
227. Плоштината на еден правоаголник е  $36 \text{ cm}^2$ , а мерните броеви на должините на неговите страни изразени во центимтри се природни броеви. Одреди ги сите правоаголници со ова својство. Кој од нив има најмал периметар?
228. Правоаголникот на цртежот е составен од 6 квадрати, а плоштината на најмалиот квадрат е  $1 \text{ cm}^2$ . Одреди ги периметарот и плоштината на правоаголникот.

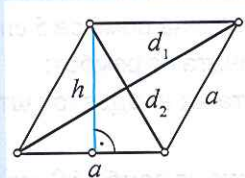


## Треба да знаеш

а) паралелограм  
(ромбоид)

$$P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

б) ромб



$$P = a \cdot h = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$$

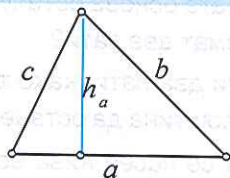
229. Пресметај ја плоштината на паралелограмот за кој се дадени една страна и растојанието од таа страна до спротивната:
- а) 1,8 dm и 6 cm;    б) 0,35 m и 0,85 m;    в) 3 cm и  $4\frac{1}{2}$  cm.
230. Плоштината на паралелограмот е  $24 \text{ cm}^2$ , а едната негова страна е 12 cm. Одреди го растојанието меѓу дадената страна и страната што е паралелна на неа.
231. Паралелограм со страни 5 cm и 10 cm има плошина  $41 \text{ cm}^2$ . Одреди ги должините на неговите две висини.
232. Како ќе се промени плоштината на паралелограмот ако:
- а) основата се зголеми два пати, а соодветната висина останува иста;
- б) висината се зголеми два пати, а соодветната основа останува иста;
- в) и основата и соодветната висина се зголемат два пати?
233. Ако основата на паралелограмот се зголеми два пати, како треба да се промени соодветната висина, за неговата плошина да остане иста?
234. Одреди колку килограми семе треба за да се посее нива во форма на ромбоид со основа 117,5 m и висина 72,4 m, ако за секои 25 ари треба 30 kg семе.
235. Во ромбоид со плошина  $480 \text{ cm}^2$  и периметар 112 cm растојанието меѓу поголемите страни е 12 cm. Одреди го растојанието меѓу помалите страни.
236. Страните на паралелограм се 12 m и 16 m, а висината кон помалата страна е 8 m. Одреди ја другата висина на паралелограмот.
237. Правоаголник и ромбоид имаат соодветно еднакви страни. Докажи дека плоштината на правоаголникот е поголема од плоштината на ромбоидот.

238. Докажи дека во секој паралелограм на поголемата страна ѝ одговара помала висина.
239. Пресметај ја плоштината на паралелограм со страни 8 cm, 11 cm и агол меѓу нив од  $30^\circ$ .
240. Пресметај ја плоштината на ромб со периметар 10 cm и висина 2,1 cm.
241. Колку ромбови со страна 9 cm и висина 2,5 cm можат да се исечат од  $1 \text{ m}^2$  лим, ако се знае дека 10% од лимот е отпад?
242. Дијагоналите на ромб се 5 cm и 10 cm. Одреди ја:  
 а) плоштината на ромбот;  
 б) страната на квадратот што има еднаква плоштина со плоштината на ромбот.
243. Плоштината на ромб е  $80 \text{ cm}^2$ , а растојанието меѓу две спротивни страни е 4 cm. Пресметај го периметарот на ромбот.
244. Одреди ги дијагоналата и периметарот на ромбот со плоштина  $96 \text{ cm}^2$  и една дијагонала 8 cm.
245. Во ромб со плоштината  $195 \text{ cm}^2$  е впишана кружница со радиус 6,5 cm. Одреди го периметарот на ромбот.
246. Страната на ромбот има должина  $a$ , а помалиот внатрешен агол е една петтина од поголемиот. Изрази ја неговата плоштина преку страната  $a$ .
247. Едната дијагонала на ромб е три пати помала од другата, а нивниот збир е 20 cm. Одреди ги плоштината и периметарот на ромбот.

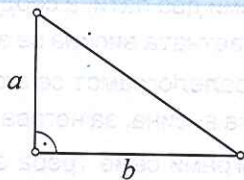
15

## ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

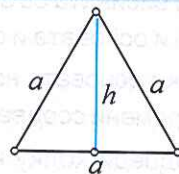
Треба да знаеш



$$P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ah_b = \frac{1}{2}ah_c$$



$$P = \frac{1}{2}ab$$



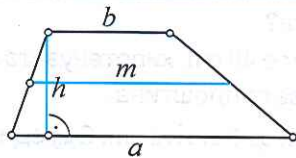
$$P = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$$

Ако се дадени страните  $a$ ,  $b$  и  $c$  на  $\triangle ABC$ , неговата плоштина се пресметува со Хероновата формула  $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ,  $s = \frac{a+b+c}{2}$ .

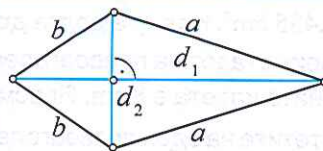
248. Пресметај ја плоштината на триаголникот ако му се дадени:  
 а)  $a = 45 \text{ cm}$ ,  $h_a = 37 \text{ cm}$ ;      б)  $b = 0,43 \text{ m}$ ,  $h_b = 1,25 \text{ m}$ .

249. Плоштината на траголник со страна  $12,8 \text{ dm}$  е  $1244,8 \text{ cm}^2$ . Одреди ја висината што одговара на дадената страна.
250. Одреди ја должината на висината  $h_b$  на триаголникот  $ABC$  ако се дадени  $a = 9 \text{ cm}$ ,  $b = 12 \text{ cm}$  и  $h_a = 10 \text{ cm}$ .
251. Едната катета на правоаголен триаголник е  $8,3 \text{ cm}$ , а неговата плоштина е  $78,435 \text{ cm}^2$ . Колку е долга другата катета?
252. Периметарот на правоаголен триаголник е  $40 \text{ cm}$ , хипотенузата е  $17 \text{ cm}$ , а едната катета е  $8 \text{ cm}$ . Пресметај ја неговата плоштина.
253. Катетите на еден правоаголен триаголник се  $6 \text{ cm}$  и  $8 \text{ cm}$ . Одреди ја должината на висината кон хипотенузата.
254. Во еден рамнокрак триаголник основата е  $2,4 \text{ m}$ , висината кон основата е  $3,3 \text{ m}$ , а висината кон кракот е  $1,8 \text{ m}$ . Колку е долг кракот на триаголникот?
255. Пресметај ја плоштината на рамнокрак триаголник со основа  $a = 6,4 \text{ dm}$  и крак  $b = 6,8 \text{ dm}$ .
256. Пресметај ја плоштината на рамнокрак правоаголен триаголник со катета  $4 \text{ cm}$ .
257. За триаголникот  $ABC$  важи  $\overline{AC} = \overline{BC} = 6 \text{ cm}$  и  $\gamma - \alpha = \beta$ . Пресметај ја неговата плоштина.
258. Пресметај ја плоштината на триаголникот  $ABC$ , ако  $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$ ,  $\overline{BC} = 8 \text{ cm}$  и  $\gamma + \alpha = 150^\circ$ .
259. Периметарот на рамностран триаголник е  $66 \text{ cm}$ . Одреди ја:  
а) висината на триаголникот; б) плоштината на триаголникот.
260. Одреди ја плоштината на триаголникот чии страни се:  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $b = 8,4 \text{ cm}$  и  $c = 9,6 \text{ cm}$ .
261. Нека  $a$  и  $b$  се страни, а  $h_a$  и  $h_b$  висини кон тие страни во  $\triangle ABC$ . Докажи дека ако  $a > b$ , тогаш  $h_a < h_b$ .
262. Периметарот на еден триаголник е  $12 \text{ cm}$ , а две негови страни се  $5 \text{ cm}$  и  $3 \text{ cm}$ .  
а) Пресметај ја плоштината на триаголникот.  
б) Одреди ја должината на најмалата висина на тој триаголник.
263. Како ќе се промени плоштината на даден триаголник, ако:  
а) основата се зголеми два пати, а соодветната висина остане иста;  
б) висината се зголеми два пати, а соодветната основа остане иста;  
в) основата и соодветната висина се зголемат два пати?
264. Отсечката  $AM$  е тежишна линија во триаголникот  $ABC$ . Докажи дека триаголниците  $ABM$  и  $ACM$  се еднаквоплошни.
265. Во еден триаголник висината е три петтини од соодветната страна, а нивната разлика е  $4 \text{ cm}$ . Одреди ја плоштината на тој триаголник.

## Треба да знаеш



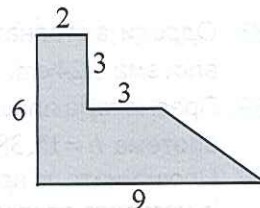
$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = m \cdot h$$



$$P = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$$

266. Пресметај ја плоштината на траpez со основи  $6\frac{1}{3}$  cm,  $4\frac{1}{5}$  cm и висина  $4\frac{1}{2}$  cm.
267. Одреди ја висината на траpezот со плошина  $P = 18$  cm<sup>2</sup> и основи  $a = 5,2$  cm,  $b = 3,8$  cm.
268. Траpez со основа 26 cm и висина 10 cm има плошина 200 cm<sup>2</sup>. Одреди ја должината на другата основа.
269. Растојанието меѓу основите на траpezот е 5 cm, а неговата плошина е 45 cm<sup>2</sup>. Одреди ги основите на траpezот, ако едната е два пати поголема од другата.
270. Плоштината на траpez е 193,5 cm<sup>2</sup>, а неговата висина е 9 cm. Одреди ја средната линија на траpezот.
271. Во правоаголен траpez средната линија е 82 mm, а помалиот крак е 6,5 cm. Одреди ја плоштината на траpezот.
272. Периметарот на правоаголен траpez е 26,24 cm, а непаралелните страни му се 8,5 cm и 6,5 cm. Пресметај ја плоштината на траpezот.
273. Пресметај ја плоштината на рамнокрак траpez со основи  $a = 16$  cm,  $b = 6$  cm и крак  $c = 13$  cm.
274. Одреди ја плоштината на траpez со дијагонали 20 cm, 15 cm и висина 12 cm.
275. Во траpez со помала основа 14 cm и висина 10 cm, дијагоналите ја делат средната линија на три еднакви дела. Одреди ја плоштината на траpezот.
276. Основите на траpezот се 36 cm и 12 cm, а кракот долг 7 cm образува агол од  $150^\circ$  со едната основа. Пресметај ја плоштината на траpezот.
277. Правоаголен траpez  $ABCD$  ( $\angle A = \angle D = 90^\circ$ ) со дијагоналата  $AC$  е поделен на два рамнокраки правоаголни триаголници. Одреди ја плоштината на траpezот, ако помалата основа е 6 cm.

278. Според цртежот и податоците дадени во центиметри, пресметај ја плоштината на фигурата.



279. Докажи дека правата што минува низ средините на основите на траpezот го дели траpezот на две еднаквоплошни фигури.

280. Нека  $M$  е средна точка на кракот  $AD$  на траpezот  $ABCD$ . Докажи дека плоштината на триаголникот  $BCM$  е два пати помала од плоштината на траpezот  $ABCD$ .

281. Еден ученик направил летало во форма на делтоид со дијагонали  $d_1 = 98$  cm и  $d_2 = \frac{3}{2}$  dm. Одреди ја плоштината на леталото.

282. Нацртај делтоид  $ABCD$ , така што  $\overline{AB} = \overline{AD} = 5$  cm,  $AC = 8$  cm и  $\angle A = 60^\circ$ . Пресметај ја неговата плоштина.

283. Плоштината на една земјишна парцела во форма на делтоид е  $3050$  m<sup>2</sup>, а растојанието меѓу спротивни темиња е  $50$  m. Одреди го растојанието меѓу другите две спротивни темиња.

284. Пресметај ја плоштината на делтоид со страни  $14$  cm и  $26$  cm, а дијагоналата што е негова оска на симетрија е  $20$  cm.

285. Нацртај четириаголник со заемно нормални дијагонали, измери ги потребните елементи и пресметај ја неговата плоштина.

## 17

## ПЛОШТИНА НА ПРАВИЛЕН МНОГУАГОЛНИК

### Треба да знаеш

Плоштината на правилен  $n$ -аголник со страна  $a$  и апотема  $h$  се пресметува со формулата

$$P = \frac{1}{2} n \cdot a \cdot h \text{ или } P = \frac{1}{2} L \cdot h.$$

Плоштината на правилен шестаголник со страна  $a$  е  $P = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$ .

286. Пресметај ја плоштината на правилен многуаголник со даден периметар  $L$  и апотема  $h$ :

а)  $L = 64$  cm.,  $h = 9,66$  cm;      б)  $L = 60$  cm.,  $h = 8,26$  cm.

287. Пресметај ја плоштината на правилен петаголник со страна  $a = 24$  cm и апотема  $h = 16,5$  cm.

288. Одреди ја страната на правилниот деветаголник со плошина  $222,48 \text{ cm}^2$  и апотема  $8,24 \text{ cm}$ .
289. Пресметај ја плоштината на правилен десетаголник со страна  $a = 10 \text{ cm}$  и апотема  $h = 15,38 \text{ cm}$ .
290. Плоштината на правилен деветаголник со страна  $8 \text{ cm}$  е  $395,28 \text{ cm}^2$ . Одреди ја неговата апотема.
291. Правилен многуаголник со страна  $a = 12 \text{ cm}$  и апотема  $h = 8,25 \text{ cm}$  има плошина  $P = 247,5 \text{ cm}^2$ . Кој е тој правилен многуаголник?
292. Одреди ги периметарот и страната на правилен осумаголник со апотема  $h = 19,81 \text{ cm}$  и плошина  $P = 1235,84 \text{ cm}^2$ .
293. Одреди ја плоштината на правилен шестаголник со периметар:  
а)  $L = 24 \text{ cm}$ ; б)  $L = 12\sqrt{3} \text{ cm}$ .
294. Плоштината на правилен шестаголник е  $P = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2$ . Одреди го неговиот периметар.
295. Радиусот на впишаната кружница во правилен шестаголник е  $\sqrt{3} \text{ cm}$ . Одреди ги периметарот и плоштината на шестаголникот.
296. Одреди ги периметарот и плоштината на правилен шестаголник впишан во кружница о радиус  $R = 8 \text{ cm}$ .
297. Квадрат со страна  $15 \text{ cm}$  и правилен шестаголник имаат еднакви периметри. За колку плоштината на шестаголникот е поголема од плоштината на квадратот?
298. Правилен шестаголник и рамностран триаголник имаат периметар еднаков на  $120 \text{ cm}$ . Колку пати плоштината на шестаголникот е поголема од плоштината на триаголникот?
299. Правилен триаголник и правилен шестаголник имаат страна  $8 \text{ cm}$ . Периметарот на еден квадрат е еднаков на збирот од периметрите на триаголникот и шестаголникот. Дали плоштината на квадратот е еднаква на збирот од плоштините на триаголникот и шестаголникот? Ако не е, одреди ја разликата.

## 18

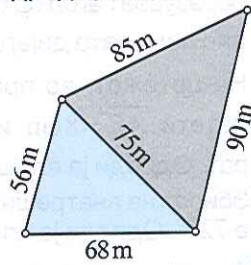
### ЗАДАЧИ ЗА ПЛОШТИНА НА МНОГУАГОЛНИЦИ

300. На една нива во форма на правоаголник со должина  $50 \text{ m}$  се засадени  $10350$  корени домати, така што на секој квадратен метар се засадени по  $9$  корени. Одреди ја ширината на нивата.
301. Подот на една сала има форма на правоаголник со димензии  $18 \text{ m}$  и  $14 \text{ m}$ . Подот на друга сала има форма на квадрат со ист периметар како подот на првата. За колку се разликуваат плоштините на тие подови?
302. Земи еден дневен весник, измери ги потребните елементи и пресметај ја неговата плошина. Прочитај го тиражот и пресметај колку квадратни метри хартија е потребно за еден дневен тираж.



303. Една улица долга 675 m и широка 6 m треба да се асфалтира, но има асфалт само за  $2430 \text{ m}^2$ . Колку проценти од работата ќе бидат завршени?
304. Отсечката чии крајни точки се средината на една страна на квадратот и теме што не лежи на таа страна е долга 15 cm. Одреди ја плоштината на квадратот.

305. Пресметај ја плоштината на земјишната парцела претставена на скицата.



306. Правоаголен триаголник  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) има плошина  $28 \text{ cm}^2$  и катета  $\overline{AC} = 7 \text{ cm}$ . Кој агол е поголем,  $\angle A$  или  $\angle B$ ?

307. Кракот на рамнокрак триаголник е 130 cm, а отсечката чии крајни точки се средините на краците е 32 cm. Одреди ги периметарот и плоштината на триаголникот.

308. Основата на една куќа е квадрат со страна 6 m, а кровот е составен од 4 складни рамнокраки триаголници со крак 5 m. Одреди ја плоштината на кровот.

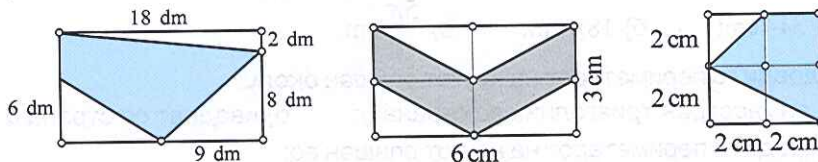
309. Правоаголник и паралелограм имаат еднакви страни, а плоштината на паралелограмот е еднаква на половина од плоштината на правоаголникот. Одреди ги аглите на паралелограмот.

310. Дијагоналата на паралелограм е долга 2 dm, а неговото теме е на растојание 4,5 cm од дадената дијагонала. Одреди ја плоштината на паралелограмот.

311. Еден триаголник има основа 5 cm и соодветна висина 4 cm. Одреди ја плоштината на паралелограмот кој во споредба со триаголникот има:

- а) еднаква основа и висина;  
 б) еднаква основа и два пати поголема висина;  
 в) еднаква висина и два пати помала основа.

312. Пресметај ја плоштината на обоениот дел од фигурата:

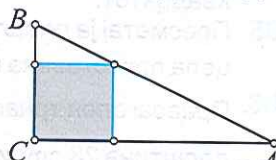


313. Квадрат со страна 6 cm и рамностран триаголник имаат еднакви периметри. За колку плоштината на триаголникот е помала од плоштината на квадратот?

314. Остриот агол на рамнокрак траpez е  $60^\circ$ , а дијагоналата е симетрала на тој агол. Одреди ги плоштината и периметарот на траpezот, ако кракот е 12 cm.

315. Плоштината на рамнокрак траpez е  $96 \text{ cm}^2$ , а збирот од неговите основи е 16 cm. Докажи дека средините на страните на траpezот се темиња на ромб и одреди ја плоштината на ромбот.

316. Пресметај ја плоштината на трапезот  $ABCD$ , ако кракот  $\overline{AD} = 7$  cm, а растојанието од средината  $M$  на кракот  $BC$  до дадениот крак е 11 cm.
317. Во еден делтоид помалите страни се заемно нормални, а поголемите образуваат агол од  $60^\circ$ . Одреди ги периметарот и плоштината на делтоидот, ако помалата дијагонала е 8 cm.
318. На цртежот, во правоаголниот триаголник со катети  $\overline{AC} = 8$  cm и  $\overline{BC} = 4$  cm е впишан квадрат. Одреди ја плоштината на квадратот.
319. Збирот на внатрешните агли на правилен многуаголник со страна  $a = 7$  cm е  $720^\circ$ . Одреди ја плоштината на тој правилен многуаголник.



19

## ПЕРИМЕТАР НА КРУГ. ДОЛЖИНА НА КРУЖЕН ЛАК

*Треба да знаеш*

- Периметарот на круг со радиус  $r$  е  $L = 2r\pi$ .
- Должината на кружен лак во кружница со радиус  $r$  и централен агол  $\alpha$  е  $l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$ .

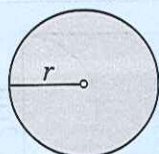
320. Одреди го периметарот на кругот со дијаметар:
- а) 3,6 cm;    б) 2,2 cm;    в)  $6\frac{1}{5}$  cm.
321. Одреди го радиусот на кругот чиј периметар е:
- а)  $9\pi$  cm;    б) 6,28 cm;    в)  $13,5\pi$  cm.
322. Пресметај го дијаметарот на кругот со периметар:
- а) 314 cm;    б)  $18\pi$  cm;    в)  $\frac{5\pi}{3}$  cm.
323. Одреди го периметарот на кругот опишан околу:
- а) рамностран триаголник со страна  $a$ ;    б) квадрат со страна  $a$ .
324. Одреди го периметарот на кругот впишан во:
- а) рамностран триаголник со страна  $a$ ;  
 б) правилен шестаголник со страна  $a$ .
325. Колкава должина има железна прачка ако од неа може да се свитка кружен обрач со радиус 45 cm?
326. Периметрите на два круга се  $L_1 = 20\pi$  cm и  $L_2 = 10\pi$  cm. Одреди го радиусот на кругот чиј периметар е еднаков на:
- а)  $L_1 + L_2$ ;    б)  $L_1 - L_2$ .
327. Тркачки коњ за 20 минути ја претрчувал 4 пати кружната патека со радиус 250 m. Колку метри претрчувал коњот за една минута?

- 328.** Пресметај ја должината на кружниот лак ако се дадени:  
 а)  $r = 1,5 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ;      б)  $r = 9 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 45^\circ 30'$ .
- 329.** Одреди го радиусот на кружницата во која на централен агол од  $54^\circ$  одговара кружен лак со должина  $18,84 \text{ cm}$ .
- 330.** Одреди го централниот агол ако се дадени:  
 а)  $r = 12 \text{ cm}$ ,  $\ell = 12,56 \text{ cm}$ ;      б)  $r = 8 \text{ cm}$ ,  $\ell = 12 \text{ cm}$ .
- 331.** Околу правилен шестаголник со страна  $3 \text{ cm}$  е опишана кружница. Одреди ја должината на кружниот лак што припаѓа над една страна на правилниот шестаголник.
- 332.** Ако во една кружница над централен агол од  $45^\circ$  одговара кружен лак со должина  $12 \text{ cm}$ , тогаш колкава должина во истата кружница ќе има кружниот лак што одговара на централен агол од  $30^\circ$ ?
- 333.** Во кружница со радиус  $4 \text{ cm}$  се повлечени дијаметар  $AB$  и тетива  $AC$ , така што  $\angle BAC = 22^\circ 30'$ . Пресметај ја должината на кружниот лак што одговара на дадениот агол.
- 334.** Должината на кружен лак со радиус  $6 \text{ cm}$  е еднаква со должината на кружницата со радиус  $2 \text{ cm}$ . Одреди го централниот агол на споменатиот кружен лак.
- 335.** Одреди го периметарот на кругот впишан во ромб со висина  $12 \text{ cm}$ .

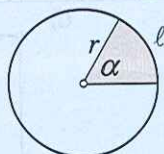
**20**

**ПЛОШТИНА НА КРУГ, КРУЖЕН ИСЕЧОК И КРУЖЕН ПРСТЕН**

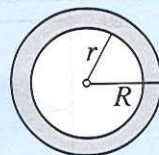
*Треба да знаеш*



$$P = r^2 \pi$$



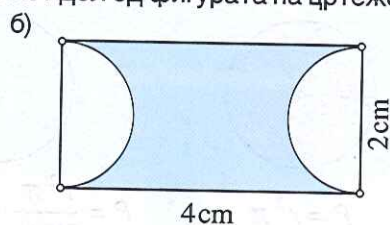
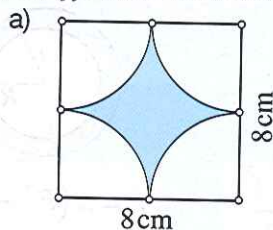
$$P = \frac{r^2 \pi}{360^\circ} \cdot \alpha = \frac{r \cdot \ell}{2}$$



$$P = \pi (R^2 - r^2)$$

- 336.** Пресметај ја плоштината на кругот со дијаметар:  
 а)  $8,4 \text{ cm}$ ;      б)  $6,5 \text{ cm}$ .
- 337.** Пресметај ја плоштината на кругот чиј периметар е:  
 а)  $19,96 \text{ cm}$ ;      б)  $56,52 \text{ cm}$ .
- 338.** Одреди ја плоштината на кругот опишан околу рамностран триаголник со страна  $4 \text{ cm}$ .
- 339.** Околу квадрат со плошина  $20,25 \text{ cm}^2$  е опишан круг. Пресметај ја плоштината на кругот.
- 340.** Колкава плошина има кругот опишан околу правилен шестаголник со страна  $8 \text{ cm}$ ?

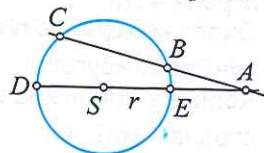
341. Одреди ја плоштината на кругот впишан во:  
 а) рамностран триаголник со страна 10 cm;  
 б) квадрат со страна 10 cm;  
 в) правилен шестаголник со страна 10 cm.
342. Пресметај ја плоштината на кругот опишан околу правоаголник со страни 24 cm и 10 cm.
343. Во ромб со периметар 36 cm е впишан круг чија плошина е  $50,24 \text{ cm}^2$ . Одреди ја плоштината на ромбот.
344. Пресметај го периметарот на кругот со плошина  $400\pi \text{ cm}^2$ .
345. Одреди го радиусот на кругот чија плошина е еднаква на збирот од плоштините на два круга со радиуси  $r_1 = 5 \text{ cm}$  и  $r_2 = 8 \text{ cm}$ .
346. Може ли челично јаже со радиус 2 mm да издржи товар од 400 N, ако дозволеното оптоварување на јажето е  $60 \text{ N/mm}^2$ ?
347. Одреди ја плоштината на кружен исечок со радиус 6 cm и централен агол:  
 а)  $40^\circ$ ; б)  $72^\circ$ ; в)  $150^\circ$ .
348. Одреди ја плоштината на кружниот исечок на кој му одговара кружен лак со должина  $6\frac{3}{4} \text{ cm}$  во кружница со радиус  $6\frac{3}{4} \text{ cm}$ .
349. Одреди го радиусот на кругот во кој е даден кружен исечок со плошина  $15,7 \text{ cm}^2$  и централен агол  $36^\circ$ .
350. Одреди го централниот агол на кружниот исечок со плошина  $568 \text{ mm}^2$  и радиус 60 mm.
351. Должините на две концентрични кружници се 50,24 cm и 31,4 cm. Одреди ја плоштината на кружниот прстен образуван со тие кружници.
352. Пресметај ја плоштината на обоениот дел од фигурата на цртежот.



21

ЗАДАЧИ ПЛУС ЗА ТЕМА 3

353. На кружницата  $k$  се дадени точките  $A$ ,  $B$  и  $C$ , такви што кружницата ја делат во размер  $7:3:5$ . Одреди ги внатрешните агли на триаголникот  $ABC$ .
354. Конструирај триаголник  $ABC$  со дадени:  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 60^\circ$  и  $h_a = 2,5 \text{ cm}$ .
355. На цртежот е  $\overline{AB} = r$ ,  $\angle A = 15^\circ$ . Одреди го аголот  $CED$ .

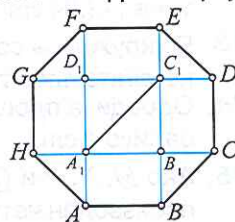


356. Нека  $H$  е ортоцентар, а  $O$  е центар на опишаната кружница на разностранниот триаголник  $ABC$ . Означи ги со  $M$  и  $N$  пресечните точки на правите  $CH$  и  $CO$  со опишаната кружница. Докажи дека точките  $A, B, M$  и  $N$  се темиња на рамнокрак трапез.

357. Две кружници со различни радиуси се допираат еднадвор во точката  $A$ , а една нивна заедничка тангента ја допира едната кружница во точката  $B$ , а другата во точката  $C$ . Докажи дека  $\angle BAC = 90^\circ$ .

358. Одреди ги дијаметрите на впишаниот и опишаниот круг на рамностран триаголник, ако нивната разлика е  $8\text{ cm}$ .

359. Ако секоја страна на даден квадрат  $A_1B_1C_1D_1$  се продолжи низ двете крајни точки за половина од дијагоналата, тогаш крајните точки на новите отсечки се темиња на правилен осумаголник со страна еднаква со страната на дадениот квадрат. Докажи.



360. Во правоаголен триаголник со катети  $21\text{ cm}$  и  $28\text{ cm}$  е впишан квадрат чии три темиња припаѓаат на катетите, а четвртото на хипотенузата. Одреди ги страната на квадратот и отсечките на кои темето на квадратот ја дели хипотенузата.

361. Висината кон хипотенузата на правоаголен триаголник е  $24\text{ cm}$ , а хипотенузата е  $50\text{ cm}$ . Одреди ги катетите на тој триаголник.

362. Во правоаголниот триаголник  $ABC$  со хипотенуза  $\overline{AB} = 8,5\text{ cm}$ , на катета  $\overline{AC} = 7,5\text{ cm}$  е дадена точка  $P$  што е на растојание  $2,4\text{ cm}$  од хипотенузата. Докажи дека правата  $PB$  е симетрала на аголот во темето  $B$ .

363. Отсечките  $h = 4\text{ cm}$  и  $t = 5\text{ cm}$  се соодветно висина и тежишна линија кон хипотенузата на правоаголен триаголник. Конструирај го триаголникот и одреди ги периметарот и плоштината.

364. Два столба со висини  $5\text{ m}$  и  $2\text{ m}$  се поставени на рамно земјиште на растојание од  $7\text{ m}$ . На земјата, меѓу столбовите е избрана точка  $M$  што е повразана со конец со нивните врвови. Одреди ги должината на конечот и растојанијата од точката  $M$  до столбовите, ако положбата на точката е таква што должината на конечот е најмала можна.

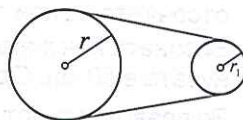
365. Во правоаголниот триаголник  $ABC$  катета  $AC$  е долга  $2\text{ cm}$ , а аголот во темето  $A$  е два пати поголем од аголот во темето  $B$ . Над катетите  $AC$  и  $BC$ , надвор од триаголникот се конструирани рамнострани триаголници  $ACE$  и  $BCD$ . Одреди ги периметарот и плоштината на четириаголникот  $ABDE$ .

366. Даден е правоаголен триаголник со остар агол од  $60^\circ$ . Докажи дека симетралата на тој агол го дели триаголникот на два дела чии плоштини се во однос  $1 : 2$ .

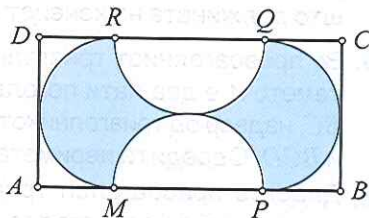
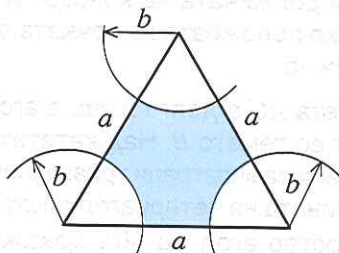
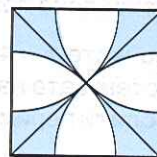
367. Правоаголен со страни  $a = 6\text{ cm}$  и  $b = 4\text{ cm}$  и рамностран триаголник имаат заедничка страна  $a$  и се преклопуваат. Одреди ги периметарот и плоштината на нивниот заеднички дел.

368. Даден е квадрат  $ABCD$  со страна  $16\text{ cm}$ . Точките  $M \in BC$  и  $N \in BC$  се такви што  $AM = AN = 20\text{ cm}$ . Одреди ги периметарот и плоштината на триаголникот  $AMN$ .
369. Одреди ги периметарот и плоштината на рамностраниот триаголник впишан во кружница со радиус  $2\sqrt{3}\text{ cm}$ .
370. Одреди го радиусот на опишаната кружница околу рамнокрак триаголник со основа  $12\text{ cm}$  и краќ  $18,5\text{ cm}$ .
371. Пресметај ја плоштината на кругот впишан во траpez со помала основа  $7\text{ cm}$  и краќи  $15\text{ cm}$  и  $13\text{ cm}$ .
372. Во ромб чија страна е за  $3\text{ cm}$  подолга од висината е впишан круг со плоштина  $113,04\text{ cm}^2$ . Одреди ја плоштината на ромбот.
373. Во кружница со радиус  $6\text{ cm}$  е впишан правилен осумаголник. Одреди ја неговата плоштина.
374. Одреди ја плоштината на правилен  $12$ -аголник впишан во кружница со радиус  $4\text{ cm}$ .
375. Ако  $M, N, P$  и  $Q$  се соодветно средини на страните  $AB, BC, CD$  и  $DA$  на произволен четириаголник  $ABCD$ , тогаш плоштината на четириаголникот  $MNPQ$  е половина од плоштината на четириаголникот  $ABCD$ . Докажи!

376. Две тркала со радиуси  $r = 40\text{ cm}$  и  $r_1 = 20\text{ cm}$  се поврзани со преносен ремен како на цртежот. Колку пати ќе се заврти помалото тркало за времето во кое поголемото тркало прави  $200$  завртувања?



377. Дијагоналата на квадратот на цртежот е  $6\text{ cm}$ , а со центар во секое негово теме е нацртан круг со радиус  $3\text{ cm}$ . Одреди ја плоштината на обоениот дел од квадратот.



378. Одреди ја плоштината на обоениот дел од рамностраниот триаголник преку  $a$  и  $b$ .
379. Колкав дел (во проценти) од правоаголникот  $ABCD$  на цртежот зафаќа обоениот дел?




## Содржина на шемаџа

1	Декартов производ .....	96	8	Начини на задавање на пресликувања .....	113
2	Координатна рамнина .....	97	9	Размер .....	116
3	Релации .....	99		Пропорција.....	118
4	Рефлексивни и симетрични релации .....	101	11	Геометриска средина. Продолжена пропорција.....	119
5	Антисиметрични и транзитивни релации .....	105	12	Право пропорционални величини.....	121
6	Пресликување (функција) .....	108	13	Обратно пропорционални величини.....	122
7	Некои видови пресликувања .....	111	14	Просто тројно правило .....	125
			15	Задачи плус за тема 4 .....	126

3:1




## Трѐба да знаеш

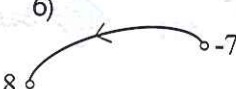
-  **Подредениот пар**  $(a, b)$  на цртеж се претставува со стрелка од  $a$  кон  $b$ .
-  **Елементи** на декартовиот производ  $A \times B$  се сите подредени парови, каде што првата компонента е од  $A$ , а втората од  $B$ .
-  Елементите на декартовиот производ  $A \times B$  графички се претставуваат со **граф** и со **координатна шема**.

1. Кои од следниве равенства се точни:
  - а)  $\{2,3\} = \{3,2\}$ ; б)  $(2,3) = (3,2)$ ; в)  $(4,5) = (3+1, 3+2)$ ; г)  $(0,0) = \emptyset$ ?
2. Нацртај ги графовите на подредените парови:
  - а)  $(1,6)$ ; б)  $(4,a)$ ; в)  $(b,-3)$ ; г)  $(2,2)$ .
3. Според дадените графови запиши ги соодветните подредени парови:
 


а)



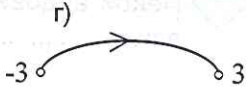
б)



в)



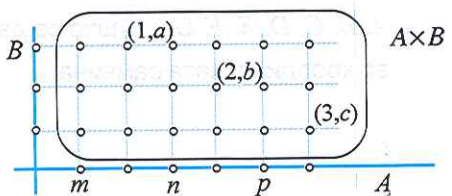
г)


4. Одреди ги сите елементи на множеството:
  - а)  $P = \{(x, y) \mid x \in \{2, 3, 4, 5\}, y = 2x\}$ ; б)  $Q = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}, x < 10, x - y = 5\}$ .
5. Во подредениот пар  $(2, p)$  одреди го  $p$ , така што парот да припаѓа на множеството:
  - а)  $M = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}, y = -3x\}$ ; б)  $R = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}, x + y = 2\}$ .
6. Одреди ги  $x$  и  $y$  така што  $(3, 4) = (2x - 3, y - 2)$ .
7. Кој од подредените парови  $(2, 2)$ ,  $(-2, 10)$ ,  $(-4, 5)$ ,  $(3, 0)$  припаѓа на множеството  $A = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}, y = -2x + 6\}$ ?
8. Претстави го со граф декартовиот производ:  $A \times B$ , ако  $A = \{2, 3\}$ ,  $B = \{20, 30\}$ .
9. Даден е декартовиот производ  $M \times N = \{(3, 3), (3, 5), (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (4, 3), (4, 5)\}$ .  
Запиши ги табеларно множествата  $M$  и  $N$ .



10. Претстави го со координатна шема декартовиот производ на множествата  $A = \{a, b, c\}$  и  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ .

11. Според координатната шема на декартовиот производ  $A \times B$ , запиши ги табеларно множествата  $A$  и  $B$ .



12. Дадени се множествата  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  и  $B = \{3, 4, 5, 6\}$ . Одреди го табеларно декартовиот производ: а)  $(A \cap B) \times (A \setminus B)$ ; б)  $(A \setminus B) \times B$ .

13. Дадени се множествата  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 4, 5\}$ ,  $C = \{3, 5\}$ . Одреди ги и запиши ги табеларно декартовите производи: а)  $(A \cap B) \times C$ ; б)  $(A \setminus C) \times B$ ;

14. Дадени се множествата  $A = \{c, d, e\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$ ,  $C = \{b, c\}$ . Одреди го декартовиот производ  $A \times [(B \setminus C) \cup (A \setminus B)]$ .

15. Претстави го со граф и со координатна шема декартовиот квадрат на множеството: а)  $A = \{1, a\}$ ; б)  $M = \{1, 2, 3\}$ .

16. Дадено е множеството  $A^2 = \{(1, 1), (1, m), (1, 3), (m, 1), (m, m), (3, 3), (m, 3), (3, 1), (3, m)\}$ . Одреди го множеството  $A$ .

## 2

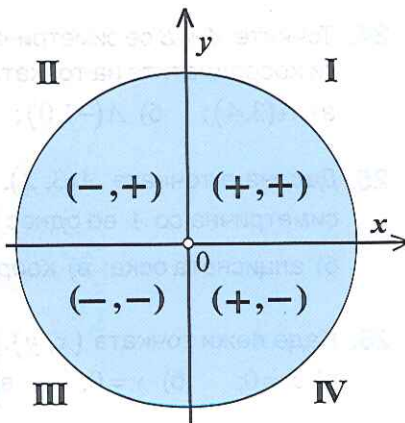
## КООРДИНАТНА РАМНИНА

### Треба да знаеш

Рамнина во која е даден декартов правоаголен координатен систем се вика **координатна рамнина**.

Координатните оски ја делат рамнината на четири прави агли - **квадранти**.

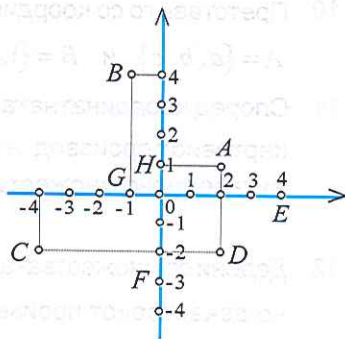
Знаците на координатите на точка во I, II, III и IV квадрант се дадени на цртежот.



17. Одреди точки во координатната рамнина што одговараат на подредените парови:

$A(3, 4); B(-2, 1); C(-3, -2); D(2, -3); E(3, 0); F(0, 2); G(-1, 0); H(0, 4)$ .

18. Запиши ги координатите на точките  $A, B, C, D, E, F, G$  и  $H$  што се дадени во координатната рамнина.



19. Одреди во кои квадранти лежат точките:

$$A\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right); B(-3, \sqrt{4}); C\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right);$$

$$D\left(2, -3\frac{1}{2}\right); E\left(0.2, \frac{2}{5}\right); F\left(-2, \frac{1}{2}\right); G(-4, -7); H(\sqrt{3}, -0.5).$$

20. Одреди во кој квадрант лежи точката  $(x, y)$  за која важи:

- а)  $x > 0, y = 0$ ; б)  $x < 0, y = 0$ ; в)  $x = 0, y > 0$ ;  
г)  $x = y$ ; д)  $y = -x$ ; е)  $x = 0, y < 0$ .

21. Каде лежи точката чија апсциса  $x$  е: а)  $x > 0$ ; б)  $x < 0$ ; в)  $x = 0$ ?

22. Каде лежи точката чија ордината  $y$  е: а)  $y > 0$ ; б)  $y < 0$ ; в)  $y = 0$ ?

23. Точката  $A(x_1, y_1)$  лежи во I квадрант, а точката  $B(x_2, y_2)$  во II квадрант. Кој услов треба да го задоволуваат овие точки за да бидат симетрични во однос на  $y$ -оската?

24. Точките  $A$  и  $B$  се симетрични во однос на координатниот почеток. Одреди ги координатите на точката  $B$  ако:

- а)  $A(3, 4)$ ; б)  $A(-1, 0)$ ; в)  $A(-2, -3)$ ; г)  $A(2, -3)$ .

25. Дадена е точката  $A(3, 2)$ . Одреди ги координатите на точката  $B$  што е симетрична со  $A$  во однос на:

- а) ординатната оска;  
б) апсцисната оска; в) координатниот почеток.

26. Каде лежи точката  $(x, y)$ , кај која:

- а)  $x = 0$ ; б)  $y = 0$ ; в)  $x = 3$ ; г)  $y = 3$ ?




27. Нацртај ја отсечката  $AB$  во координатна рамнина и пресметај ја нејзината должина, ако: а)  $A(-2, 3), B(1, -1)$ ; б)  $A(6, -3), B(-2, 3)$ .

28. Претстави ги во координатна рамнина точките:  $A(3, 0)$ ,  $B(2, 2)$ ,  $C(-1, 2)$ ,  $D(-2, -1)$  и одреди ги должините на страните и дијагоналите на четириаголникот  $ABCD$ , (на две децимали и со помош на калкулатор).
29. Претстави ги во координатна рамнина точките:  $A(-3, 1)$ ;  $B(-1, -1)$ ;  $C(2, 3)$  и пресметај ја плоштината на  $\triangle ABC$ .
30. Претстави ја во координатна рамнина точката  $M(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ .
31. Претстави го во координатна рамнина четириаголникот  $ABCD$ , така што  $A(1, 2)$ ,  $B(-2, 3)$ ,  $C(-4, -1)$ ,  $D(-2, -2)$  и пресметај ја неговата плоштина.
32. Претстави ја во координатна рамнина отсечката  $AB$  ( $A(1, 4)$ ;  $B(5, 2)$ ).  
Одреди го растојанието на точката  $A$ , односно точката  $B$  до:  
а)  $x$  – оската;                      б)  $y$  – оската.
33. Пресметај го периметарот на:  
а)  $\triangle ABC$  ( $A(-3, 0)$ ;  $B(-2, -2)$ ;  $C(3, 2)$ )  
б) четириаголникот  $ABCD$  ( $A(3, 1)$ ;  $B(-1, 4)$ ;  $C(-5, 0)$ ;  $D(0, -4)$ )
34. Во координатна рамнина е даден четириаголникот  $ABCD$ , така што  $A(2, 1)$ ,  $B(-2, 2)$ ,  $C(-3, -1)$ ,  $D(1, -2)$ .  
а) Од кој вид е четириаголникот  $ABCD$ ?  
б) Пресметај ја плоштината на четириаголникот  $ABCD$ .  
в) Одреди ги должините на дијагоналите  $AC$  и  $BD$ .

### 3

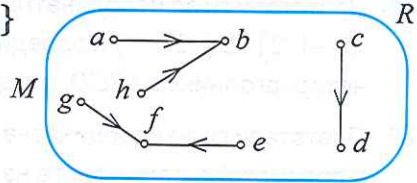
## РЕЛАЦИИ

### Треба да знаеш

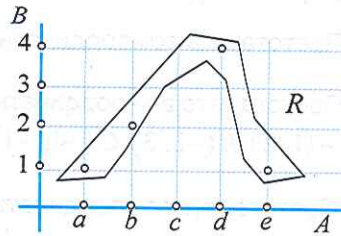
-  Релација од множеството  $A$  кон множеството  $B$  е секое подмножество од декартовиот производ  $A \times B$ .
-  График на релацијата  $R$  е множеството од подредени парови што припаѓаат на релацијата.
-  Една релација може да биде зададена со граф, график, координатна шема или, пак, со опис (врска).

35. Претстави ја со граф релацијата  $R: "<"$  од множеството  $A = \{8, 12, 16, 20, 24\}$  кон множеството  $B = \{11, 15, 19, 23, 27\}$ .

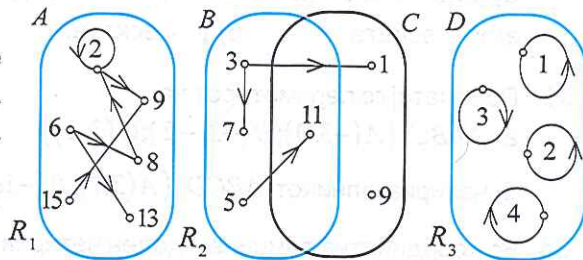
36. Во множеството  $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$  е дадена со граф релацијата  $R$ . Запиши го табеларно графикот  $\bar{R}$  на релацијата  $R$ .



37. Со координатна шема е претставен декартовиот производ  $A \times B$  и со граф е дадена релацијата  $R$ . Запиши го табеларно графикот  $\bar{R}$  на релацијата  $R$ .



38. Релациите  $R_1, R_2$  и  $R_3$  се дадени со графови соодветно. Запиши го графикот за секоја од дадените релации.



39. Дадени се множествата  $A = \{a, b\}$  и  $B = \{m, n, p\}$  и релацијата  $R$  со графикот  $\bar{R} = \{(a, m), (a, p), (b, n)\}$ . Запиши ги елементите од  $A \times B$  кои не припаѓаат на релацијата  $R$ .
40. Во множеството  $A = \{11, 12, 13, 14\}$  е дадена релацијата  $R$  со графикот  $\bar{R} = \{(11, 11), (12, 12), (13, 13), (11, 13), (11, 14), (12, 13), (13, 14)\}$ . Запиши два елемента од  $A^2$  кои не припаѓаат на  $R$ .
41. Во множеството  $A = \{1, 2, 3\}$  е дадена релацијата  $R$  со графикот  $\bar{R} = \{(x, y) \mid x, y \in A; x = y\}$ . Претстави ја релацијата  $R$  со граф.
42. Во множеството  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  е дадена релацијата  $R$  со графикот:  
 а)  $\bar{R} = \{(x, y) \mid x, y \in A, x < y\}$ ; б)  $\bar{R} = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \geq y\}$ . Претстави ја релацијата со граф.
43. Дадена е релацијата  $R: y = x + 1$  од множеството  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  кон множеството  $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 11\}$ . Запиши го графикот  $\bar{R}$  на релацијата  $R$ .
44. Семејството Наумовски има пет деца: Стојан, Борис, Јованка, Слободанка, Гурѓа и тие го сочинуваат множество  $M$ . Нацртај го графикот на релацијата  $R$  дефинирана во множеството  $M$ :  
 а)  $R_1$ : "... е брат на ..."; б)  $R_2$ : "... е сестра на ...".

45. Во множеството  $\mathbb{N}$  на природните броеви е дадена релацијата  $R$  со графикот  $\bar{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y = 7\}$ .
- а) Запиши ги табеларно елементите на графикот.
- б) Претстави ја релацијата со граф.
46. Во множеството  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  е зададена релацијата  $\bar{R} = \{(x, y) \mid x, y \in A, x + y < 6\}$ . Претстави ја релацијата  $R$  со граф.
47. Следните релации  $R_1, R_2$  и  $R_3$  се зададени од множеството  $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -4 \leq x \leq 9\}$  кон множеството  $B = \{y \mid y \in \mathbb{Z}, -6 \leq y \leq 12\}$ :  
Запиши ги табеларно релациите:  
 $\bar{R}_1 = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, y = x + 3\}$ ;  $\bar{R}_2 = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, y = x - 2\}$ ;  
 $\bar{R}_3 = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, y = x^2\}$ .

## 4

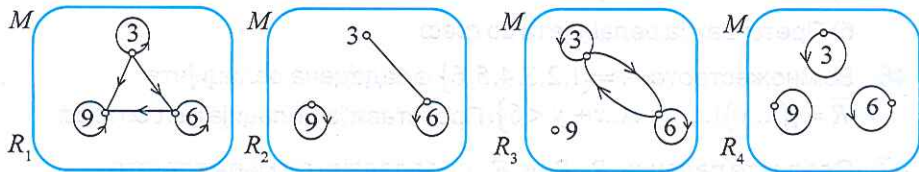
## РЕФЛЕКСИВНИ И СИМЕТРИЧНИ РЕЛАЦИИ

### Треба да знаеш

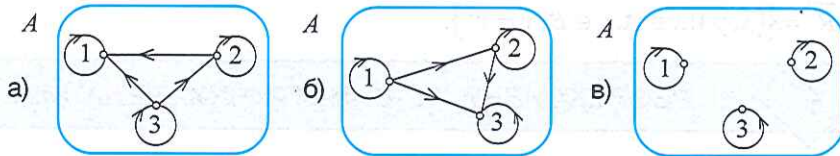
- Релацијата  $R$ , во множеството  $A$  е **рефлексивна** ако секој елемент од  $A$  е во релација  $R$  сам со себе, т.е за секој  $x \in A$ ,  $xRx$ .
- Во графот на рефлексивна релација секој елемент има **алка**.
- Во графикот на рефлексивна релација припаѓаат сите подредени парови со **еднакви компоненти**.
- Релацијата  $R$  во множеството  $A$  е **симетрична** ако за кои било  $x, y \in A$ , од  $xRy$  следува  $yRx$ .
- Во графот на симетрична релација секој пар елементи што се сврзани се и **двојно сврзани**.
- Во графикот на симетрична релација, ако се содржи парот  $(a, b)$  тогаш се содржи и парот  $(b, a)$ .

48. Нацртај го графот, запиши го графикот и провери дали е рефлексивна релацијата  $R$  "...е еднаков со...", во множеството  $S = \{0, 7, 13, 25\}$ .
49. Во множеството  $P = \{3, 13, 23, 33\}$  е дадена релацијата  $R$  "...е помал или еднаков со...". Нацртај го графот на релацијата и провери дали таа е рефлексивна.
50. Релацијата  $R$  "...има иста цифра на десетки со..." во множеството  $A = \{23, 25, 31, 32, 52\}$  претстави ја со граф, запиши го нејзиниот график и провери дали е рефлексивна.

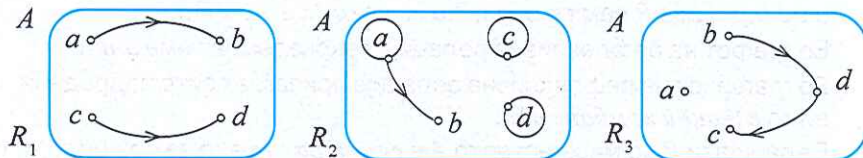
51. На цртежот, во множеството  $M = \{3, 6, 9\}$  се дадени релациите  $R_1, R_2, R_3$  и  $R_4$ . Која од овие релации е рефлексивна?



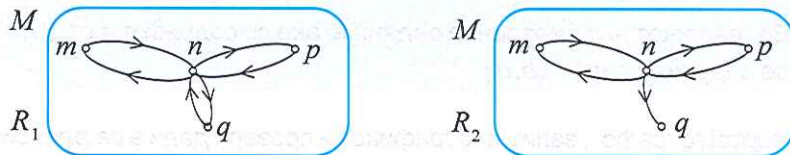
52. Со графови се претставени три познати рефлексивни релации на множеството  $A = \{1, 2, 3\}$ . Една од нив е  $R_1 : "\leq"$ , друга е  $R_2 : "="$ , а трета  $R_3 : "\geq"$ . Одреди кој граф одговара на која релација.



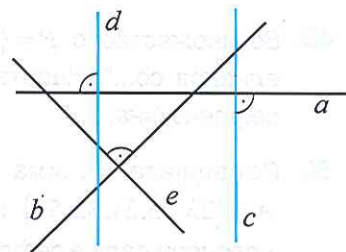
53. Во графовите на цртежот доцртај најмал број потребни стрелки за релациите  $R_1, R_2$  и  $R_3$  дадени во множеството  $A = \{a, b, c, d\}$ , да бидат рефлексивни.



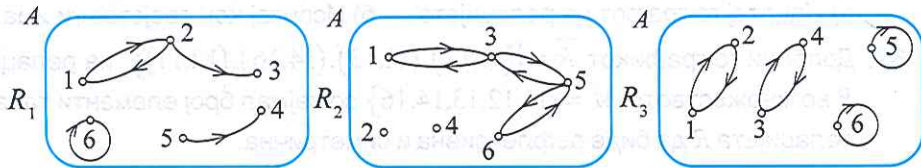
54. Која од релациите,  $R_1$  или  $R_2$ , дадени во множеството  $M = \{m, n, p, q\}$  е симетрична?



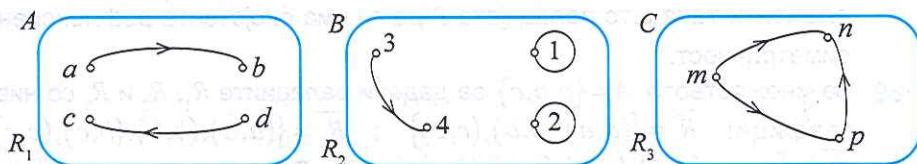
55. Во множеството прави  $P = \{a, b, c, d, e\}$  дадена е релацијата  $R$  "...е нормална на ...". Нацртај го графот на релацијата  $R$  и одговори кои својства ги има.



56. Во множеството  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  дадени се релациите  $R_1, R_2$  и  $R_3$  со своите графови. Кои од нив се симетрични?



57. Доцртај најмал број стрелки така што релациите дадени со графови, во соодветните множества, да станат симетрични.



58. Во множеството  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 9\}$  е дадена релацијата  $R$  со графикот  $\bar{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y = 8\}$ . Нацртај го графот на релацијата и провери дали таа е симетрична.

Провери дали се рефлексивни и симетрични следните релации (59 - 62):

59.  $R_1$  дадена во  $A = \{1, 2, 3\}$ , со графикот  $\bar{R}_1 = \{(1, 2), (2, 3), (2, 1), (3, 2), (1, 3)\}$ .
60.  $R_2$  дадена во  $B = \{a, b\}$ , со графикот  $R_2 = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}$ .
61.  $R_3$  дадена во  $C = \{2, 5, 7, 9\}$ , со графикот  $\bar{R}_3 = \{(2, 2), (5, 5), (7, 7), (9, 9)\}$ .
62.  $R_4$  дадена во  $D = \{a, b, c\}$ , со графикот  $\bar{R}_4 = \{(a, a), (b, b), (a, b)\}$ .
63. Во множеството од твоите другари провери која од дадените релации е рефлексивна, а која е симетрична.  
 а)  $R_1$ : "...учи во исто училиште со..."; б)  $R_2$ : "...има иста другарка со...";  
 в)  $R_3$ : "...е повисок од..."; г)  $R_4$ : "...пишува домашна работа со...".
64. Провери дали релацијата  $R: "="$  дадена во множеството  $A = \{a, b, c, d\}$  е рефлексивна и симетрична.
65. Во множеството  $A = \{2, 4, 6, 8\}$  е дадена релацијата  $R$  со својот график  $\bar{R} = \{(2, 2), (4, 4), (6, 8), (8, 6)\}$ .  
 а) Нацртај го графот на релацијата  $R$ .  
 б) Испитај дали релацијата  $R$  е рефлексивна.  
 в) Испитај дали релацијата  $R$  е симетрична.

66. Во множеството  $M = \{13, 35, 43, 54, 65\}$  е дадена релацијата  $R$  "...има иста цифра на единици како...".

а) Нацртај го графот на релацијата. б) Испитај кои својства ги има.

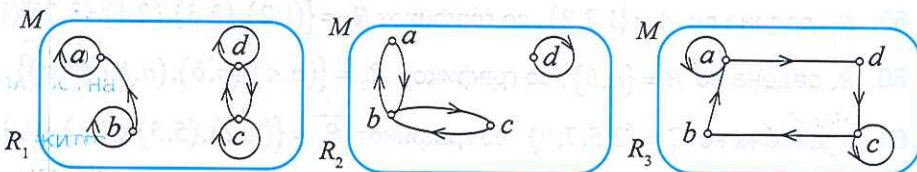
67. Дополни го графикот  $\bar{R} = \{(11,12), (11,13), (14,16), (12,11)\}$  на релацијата  $R$  во множеството  $M = \{11, 12, 13, 14, 16\}$  со најмал број елементи така што релацијата  $R$  да биде рефлексивна и симетрична.

68. Даден е графикот  $\bar{R} = \{(40,40), (40,50), (50,50), (50,40), (60,60), (40,70), (70,70)\}$  на релацијата  $R$  во множеството  $M = \{40, 50, 60, 70\}$ . Изостави најмал број елементи така што релацијата  $R$  да ги има својствата рефлексивност и симетричност.

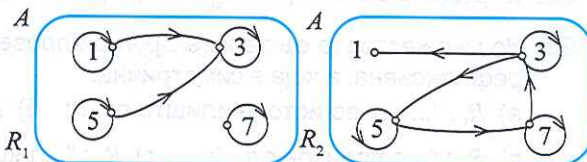
69. Во множеството  $A = \{a, b, c\}$  се дадени релациите  $R_1, R_2$  и  $R_3$  со нивните графици:  $\bar{R}_1 = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$ ;  $\bar{R}_2 = \{(a,a), (b,b), (b,c), (c,c)\}$  и  $\bar{R}_3 = \{(a,a), (a,b), (c,a), (b,b), (b,c), (c,c)\}$ . Претстави ја со граф секоја релација и провери дали ги има својствата на рефлексивност и симетричност.

70. Релациите  $R_1, R_2$  и  $R_3$  се зададени со своите графови во множеството  $M = \{a, b, c, d\}$ . Провери која од релациите  $R_1, R_2$  и  $R_3$  е:

а) рефлексивна; б) симетрична.

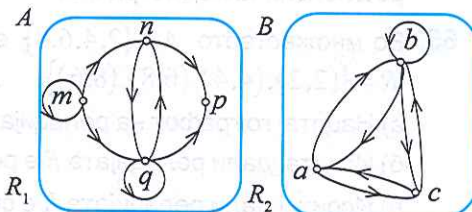


71. Релациите  $R_1$  и  $R_2$  се зададени со своите графови во множеството  $A = \{1, 3, 5, 7\}$ .



Провери која од нив е: а) рефлексивна; б) симетрична.

72. Релацијата  $R_1$  е зададена со граф во множеството  $A = \{m, n, p, q\}$ , а релацијата  $R_2$  во множеството  $B = \{a, b, c\}$ . Испитај дали тие ги имаат својствата на рефлексивност и симетричност.





73. Даден е графикот  $\bar{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x \leq y\}$  на релацијата  $R$  во множеството природни броеви. Докажи дека релацијата  $R$  е рефлексивна.
74. Во множеството прави во една рамнина е дадена релацијата  $R$ : "...е паралелна со...". Докажи дека релацијата  $R$  е рефлексивна и симетрична.
75. Во множеството природни броеви е дадена релацијата  $R$  со својот график  $\bar{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x > y\}$ . Испитај дали релацијата  $R$  ги има својствата на рефлексивност и симетричност.
76. Со графикот  $\bar{R} = \{(x, y) \mid x, y \in S, y = 2x\}$  е дадена релацијата  $R$  во множеството  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Испитај дали релацијата  $R$  е симетрична.

## 5

## АНТИСИМЕТРИЧНИ И ТРАНЗИТИВНИ РЕЛАЦИИ

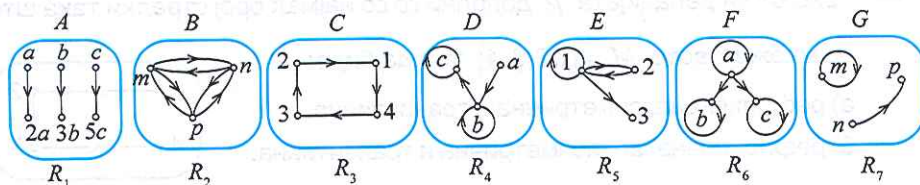
### Треба да знаеш

- Релацијата  $R$  во множеството  $A$  е **антисиметрична**, ако за кои било различни елементи  $x, y \in A$ , важи:  $xRy$ , тогаш не е  $yRx$ .
- Во **графикот** на антисиметрична релација различните елементи не се двојно поврзани.
- Во **графикот** на антисиметрична релација, ако  $(a, b) \in \bar{R}$ ,  $a \neq b$ , тогаш  $(b, a) \notin \bar{R}$ .
- Релацијата  $R$  во множеството  $A$  е **транзитивна** ако за кои било  $a, b, c \in A$ , важи: ако  $aRb$  и  $bRc$ , тогаш  $aRc$ .
- Во **графикот** на транзитивна релација, ако има стрелка од  $a$  кон  $b$  и од  $b$  кон  $c$ , тогаш има стрелка и од  $a$  кон  $c$ .
- Во **графикот** на транзитивна релација, ако  $(a, b) \in \bar{R}$  и  $(b, c) \in \bar{R}$ , тогаш  $(a, c) \in \bar{R}$ .

77. Претстави ја со граф и провери дали е антисиметрична релацијата  $R$ : "...е помал од..." дадена во множеството:

а)  $A = \{5, 6, 7, 8\}$ ; б)  $B = \{13, 14, 15\}$ ; в)  $C = \{a, 2a\}$ .

78. Во множествата  $A, B, C, D, E, F$  и  $G$  се дадени релациите  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$  и  $R_7$ , соодветно, со своите графови. Која од овие релации е антисиметрична?



79. Провери дали релацијата  $R$ : "...има прва цифра еднаква на последната цифра на..." е антисиметрична во множеството:

а)  $A = \{17, 65, 66, 167, 261\}$ ; б)  $A = \{25, 38, 72, 101\}$ ; в)  $A = \{11, 111, 1111\}$ .

80. Во множеството  $L = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 5\}$  се дадени релациите:

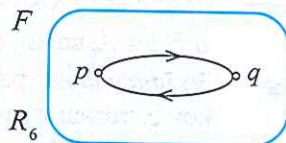
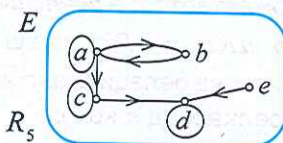
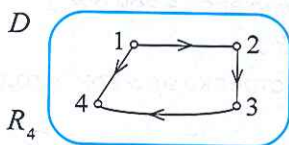
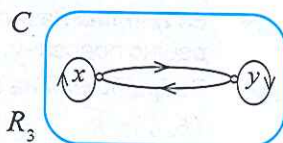
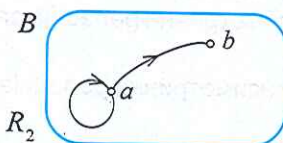
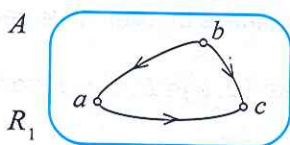
$R_1 = \{(x, y) \mid x, y \in L, x + y = 4\}$ ,  $R_2 = \{(x, y) \mid x, y \in L, x > y\}$  и

$R_3 = \{(x, y) \mid x, y \in L, xy = 4\}$ . Запиши ги релациите табеларно и испитај која од нив е антисиметрична.

81. Во множеството  $P = \{1, 2, 3, 4\}$  претстави со граф една антисиметрична релација: а) со 3 стрелки; б) со 4 стрелки; в) со 5 стрелки.

82. Мимоза има 2 години, Јове има 12 год, а Билјана има 20 год. Претстави ја со граф релацијата  $R$ : "...има помалку години од..." во множеството  $M = \{\text{Мимоза, Јове, Билјана}\}$  и провери дали таа е транзитивна.

83. Која од дадените релации  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$  и  $R_6$  претставени со граф во множествата  $A, B, C, D, E$  и  $F$ , соодветно, е транзитивна?



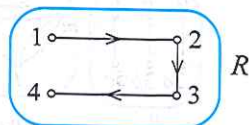
84. На систематски преглед е утврдено дека Таца има 47 kg, Маја 50 kg, Аце 44 kg, и Саше 42 kg. Претстави ја со граф релацијата  $R$ : "...има повеќе килограми од..." и провери дали е транзитивна.

85. Нацртај го графот на релацијата  $R$  зададена со графикот  $\bar{R} = \{(1,2), (3,2), (3,4), (4,4), (5,6), (5,7), (6,6), (6,7), (8,9), (10,9), (11,9), (11,2)\}$  во множеството  $M = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 11\}$ . Кои својства ги има оваа релација?

86. Графот на релацијата  $R$  дополни го со најмал број стрелки така што во множеството  $M = \{1, 2, 3, 4\}$  таа да биде:

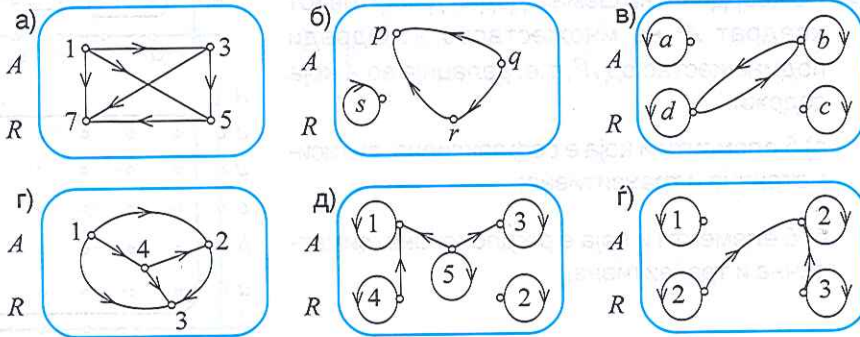
а) рефлексивна, симетрична и транзитивна.

б) рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.



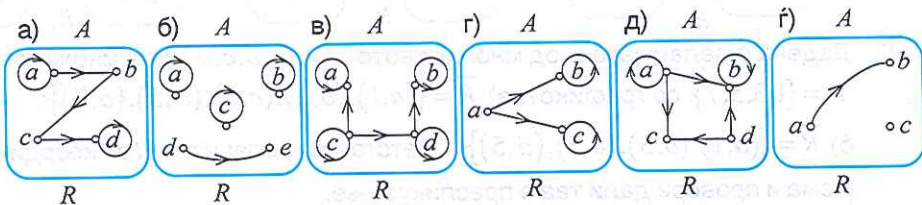
87. Во множеството паралелни прави  $M = \{a, b, c\}$  дадена е релацијата  $R$ : "...е паралелна со...". Претстави ја релацијата со граф и одреди ги нејзините својства.

88. Кои својства ги има релацијата  $R$  дадена со граф во множеството  $A$ ?



Кои својства ги има релацијата  $R$  дадена со графикот  $\bar{R}$  во множеството  $A$  (89 - 96)?

89.  $\bar{R} = \{(a,b), (a,c), (b,b), (d,c), (d,d)\}$  во множеството  $A = \{a, b, c, d\}$ .
90.  $\bar{R} = \{(1,1), (1,3), (3,3), (5,7), (5,5), (3,1), (7,7), (9,5), (9,9)\}$  во множеството  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ .
91.  $\bar{R} = \{(4,7), (6,6), (1,8), (7,8), (2,8)\}$  во множеството  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 8\}$ .
92.  $\bar{R} = \{(6,0), (4,3), (7,7), (0,6), (5,1)\}$  во множеството  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0, x < 8\}$ .
93.  $\bar{R} = \{(7,6), (1,8), (8,8), (4,6)\}$  во множеството  $A = \{1, 4, 6, 7, 8\}$ .
94.  $\bar{R} = \{(a,b), (b,a), (b,c), (c,c), (b,d), (c,d), (d,d)\}$  во множеството  $A = \{a, b, c, d\}$ .
95.  $\bar{R} = \{(2,1), (1,3), (3,3), (1,2), (3,1)\}$  во множеството  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .
96.  $\bar{R} = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$  во множеството  $A = \{1, 2, 3\}$ .
97. Во множеството  $A$  е дадена релација  $R$  со својот граф. На графикот допиши најмал број стрелки за да се добие релација која е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

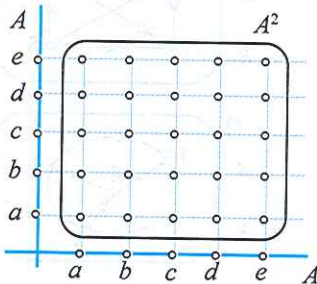
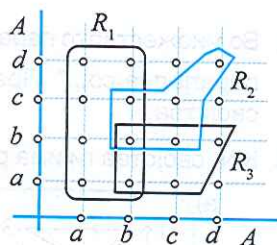


98. Кои својства ги има секоја од релациите  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  во множеството  $A = \{a, b, c, d\}$ ?

99. Со координатна шема е даден декартовиот квадрат  $A^2$  на множеството  $A$ . Одреди подмножество од  $A^2$ , т.е. релација во  $A$  која содржи:

а) 5 елементи и која е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна;

б) 6 елементи и која е рефлексивна, симетрична и транзитивна.



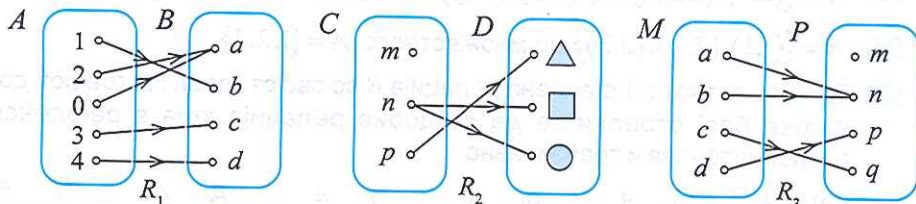
## 6

## ПРЕСЛИКУВАЊЕ (ФУНКЦИЈА)

### Треба да знаеш

- Релацијата  $R$  од  $A$  кон  $B$  е **пресликување** од  $A$  во  $B$  ако секој елемент на  $A$  е во релација само со по еден елемент од  $B$ . Се означува:  $R: A \rightarrow B$ .
- Множеството  $A$  се вика **домен** (дефиниционо множество) на пресликувањето  $f$ , а  $B$  - **кодомен** на  $f$ . Елементите од  $A$  се викаат **оригинали**.
- Множесѝво вредносѝи** (множесѝво слики) е подмножество од кодоменот, а ги содржи сликите за елементите од доменот.

100. Која од дадените релации  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  на цртежот е пресликување.



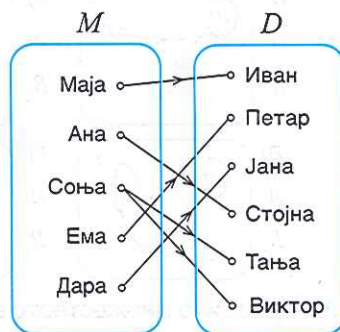
101. Дадена е релацијата  $R$  од множеството  $A = \{a, b, c, d\}$  кон множеството  $B = \{1, 3, 5, 7\}$  со графикот: а)  $\bar{R} = \{(a, 1), (b, 3), (c, 3), (d, 5), (a, 7)\}$ ;  
б)  $\bar{R} = \{(a, 1), (b, 3), (c, 5), (d, 5)\}$ . Претстави ја релацијата  $R$  со координатна шема и провери дали таа е пресликување.

102. Дадени се релациите  $f$  и  $g$  од множеството  $A = \{a, m, b, d\}$  кон множеството  $B = \{g, k, h, p, q\}$  со графиците  $\bar{f} = \{(a, h), (d, k), (m, h)\}$  и  $\bar{g} = \{(a, h), (d, k), (m, h), (b, h)\}$ . Нацртај ги графовите на овие релации и провери дали тие се пресликувања.

103. Даден е декартовиот производ  $A \times B$  на множеството  $A = \{2, 5, 7\}$  и  $B = \{m, n, p, q\}$ . Дали подмножеството  $\bar{f} = \{(2, m), (5, p), (7, q)\}$  е пресликување од  $A$  кон  $B$ ?

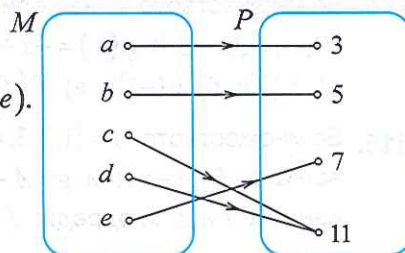
104. Нацртај го графот на релацијата  $R$ : "...е главен град на ..." од множеството  $G = \{\text{Рим, Венеција, Виена, Бон, Берлин, Лондон, Хаг}\}$  кон множеството  $D = \{\text{Холандија, Австрија, Италија, Англија, Германија, Данска}\}$ . Дали оваа релација е пресликување?

105. Со граф е дадена релацијата  $R$ : "...е мајка на..." од множеството мајки  $M = \{\text{Маја, Ана, Соња, Ема, Дара}\}$  кон множеството деца  $D = \{\text{Иван, Петар, Стојна, Тања, Виктор, Јана}\}$ . Дали релацијата  $R$  е пресликување? Објасни го одговорот.



106. Дадено е пресликувањето  $f$  со графикот  $\Gamma_f = \{(x, y) \mid x \in A, y = 7x\}$  од множеството  $A = \{1, 2, 3, 5\}$  кон множеството  $B = \{7, 14, 15, 21, 35\}$ . Одреди ги вредностите  $y = f(x)$  за секое  $x \in A$  и запиши го табеларно графикот на пресликувањето  $f$ .

107. Дадена е функцијата  $f : M \rightarrow P$ .  
 а) Одреди ги  $f(a), f(b), f(c), f(d), f(e)$ .  
 б) Графикот на функцијата претстави го табеларно.



108. Одреди го множеството вредности на функцијата  $f(x) = x + 7$  ако:  
 а)  $x \in \{0, 12, 15\}$ ; б)  $x \in \{0, b, 10\}$ ; в)  $x \in \{-12, -8, -7, -6\}$ .

109. Одреди ги доменот  $A$  и множеството вредности на пресликувањето  $f : A \rightarrow B$ , дадено со графикот  $\Gamma_f = \{(1, a), (a, 2), (b, 3), (4, b), (5, c), (m, b)\}$ ;

110. Одреди  $f(1), f(10), f(100)$ , ако  $f: N \rightarrow N$  и:

а)  $f(x) = x - 3$ ; б)  $f(x) = x^2 - 3$ ; в)  $f(x) = x^2 - x - 1$ ; г)  $f(x) = \frac{x+2}{3}$ .

111. Во множеството  $A = \{a, b, c, d\}$  е дадена релацијата  $R$  со графикот:

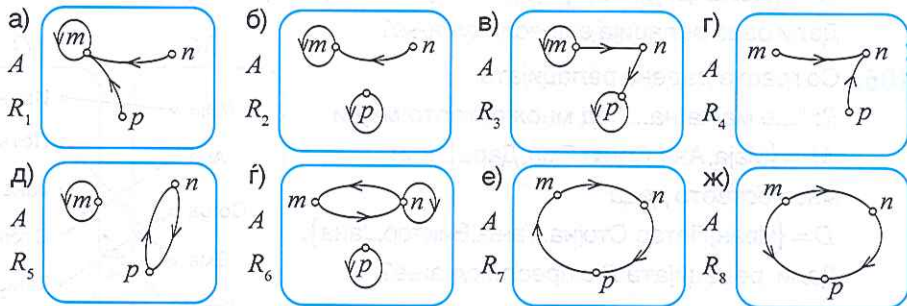
а)  $\bar{R} = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$ ; б)  $\bar{R} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d)\}$ ;

в)  $\bar{R} = \{(a, a), (b, a), (c, a), (d, a)\}$ ; г)  $\bar{R} = \{(a, b), (b, c), (d, a)\}$ ;

д)  $\bar{R} = \{(c, a), (d, a), (b, b), (c, d), (a, c)\}$ .

Со кој од графиците е дадено пресликување на множеството  $A$  во себе?

112. Во множеството  $A = \{m, n, p\}$  е дадена релацијата  $R$  со граф. Која од нив е пресликување?



113. Одреди го множеството вредности на пресликувањето во кое се пресликува множеството  $A = \{-2, 1, 0, 5\}$ :

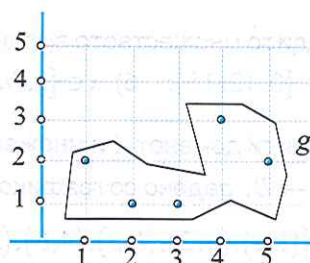
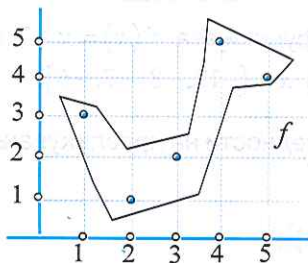
а)  $f: x \rightarrow x - 3$ ; б)  $f: x \rightarrow -2x + 3$ ; в)  $f: x \rightarrow \frac{6}{x+1}$ ;  
 г)  $f: x \rightarrow x^2$ ; д)  $f: x \rightarrow x^2 + x + 1$ ; е)  $f: x \rightarrow 2x - 1$ .

114. Во множеството  $\mathbb{Z}$  на целите броеви се дадени пресликувањата

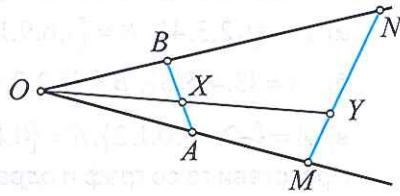
$f(x) = 3x - 5$  и  $g(x) = -x + 2$ . Одреди:

а)  $f(3)$ ; б)  $g(-1)$ ; в)  $f(f(x))$ ; г)  $f(g(x))$ ; д)  $f(f(1))$ ; е)  $f(g(-1))$ .

115. Во множеството  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  со координатни шеми се дадени пресликувањата  $f: A \rightarrow A$  и  $g: A \rightarrow A$ . а) запиши ги графиците на пресликувањата  $f$  и  $g$ . б) одреди:  $f(2), f(f(3)), f(g(1)), g(f(4)), f(f(g(5)))$ .



116. Точките од отсечката  $AB$  се пресликуваат во точки од отсечката  $MN$  така што сликата  $Y$  на точката  $X \in AB$  се наоѓа во пресекот на полуправата  $OX$  со отсечката  $MN$ .



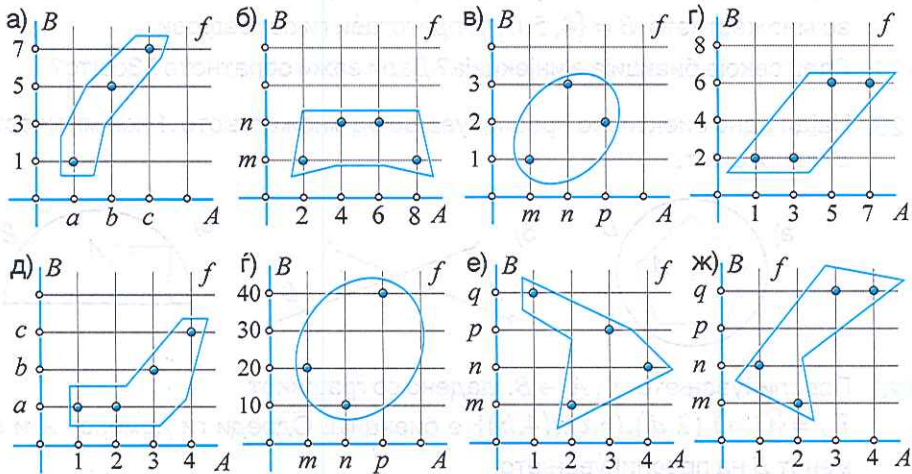
- а) Одреди ги доменот, кодоменот и множеството вредности на пресликувањето.  
 б) Дали на отсечката  $MN$  има точки кои не се слики на точки од отсечката  $AB$ ?

## 7 НЕКОИ ВИДОВИ ПРЕСЛИКУВАЊА

### Треба да знаеш

- Пресликувањето е **инјекција** ако различните елементи од доменот се пресликуваат во различни елементи од кодоменот.
- Пресликувањето е **сурјекција** ако секој елемент од кодоменот е слика на елемент од доменот.
- Пресликувањето е **биекција** ако тоа истовремено е и инјекција и сурјекција.

117. Со координатна шема е дадено пресликувањето  $f : A \rightarrow B$ .



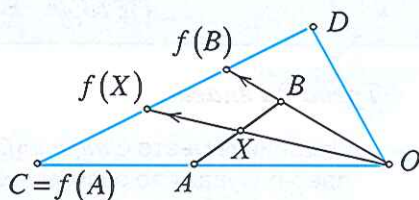
Претстави го со граф пресликувањето  $f$  и одреди од кој вид е тоа.

118. Одреди од кој вид е пресликувањето  $f : A \rightarrow B$  каде  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{10, 20, 30, 40\}$ , кое е дадено со графикот:
- а)  $\Gamma f = \{(a, 10), (b, 10), (c, 10), (d, 20)\}$ ;  
 б)  $\Gamma f = \{(a, 20), (b, 30), (c, 10), (d, 40)\}$ .

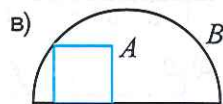
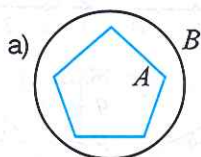
119. Дадено е пресликувањето  $f : A \rightarrow B$ , така што:
- $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{3, 6, 9, 12\}$  и  $f : x \rightarrow 3x$ ;
  - $A = \{3, 4, 5, 6\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  и  $f : x \rightarrow x + 2$
  - $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  и  $f : x \rightarrow x^2 - 2x + 1$
- Претстави го со граф и одреди од кој вид е пресликувањето.

120. Пресликувањето  $f : A \rightarrow B$ , каде  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  е дадено со правилото "...е за 2 помал од...". Претстави го со граф и одреди од кој вид е пресликувањето.

121. Дадено е пресликување  $f : AB \rightarrow CD$ , со цртежот.
- Дали пресликувањето  $f$  е инјекција?
  - Дали пресликувањето  $f$  е сурјекција?



122. Инјективното пресликување  $f : A \rightarrow B$ , каде  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{5, 6, 7, 8\}$  може да се изврши на 24 начини. Најди три инјекции  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$  од  $A$  кон  $B$ .
123. Најди ги сите начини на инјективно пресликување на множеството  $A = \{1, 2\}$  во множеството  $B = \{4, 5, 6\}$  и претстави ги со графови.
124. Дали секоја биекција е инјекција? Дали важи обратното? Зошто?
125. Најди едно биективно пресликување од множеството  $A$  кон множеството  $B$  на цртежот.



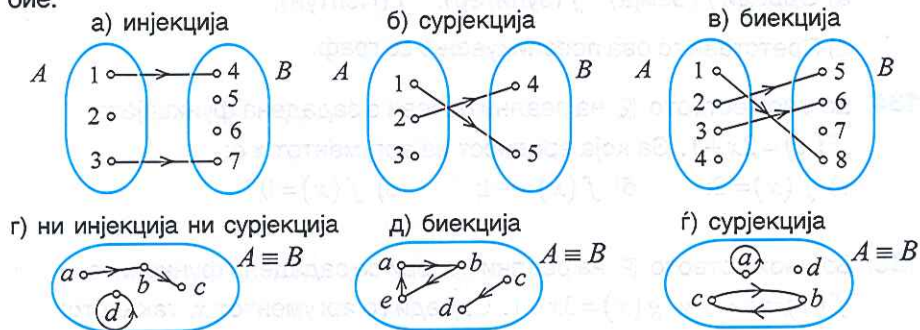
126. Пресликувањето  $f : A \rightarrow B$ , дадено со графикот  $\Gamma_f = \{(1, a), (2, d), (3, c), (4, b)\}$  е биекција. Одреди ги доменот  $A$  и кодоменот  $B$  на пресликувањето.
127. Дали е биекција пресликувањето  $f : A \rightarrow B$ , каде  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 4, 7, 10\}$  и  $\Gamma_f = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, y = 3x + 1\}$ ?
128. Дали е сурјекција пресликувањето  $f : A \rightarrow B$ , каде  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{a, b, c, d\}$  и  $\Gamma_f = \{(1, a), (2, a), (3, b), (4, c)\}$ ?



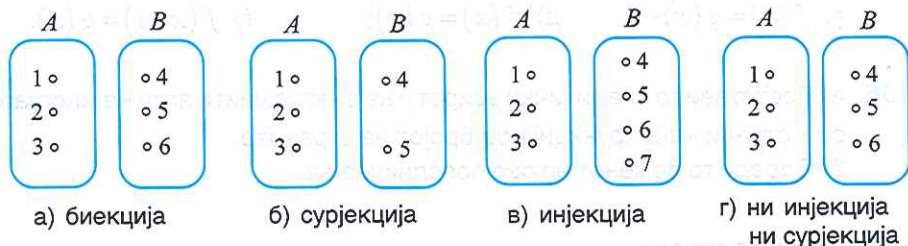
129. Дали може од графикот на пресликувањето  $f: A \rightarrow B$  да се определи:

- доменот, ако  $f$  не е биекција;
- кодоменот, ако  $f$  не е биекција;
- кодоменот, ако  $f$  не е сурјекција;
- кодоменот, ако  $f$  е инјекција, а не е биекција?

130. Во графот на пресликувањето  $f: A \rightarrow B$  додај една стрелка за да се добие:



131. Нацртај стрелки во графот на пресликувањето  $f: A \rightarrow B$  за тоа да биде:



## 8

## НАЧИНИ НА ЗАДАВАЊЕ НА ПРЕСЛИКУВАЊА

### Треба да знаеш

- Пресликувањето се задава *шаблично, аналитички (со формула) и графички*.
- Пресликувањето е зададено ако е дадено на некој од трите начини.

132. Пресликувањето  $f: A \rightarrow B$  е дадено со нејзиниот график

$$\Gamma_f = \left\{ (-2, 2), \left( \frac{1}{4}, -1 \right), (0, 3), \left( 1, \frac{3}{5} \right), \left( \frac{9}{4}, 0 \right) \right\}.$$

- Одреди:  $f(0)$ ,  $f(-2)$ ,  $f(1)$ ;
- Претстави ги подредените парови од графикот на пресликувањето  $f$  во координатна рамнина.

133. Пресликувањето  $f: A \rightarrow B$  е дадено со нејзиниот график  $\Gamma_f = \{(\text{Меркур}; 0,387), (\text{Венера}; 0,723), (\text{Земја}; 1), (\text{Марс}; 1,62), (\text{Јупитер}; 5,2), (\text{Сатурн}; 9,5), (\text{Уран}; 19,2), (\text{Нептун}; 30), (\text{Плутон}; 39,5)\}$ .

(Втората компонента во парот претставува растојание на планетата од Сонцето, а за единица е земено средното растојание на Земјата до Сонцето).

- а) Одреди  $f(\text{Земја})$ ,  $f(\text{Јупитер})$ ,  $f(\text{Нептун})$ ;  
 б) Претстави го ова пресликување со граф.
134. Во множеството  $\mathbb{R}$  на реални броеви е зададена функцијата  $f(x) = 2x + 1$ . За која вредност на аргументот  $x$  е:

- а)  $f(x) = 2$ ;    б)  $f(x) = -1$ ;    в)  $f(x) = 0$ ?

135. Во множеството  $\mathbb{R}$  на реални броеви се зададени функциите  $f(x) = x + 4$  и  $g(x) = 3x + 1$ . Одреди го аргументот  $x$ , така што:

- а)  $f(2) = g(x)$ ;    б)  $f(-4) = g(x)$ ;    в)  $f(x) = g\left(\frac{1}{3}\right)$ ;  
 г)  $f(x) = g(x) + 1$ ;    д)  $f(x) = g(x)$ ;    е)  $f(x+1) = g(x)$ .

136. а) Претстави го аналитички збирот  $u$  на внатрешните агли на многуаголник со  $x$  страни како функција од бројот на страните.  
 б) Одреди го доменот на ова пресликување.

137. Дадено е пресликување  $f: A \rightarrow B$  со формулата:

- а)  $f(x) = 4x - 2$ ;  
 б)  $g(x) = 3 - 2x$ .

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 4x - 2$							
$g(x) = 3 - 2x$							

Пополни ја табелата ако  $x \in A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ .

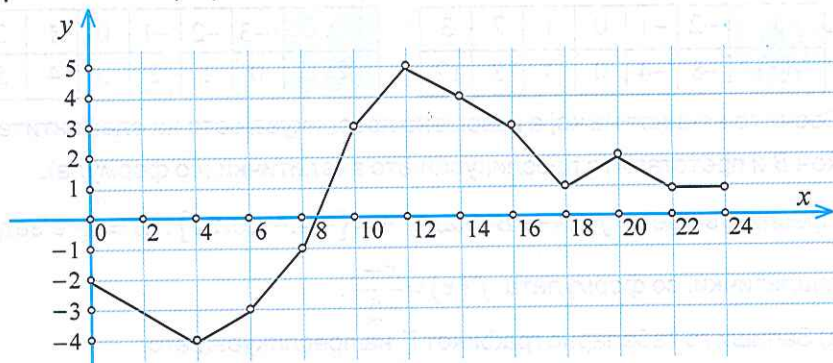
138. Дадени се функциите  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  со  $f(x) = \frac{x}{2} - 1$  и

$$g(x) = 2x + 1.$$

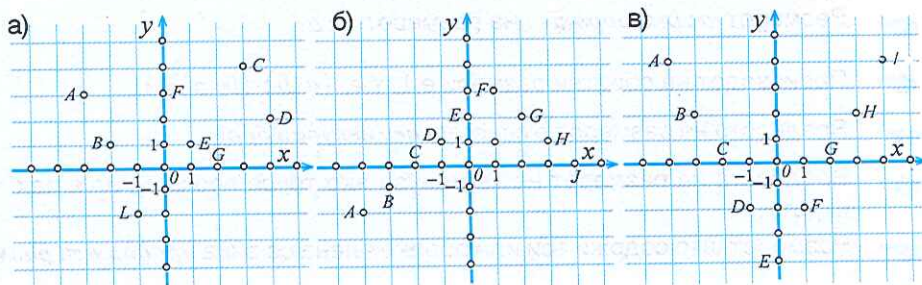
Пополни ги празните места во табелата.

$x$	1			0		
$f(x) = \frac{x}{2} - 1$			-2		2	
$g(x) = 2x + 1$		7				-1

139. Промените на температурата на воздухот во текот на еден зимски ден се прикажани со графикот.



- а) Во колку часот температурата била  $1^{\circ}\text{C}$ ?  
 б) Колку часа тој ден температурата била под нулата (приближно)?  
 в) Во колку часот температурата била најниска, а во колку највисока?
140. Пресликувањето  $f: A \rightarrow B$  е зададено аналитички со формулата  $f(x) = 2 - x$ . Ако множеството вредности на  $f$  е  $V = \left\{-3, -2\frac{1}{4}, -2, -1, 0, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{9}{4}, 3\right\}$ , одреди го доменот  $A$  на оваа функција.
141. Од множеството  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  кон множеството  $B = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$  е зададено пресликување  $f$  со формулата  $f(x) = 2x - 1$ .
- а) Одреди го графикот  $\Gamma_f$ .  
 б) Претстави ја функцијата  $y = 2x - 1$  таблично.  
 в) Претстави ја функцијата во координатна рамнина.
142. Со пресликувањето  $f$  секој прост природен број се пресликува во 0, а секој сложен природен број во 1.
- а) Одреди  $f(2), f(5), f(440), f(1111)$  и за нив состави табела.  
 б) Одреди го доменот на пресликувањето.
143. Во координатна рамнина графички е претставено пресликувањето  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ . Претстави го ова пресликување со табела.



144. Пресликувањето  $f : A \rightarrow B$  е зададено со табелата:

а)

$x$	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-8	-4	0	4	8	12

б)

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	2	3	4	5	6

Воочи го начинот на кој е извршено пресликувањето на елементите од  $A$  кон  $B$  и претстави го пресликувањето аналитички (со формула).

145. Пресликувањето  $f : A \rightarrow B$ , каде  $A = \{-4, -1, 0, 1, 3\}$ ,  $B = \mathbb{Q}$  е зададено аналитички, со формулата  $f(x) = \frac{x+1}{2}$ .

а) Запиши го табеларно графикот  $\Gamma_f$  на пресликувањето.

б) Од табелата нацртај график на пресликувањето (во координатна рамнина).

146. Дадено е аналитички пресликувањето  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ , со формулата

$$f(x) = \frac{x-1}{2}. \text{ Одреди: } f(0), f(1), f(2), f(3), f(a), f(a+1), f(x+1).$$

147. Дадено е аналитички пресликувањето  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  со формулата

а)  $f(x) = x + 3$ ; б)  $f(x) = \frac{4}{x^2}$ .

Претстави го пресликувањето табеларно и графички ако  $x \leq 4$ .

9

## РАЗМЕР

### Треба да знаеш

- **Размер** на бројот  $a$  спрема бројот  $b$  се вика количникот  $a : b$  или  $\frac{a}{b}$ .
- **Вредноста на размерот**  $a : b$  се вика бројот  $k = \frac{a}{b}$ .
- Ако  $\frac{a}{b} = k$  и  $\frac{c}{d} = k$ , тогаш за размерите  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$  се вели дека се **еднакви**.
- Размерот  $a : b$  е **обратен** на размерот  $b : a$ .
- Производот на обратни размери е 1, т.е.  $(a : b) \cdot (b : a) = 1$ .
- Вредноста на размерот е секогаш **неименуван број**.
- Вредноста на размерот не се менува ако тој се прошири или, пак, се скрати.
- Размерот што содржи три или повеќе члена се вика **продолжен размер**.




- 148.** Таткото има 32 години, а синот 8 години.
- Одреди го размерот на годините на таткото и синот.
  - Колкав бил размерот на нивните години (татко - син) пред 2 години?
  - Колкав ќе биде размерот на нивните години (татко - син) после 4 години?
- 149.** Пресметај ја вредноста на размерот:
- $72:12$
  - $12\frac{1}{2}:25$
  - $\frac{1}{4}:5$
  - $4\frac{1}{5}:\frac{3}{2}$
  - $32:0,8$
  - $44:0,44$
  - $7:1\frac{2}{3}$
  - $0,2:0,002$
- 150.** Пресметај ја вредноста на размерот со точност од 0,01.
- $3:7$
  - $17:29$
  - $0,7:0,9$
  - $0,8:2,7$
  - $\frac{1}{3}:2\frac{2}{3}$
  - $\frac{3}{4}:0,04$
- 151.** Пресметај ја вредноста на размерот:
- $3 \text{ dm} : 2 \text{ cm}$
  - $3 \text{ m} : 5 \text{ cm}$
  - $1 \text{ m}^2 : 1 \text{ cm}^2$
  - $1,2 \text{ km} : 8 \text{ m}$
  - $3 \text{ cm}^2 : 2 \text{ cm}^2$
  - $72 \text{ g} : 3,6 \text{ kg}$
  - $0,5 \text{ kg} : 20 \text{ g}$
  - $7 \text{ дена} : 7 \text{ часа}$
- 152.** На географска карта растојанието  $\overline{AB} = 100 \text{ km}$  е претставено со отсечка 1 cm. Во каков размер е цртана таа географска карта?
- 153.** Една карта е цртана во размер 1:1000000. Колкава должина ќе има на картата растојанието од 35 km?
- 154.** Упрости го дадениот размер, а потоа запиши го размерот што е обратен на него:
- $\frac{3}{4}:\frac{4}{5}$
  - $1:0,008$
  - $7:\frac{4}{9}$
  - $9a^2b:12ab^2$
  - $6(a+b)^2:4(a+b)$
  - $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$
- 155.** Пресметај го непознатиот член  $x$ :
- $x:6=\frac{2}{3}$
  - $x:0,75=3,2$
  - $4,65:x=15$
  - $8,4:x=0,25$
  - $3\frac{1}{5}:x=5\frac{1}{3}$
  - $1\frac{3}{4}:x=3,4$
- 156.** Претстави ги во продолжен размер следниве размери:
- $3:4$  и  $4:5$
  - $5:9$  и  $9:11$
  - $2:3$ ,  $3:7$  и  $7:8$
  - $1:6$  и  $3:2$
  - $4:7$  и  $9:11$
  - $2:5$ ,  $5:6$  и  $12:7$
  - $1:3$ ,  $5:2$  и  $1:4$
- 157.** Членовите на размерот запиши ги со природни броеви:
- $8,5:1,7$
  - $3,6:0,12$
  - $1\frac{1}{4}:2,25$
  - $4:\frac{3}{5}$

158. Членовите на дадените размери кои се бесконечно периодични децимални броеви, запиши ги со помош на природни броеви:  
 а)  $0,3(6):0,5(7)$ ; б)  $0,0(4):0,0(8)$ ; в)  $7,4(7):3,24(7)$ .
159. Во VII<sub>2</sub> одделение има 35 ученици. Односот на момчиња и девојчиња е 3 : 4. Колку момчиња има во паралелката?
160. Збирот на два броја е 90, а размерот на собироците е:  
 а) 4 : 5; б) 7 : 11. Кои се тие броеви?
161. Во една легура од бакар и цинк односот на бакарот и цинкот е 5 : 3. По колку килограми има од секој метал, ако масата на легурата е 56 kg?
162. Аглите на еден четириаголник се во размер 3 : 4 : 5 : 6. Колку степени има секој агол?

## 10

## ПРОПОРЦИЈА

### Треба да знаеш

-  **Пројорција** е равенство на еднакви размери.
-  Во пропорцијата  $a : b = c : d$  важи  $ad = bc$  (основно својство).
-  Секој член од пропорцијата се вика **четвртина геомейтриска пројорционала**.

163. Провери дали може да се образува пропорција од размерите:  
 а) 18 : 6 и 30 : 10; б) 10 : 2 и 15 : 5; в) 3,2 : 0,5 и 2,8 : 0,4375;  
 г)  $\frac{3}{4} : \frac{3}{2}$  и  $\frac{5}{8} : \frac{5}{2}$ ; д)  $2\frac{2}{3} : 2\frac{1}{3}$  и  $2\frac{1}{2} : 2\frac{1}{5}$ .
164. Провери дали е пропорција:  $(a^2 - b^2) : (a - b)^2 = (a + b) : (a - b)$ .
165. Според секое од точните бројни равенства може да се состават осум пропорции чии членови ќе бидат множителите од равенствата.  
 а)  $4 \cdot 16 = 2 \cdot 32$ ; б)  $4 \cdot 10 = 0,8 \cdot 50$ ; в)  $7,6 \cdot 4 = 3,8 \cdot 8$ ; г)  $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{3}{8} \cdot \frac{16}{35}$ .
166. Провери дали ќе важи пропорцијата  $150 : 30 = 210 : 42$  ако првиот размер се скрати со 10, а вториот со 14.
167. Провери дали ќе важи пропорцијата  $2 : 3 = 8 : 12$  ако првиот размер се прошири со 11, а вториот со 9.
168. Одреди го непознатиот член  $x$  во пропорцијата:  
 а)  $9 : 12 = 3 : x$ ; б)  $29 : x = 21 : 8$ ; в)  $x : 15 = 8 : 6$ ; г)  $608 : 912 = x : 768$ .

169. Ако од 20 kg брашно се добива 25 kg леб, колку брашно е потребно за 150 kg леб?
170. Во 400 g раствор има 25 g сол. Колку грама сол има во:  
а) 100 g раствор; б) 1 g раствор; в) 5,5 g раствор; г) 1 kg раствор?
171. Трансформирај го размерот така што првиот член да биде 1:  
а) 4 : 20; б) 2 : 15; в) 5 : 28; г) 8 : 100; д) 25 : 600; е) 150 : 1050.
172. Одреди го непознатиот член  $x$  во пропорцијата:  
а)  $4x : 7,4 = 8 : 37$ ; б)  $5x : \frac{10}{3} = 0,3 : 5$ ; в)  $\frac{11}{5} : \frac{3}{4} = x : \frac{13}{8}$ ;  
г)  $2x : 1,6 = 1 : 10,4$ ; д)  $0, (7) : x = 2, (3) : 0, (3)$ ; е)  $3, (3) : \frac{9}{4} = 0, (4) : x$ .
173. Годишите на таткото и синот се однесуваат како 8 : 3. Ако таткото има 44 години, тогаш колку години има синот?
174. Пет метри од еден штоф чинат 1700 денари. Колку чинат 8 m од истиот штоф?
175. Пет работници една работа ја завршуваат за 40 дена. Уште колку работници се потребни за истата работа да се заврши за 10 дена?
176. Во еден триаголник  $\alpha = 50^\circ$ , а  $\beta : \gamma = 2 : 3$ . Одреди ги аглиите  $\beta$  и  $\gamma$ .

## 11

### ГЕОМЕТРИСКА СРЕДИНА. ПРОДОЛЖЕНА ПРОПОРЦИЈА

#### Треба да знаеш

Геометриска средина се вика членот на пропорцијата (внатрешен или надворешен) што се повторува.

Размерите  $\frac{a}{a_1} = k$ ,  $\frac{b}{b_1} = k$ ,  $\frac{c}{c_1} = k$ ; ( $a_1, b_1, c_1 \neq 0$ ) можат да се запишат

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} \text{ или скратено } a : b : c = a_1 : b_1 : c_1. \text{ Ова се вика } \underline{\text{продолжена}}$$

пропорција. За продолжената пропорција важи:  $\frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1} = k$ .

177. Најди ја геометриската средина на броевите:

- а) 25 и 64; б) 2 и 12; в) 16 и 0,16; г)  $a$  и  $49a$ ; д) 18 и 32; е) 0,25 и  $\frac{1}{25}$ .

- 178.** Дадени се три броја, од кои едниот е геометриска средина на другите два. Одреди го тој број во тројката и формирај пропорција земајќи го него двапати како член на пропорцијата: а) 1, 3, 9; б) 12, 36, 4; в) 405, 5, 45.
- 179.** Запиши го сите парови природни броеви што не се поголеми од 100, а чија геометриска средина е бројот: а) 6; б) 8; в) 12; г) 20.
- 180.** Формирај продолжена пропорција од размерите од кои тоа е можно:  
а)  $\frac{2}{3}, \frac{6}{9}, \frac{10}{15}$ ; б)  $\frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$ ; в)  $\frac{7}{14}, \frac{50}{100}, \frac{9}{18}$ .
- 181.** Раздели го бројот:  
а) 432 на делови во однос 2:3:7; б) 516 на делови во однос 3:2:1:6;  
в) 2394 на делови во однос 6:2:5:4:1.
- 182.** Аглите во четириаголникот  $ABCD$  се во размер 1:2:3:4. Одреди колку степени има секој агол на тој четириаголник.
- 183.** Збирот на броевите  $a, b, c$  и  $d$  е 864. За нив важи равенството  $a:b:c:d = 2:3:5:8$ . Одреди ги броевите  $a, b, c$  и  $d$ .
- 184.** Периметарот на еден трапез е 40 см, а неговите страни се однесуваат како 2:5:8:5. Одреди ги страните на трапезот.
- 185.** Едно кокошкино јајце има во просек 58,5 g. Размерот на лушпата, жолчката и белката е 1:3:5. Колкава е масата на лушпата, жолчката и белката на 100 јајца?
- 186.** Едно земјоделско стопанство има на три места вкупно 12,6 хектари ливади. Плоштините на овие ливади се однесуваат како 2,4:3,2:2,8. По колку хектари ливади има стопанството на трите места?
- 187.** Три броја се однесуваат како 2:5:3. Првиот број е 24. Одреди ги другите два броја.
- 188.** За броевите  $a, b$  и  $c$  се знае дека  $a:b:c = 5:4:7$  и дека  $b = 148$ .  
а) Одреди го збирот на трите броја.  
б) Добиениот збир раздели го во однос 3:4:9.
- 189.** Ако  $a:b:c = 4:9:7$  и  $c = 196$ , раздели го збирот  $a+b+c$  во однос 3:11:6.



## Треба да знаеш

- ☛ Две величини се *право пропорционални* ако со зголемувањето, односно намалувањето на вредноста на едната величина, толку пати се зголемува, односно намалува вредноста на другата величина.
- ☛ *Количникот* на две право пропорционални величини е *константен број*.

190. Провери дали се право пропорционални величините зададени со табелата:

$x$	1	3	5	6	8
$y$	2	6	10	12	16

$x$	1	2	4	7	8
$y$	3	6	12	22	24

$x$	1	2	3	4	5
$y$	-2	-4	-6	-8	-10

191. Дадена е право пропорционална зависност  $y = 3x$  меѓу величините  $x$  и  $y$ . Пресметај ја вредноста  $y$  што е соодветна на вредноста: а)  $x = 3$ ; б)  $x = 5$ . Пресметај ги и спореди ги размерите  $y : x$  во двата случаи.

192. Променливата  $y$  е право пропорционална на променливата  $x$  со коефициент на пропорционалност 2.

а) Пополни ја табелата.

$x$	2	3			12		16
$y$			8	20		30	

б) Нацртај график според табелата.

193. Пополни ја табелата како што е започнато, ако  $x$  и  $y$  се право пропорционални. Одреди го коефициентот на пропорционалноста и запиши ја формулата што ја искажува зависноста на  $y$  од  $x$ .

$x$	-2	-1	0	2		12
$y$	-8				20	

б) 

$x$	1	5	8		50	66
$y$			72	360		

в) 

$x$	3	4		7	8	
$y$			$\frac{3}{2}$		2	4

194. Одреди го коефициентот на пропорционалност  $k$  на пропорционалните величини  $x$  и  $y$  ако:

а)  $x = 9$ ,  $y = 36$  и  $y = kx$ ;

б) вредноста на  $y$  е 2,5 пати поголема од соодветната вредност на  $x$ ;

в) вредноста на  $x$  е 5 пати поголема од соодветната вредност на  $y$ .

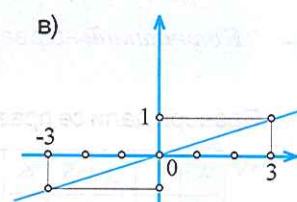
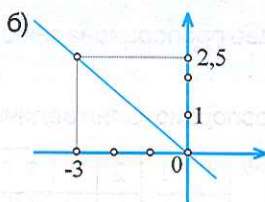
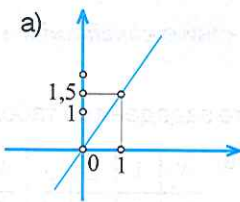
195. Бронзата е легура од бакар и калај во размер 9 : 1. а) Колку грама калај има во 600 g бронза? б) За да се направи фигура од бронза се употребени 200 g калај. Колкава е масата на фигурата?

196. Коцка од цинк со раб 1 cm има маса 7,05 g.

а) Состави табела за соодветната маса на коцка од цинк со волумен  $2\text{ cm}^3$ ,  $5\text{ cm}^3$ ,  $12\text{ cm}^3$ .

б) Запиши формула на правата пропорционална зависност на волуменот на коцката од цинк и нејзината маса.

197. Според графикот на право пропорционалната зависност на величините  $x$  и  $y$  состави табела и запиши ја формулата на оваа пропорционалност.



13

## ОБРАТНО ПРОПОРЦИОНАЛНИ ВЕЛИЧИНИ

*Треба да знаеш*

Две величини се **обратно пропорционални** ако се зголемува, односно намалува вредноста на едната величина, толку пати се намалува, односно зголемува вредноста на другата величина.

**Производот** на две обратно пропорционални величини е **константен број**.

198. Растојанието меѓу Охрид и Делчево е 300 km..

а) Состави табела за времето што е потребно да се стигне од Делчево во Охрид со автомобил, со просечна брзина:

60 km/h, 75 km/h, 80 km/h, 90 km/h и 100 km/h.

б) Дали величините брзина на автомобилот и времето да се стигне во Охрид се право пропорционални?

199. Провери дали се обратно пропорционални величините зададени со табелата.

а) 

$x$	4	6	8	10	12
$y$	3	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$	1

 б) 

$x$	1	2	3	4	6
$y$	6	3	2	$\frac{3}{2}$	1

 в) 

$x$	-2	-1	1	2	4
$y$	5	10	-10	-5	-2,5

200. Величините  $x$  и  $y$  се обратно пропорционални со коефициент 2.

а) Пополни ја табелата.

$x$	-4	-2	-1	1	2	4	6
$y$							

б) Нацртај го графикот на обратната пропорционалност.

201. Пополни ја табелата како што е започнато, одреди го коефициентот на пропорционалноста и запиши ја формулата што ја искажува зависноста на  $y$  од  $x$ .

а)

$x$	-2	-1		1	2	
$y$	-1		-4			$\frac{1}{2}$

б)

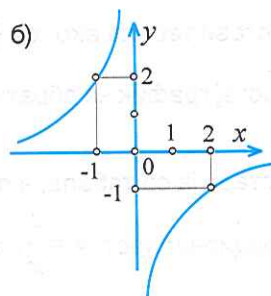
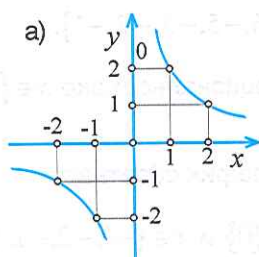
$x$	-3		-1	1	2		8
$y$		$-\frac{1}{2}$	-1		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	

в)

$x$		-2		1	2	4	
$y$	-2,5	-5	-10				1,25

202. Дадена е обратна пропорционалност  $x \cdot y = 12$ , меѓу величините  $x$  и  $y$ . Пресметај ги вредностите за  $y$  што се соодветни на  $x = 4$ ,  $x = 10$  и спореди ги производите  $x \cdot y$ .

203. За неколку точки од графикот на обратно пропорционалната зависност на величините  $x$  и  $y$  состави табела и запиши ја формулата на таа зависност.



204. Обратната пропорционалност е зададена со формулата  $y = \frac{10}{x}$ .

Претстави ги табеларно вредностите за величината:

а)  $y$ , соодветно на вредностите за  $x \in \{-4, -3, -2, 2, 3, 4\}$ ;

б)  $x$ , соодветно на вредностите за  $y \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, 5\right\}$ .

205. Работејќи истовремено 6 работници ќе завршат една работа за 12 часа.

а) Во каква пропорционална зависност се величините: број на работници ( $y$ ) и број на часови за да се заврши работата ( $x$ ).

б) Одреди го коефициентот на пропорционалноста и запиши ја формулата.

- 206.** Плоштината на правоаголник е  $24 \text{ cm}^2$ .
- а) Ако едната страна на правоаголникот е  $x$ , а другата  $y$ , изрази ја со формула зависноста на  $y$  од  $x$ .
- а) Дали величините се обратно пропорционални?
- б) Колку изнесува коефициентот на пропорционалноста?

**207.** Со формулата  $y = -\frac{8}{x}$  е дадена обратна пропорционалност.

а) Состави табела ако  $x \in \{-8, -6, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 6, 8\}$ .

б) Нацртај график на обратната пропорционалност ако  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

в) Кои од точките  $A(-8, -1)$ ,  $B(1, 8)$ ,  $C(-1, 8)$ ,  $D(8, 1)$ ,  $E(8, -1)$ ,  $F(1, -8)$ ,  $G(-1, -8)$  и  $H(-8, 1)$  припаѓаат на графикот на таа пропорционалност?

**208.** Точката  $A(-3, 5)$  припаѓа на графикот на една обратна пропорционалност.

а) Одреди го коефициентот на обратната пропорционалност.

б) Запиши формула на обратната пропорционалност.

в) Состави табела ако  $x \in \{-10, -9, -6, -5, -3, -2, -1\}$ .

г) Нацртај график на обратната пропорционалност ако  $x \in [-10, -1]$ .

**209.** Претстави ја со табела, а потоа и со график обратната

пропорционалност  $y = \frac{4}{x}$ , ако  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  и  $x \in \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$ .

**210.** Во обратно пропорционалната зависност  $y = \frac{k}{x}$  е познато:

а)  $k = 12$ ,  $x$  и  $y$  се страни на правоаголник;

б)  $k = 20$ ,  $x$  и  $y$  се страна и соодветна висина на триаголник.

Какво значење има формулата?

**211.** На ист координатен систем претстави ги графички обратните пропорционалности:  $y = -\frac{1}{x}$  и  $y = -\frac{3}{x}$ .

## Треба да знаеш

Постапката за решавање задачи со просто тројно правило е следна:

- ☛ Се утврдува дали величините се право или обратно пропорционални.
- ☛ Според шемата (во која се запишуваат познатиот и непознатиот член во условен и прашален став) се формира пропорција.
- ☛ Се одредува непознатиот член и добиениот резултат се анализира.

- 212.** Од 100 kg жито се добива 90 kg брашно. Колку жито треба да се сомеле за да се добијат 675 kg брашно?
- 213.** За да се направат 12 костуми употребени се 49,8 m штоф. Колку такви костуми можат да се направат од 74,7 m таков штоф?
- 214.** Група од 16 работници можат да поплочат една улица за 21 ден. Уште колку работници се потребни за улицата да биде поплочена за 14 дена?
- 215.** Брод се движи со брзина од 35 km/h и од местото *A* до местото *B* стигнува за 20 часа. Колку време е потребно бродот да стигне од *B* до *A* ако неговата брзина се зголеми за 15 km/h?
- 216.** За да се обојат 15 m<sup>2</sup> употребено е 1,5ℓ боја. Колку литри боја е потребно за да се обои правоаголна површина со димензии 6,3 m и 4,5 m?
- 217.** За да се направат 300 леба употребено е 217,5 kg брашно. Уште колку килограми брашно е потребно да се направат 800 такви леба?
- 218.** За 2 часа еден столар изработувал 64 парчиња. По усовршување на стругот истиот столар почнал да изработува по 720 парчиња за 6 часа. Колку парчиња повеќе изработувал столарот за 12 часа?
- 219.** За 7,6 m платно за завеси Мимоза платила 1786 денари. После купила уште од тоа платно така што вкупната сума била 2679 денари. Колку метри платно за завеси купила Мимоза?

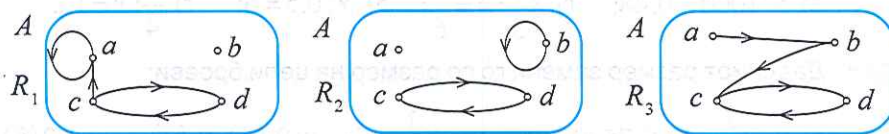
- 220.** Во 800 g раствор има 50 g сол. Колку грама сол има во: 10 g, 20 g, 30 g, 55 g, 100 g раствор? Состави табела.
- 221.** За 56 min 32 s тркалото на една машина се завртува 15264 пати. Колку пати ќе се заврти тоа тркало за 1 h 15 min 48 s?
- 222.** Еден запченик има 80 запци, а друг 100 запци. Тие се вртат заедно и за 1 min поголемиот запченик се завртува 72 пати. Колку пати се завртува помалиот запченик?
- 223.** 8652 денари чинат 140 евра.  
а) Колку чинат 264 евра? б) Колку евра чинат 23175 денари?
- 224.** Една работа 15 работници можат да ја завршат за 48 дена.  
а) За колку дена истата работа можат да ја завршат 20 работници?  
б) Колку работници истата работа можат да ја завршат за 20 дена?
- 225.** Еден објект 8 работници можат да го изградат за 40 дена. На објектот работеле 5 работници 16 дена. Потоа дошле и останатите 3 работници и работеле до изградбата на објектот. За колку дена ја довршиле работата осумте работници?

15

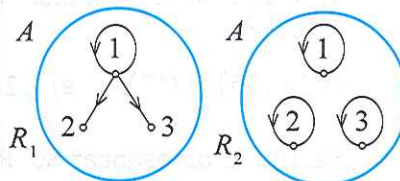
#### ЗАДАЧИ ПЛУС ЗА ТЕМА 4

- 226.** Претстави го табеларно и со граф множеството  $M^2$ , ако  $M = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 6 < x < 9\}$ .
- 227.** Нека е  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{a, b, c, d\}$ .  
а) Колку елементи има множеството  $A \times B$ ?  
б) Претстави ги табеларно елементите на  $A \times B$ .
- 228.** Нека е  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 5\}$ ,  $C = \{6, 7\}$ .  
Покажи дека  $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ .
- 229.** Релацијата  $R$  "...се дели без остаток со..." во множеството  $M = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 < x \leq 10\}$  претстави ја со граф и запиши го нејзиниот график.

230. Релациите  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  се дадени со своите графови. Доцртај најмал број стрелки во секој граф така што релацијата да биде рефлексивна и симетрична.



231. Релациите  $R_1$  и  $R_2$  дадени со графови во множеството  $A = \{1, 2, 3\}$  се транзитивни, Објасни зошто.



232. Во множеството  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  е зададена релацијата  $R$  со неколку елементи од својот график:  $\bar{R} = \{(1,3), (3,3), (5,7), (5,9), \dots\}$ . Допиши го најмалиот број елементи така што релацијата  $R$  да постане симетрична и транзитивна.

233. Нацртај го графот на пресликувањето  $f$  што е дадено со графикот  $\Gamma_f = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, y \leq 100, y = x^2\}$  и одреди од кој вид тоа.

234. Дадено е пресликувањето  $f$  аналитички, т.е. со формулата  $f(x) = x - 3$ . Одреди  $f(10)$ ,  $f(50)$ ,  $f(100)$ ,  $f(a)$ ,  $f(a+1)$ ,  $f(x-3)$ .

235. Нека е  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ . Запиши пет инјективни пресликувања од  $A$  во  $B$ . (Вкупно има 24 инјективни пресликувања од  $A$  во  $B$ )

236. Дадено е пресликувањето  $f: A \rightarrow B$ , каде  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 4, 7, 10\}$ , со својот график  $\Gamma_f = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, y = 3x + 1\}$ .

- а) Нацртај го графот на пресликувањето.  
б) Провери кои својства ги има ова пресликување.

237. Дали може од графикот на пресликувањето да се одредат доменот и кодоменот ако тоа пресликување:

- а) е инјекција; б) е сурјекција; в) не е сурјекција; г) не е биекција.

238. Во множеството  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  зададена е функцијата  $f(x) = 2x - 1$ .

- а) Состави табела и претстави ја графички оваа функција.

- б) Определи ги доменот и кодоменот на функцијата;

239. Одреди ја вредноста на размерот: а)  $1,45 : 0,9$ ; б)  $1632 : 159$ ;

- в)  $547,225 : 1325$ ; г)  $3\text{dm} : 2\text{cm}$ ; д)  $1\text{kg} : 250\text{g}$ ; е)  $1\text{cm}^2 : 1\text{mm}^2$ ;

- ж)  $7\text{a} : 25\text{m}^2$ ; з)  $3\text{m}^3 : 4\text{dm}^3$ ; э)  $20\text{min} : 15\text{s}$ .

- 240.** Одреди го непознатиот член  $x$ : а)  $x:6 = \frac{2}{3}$ ; б)  $8,4:x = 0,25$ ;  
 в)  $x:1000 = 0,48$ ; г)  $8\frac{1}{3}:x = \frac{5}{6}$ ; д)  $x:0,5 = 6$ ; е)  $\frac{3}{4}:x = 12$ .
- 241.** Дадениот размер замени го со размер на цели броеви:  
 а)  $8:2\frac{2}{3}$ ; б)  $9,75:0,025$ ; в)  $17\frac{1}{3}:5\frac{1}{5}$ ; г)  $0,(7):0,(4)$ ; д)  $1,3(8):3,(5)$ ;  
 е)  $2,0(25):0,(17)$ ; ж)  $1,2:0,3$ ; з)  $0,1:0,01$ ; ѓ)  $0,0(5):3\frac{1}{4}$ .
- 242.** На  $100^{\circ}\text{C}$  одговараат  $80^{\circ}\text{R}$  (Реомир). Одреди го размерот на степените Целзиусови и степените Реомирови.
- 243.** Односот на момчињата и девојчињата во една паралелка е  $\frac{3}{4}$ . Колку има момчиња во паралелката ако:  
 а) има вкупно 35 ученици;  
 б) бројот на момчињата е за 3 помал од бројот на девојчињата;  
 в) бројот на девојчиња е 16?
- 244.** На географска карта растојанието од 100 km е претставено со отсечка од 1 cm. Одреди го бројниот размер.
- 245.** Колкаво е на карта растојанието од 35 km, ако бројниот размер е  $1:100000$ ?
- 246.** Бројниот размер е  $1:8400$ . Колку хектари има реално терен со форма на правоаголник кој на планот има димензии  $1,5\text{cm} \times 2,5\text{cm}$ ?
- 247.** Одреди го непознатиот член (четвртата геометриска пропорционала) во пропорцијата:  
 а)  $184:x = 92:230$ ; б)  $2\frac{1}{2}:1\frac{1}{4} = 2:x$ ; в)  $3,(3):2\frac{1}{4} = 0,(4):x$ ;  
 г)  $1\frac{1}{2}x:\frac{3}{4} = 2\frac{1}{2}:0,125$ ; д)  $\frac{x+2}{4}:\frac{x}{5} = 5:8$ ; е)  $74:(51-2x) = 98:7x$ .
- 248.** Познато е дека должините на два вертикални столба се право пропорционални, соодветно, со должините на нивните сенки. Ако стап долг 2 m фрла сенка долга 1,2 m, тогаш колку е висока зграда која во исто време фрла сенка долга 5,4 m?



249. Образувај продолжена пропорција од пропорциите:

а)  $a:b=8:11$ ;  $b:c=11:3$  и  $c:d=6:5$ ;

б)  $x:y=3:8$ ;  $y:z=4:5$ ; в)  $a:b=5:6$ ;  $a:c=10:7$ .

250. Внатрешните агли на петаголник се однесуваат како  $3:4:5:1:5$ .

Одреди ги аглите.

251. Сумата од 3660 денари подели ја на три лица така што деловите да се однесуваат како  $1:2:3$ .

252. Една пропорционалност е зададена со табелата:

а)

$x$	2	3	4
$y$	5	7,5	10

б)

$x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	2
$y$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	1

в)

$x$	1,2	0,4	0,9
$y$	3	9	4

Одреди го коефициентот на пропорционалноста. Дали дадената пропорционалност е права?

253. Пополни ја табелата како што е започнато и претстави ја графички пропорционалноста:

а)  $y = \frac{4}{x}$ ;

б)  $y = \frac{1}{2}x$ .

$x$	-4	-2	-1	1	2	4
$y$	-1					

$x$	-4	-2	-1	1	2	4
$y$						

Одговори: Дали пропорционалноста е права?

254. Еден базен се полни од 6 еднакви цевки за 162 min. Базенот се полнел 30 min од 4 цевки, а потоа биле пуштени и преостанатите две цевки. За колку време, вкупно, ќе се наполни базенот?

255. Пет камиони натоварени со цемент ги растовариле тројца работници за 12 часа. За колку време истото би го направиле 4 работници?

256. Ако 6 работници работата ја завршуваат за 15 дена, уште колку работници треба да се вработат за да се заврши истата работа за 10 дена?

257. Во училиште со 936 ученици, размерот на машки и девојчиња е  $4:5$ . Колку има девојчиња?

258. Калај и бакар се помешани во размер  $7:11$  и е добиена легура. Масата на калајот во легурата е 22,4 kg. Колкава е масата на легурата?

- 259.** Со мешање на железо и цинк во размер 7 : 5 е добиена легура со маса 312 kg. Ако масата на цинкот во легурата се зголеми за 20%, за колку килограми треба да се намали масата на железото, а легурата пак да има маса 312 kg?
- 260.** За 8 дена, работејќи по 4 h 30 min на ден, една работна група извршила попис на инвентарот во претпријатието. За колку дена истата група би го завршила пописот ако работи по 6 h дневно?
- 261.** Една работа 14 работници можат да ја завршат за 10 дена. По 2 дена се ангажирани уште неколку работници за да се заврши работата навреме, бидејќи со 14 работници работата би се завршила со задоцнување од 4 дена. Колку работници биле ангажирани?
- 262.** Има 35 гајби јаболка од три сорти, но така што во секоја гајба има јаболка само од една сорта. Докажи дека меѓу нив има најмалку 12 гајби јаболка од иста сорта.
- 263.** Во Скопје живеат 750000 жители, а на главата на секој од нив има не повеќе од 200000 влакна. Докажи дека во Скопје има барем четири лица кои имаат ист број влакна на главата.
- 264.** На група од 21 дете се дадени 200 ореви. Како и да ги поделат меѓу себе оревите, секогаш има барем две деца што добиле ист број ореви (може и по 0 ореви). Докажи.
- 265.** Избери кои било 5 природни броеви. Од нив или еден е делив со 5 или збирот на неколку од нив е делив со 5. Докажи!
- 266.** Во рамнината се дадени 19 прави од кои ниедни две не се паралелни. Докажи дека постојат две прави што образуваат агол помал од  $10^\circ$ .
- 267.** Во една гајба има јаболка од две сорти. Колку јаболка треба да се земат, без гледање, за меѓу нив да има две јаболка од иста сорта?
- 268.** Во една кутија има 70 топчиња од кои по 20 се црвени, жолти и бели и 10 се црни. Колку најмалку топчиња треба да се земат, без гледање, за меѓу земените да има најмалку 10 топчиња со иста боја?

ТЕМА 1

ВЕКТОРИ, ТРАНСЛАЦИЈА И РОТАЦИЈА

1. а)  $OA \uparrow\uparrow OB$ ; б)  $OA \uparrow\downarrow BO$ . 2. а) Види цртеж 1; б) по една, вкупно 2.

3.  $AB \uparrow\uparrow CD$ . 4. а)  $AB \uparrow\downarrow CD$ ; б)  $AB \uparrow\downarrow CD$ ;

в)  $AB \uparrow\downarrow CD$ . 5. Еден таков распоред на

точките е прикажан на црт. 2. 6. а)  $m \parallel p$ ; б)

$m \parallel p$ ; в) правите  $m$  и  $p$  се сечат.

7. а)  $XY \cap XZ = XZ (XZ \subseteq XY)$ ;

б)  $XY \cap XZ = \{X\}$ . 8. а)  $OA \uparrow\uparrow O_2A_2$ ; б)  $OA \uparrow\uparrow O_2A_2$ . 9. а)  $PA, SB$  и  $MD$ ; б)  $PA \uparrow\uparrow SB$ ,

$PA \uparrow\downarrow SC$ ; в) ако  $MD \parallel PA$ . 10. а)  $AM \uparrow\uparrow BM \uparrow\uparrow DC$ ; б)  $AD \uparrow\downarrow CB$ ; в) права  $BD$ .

11. Бесконечно многу полуправи и тие определуваат една насока. 12. Од условот за точките  $M$  и  $N$  следува дека отсечката  $MN$  е средна линија во  $\triangle ABC$ , па  $MN \parallel AB$ . Значи, полуправите  $MN$  и  $AB$  се паралелни и лежат во иста полурамнина со гранична права  $AC$ , па според дефиницијата следува дека  $AB \uparrow\uparrow MN$  (црт. 3).


13. Доказ. Според решението на претходната задача ќе заклучиш дека  $SP \parallel BD$  и  $NM \parallel BD$ , т.е.  $SP \parallel NM$ .

Оттука следува дека полуправите  $SP$  и  $NM$  се или истонасочени или спротивно насочени, но бидејќи лежат во различни полурамнини со гранична права  $SN$ , заклучуваме дека  $SP \uparrow\downarrow NM$  (црт. 4).

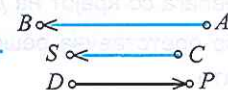
14. Бидејќи  $\alpha$  и  $\beta$  се наизменични агли на трансверзалата  $OO_1$  и  $\alpha = \beta$ , заклучуваме дека  $OA \parallel O_1A_1$ , а поради тоа што тие припаѓаат на различни полурамнини со гранична права  $OO_1$ , следува дека полуправите  $OA$  и  $O_1A_1$  се спротивно насочени, т.е.  $OA \uparrow\downarrow O_1A_1$ . 15. а)  $OA \uparrow\uparrow O_1A_1$  и  $OB \uparrow\uparrow O_1B_1$ ; б)  $OA \uparrow\uparrow O_1A_1$  и  $OB \uparrow\downarrow O_2B_2$ . 16. Две насоки,  $S$  и  $S_1$ .

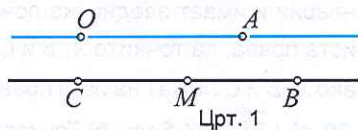
2 17.  $\vec{AB}, \vec{CD}$  и  $\vec{EF}$ .

18. а) и б).

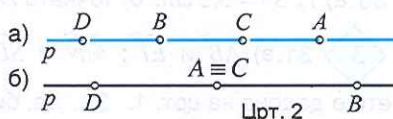
19. а) 

б) 

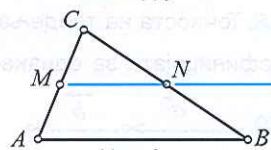
20. 



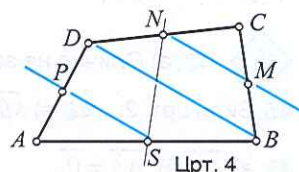
Црт. 1



Црт. 2



Црт. 3



Црт. 4

21. а) 3; б) 6. 22.  $|\vec{AB}| = 3\text{ cm}$ ,  $|\vec{CD}| = 2\text{ cm}$ ,  $|\vec{CF}| = 3\text{ cm}$ ,  $|\vec{BA}| = 3\text{ cm}$ . 23. Колинеарни се векторите  $\vec{AB}$ ,  $\vec{EF}$  и  $\vec{CP}$ . 24. а) Да. б) Да. 25. а)  $\vec{AB} \uparrow \downarrow \vec{AC}$ ; б)  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{MN}$  и  $\vec{SL}$ .

26. Едно можно решение е дадено на црт. 7.

а)  $\vec{AB}$  и  $\vec{DC}$ ; б)  $\vec{BC}$  и  $\vec{DA}$ .

27. Две решенија (црт. 8). 28. а)  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$  и  $\vec{AC}$ ;

б)  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$  и  $\vec{CA}$ . 29. Бидејќи дадените вектори се коли-

неарни и имаат заедничка почетна точка, тие лежат на иста права, па точките  $A$ ,  $B$  и  $C$  се колинеарни. Обратно,

ако  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на иста права, тогаш и  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  лежат на иста права.

30. а)  $|\vec{PS}| = 3,5\text{ cm}$ . б) Точката  $D$  е средина на  $AB$ .


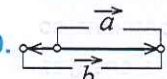
31. а)  $\vec{AB}$  и  $\vec{EF}$ ;  $\vec{MN}$  и  $\vec{SL}$ ;  $\vec{PQ}$  и  $\vec{RS}$ ; б)  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$ ;  $\vec{AC}$  и  $\vec{EF}$ . 32. Решението е дадено на црт. 1. 33. Да, бидејќи имаат иста насока.

34. Од  $\vec{AB} \uparrow \downarrow \vec{BA}$  и  $|\vec{AB}| = |\vec{BA}|$  следува  $\vec{AB} = -\vec{BA}$ .

35. Бесконечно многу; еден. 36.  $\vec{AC} \neq \vec{BD}$ .

37. Еднакви: в) и д); спротивни: а) и г).

38. Точноста на тврдењата следува од дефиницијата за еднаквост на вектори.

39.  40. 

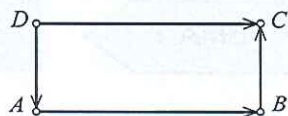
41. Види црт. 2. 42. Секое од трите надоврзувања завршува со точката  $M$  (црт. 3).

43. а) Слично на задача 39; б) слично на задача 40. 44. Види црт. 1.

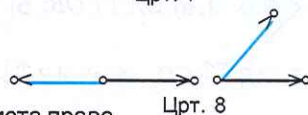
45. Види црт. 2. 46. а)  $\vec{MP}$ ; б)  $\vec{MN}$ ; в)  $\vec{MP}$ . 47.  $\vec{BC}$ . 48. Слично на задача 42 (црт. 3).

49. а)  $\vec{AC}$ ; б)  $\vec{AA} = \vec{0}$ .

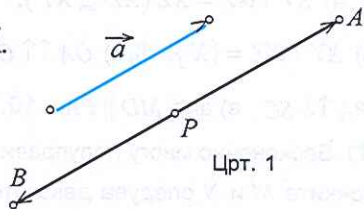
50. Кои било три надоврзни вектори од кои почетокот на првиот се совпаѓа со почетокот на дадениот вектор, а крајот на третиот вектор се совпаѓа со крајот на дадениот вектор претставува решение на задачата.



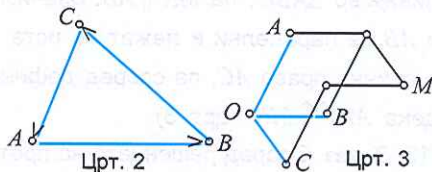
Црт. 7



Црт. 8

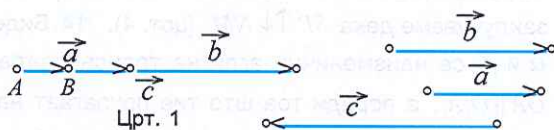


Црт. 1

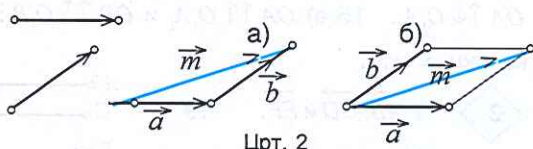


Црт. 2

Црт. 3



Црт. 1



Црт. 2

51. а) *Уйайсицїво*:  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$  и  $\vec{AE} + \vec{ED} + \vec{DC} = \vec{AC}$  итн. 52. а)  $\vec{c}$ ; б)  $\vec{d}$ ; в)  $2\vec{c}$ .

53. а) Ако дадените вектори се истонасочени; б) ако дадените вектори се спротивно насочени. 54. а)  $\vec{c} \uparrow \vec{a}$  и  $|\vec{c}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ . 55. Векторот  $\vec{c}$  ќе има насока како и векторот со поголем интензитет, а неговата должина е еднаква на разликата од поголемата и помалата должина. Ако дадените вектори имаат еднакви должини, тогаш  $\vec{c} = \vec{0}$ .

56. а) 8; б) 2. 57. Може, на пример, ако векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  се спротивно насочени.

58. *Уйайсицїво*: Пренеси ги дадените вектори така што нивните средни точки да се совпаднаат. Зошто? Задачата има решение само ако дадените вектори не се колинеарни. 59. а)  $\vec{BC}$ ; б)  $\vec{DB}$ ; в)  $\vec{0}$ ; г)  $\vec{AB}$ . 60. Од конструкцијата следува  $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}$ .

61. Од условот  $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AX} = \vec{0}$  следува  $\vec{AX} = -(\vec{AB} + \vec{AC})$ . *Уйайсицїво*: Конструирај вектор  $\vec{AX}$ , спротивен на векторот што е еднаков на збирот на векторите  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$ .

62. а) Иста насока со водата, а брзина 14 m во секунда. б) Насока спротивна со текот на реката, а брзина 2 m во секунда. в) Брзина 10 m во секунда, а насоката е определена со збирот од векторите што ја претставуваат брзината на водата и сопствената брзина на чамецот, нацртани под прав агол. 63. а)  $2 \cdot \vec{a}$ ; б)  $-3 \cdot \vec{a}$ .

5

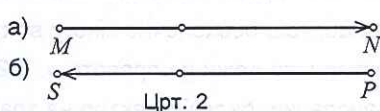
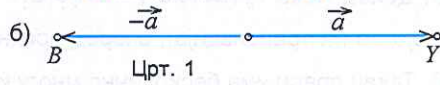
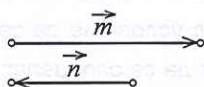
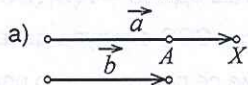
64. а)  $\vec{BA}$ ; б)  $\vec{AB}$ . 65. *Уйайсицїво*: Нацртаните вектори пренеси ги во заеднички почеток. 66. Решението е дадено на црт. 1. 67. Види црт. 2. 68. а)  $\vec{CB}$ ;

б)  $\vec{BA}$ ; в)  $\vec{CC} = \vec{0}$ .

69. а)  $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ ;

б)  $\vec{BD} = \vec{b} - \vec{a}$ .

70. Задачата има многу решенија.



а) *Уйайсицїво*: Ако дадените колинеарни вектори се истонасочени, односно спротивнонасочени, користи го решението на задача 66, односно 67. б) Едно можно решение е дадено на црт. 3. 71. а)  $\vec{d} - \vec{a} = \vec{BD} = 2 \cdot \vec{b}$ ; б)  $\vec{b} - \vec{c} = -\vec{a}$ ; в)  $2 \cdot \vec{c}$ .

72.  $\vec{q} = \vec{AB} = p$ . 73.  $\vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{y} - \vec{x}$ ;  $\vec{BC} = -\vec{x} + \vec{y}$ ;

$\vec{DB} = \vec{DA} + \vec{AB} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{x}$ . 74.  $\vec{NP} = \vec{b} - \vec{a}$ ,  $\vec{NQ} = \vec{c} - \vec{a}$ ,

$\vec{PQ} = \vec{c} - \vec{b}$ ,  $\vec{NM} = -\vec{a}$ ,  $\vec{PM} = -\vec{b}$ ,  $\vec{QM} = -\vec{c}$ ,  $\vec{PN} = \vec{a} - \vec{b}$ ,  $\vec{QN} = \vec{a} - \vec{c}$ ,  $\vec{QP} = \vec{b} - \vec{c}$ .

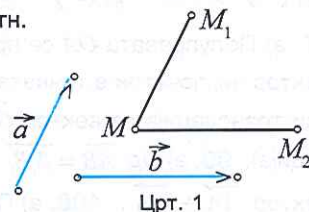
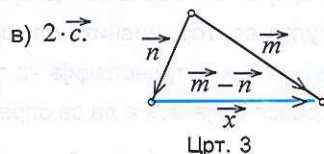
75.  $\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA} = \vec{DB} - \vec{DA} = \vec{EB} - \vec{EA}$ . 76. *Уйайсицїво*: Бараните вектори се разлики од дадените вектори, на пример  $\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \vec{c} - \vec{a}$  итн.

6

77. *Уйайсицїво*: Нацртај ги векторите

$\vec{AA}_1 = \vec{a}$ ,  $\vec{BB}_1 = \vec{a}$  и  $\vec{CC}_1 = \vec{a}$ . Бараните точки се

$A_1, B_1$  и  $C_1$ . 78.  $t_{\vec{a}}(M) = M_1$ ,  $t_{\vec{a}}(M) = M_2$  (црт. 1).



79. Векторот на translација е  $a = AA_1$ . 80. Уџајсџво: Изврши translација на точката  $A_1$  за вектор  $-\vec{a}$ . 81. Уџајсџво: Векторот  $AM$  е вектор на translација. 82. а) Уџајсџво: Изврши translација на темињата на правоаголникот  $ABCD$  за векторот  $\vec{AC}$ . Ако означим  $t_{\vec{AC}}(A) = A_1, t_{\vec{AC}}(B) = B_1, t_{\vec{AC}}(C) = C_1, t_{\vec{AC}}(D) = D_1$ , тогаш  $t_{\vec{AC}}(ABCD) = A_1B_1C_1D_1$ .

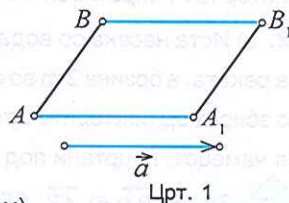
83. Уџајсџво: Одреди ја средината  $S$  на отсечката  $AB$ , а потоа конструирај ги точките  $t_{\vec{SS}_1}(A)$  и  $t_{\vec{SS}_1}(B)$ . 84. Бараната кружница е  $k_1(T, r = 3\text{ cm})$ . 85. Правата  $p$  ќе се преслика сама на себе, а правата  $AB$  во права  $A_1B_1$ , така што  $A_1 = t_{\vec{PQ}}(A)$  и  $B_1 = t_{\vec{PQ}}(B)$ .

86. Уџајсџво: На правата  $m_1$  избери две точки и одреди ги нивните слики при translација за вектор  $\vec{NM} = -\vec{MN}$ . Добиените слики ја определуваат правата  $m$ .

87. Уџајсџво: Нека  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ . Тогаш  $t_{\vec{c}}(A) = A_1$ .

7

88. Нека  $t_{\vec{a}}(A) = A_1$  и  $t_{\vec{a}}(B) = B_1$  (црт. 1). Точките  $A, B, A_1$  и  $A_1$  се различни точки (својство на translацијата), а според друго својство на translацијата следува дека  $\overline{A_1B_1} = \overline{AB}$  и  $A_1B_1 \parallel AB$ . Значи, во четириаголникот  $AA_1B_1B$  две спротивни страни се паралелни и еднакви, па тој е паралелограм (признак за паралелограм).



89. Доказ: Нека  $t_{\vec{a}}(\triangle ABC) = \triangle A_1B_1C_1$ . Тогаш од  $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}, \overline{BC} = \overline{B_1C_1}, \overline{AC} = \overline{A_1C_1}$  (својство на translација), според признакот ССС следува дека  $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ .

90. Такви прави има бесконечно многу и тие се паралелни со правата  $AB$ . 91. Можеш да нацрташ бесконечно многу вектори, под услов тие да се колинеарни со кој било вектор што лежи на правата  $a$ . 92. Можат да се определат бесконечно многу такви translации, бидејќи вектор на translација е кој било вектор чиј почеток припаѓа на правата  $a$ , а крајот му припаѓа на правата  $b$ . 93. Одговор: а) Не. б) Не. Образложение: Бидејќи темињата на триаголникот се различни точки, тогаш при translација за не нулти вектор нивните слики се различни точки (својство на translација).

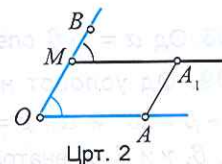
94. а) Таква translација не постои (спротивно на својствата на translација); б) Таква translација може да се определи. На пример, при translација на квадратот  $ABCD$  за вектор  $AB$ ,  $t_{\vec{AB}}(A) = B, t_{\vec{AB}}(D) = C$ , т.е.  $t_{\vec{AB}}(AD) = BC$ . 95. Уџајсџво: Нацртај отсечка  $AB$  и изврши translација на  $AB$  за вектор  $AB$  или за вектор  $BA$ . Во тој случај:

$t_{\vec{AB}}(A) \equiv B$  или  $t_{\vec{BA}}(B) \equiv A$ . 96. Да, бидејќи е исполнето својство на translацијата.

97. а) Полуправата  $OA$  се пресликува на полуправата  $O_1A_1$  при translација за секој вектор чиј почеток е точката  $O$ , а крајот му е која било точка од полуправата  $O_1A_1$ ; б) при translација за вектор  $\vec{OO}_1$ . 98. При translација за вектор  $\vec{A_1A}$  (инверзна translација). 99. а) Од  $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$  и  $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$  следува  $\overline{AB} = \overline{A_2B_2}$ ; б) при translација за вектор  $\vec{AA_1} + \vec{A_1A_2}$ . 100. а) При translација за вектор  $\vec{OO_1}$ ; б)  $t_{\vec{OM}}$ .

**101.** Од  $t_{OM}^{\rightarrow}(O) = M$  следува дека  $MB \subseteq OB$ , т.е.  $OB \uparrow\uparrow MB$ .

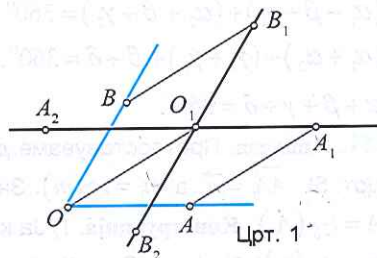
Нека  $t_{OM}^{\rightarrow}(A) = A_1$  (црт. 2). Бидејќи полуправите  $OA$  и  $MA_1$  се паралелни (својство на транслација) и лежат во иста полупрамнина со гранична права  $OB$ , следува дека  $OA \uparrow\uparrow MA_1$ .



Поради  $\angle AOB \cong \angle A_1MB$  (својство на транслација) и претходно утврдената насоченост на полуправите, следува дека два агли со истонасочени краци се еднакви.

**8** **102.** Според решението на задачата 101 точно е дека два агли со истонасочени краци се еднакви, т.е.  $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$  при што  $t_{\vec{a}}(\angle AOB) = \angle A_1O_1B_1$  (црт. 1).

а) Нека  $\angle A_2O_1B_2$  е накрсен агол на  $\angle A_1O_1B_1$ . Тогаш од  $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_1B_2$  и  $\angle A_1O_1B_1 = \angle AOB$  следува дека  $\angle AOB = \angle A_2O_1B_2$ , а за нивни краци важи  $OA \uparrow\downarrow O_1A_2$  и  $OB \uparrow\downarrow O_1B_2$ . Значи, два агли со спротивно насочени краци се еднакви.



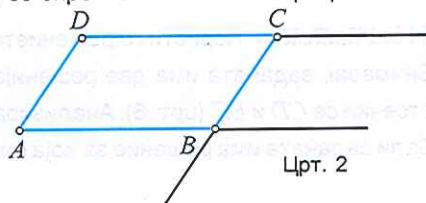
в) **Уиџисџиво:** Воочи ја насоката на краците на агли-те  $AOB$  и  $A_2O_1B_2$  и спореди ги тие агли. Оттука следува дека два агли со паралелни краци се еднакви или суплементни.

**103.** Два агли со паралелни краци се секогаш еднакви, ако тие се од ист вид. (двата остри, двата тапи или двата прави).

**104.** Агли-те  $\alpha$  и  $\beta$  се еднакви бидејќи се агли со спротивно насочени краци.

**Уиџисџиво:** Изврши ги транслациите:

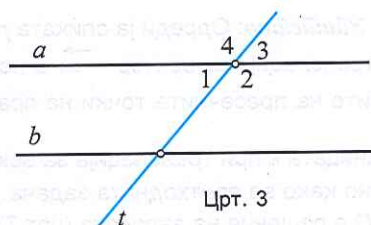
$t_{DC}^{\rightarrow}(\delta) = \delta_1$  и  $t_{CB}^{\rightarrow}(\delta_1) = \delta_2$  (црт. 2).



**105.** Тие агли се означени на црт. 3.

а) Кои било два агли се со паралелни краци бидејќи по еден крак од нив лежи на правата  $t$ , а другите два краци лежат на иста права или на паралелните  $a$  и  $b$ .

б) Кои било два агли со заедничко теме се или еднакви (накрсни) или суплементни (напоредни), а кои било два агли со различно теме, се исто така, еднакви или суплементни, зависно од насоката на нивните краци. На



пример,  $\alpha = \angle 1$ , како агли со различно теме и истонасочени краци (согласни агли);  $\alpha = \angle 3$ , како агли со спротивнонасочени краци (наизменични агли) и  $\alpha + \angle 4 = 180^\circ$ , како агли со еден пар исто насочени краци, а друг со спротивнонасочени краци (спротивни агли на трансверзалата). **106.** а) Од  $\alpha + \beta = 240^\circ \neq 180^\circ$  следува дека  $\alpha$  и  $\beta$  се агли со истонасочени или спротивнонасочени краци, па  $\alpha = \beta = 240^\circ : 2 = 120^\circ$ ; б)  $\alpha = \beta = 65^\circ$ ; в) не се одредени. **107.** Агли-те  $\alpha$  и  $\beta$  се со спротивнонасочени краци, па  $\beta$  е остар агол, т.е.  $\beta = \alpha$ .

108. Од  $\alpha = 3 \cdot \beta$  следува  $\alpha + \beta = 180^\circ$ , па оттука,  $\beta = 180^\circ : 4 = 45^\circ$  и  $\alpha = 135^\circ$ .

109. Од условот на задачата следува дека  $\alpha \neq \beta$ . Нека  $\alpha > \beta$ . Тогаш од  $\alpha - \beta = 50^\circ$  и  $\alpha + \beta = 180^\circ$  добиваме  $2 \cdot \alpha = 230^\circ$ , т.е.  $\alpha = 115^\circ$ , а  $\beta = 65^\circ$ . 110. Нека  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$  се внатрешни агли на четириаголникот  $ABCD$  и нека  $\angle CAB = \alpha_1, \angle CAD = \alpha_2, \angle BCA = \gamma_1$  и  $\angle ACD = \gamma_2$  (црт. 4). Воочи ги транслациите:

$t_{\vec{AB}}(\alpha_1) = \angle 1, t_{\vec{CD}}(\gamma_1) = \angle 2, t_{\vec{AD}}(\alpha_2) = \angle 3$  и  $t_{\vec{CB}}(\gamma_2) = \angle 4$ .

Имаме:  $\angle 1 + \beta + \angle 2 = 180^\circ = \alpha_1 + \beta + \gamma_1$  и

$\angle 3 + \delta + \angle 4 = 180^\circ = \alpha_2 + \beta + \gamma_2$ , односно

$(\alpha_1 + \beta + \gamma_1) + (\alpha_2 + \beta + \gamma_2) = 360^\circ$  или

$(\alpha_1 + \alpha_2) + (\gamma_1 + \gamma_2) + \beta + \delta = 360^\circ$ , т.е.

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ .

111. **Анализа.** Претпоставуваме дека задачата е решена (црт. 5).  $\vec{AA}_1 = \vec{a}$ , а  $m_1 = t_{\vec{a}}(m)$ . Значи,  $\{A_1\} = t_{\vec{a}}(m) \cap n$ , а  $A = t_{-\vec{a}}(A_1)$ . **Конструкција.** 1) Ја конструираме правата  $m_1 = t_{\vec{a}}(m)$ ; 2)  $A_1 \in n \cap m_1$ ; 3)  $A = t_{-\vec{a}}(A_1)$ .

112. **Укажи сиво:** Користи го решението на претходната задача.

113. **Укажи сиво:** Користи го решението на задача 111.

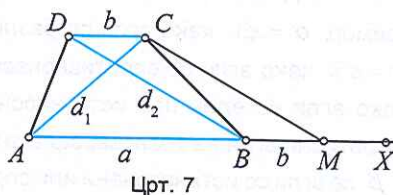
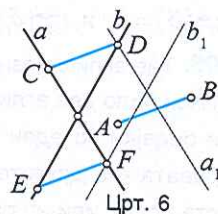
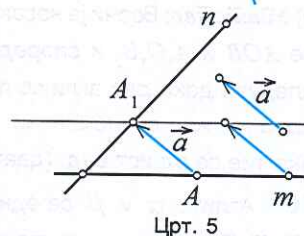
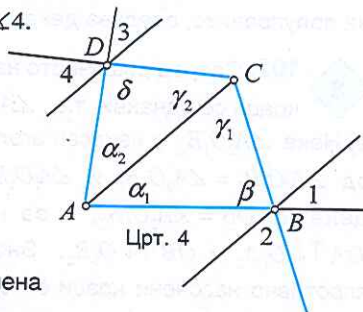
Внимавај, задачата има две решенија, т.е. бараните отсечки се  $CD$  и  $EF$  (црт. 6). Анализирај го решението. Дали задачата има решение за која било отсечка  $AB$ ?

114. **Укажи сиво:** Одреди ја сликата  $p_1$  на правата  $p$  при транслација за вектор  $-\vec{a}$ , а потоа одреди ги сликите на пресечните точки на правата  $p_1$  и

кружницата  $k$  при транслација за векторот  $\vec{a}$ . Дискусирај го решението. 115. Постапи слично како во претходната задача. 116. **Анализа.** Претпоставуваме дека трапезот  $ABCD$  е решение на задачата (црт.7).

Нека  $CM = t_{\vec{DC}}(DB)$  и  $\overline{BM} = \overline{DC} = b$ . Можеш да заклучиш дека со дадените елементи може да се конструира  $\triangle AMC$ , а  $D = t_{\vec{CD}}(C)$ . **Конструкција:** 1) полуправа  $AX$ ; 2)  $B \in k(A, a) \cap AX$ ; 3)  $M \in k(B, b) \cap AX$ ; 4)  $C \in k(A, d_1) \cap k(M, d_2)$ ;

5)  $D = t_{\vec{CD}}(C)$ . **Дискусија.** Задачата има секогаш решение за  $d_1 + d_2 > a + b$ .





9 117. Види цртеж 1.

118. Според цртеж 2:

а)  $\angle BOC = -135^\circ$ ;

б)  $\angle COB = 135^\circ$ ; в)  $\angle MOB = -15^\circ$ .

119. а)  $\angle AOB$ ,  $\angle B_1O_1A_1$ ,  $\angle A_2O_2B_2$ ,  $\angle A_3O_3B_3$  и  $\angle MNP$ ;

б)  $\angle AOB \cong \angle A_1O_1B_1 \cong \angle A_2O_2B_2 \cong \angle MNP$ ;

в) Истонасочени (позитивно) се:  $\angle AOB$ ,  $\angle A_2O_2B_2$ ,  $\angle A_3O_3B_3$  и  $\angle MNP$ ;

г)  $\angle AOB = \angle A_2O_2B_2 = \angle MNP$ . 120. Два,  $\angle XOY$  и  $\angle YOX$ . 121. Аглите  $AOB$  и

$COD$  имаат еднакви големини (накрсни агли)

и се истонасочени, па  $\angle AOB = \angle COD$  (црт. 3).

$\angle COA = 180^\circ$ , а  $\angle AOC = -180^\circ$ .

122.  $\angle NOM = -42^\circ 30'$ . 123. а)  $\alpha + \beta = -14^\circ 30'$ ;

б)  $\alpha + \gamma = 146^\circ$ ;

в)  $\alpha - \beta - \gamma = 45^\circ 30' - (-60^\circ) - 100^\circ 30' = 45^\circ 30' + 60^\circ - 100^\circ 30' = 5^\circ$ . 124. Уиайсџво: Користи ја постапката за пренесување на агол. 125.  $\widehat{EF}$ ,  $\widehat{GH}$  и  $\widehat{AB}$ . Лакот  $\widehat{DC}$  е

позитивно насочен. 126. Уиайсџво: Низ точката  $O$  конструирај права  $m$  нормална на правата  $OA$ . Тогаш  $M, N \in m \cap k$  итн. 127. Уиайсџво: Во позитивна насока на круж-

ницата нацртај тетива  $\overline{CD} = \overline{AB}$ .

128. Бидејќи кружниот лак  $\widehat{AA_1}$  претставува  $\frac{2}{9}$  од кружницата (црт. 4), следува дека  $\angle AOA_1 = \frac{2}{9} \cdot 360^\circ = 80^\circ$ .

10 129. Уиайсџво: Конструирај кружница  $k_1(O, \overline{OA})$  и на неа одреди точка  $A_1$ , така што  $\angle AOA_1 = \alpha = 45^\circ$  (црт. 1). Аналогно, одреди  $B_1 \in k_2(O, \overline{OB})$  и  $\angle BOB_1 = \alpha = 45^\circ$ . Според дефиницијата за ротација следува  $r(\overline{AB}) = \overline{A_1B_1}$ .

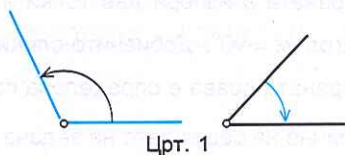
130. Користи го упатството на претходната задача.

Бидејќи  $r(C) = C_1$  и  $r(B) = B_1$ , т.е.  $r(AC) = A_1C_1$  и

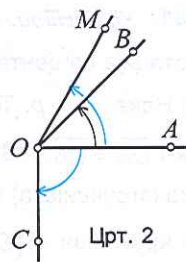
$r(AB) = A_1B_1$ , следува дека  $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$ ,  $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$ ,

па поради  $\angle C_1A_1B_1 = \angle CAB$ , според признакот САС,

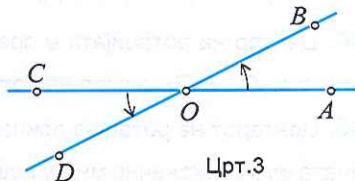
$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$  (црт. 2).



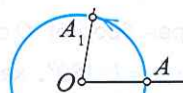
Црт. 1



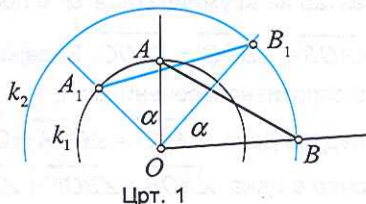
Црт. 2



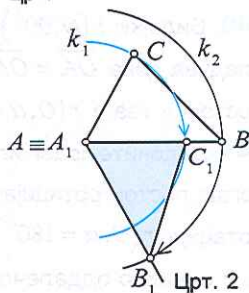
Црт. 3



Црт. 4



Црт. 1



Црт. 2

**131. Уџајсџео.** а) На правата  $p$  избири две точки и одреди ги нивните слики при ротација со центар  $O$  и агол  $\alpha = 90^\circ$ . Добиените слики ја определуваат правата  $p_1$ .

б) Нека  $M \in p$ . Тогаџ бараната права е определена со точките  $O$  и  $r(M)$ . **132.** Само ако  $\overline{OA} = \overline{OB}$ .

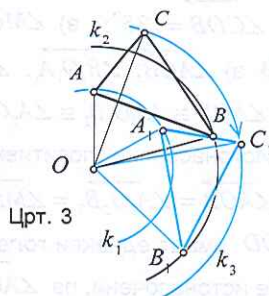
**133.** а) Слично на решението на задача 130. б) За текот на ротацијата (конструкцијата) имаме: 1) полуправи  $OA, OB$  и  $OC$ ;

2) кружници  $k_1(O, \overline{OA}), k_2(O, \overline{OB}), k_3(O, \overline{OC})$ ;

3) точки  $A_1 \in k_1, B_1 \in k_2, C_1 \in k_3$  и притоа

$$\overrightarrow{\angle AO A_1} = \overrightarrow{\angle BO B_1} = \overrightarrow{\angle CO C_1} = -60^\circ.$$

Значи.  $r(\triangle ABC) = \triangle A_1 B_1 C_1$  (црт. 3).



Црт. 3

**134.** Центар на ротацијата е пресекот на правите  $a$  и  $b$ , т.е.  $O \in a \cap b$ , а агол на ротацијата е  $\overrightarrow{\angle AOB}$ .

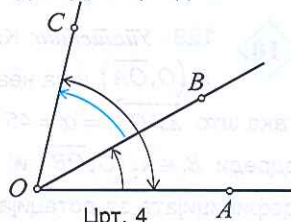
**135.** Центарот на ротација припаѓа на симетралата на отсечката  $AA_1$ . Според тоа, задачата има бесконечно многу решенија. **136.** Таква ротација постои само ако симетралите  $s_1$  и  $s_2$  на отсечките  $AA_1$  и  $BB_1$  имаат заедничка точка (центар на ротација). Во тој случај, задачата има едно решение ако точките  $A, A_1, B$  и  $B_1$  не се колинеарни и правите  $AA_1$  и  $BB_1$  се сечат. Ако, пак, правите  $AA_1$  и  $BB_1$  се паралелни, тогаџ задачата има бесконечно многу решенија само ако  $s_1 \equiv s_2$ . Во секој друг случај таква ротација не постои затоа што  $s_1 \parallel s_2$ , т.е.  $s_1 \cap s_2 = \emptyset$ .

**137.** а)  $O \in p$  и  $\alpha = k \cdot 180^\circ$ , каде што  $k$  е цел парен број; б)  $O \in p$  или  $O \notin p$  и  $\alpha = k \cdot 90^\circ$ , каде што  $k$  е цел непарен број; в)  $O \notin p$  и  $\alpha = k \cdot 180^\circ$ , каде што  $k$  е цел парен број. **138.** а)  $r(O, \alpha), O \in p, \alpha = 180^\circ$ ; б)  $r(O, 120^\circ), O$  е ортоцентар; в)  $r(O, 90^\circ), O$  е пресек на дијагоналите; г)  $r(O, \alpha), O$  е центар на кружницата, а  $\alpha$  е произволен агол. **139.** Очигледно (црт. 4) е дека

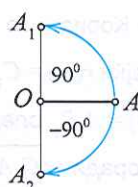
$\overrightarrow{\angle AOB} + \overrightarrow{\angle BOC} = \overrightarrow{\angle AOC}$ . Бидејќи  $\overrightarrow{\angle AOC}$  и  $\overrightarrow{\angle COA}$  се спротивнонасочени агли, т.е.  $\overrightarrow{\angle AOC} = -\overrightarrow{\angle COA}$ , следува дека  $\overrightarrow{\angle AOC} + \overrightarrow{\angle COA} = 0^\circ$ . Според тоа, точно е дека  $\overrightarrow{\angle AOB} + \overrightarrow{\angle BOC} + \overrightarrow{\angle COA} = 0^\circ$ .

**140.** Бидејќи  $r(O, 90^\circ)(A) = A_1$  и  $r(O, -90^\circ)(A) = A_2$ , следува дека  $\overline{OA_1} = \overline{OA_2}$  (црт. 5), т.е. таква ротација постои, а таа е  $r(O, \alpha = -180^\circ)$ .

**141.** Дадените прави или се сечат или се паралелни. Ако  $p \cap q = \{O\}$ , тогаџ постои ротацијата  $r(O, \alpha = \angle pOq)$ . Ако  $p \parallel q$ , тогаџ постои ротација  $r(O, \alpha = 180^\circ), O \in s$ , каде што  $s$  е права паралелна со  $p$  и  $q$  и еднакво оддалечена од нив. Значи, секогаш постои ротација.



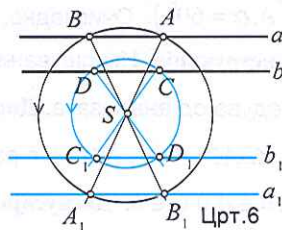
Црт. 4



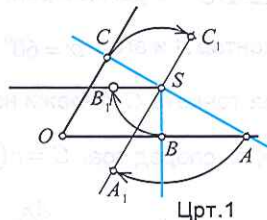
Црт. 5

142. Таква ротација секогаш постои ако дадените кружници се складни, т.е.  $r_1 = r_2$ . Во тој случај центарот на ротација е која било точка од симетралата на отсечката  $O_1O_2$ .

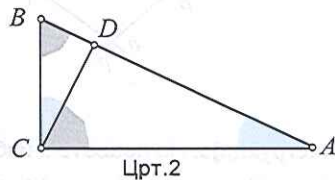
143. а) Решението е дадено на цртеж 6. б) Бараната точка  $O$  лежи на правата којашто е паралелна со правите  $a$  и  $b$  и е на еднакво растојание од нив. 144. а)  $\alpha = 180^\circ$ ;  
б)  $\alpha = 180^\circ$ ; в)  $\alpha = 90^\circ$  и  $\alpha = 180^\circ$ ; г)  $\alpha = 120^\circ$  и  $\alpha = 240^\circ$ .



11 145. Според цртеж 1, секој од аглите  $\angle BSA$  и  $\angle BSC$  има заемно нормални краци со краците на аголот  $\angle AOC$ . Со ротација  $r(S, \alpha = -90^\circ)$  добиваме:  $r(\angle ASB) = \angle A_1SB_1$  и  $r(\angle BSC) = \angle B_1SC_1$ , а притоа секој од аглите  $\angle A_1SB_1$  и  $\angle B_1SC_1$  има заемно паралелни краци со аголот  $\angle AOC$ . Според решението на задача 102 следува:  $\angle A_1SB_1 = \angle AOC$  и  $\angle B_1SC_1 + \angle AOC = 180^\circ$ , т.е.

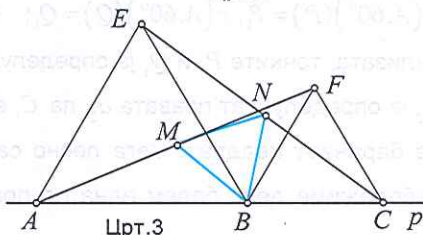


$\angle BSA = \angle AOC$  и  $\angle BSC + \angle AOC = 180^\circ$ . Значи, два агли со заемно нормални краци се еднакви ако тие се од ист вид (двата остри, двата тапи или двата прави). Во спротивно, тие се суплементни. 146. а) Од  $AB \perp CD$  и  $AC \perp BC$  следува дека  $\angle ABC$  и  $\angle ACD$  се два остри агли со заемно нормални краци, па  $\angle ABC = \angle ACD$  (црт. 2).



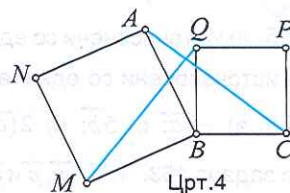
б) Исто како под а). 147. Тие два агли се еднакви, па  $\alpha = \beta = 80^\circ$ . 148. Тие се суплементни. Поради тоа  $\alpha + 5\alpha = 180^\circ$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 150^\circ$ .

149. Нека распоредот на точките  $A, B$  и  $C$  е како на црт. 3 и нека  $r$  е ротација со центар  $B$  и агол  $\alpha = -60^\circ$ .



Тогаш  $r(A) = E$ ,  $r(F) = C$ , т.е.  $r(AF) = EC$ . Значи, средината на  $AF$  ќе се преслика во средината  $EC$ , т.е.  $r(M) = N$ . Оттука следува дека  $\overline{BM} = \overline{BN}$  и  $\angle MBN = 60^\circ$ , т.е. триаголникот  $BMN$  е рамностран. 150. Нека  $r$  е ротација со центар  $B$  и агол  $\alpha = 90^\circ$ .

Тогаш  $r(C) = Q$  и  $r(A) = M$ , т.е.  $r(CA) = QM$ , од каде што следува дека  $\overline{AC} = \overline{MQ}$  и дека правите  $AC$  и  $MQ$  зафаќаат агол од  $90^\circ$ , т.е. се заемно нормални.

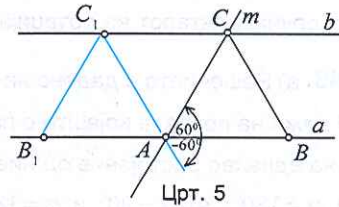


**151. Анализа.** Нека  $ABC$  е бараниот триаголник (црт. 5). Воочуваш дека  $C \in m \cap b$ , каде што  $m$  е слика на правата  $a$  при ротација  $r(A, \alpha = 60^\circ)$ . Очигледно,  $B \in a$  и  $\overline{AB} = \overline{AC}$ .

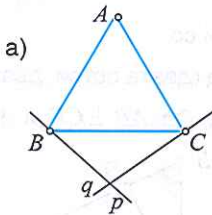
**Конструкција.** Извршувањето на конструкцијата следува од анализата. **Доказ.** Бидејќи  $\overline{AB} = \overline{AC}$

и  $\angle BAC = 60^\circ$ ,  $\triangle ABC$  е рамностран, при што

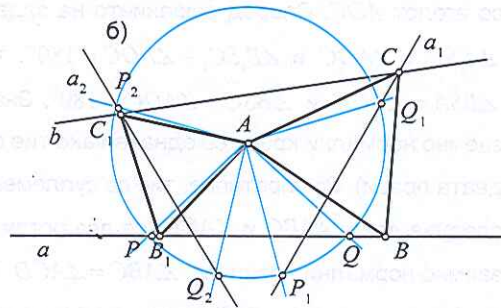
$A, B \in a$  и  $C \in b$ . **Дискусија.** Задачата има секогаш две решенија (воочи го цртежот).



**152. Анализа.** Претпоставуваме дека  $\triangle ABC$  е решение на задачата (црт. 6а). Бидејќи  $\triangle ABC$  е рамностран, следува  $\overline{AB} = \overline{AC}$  и  $\angle BAC = 60^\circ$ . Значи, ако  $r$  е ротација со центар  $A$  и агол  $\alpha = 60^\circ$  или  $\alpha = -60^\circ$ , тогаш  $r(B) = C$ . Точката  $B$  лежи на правата  $a$ , па точката  $C$  ќе лежи на правата  $r(a) = a_1$ . Од друга страна, пак,  $C$  лежи на правата  $b$ , па според тоа,  $C = r(a) \cap b$ .



Црт. 6



**Конструкција.** На правата  $a$  избираме две точки  $P$  и  $Q$  (црт. 6а) и по ред конструираме:  $r(A, 60^\circ)(P) = P_1$ ,  $r(A, 60^\circ)(Q) = Q_1$ ;  $r(A, -60^\circ)(P) = P_2$ ,  $r(A, -60^\circ)(Q) = Q_2$ . Според анализата, точките  $P_1$  и  $Q_1$  ја определуваат правата  $a_1$ , па  $a_1 \cap b = \{C\}$ . Аналогно,  $P_2$  и  $Q_2$  ја определуваат правата  $a_2$ , па  $C_1 \in a_2 \cap b$ . Отсечката  $AC$ , односно  $AC_1$  е страната на бараниот квадрат. Сега лесно се конструира темето  $B$ , односно  $B_1$ . Може да забележиме дека барем една од правите  $a_1$  или  $a_2$  ја сече правата  $b$ , што значи задачата секогаш има барем едно решение. **153.**  $\vec{x} = 2\vec{a}$ ,  $\vec{y} = -3\vec{a}$ ,  $\vec{z} = -\frac{1}{2}\vec{a}$ .

**12** **154.** а) Истонасочени; б) спротивнонасочени; в) истонасочени.

**155.** а) Истонасочени со еднакви должини; б) спротивнонасочени со еднакви должини; в) истонасочени со еднакви должини; г) нулти вектори; д) нулти вектори.

**156.** а)  $-6\vec{a}$ ; б)  $5\vec{b}$ ; в)  $2(\vec{a} + \vec{c})$ . *Уиџисџво.* За конструкцијата користи го цртежот

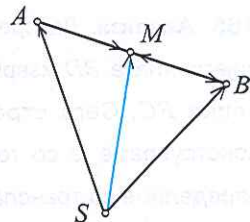
на задача **153.** **157.**  $\vec{m}, \vec{p}$  и  $\vec{q}$ , бидејќи  $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{p} = 2(2\vec{a} + \vec{b})$ ,  $\vec{q} = 3(2\vec{a} + \vec{b})$ .

158. Очигледно,  $\vec{SM} = \vec{SA} + \vec{AM}$  и  $\vec{SM} = \vec{SB} + \vec{BM}$ . Ако

овие две равенства ги собереме, добиваме:

$$\vec{SM} + \vec{SM} = \vec{SA} + \vec{AM} + \vec{SB} + \vec{BM}, \text{ а бидејќи } \vec{AM} + \vec{BM} = \vec{0},$$

следува дека  $2 \cdot \vec{SM} = \vec{SA} + \vec{SB}$ , т.е.  $\vec{SM} = \frac{1}{2}(\vec{SA} + \vec{SB})$ .



159. Одговор.  $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$ . **Уџаџсџво.** Користи го решението на претходната

задача и стави  $AA_1 = \frac{1}{2}(AB + AC)$  итн. 160. Нека четириаголникот  $ABCD$  е паралелограм

(на цртежот) и нека  $S$  е средина на дијагоналата  $BD$ . Треба да докажеме дека дијагоналата  $AC$  минува низ точката  $S$  и дека

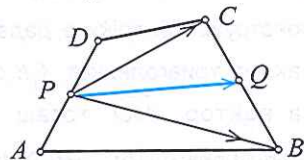
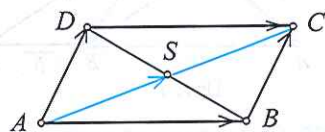
$\vec{AS} = \vec{SC}$ . Според решението на задача 158 имаме:

$$\vec{AS} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD}) = \frac{1}{2}(\vec{DC} + \vec{BC}) = \frac{1}{2}(-\vec{CD} - \vec{CB}) = -\frac{1}{2}(\vec{CD} + \vec{CB}) = -\vec{CS} = \vec{SC}. \text{ Оттука}$$

следува дека  $S \in AC$  и  $\vec{AS} = \vec{SC}$ . 161. Според решението на задача 158 можеме да

$$\text{запишеме: } \vec{PQ} = \frac{1}{2}(\vec{PB} + \vec{PC}) = \frac{1}{2}(\vec{PA} + \vec{AB} + \vec{PD} + \vec{DC}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{PA} + \vec{PD}) = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC}).$$



162. Според решението на претходната задача, за средната линија  $MN$  на трапезот

$$ABCD \text{ важи: } \vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC}), \text{ } |\vec{MN}| = \frac{1}{2}(|\vec{AB} + \vec{DC}|), \vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC}).$$

$$163. \vec{MN} = \vec{MC} + \vec{CN} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CB} = \frac{1}{2}\vec{AB}.$$

Оттука следува дека  $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AB}$  и  $MN \parallel AB$ .

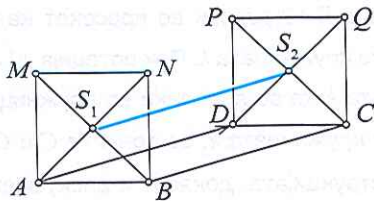
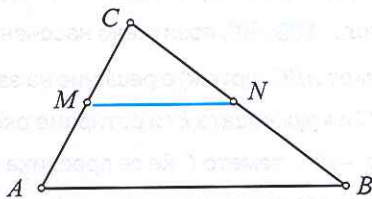
164. Од тоа што векторите  $\vec{AM}$  и  $\vec{DP}$  се исто насочени и фактот дека  $\vec{AM} = \vec{AB} = \vec{DC} = \vec{PQ}$  следува дека  $\vec{AM} = \vec{DP}$ , а од тоа, пак,  $AD = MP$ .

Нека  $\vec{AD} = \vec{a}$ . Тогаш имаме:  $t_{\vec{a}}(A) = D$ ,  $t_{\vec{a}}(M) = P$ ,  $t_{\vec{a}}(B) = C$ ,  $t_{\vec{a}}(N) = Q$ , т.е. квадратот

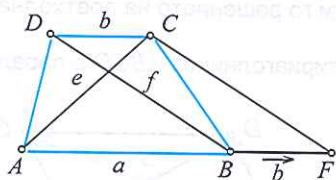
$AMNB$  со транслагацијата  $t_{\vec{a}}$  се пресликува

во квадратот  $DPQC$ . Оттука следува дека

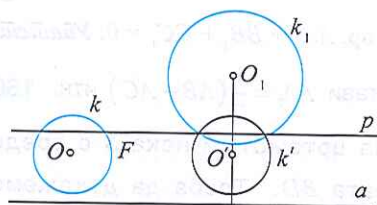
$$\vec{S_1S_2} = \vec{a} = \vec{AD} = \vec{BC}, \text{ т.е. } \vec{S_1S_2} = \vec{BC}.$$



**165. Анализа.** Да претпоставуваме дека трапезот е конструиран (црт. 1). Ако на дијагоналата  $BD$  извршине транслација за вектор  $\vec{DC} = \vec{b}$ , ќе ја добиеме нејзината слика  $FC$ . Сега страните на триаголникот  $AFC$  се познати и можеме да го конструираме, а со тоа ќе ги определиме темињата  $A$  и  $C$ . Темињата  $B$  и  $D$  ќе ги определиме со транслација за вектор  $CD$  на точките  $F$  и  $C$ . Конструкцијата, доказот и дискусијата изврши ги сам.



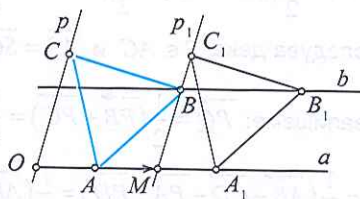
Црт. 1



Црт. 2

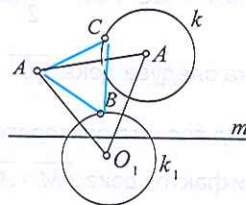
**166.** За анализа на задачата искористи го цртежот 2.

**167. Анализа.** Нека  $ABC$  е бараниот триаголник. Ако на тој триаголник извршине транслација за произволен вектор  $\vec{OM}$ , ќе го добиеме триаголникот  $A_1B_1C_1$ , кој лесно може да се конструира бидејќи е дадена неговата страна. Ако, пак, на триаголникот  $A_1B_1C_1$  се изврши транслација за вектор  $\vec{MO}$ , тогаш тој ќе се прслика во триаголникот  $ABC$ , чие теме  $C$  ќе лежи на правата  $p$ .

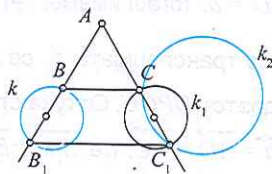


Конструкцијата и доказот следуваат од анализата. **Дискусија.** Нека  $d$  е растојание меѓу паралелните прави. Ако  $a > d$ , задачата има четири решенија. Ако  $a = d$ , задачата има две решенија, а за  $a < d$ , задачата нема решение. **168.**  $120^\circ$ , негативно насочен агол. **169.**  $90^\circ$ , позитивно насочен агол. **170.** Анализа. Претпоставуваме дека триаголникот  $ABC$  (цртеж) е решение на задачата. Ако страната  $AC$  и кружницата  $k$  ги ротираме околу точката  $A$  за агол од  $-60^\circ$ , темето  $C$  ќе се прслика во темето  $B$  кое лежи во пресекот на кружницата  $k_1$  и правата  $m$ . Значи,

$B \in r(A, -60^\circ)(k) \cap m$ .



**171. Анализа.** Нека  $ABC$  е бараниот триаголник. Темето  $B$  ( $B_1$ ) лежи во пресекот на полуправата  $AO$  со кружницата  $k$ . При ротација  $r(A, 60^\circ)$  кружницата  $k$  ќе се прслика во кружницата  $k_1$  која ја сече кружницата  $k_2$  во точките  $C$  и  $C_1$ .



Конструкцијата, доказот и дискусијата изведи ги сам.

- 1 а)  $m^6$ ; б)  $3^5$ ; в)  $3,2^3$ ; г)  $0,4^4$ ; д)  $\left(\frac{3}{7}\right)^5$ ; е)  $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$ ; ж)  $(x+y)^2$ ; з)  $\left(\frac{a-1}{b+2}\right)^3$ ; с)  $\left(\frac{x}{y}-3\right)^3$ . 2. г). 3. а)  $x^5$  (икс на петти); б)  $(ab)^3$  ( $ab$  на трети); в)  $(bac)^6$  ( $bac$  на шести); г)  $\left(\frac{5}{x}\right)^7$  ( $\frac{5}{x}$  на седми); д)  $(a+2)^4$  ( $a+2$  на четврти); е)  $[2(a-b)]^2$  ( $2(a-b)$  на втори). 4. а) 3; б)  $(-9)^5$ ; в)  $(-2a)^4$ ; г)  $(x-3)^3$ ; д)  $\left(\frac{3}{4}\right)^7$ ; е)  $\left(\frac{5-a}{5+a}\right)^6$ . 5.  $(3a)^3$ ;  $5^4 x^4$ ;  $(a-3)^4$ ;  $a^2(3+a)^2$ ; 7.  $c \cdot c \cdot c \cdot c$ ;  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ ;  $\left(-\frac{5}{9}\right) \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) \cdot \left(-\frac{5}{9}\right)$ ;  $0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7$ . 8. а) 32; б) 1728; в) 625; г) 1000000; д)  $\frac{256}{2401}$ ; е)  $\frac{64}{729}$ ; ж) 1,728; з) 0,0081.

9.

$n$	0	1	2	3	4	5	6
$(-1)^n$	1	-1	1	-1	1	-1	1
$2^n$	1	2	4	8	16	32	64
$(-3)^n$	1	-3	9	-27	81	-243	729
$4^n$	1	4	16	64	256	1024	4096
$(-5)^n$	1	-5	25	-125	625	-3125	15625

10. а)  $-\frac{1}{8}$ ; б)  $-\frac{27}{64}$ ; в)  $\frac{1}{16}$ ; г)  $\frac{16}{81}$ ; д)  $-\frac{32}{243}$ ; е) 0,01; ж) -0,008; з) -0,0000000001; а) -0,000027; с) 0,000001. 11. Позитивни се степените со парен показател, а негативни со непарен показател. 12. а)  $(-6,3)^5 < 0$ ; б)  $0 < \left(-3\frac{2}{5}\right)^6$ ; в)  $(-6)^6 > (-66)^9$ ; г)  $(-0,02)^2 > (-2,02)^7$ ; д)  $\left(-\frac{5}{6}\right)^{11} < \left(-\frac{5}{6}\right)^4$ ; е)  $\left(-3\frac{7}{8}\right)^{41} < (-3,5)^{14}$ . 13.  $a \in \{2;3\}$ ;  $a \in \{0;1\}$ ;  $a \in \{-3;-2;-1\}$ . 14. а)  $\perp$ ; б)  $\perp$ ; в)  $\top$ ; г)  $\top$ ; д)  $\top$ ; е)  $\perp$ . 15. а)  $3^2$ ;  $(-2)^5$ ;  $(-5)^3$ ;  $2^8$ ;  $(-7)^3$ ;  $10^5$ ; б)  $0,2^3$ ;  $(-0,5)^3$ ;  $0,6^3$ ;  $0,5^4$ ;  $1,1^3$ ;  $(-0,1)^5$ ; в)  $\left(\frac{4}{7}\right)^2$ ;  $\left(-\frac{4}{5}\right)^3$ ;  $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ ;  $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$ ;  $\left(\frac{5}{6}\right)^4$ ;  $\left(\frac{7}{8}\right)^3$ . 16. а)  $a=0$ ; б)  $a=1$ ; в)  $a=-1$ ; г)  $a=-8$ ; д)  $a=4$ ; е)  $a=0$ ; ж)  $a=2$ ; з)  $a=5$ .

- 2 17. а)  $10^2$ ;  $10^5$ ;  $10^6$ ;  $10^8$ ;  $10^{10}$ . 18. 1; 5; 9; 12. 19. 1000; 10000; 10000000; 100000000; 100000000000. 20.  $3 \cdot 10^3$ ;  $12 \cdot 10^5$ ;  $15 \cdot 10^6$ ;  $73 \cdot 10^7$ ;  $18 \cdot 10^{10}$ ;  $205 \cdot 10^4$ ;  $6001 \cdot 10^4$ ;  $40005 \cdot 10^3$ .
21. Меркур -  $58 \cdot 10^6$ ; Венера -  $108 \cdot 10^6$ ; Земля -  $15 \cdot 10^7$ ; Марс -  $228 \cdot 10^6$ ; Юпитер -  $78 \cdot 10^7$ ; Сатурн -  $143 \cdot 10^7$ ; Уран -  $288 \cdot 10^7$ ; Нептун -  $45 \cdot 10^8$ ; Плутон -  $59 \cdot 10^8$ .
22. Меркур -  $92 \cdot 10^6$ ; Венера -  $42 \cdot 10^6$ ; Марс -  $78 \cdot 10^6$ ; Юпитер -  $63 \cdot 10^7$ ; Сатурн -  $128 \cdot 10^7$ ; Уран -  $273 \cdot 10^7$ ; Нептун -  $435 \cdot 10^7$ ; Плутон -  $575 \cdot 10^7$ .
23.  $6 \cdot 10^7$ ;  $18 \cdot 10^8$ ;  $24 \cdot 10^9$ ;  $10^6$ ;  $7 \cdot 10^7$ ;  $9 \cdot 10^9$ ;  $10^{13}$ ;  $7 \cdot 10^8$ .
24.  $23 \cdot 10^6$ ;  $1070 \cdot 10^6$ ;  $5,7 \cdot 10^6$ ;  $40,03 \cdot 10^6$ ;  $953,8 \cdot 10^6$ ;  $60,73 \cdot 10^6$ ;  $2,8 \cdot 10^6$ ;  $0,73 \cdot 10^6$ ;  $0,03 \cdot 10^6$ ;  $0,0004 \cdot 10^6$ .
25. а) 62514; б) 307206; в) 7100900; г) 10403; д) 2085000. 26.  $0,1^2$ ;  $0,1^4$ ;  $0,1^6$ ;  $0,1^8$ ;  $0,1^{10}$ .
27.  $0,005$ ;  $0,0004$ ;  $0,00012$ ;  $0,23$ ;  $3,06$ ;  $0,045$ . 28. а) -1; 1; -1; 1; -1; 1; б)  $0,1$ ;  $0,01$ ;  $0,001$ ;  $0,0001$ ;  $0,00001$ ;  $0,000001$ ; в)  $1,1$ ;  $1,21$ ;  $1,331$ ;  $1,4641$ ;  $1,61051$ ;  $1,771561$ ; г) -2; 4; -8; 16; -32; 64; д) -0,2; 0,04; -0,008; 0,0016; -0,00032; е)  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{4}$ ;  $\frac{1}{8}$ ;  $\frac{1}{16}$ ;  $\frac{1}{32}$ .
29. а) Т; б) ⊥; в) Т; г) Т; д) Т; е) Т. 30.  $(-0,2)^5 < (-0,1)^3$  за  $0,00068$ .
31. а) 48; б) 250; в) 108; г) 1; д) 0,8; е) 4; ж) 67,5; з) 15; с) 1,6.
32. а) 21; б) 645; в) 2066; г) 531; д) 33; е) 8; ж) 9090; з) 190; с) 1125; с) 58. 33. а)  $\frac{7}{9}$ ; б)  $-3\frac{46}{125}$ ; в) -125; г) -50. 34. а) 2,25; б) -8; в) 31; г) -6; д) 0,9; е) -0,01; ж)  $-22\frac{2}{3}$ ; з)  $-3\frac{1}{3}$ .
- 3 35. а)  $2^7$ ;  $7^7$ ;  $(-3)^8$ ;  $(-12)^{24}$ ;  $23^{23}$ ; б)  $(\frac{1}{3})^9$ ;  $(-\frac{2}{5})^{12}$ ;  $(\frac{3}{8})^{20}$ ;  $(-2\frac{3}{5})^{48}$ ;  $(-15\frac{1}{7})^{22}$ ; в)  $0,5^5$ ;  $(-1,4)^{14}$ ;  $(-3,7)^{10}$ ;  $(2,03)^{10}$ ;  $(-7,011)^{25}$ . 36. а)  $x^{11}$ ; б)  $a^8$ ; в)  $b^{13}$ ; г)  $x^9$ ; д)  $(-y)^{15}$ ; е)  $(3a)^4$ ; ж)  $(-\frac{3}{4}c)^7$ ; з)  $(-0,6x)^8$ . 37. а)  $x = a$ ; б)  $x = a$ ; в)  $x = a^5$ ; г)  $x = a^4$ .
38. а)  $x^6$ ; б)  $y^7$ ; в)  $a^7$ ; г)  $-x^6$ ; д)  $(5a)^7$ ; е)  $(a-2)^2$ ; ж)  $(x+y)^4$ ; з)  $(3-x)^3$ ; с)  $2^{2n}$ ; с)  $5^{3n+3}$ .
39. а)  $3^2$ ;  $8^8$ ;  $(-5a)^5$ ;  $(-10)$ ; 1; б)  $(\frac{2}{3})^2$ ;  $(-\frac{3}{7})^4$ ;  $(-\frac{5}{6})$ ; 1;  $(-3\frac{2}{5})^5$ ; в)  $0,3^4$ ; -2,5;  $3,16^6$ ;  $(-15,3)^6$ ;  $63,17^3$ .
40. а)  $a^2$ ; б)  $x^3$ ; в)  $c$ ; г) 1; д)  $(-a)^4$ ; е)  $(5a)^7$ ; ж)  $(-\frac{2}{7}b)^4$ ; з)  $0,5x$ .
41. а)  $\frac{1}{a^3}$ ; б)  $\frac{1}{x^5}$ ; в)  $\frac{1}{x}$ ; г)  $\frac{1}{(3a)^3}$ ; д)  $\frac{1}{(0,6x)^4}$ ; е)  $\frac{1}{-4,5x}$ ; ж)  $\frac{1}{(\frac{2}{5}a)^2}$ ; з)  $\frac{1}{-\frac{5x}{7}}$ .
42. а)  $a^2$ ; б)  $x^4$ ; в)  $y^4$ ; г)  $b^4$ ; д)  $a^4$ ; е)  $x^3$ ; ж)  $\frac{1}{m}$ ; з)  $\frac{1}{p^2}$ .



43. а)  $a^4$ ; б)  $c^5$ ; в) 1; г)  $\frac{1}{a^4}$ ; д)  $\frac{1}{b}$ ; е)  $\frac{1}{x^2}$ . 44. а) 5; б) 235; в) 121; г) -27; д) -8; е)  $\frac{1}{144}$ ;  
 е) -0,1; ж) 0,008; з)  $\frac{8}{125}$ . 45. а) -7. *Уйаӱсӱө.*  $5^{(5+x)-(3+x)} - 2^{(2+x)+(3-x)}$ ; б) 17.

46. а)  $x = 25$ ; б)  $x = \frac{1}{8}$ ; в)  $x = 5$ ; г)  $x = \frac{2003}{2004}$ . *Уйаӱсӱө.*  $\frac{2003^{2003}(1+2003)}{2004^{2003} \cdot 2004}$ .

4 47. а)  $x^6$ ; б)  $a^{15}$ ; в)  $4x^8$ ; г)  $7^4 a^{24}$ ; д)  $-3^9 y^9$ ; е)  $0,3^{15} a^6 b^{12}$ ; ж)  $\frac{2^{20}}{5^8} a^{12} b^{20}$ .

48. а)  $10^{12}$ ; б)  $(-10)^{12}$ ; в)  $(-10)^{12}$ ; г)  $\left(\frac{1}{10}\right)^{12}$ ; д)  $\left(-\frac{1}{10}\right)^{12}$ ; е)  $0,1^6$ ; ж)  $\left(-\frac{1}{0,1}\right)^6$ .

49. а)  $2^6$ ; б)  $(-2)^6$ ; в)  $0,2^6$ ; г)  $-0,2^6$ ; д)  $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ ; е)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^6$ ; ж)  $\left(-\frac{1}{0,2}\right)^6$ .

50. а)  $(x^2)^{12}$ ; б)  $(x^3)^8$ ; в)  $(x^4)^6$ ; г)  $(x^6)^4$ ; д)  $(x^8)^3$ . 51. а)  $4^{30}$ ; б)  $8^{20}$ ; в)  $16^{15}$ ; г)  $32^{12}$ ; д)  $64^{10}$ .

52. а)  $x^4 a^4$ ; б)  $a^3 x^3 b^3$ ; в)  $5^2 a^2$ ; г)  $2^5 x^5 y^5$ ; д)  $a^{12} b^6$ ; е)  $-2^{12} x^3$ ; ж)  $\frac{1}{2^5} x^{15} y^{20}$ .

53. а)  $(xy)^3$ ; б)  $(abc)^5$ ; в)  $(5a)^7$ ; г)  $(2x)^3$ ; д)  $(3ab)^3$ ; е)  $\left(\frac{1}{2} a^2 b c^3\right)^5$ ; ж)  $(0,1 x^2 y^3)^3$ .

54. а)  $10^4$ ; б)  $(-10)^5$ ; в)  $(-10)^6$ ; г)  $10^7$ ; д)  $10^6$ ; е) -1; ж) -1.

55. а) 1; б) 1; в) 1; г) -1; д) 32; е) 81; ж)  $-\frac{1}{243}$ . 56. а) 25; б)  $125 \cdot 10^4$ ; в)  $-25 \cdot 10^4$ ;

г)  $16 \cdot 10^{14}$ ; д)  $2\frac{1}{3}$ ; е)  $\frac{8}{27}$ ; ж)  $-\frac{1}{375}$ . 57. а)  $\frac{a^4}{b^4}$ ; б)  $\frac{x^8}{c^8}$ ; в)  $\frac{3^5}{a^5}$ ; г)  $\frac{5^3 a^3}{4^3}$ ; д)  $\frac{3^5 x^5}{4^5 y^5}$ ;

е)  $\frac{x^7}{2^7}$ ; ж)  $\frac{8^2 a^2}{10^2 x^2}$ ; з)  $-\frac{4^3 x^3 y^3}{5^3 a^3 b^3}$ . 58. а)  $\frac{3^5 a^{10}}{b^5}$ ; б)  $\frac{2^4 x^{12}}{5^4 y^8}$ ; в)  $\frac{a^6 b^3 c^9}{3^3 x^{12}}$ ; г)  $\frac{6^2 x^2 y^6}{7^2 a^4 b^{10}}$ .

59. а)  $\left(\frac{x}{y}\right)^5$ ; б)  $\left(\frac{2}{a}\right)^5$ ; в)  $\left(\frac{3a}{5}\right)^4$ ; г)  $\left(-\frac{5}{ab}\right)^3$ ; д)  $\left(-\frac{1}{3x}\right)^5$ ; е)  $\left(\frac{a}{b^2}\right)^4$ ; ж)  $\left(\frac{a^2 b}{2c^3}\right)^5$ ; з)  $\left(-\frac{0,1}{x^2 y}\right)^3$ .

60. а) 32; б)  $10^4$ ; в) 64; г)  $10^7$ ; д)  $\frac{1}{8}$ ; е) -32; ж) 81; з)  $10^5$ . 61. а) 16; б) -3; в) 0.

62. а) 0; б) 0; в) -9; г) 1; д)  $\frac{9}{16}$ ; е) -6. 63. а) -32; б)  $\frac{1}{0,0081}$ ; в)  $\frac{1}{625}$ ; г) 1000000.

5 64. а) 49; 36; 144; 225; 361; 625; б)  $\frac{1}{9}$ ;  $\frac{4}{25}$ ;  $\frac{9}{64}$ ;  $10\frac{9}{16}$ ;  $32\frac{1}{9}$ ;  $2\frac{41}{64}$ ;

в) 1,44; 12,96; 0,0225; 0,0064; 1,0201; 5,089536. 65. 9; 900; 90000; 9000000; 0,09; 0,0009; 0,000009.

66. 225; 22500; 2250000; 2,25; 0,0225; 0,000225. 67. 121; 12100; 1210000; 0,0121; 0,000121.

68. 361. 69. а) 10,25; б) 5; в) 2,8812; г) 1. 70. а) 24; б) 0,52; в) -2. 72. а)  $x = 3$ ; б)  $x = 11$ ;

в)  $x = 25$ ; г) 4; д)  $x = 7$ ; е)  $x = 4$ ; ж)  $x = 8$ ; з)  $x = 12$ .

73. а) 159; б) 32; в) 2; г) 1. 74. а) 2; б)  $1\frac{2}{13}$ .

- 6** 75. Една. 76. Две. 77. Три. 78. Една. 79. Две. 80. Три. 81. Четири. 82. Две.  
 83. Две. 84. Две. 85. Две. 86. Две. 87. Две. 88. Три. 89. Четири. 90. Две.  
 91. Три. 92. Три. 93. Три. 94. Две. 95. а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 4; е) 5; ж) 6; з) 8; с) 9.  
 96. 17. 97. 23. 98. 37. 99. 48. 100. 55. 101. 76. 102. 96. 103. 104. 104. 437. 105. 606.  
 106. 891. 107. 2022. 108. 0,3. 109. 0,9. 110. 0,21. 111. 0,76. 112. 2,3. 113. 6,4. 114. 9,7.  
 115. 27,6. 116. 30,5. 117. 5,67. 118. 11,11. 119. 30,03. 120. 31; а) 310; б) 3100; в) 3,1; г) 0,31.  
 121. 2,83. 122. 4,12. 123. 5,83. 124. 8,19. 125. 9,22. 126. 13,15. 127. 20,93. 128. 25,71.  
 129. 36,85. 130. 50,36. 131. 1,38. 132. 1,95. 133. 0,89. 134. 0,22. 135. 0,09.  
 136. а)  $x = 5$ ; б)  $x = 16$ ; в)  $x = 42$ ; г)  $x = 36$ ; д)  $x = 12$ ; е)  $x = 2,1$ . 137. 1508 м. 138. 65 см.

- 7** **8** 139. а)  $\sqrt{1}; \sqrt{4}; \sqrt{9}$ ; б)  $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt{6}; \sqrt{7}; \sqrt{8}; \sqrt{10}$ .  
 140.  $S = \left\{ -5; -1, (3); -\frac{2}{3}; -\frac{1}{4}; 2; 3; \sqrt{4}; \sqrt{16} \right\}$ ,  $T = \left\{ -\sqrt{3}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; 5,60413\dots; \sqrt{8}; \sqrt{13} \right\}$ .

142. Уйайсїво.  $a$  е хипотенуза на правоаголен триаголник со катети 2 см и 1 см,  
 $b$  е хипотенуза на правоаголен триаголник со катети 3 см и 1 см.

143. Уйайсїво. Страната на квадратот е катета на правоаголен триаголник со  
 хипотенуза 4 см и катета 3 см. 144. 12,23. 145. 34,66. 146. 3,75. 147. 1,51. 148. 3,51.

149.  $A = \{ \sqrt{4}; +\sqrt{9}; 16 \}$ ;  $B = \{ \sqrt{4}; +\sqrt{9}; -\sqrt{25}; 16 \}$ ;  
 $C = \left\{ -8\frac{3}{5}; +3\frac{5}{7}; \sqrt{4}; -4\frac{5}{8}; \frac{7}{10}; +\sqrt{9}; 2\frac{3}{4}; -\sqrt{25}; 16 \right\}$ ;  $D = S$ ;  $E = \left\{ -8\frac{3}{5}; -\sqrt{8}; -\sqrt{6}; -4\frac{5}{8}; -\sqrt{25} \right\}$ .

150. а)  $\mathbb{N}; \mathbb{N}; \mathbb{N}; \emptyset; \emptyset$ ; б)  $\mathbb{Z}; \mathbb{Q}; \mathbb{R}; \mathbb{R}^+; \mathbb{Z}^+$ ; в)  $\mathbb{Z}; \mathbb{Z}; \mathbb{Q}; \mathbb{R}; \emptyset$ ; г)  $\emptyset; \emptyset; \mathbb{J}; \mathbb{Q}; \mathbb{R}$ .

- 9** 151. 116. 152. 160. 153. 357. 154. 60. 155. 34,25. 156. -16. 157.  $\frac{1}{2}$ . 158.  $2\frac{2}{5}$ .  
 159.  $\frac{7}{8}$ . 160.  $1\frac{3}{17}$ . 161. а; г; ф. 162. а; в; д; ф; ж. 163. 29; 1; 5. 164. -10; 42; 8. 165. -7; -10; -9;  
 -10,05. 166. -39; -3; 0; 6. 167. -5; 3; -122; 30. 168. -1200; 0; -3; 72. 169. -3. 170.  $\frac{1,111}{1,109}$ . 171. +0,5.  
 172.  $2\frac{3}{5}$ . 173.  $29\frac{5}{9}$ . 174.  $1\frac{23}{27}$ . 175. -3,072. 176. 4,625. 177.  $x = 0$ . 178.  $x = 1$ . 179.  $x = -2$ .  
 180.  $x = 3$ . 181.  $x = \frac{1}{2}$ . 182.  $x = 17$ . 183.  $x = -5$ . 184.  $x = 3$ . 185.  $x = \frac{2}{3}$ . 186.  $x = 0$ ;  $x = 1$ .  
 187.  $x = 0$ ;  $x = -3$ . 188.  $x = 0$ ;  $x = \frac{1}{2}$ . 189.  $x = 5$ ;  $x = 2$ . 190.  $x = 3$ ;  $x = -3$ . 191.  $x = -4$ ;  $x = -5$ .  
 192.  $x = -3$ . 193.  $x = 1$ . 194.  $x = 5$ ;  $x = -5$ . 195.  $x = 0$ . 196.  $x = 6$ . 197.  $x = -3$ .  
 198.  $2x - 3 = 2(x - 2) + 1$ . 199.  $x(x + 3) + 2x = x^2 + 5x$ . 200.  $(x - 1)(x + 3) = x^2 + 2x - 3$ .  
 201.  $(2x + 3)(x - 2) = 2x^2 - x - 6$ . 202.  $\frac{5x - 3}{2x + 6} = \frac{7x - (2x + 3)}{2(x + 3)}$ .

**10** 203. а; в; г; д; е; ж; з; и. 204. а)  $3x^5$ ; б)  $-a^3$ ; в)  $0,6xy^3$ ; г)  $a^4b^2$ ; д)  $-\frac{3}{5}x^3y^5$ ; е)  $2\frac{5}{7}a^3b^2c$ .

205.  $x^2y^3$ . 206.  $15a^2b^3c$ . 207.  $8a^2bc^2$ . 208.  $a^2b^2$ . 209.  $1,2x^4y^2z$ . 210.  $10a^4b^3$ . 211.  $a^3$ .

212.  $54a^5$ . 213.  $3x^4y^3$ . 214.  $-3x^3y^2$ . 215.  $x^{10}$ . 216.  $0,01a^3b^4c^5$ . 217.  $\frac{2}{3}x^6y^3z^5$ . 218.  $7a^7$ .

219. а) 1; 15; 8; 1; 1,2; 10; 1; 54; 3; -3; 1; 0,01;  $\frac{2}{3}$ ; 7;

б)  $x^2y^3$ ;  $a^2b^3c$ ;  $a^2bc^2$ ;  $a^2b^2$ ;  $x^4y^2z$ ;  $a^4b^3$ ;  $a^3$ ;  $a^5$ ;  $x^4y^3$ ;  $x^3y^2$ ;  $x^{10}$ ;  $a^3b^4c^5$ ;  $x^6y^3z^5$ ;  $a^7$ ;

в) V; VI; V; IV; VII; VII; III; V; VII; V; X; XII; XIV; VII.

220.  $A = \left\{ 5x^2; \frac{0,25}{11}x^2 \right\}$ ;  $B = \left\{ -\frac{3}{4}y^2; -15y^2 \right\}$ ;  $C = \left\{ 0,3xy; 12xy; -\frac{2}{7}xy \right\}$ ;  $D = \left\{ x^2y^2; -\frac{1}{9}x^2y^2 \right\}$ ;

$E = \left\{ -\frac{1}{9}x^2y \right\}$ ;  $F = \{ 3xy^2; xy^2; -0,12xy^2 \}$ . 222.  $-y^2x^2$ ;  $-0,3xy$ ;  $-3xy^2$ ;  $-5x^2$ ;  $-xy^2$ ;

$\frac{3}{4}y^2$ ;  $\frac{1}{9}x^2y^2$ ;  $-12xy$ ;  $15y^2$ ;  $\frac{1}{9}x^2y$ ;  $-\frac{0,25x^2}{11}$ ;  $\frac{2}{7}xy$ ;  $0,12xy^2$ .

**11** 224. а)  $8x$ ; б)  $8a$ ; в)  $2b$ ; г)  $0,7y$ . 225. а)  $13ab$ ; б)  $-9x$ ; в)  $3x^2$ ; г)  $-2,2a^2$ .

226. а)  $5c$ ; б)  $-a$ ; в)  $-\frac{1}{2}x$ ; г)  $1,3b$ . 227. а) 0; б) 0; в)  $-\frac{5}{14}c^2$ ; г)  $2\frac{3}{5}ab^2$ .

228. а)  $27x^3$ ; б)  $15,3a^2b$ ; в)  $-43ab^2c$ ; г)  $-3x^2y$ . 229. а)  $-2x^3$ ; б)  $7ab$ ; в)  $-4a^2x$ ; г)  $10xy^2$ .

230. а)  $2,6x^2$ ; б)  $-0,2b$ ; в)  $-4,5cx$ ; г)  $2,1a^2y$ . 231. а)  $\frac{1}{5}xy$ ; б)  $a^4$ ; в)  $-\frac{1}{2}x^3y^2$ ; г)  $\frac{1}{6}ax$ .

232. а)  $20a^2x^2$ ; б)  $23x^5$ ; в)  $-10a^3b^3$ ; г)  $-27x^2$ . 233. а)  $2,19a$ ; б)  $-6,06a^2$ ; в)  $-1\frac{11}{12}x^4$ ; г)  $-\frac{5}{6}a^3b$ .

234. а) 0; б)  $6,06a^3$ ; в)  $-6,06a^3$ ; г) 0. 235. а)  $2c$ ; б)  $-b$ ; в)  $\frac{1}{2}x^2$ ; г)  $5p^3$ . 236. а)  $-10x$ ; б)  $-0,4a^2$ ;

в)  $-1\frac{2}{5}b^3$ ; г)  $-2c^4$ . 237. а)  $10x$ ; б)  $-12a^2$ ; в)  $-0,66p^2$ ; г)  $2\frac{1}{12}t$ . 238. а) 0; б)  $-3c^2$ ;

в)  $p^3$ ; г)  $1,2y^5z^3$ . 239. а)  $-6xy$ ; б)  $-2,15ab$ ; в)  $\frac{3}{4}a$ ; г)  $-\frac{8}{15}x^2$ .

**12** 240. Мономи: в, г. Биноми: а, е, ж. Триноми: б, е, з. 241.  $5a + 6a^2 - 20a^3 - 12a^4$ .

242.  $3x^3y^2 - x^4y + 3x^5y^3$ . 243.  $a + b + 6$ . 244.  $6y + 6$ . 245.  $-14x^2 + 11x - 11$ .

246.  $17y^2 - 17y + 14$ . 247.  $-2a^2 + 4ab + b^2$ . 248.  $-6a + 8ab - 7abc$ . 249.  $10xy - 17yz - 16xz$ .

250.  $6x^3y^2 - 6x^2y - 2x$ . 251.  $3a^3b^2c - 4a^2b + 6$ . 252. IV; VIII; I; I; II; II; III; II; V; VI.

253.  $4x^2 + 2x - 4$ . 254.  $2a^2 + a + 4$ . 255.  $x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 3x + 4$ . 256. 1.

257.  $7a^4b^3 - 6a^3b^2 + 5a^2b - 3a$ . 258.  $x^4y^2z + 2x^2y + 6$ . 259.  $4x^4$ .

261.  $-4x^2 - 2x + 4; -2a^2 - a - 4; -x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 3x - 4; -1; -7a^4b^3 + 6a^3b^2 - 5a^2b + 3a; -x^4y^2z - 2x^2y - 6; -4x^4$ .

- 13** 262. 45x; б)  $21xy^2a^2b^3$ ; в)  $-24a^3b^4$ ; г)  $-24a^4x^4$ . 263. а)  $\frac{14}{15}a^3b^3c^6$ ; б)  $\frac{5}{6}x^4y^6$ ;  
 в)  $-\frac{3}{5}x^3y^3z^4$ ; г)  $x^6y^4$ . 264. а)  $0,69a^5$ ; б)  $3,6x^6y^6$ ; в)  $-26x^3y^2z^4$ ; г)  $-3,5a^5b^3c^6$ .  
 265. а)  $6a^7b^4c^3$ ; б)  $-20a^3bc^5t^2p$ ; в)  $\frac{1}{9}x^3a^2cp^3t^2$ ; г)  $4x^4t^3p^2$ . 266. а)  $60abc$ ; б)  $70x^2y^3z^2$ ;  
 в)  $-70x^2y^3z^3$ ; г)  $0,7a^3p^5t^7$ . 267. а)  $x^4y^3z^2$ ; б)  $a^2b^2c^2x^3$ ; в)  $-a^6x^4t^5$ ; г)  $-5a^{10}b^5c^8$ .  
 268. а) 243; б)  $a^5$ ; в)  $243a^5$ ; г)  $243a^{10}$ ; 269. а)  $49x^2$ ; б)  $\frac{1}{49}x^4$ ; в)  $0,49x^6$ ; г)  $0,0049x^8$ .  
 270. а)  $-125a^6b^3$ ; б)  $216x^3y^9$ ; в)  $-343a^9b^9$ ; г)  $27a^{18}b^9$ . 271. а)  $16x^4y^8$ ; б)  $0,0016x^8y^{12}$ ;  
 в)  $\frac{1}{16}a^{20}b^{16}$ ; г)  $\frac{81}{625}a^{12}b^{20}$ . 272. а)  $56,25a^8b^6c^{10}$ ; б)  $3,375x^9y^3z^6$ ; в)  $\frac{16}{81}a^4p^{12}t^4$ ; г)  $-\frac{1}{32}x^{15}y^{10}z^5$ .  
 273. а)  $4,5x^4y^5$ ; б)  $-30a^7b^3x^8$ ; в)  $-2a^{12}b^7c^{17}x^{12}$ ; г)  $-8x^4y^9p^5t^9$ .  
 274. а)  $-72x^{10}y^{10}z^9$ ; б)  $-0,02a^9b^6x^{15}$ . 275. а)  $64a^{12}$ ; б)  $x^{12}y^{24}$ ; в)  $\frac{1}{64}a^6x^6$ ; г)  $a^{24}b^{12}c^{36}$ .  
 276. а)  $27x^{18}y^{21}$ ; б)  $-30a^{13}b^{12}$ .

- 14** 277. а)  $3a+5b+c+2$ ; б)  $2x-y+5z-2$ ; в)  $9a-4b-7c+3$ ; г)  $\frac{1}{3}a^3+0,6a^2-a-6$ .  
 278. а)  $2a-6b$ ; б)  $7x-4y$ ; в)  $10x^2+8y^2$ ; г)  $6a^2+4b^2$ . 279. а)  $3x^2+2xy-2y^2$ ; б)  $2a^2$ ;  
 в)  $2x^2-2x-3$ ; г)  $3b^2$ . 280. а)  $x+2$ ; б)  $-2b$ ; в)  $a$ ; г)  $xy+4yz+3xz$ . 281. а)  $x^2-4xy$ ;  
 б)  $x^2-x-1$ ; в)  $-5a-11b+5$ ; г)  $3a+4ab$ . 282. а)  $-6x^3+8x+6$ ; б)  $a+5b-8c+2d$ ;  
 в)  $6x^3+3x^2+4x-3$ ; г)  $a^3+3a^2b-4ab^2+5b^3$ . 283. а)  $-x^3+3x^2+2x-5$ ; б)  $6a+5b-3c+2$ ;  
 в)  $4x-3y-7z-5$ ; г)  $-8a^3-2a^2+a+8$ . 284. а)  $-3x+y$ ; б)  $2a-2b$ ; в)  $5x^2-2x$ ; г)  $a^2b-15a^2$ .  
 285. а)  $2a^2-3ab+3b^2$ ; б)  $2a^2-8a+1$ ; в)  $3a^3+2a^2+3a$ ; г)  $a+2c$ .  
 286. а)  $0,2x-0,3y+0,2z$ ; б)  $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{8}$ ; в)  $\frac{1}{4}xy+\frac{1}{5}xz-\frac{5}{6}yz$ ; г)  $\frac{3}{5}y^2$ .  
 287. а)  $4x+2$ ; б)  $-4x-12y$ ; в)  $-8a-4b$ ; г)  $-x^2+6x$ . 288. а)  $-12x+2y+16$ ; б)  $-2a-12b+3c$ ;  
 в)  $-x+6y-31z$ ; г)  $7a+6b$ . 289. а)  $-11x+9$ ; б)  $8x^2-x+3$ ; в)  $-8x^2+x-3$ ; г)  $2x^2+7x-7$ .  
 290. а)  $-6x+10y$ ; б)  $-10x^2-8x+6$ ; в)  $-12x^2-18x-16$ ; г)  $-10xy+14x^2-4y^2$ .  
 291. а)  $-10+6x+8x^2-14x^3$ ; б)  $4x^3+14x^2-4x+14$ ; в)  $6x^2-8x^3-14$ ; г)  $10x^3-4x^2-6x+14$ .  
 292. а)  $-3$ ; б) 15; в)  $-7\frac{1}{2}$ ; г)  $-45$ ; д) 7. 293. а)  $2x+2$ ; б)  $-2a-1$ ; в)  $5a-2b$ ; г)  $-x^2+12x$ .  
 294. а)  $-x$ ; б)  $-2a+2b$ ; в)  $-a-b$ ; г)  $2x-4y$ . 295. а)  $-a+16b$ ; б)  $16a^2-20a$ ; в)  $-x-4y$ ;  
 г)  $-8x^2+4x$ . 296. Уїаїсїво: Парните броеви се запишуваат како  $2n+2; 2n+4, \dots$ , а  
 непарните:  $2n+1; 2n+3; 2n+5, \dots$  за секој  $n \in \mathbb{N}$ .  
 297. 12; 14; 16. 298. 15; 17; 19. 299. 11; 12; 13; 14. 300.  $10+12+14=36$ .

- 15** 301. а)  $15x+10$ ; б)  $-20x+28$ ; в)  $3a^2+2a$ ; г)  $2a-4$ . 302. а)  $2x^2-5x$ ; б)  $6ax+15bx$ ;  
 в)  $-10a^2+8a$ ; г)  $-2a^3+4a^2b$ . 303. а)  $-18a^3+12a^2-12a$ ; б)  $-20a^3+4a^3b-12a^2$ ;  
 в)  $9b^4-21b^3+24b^2$ ; г)  $-5a^2b+15a^2b^2-5a^2b^3$ . 304. а)  $-12x^6+9x^5-15x^4+27x^3$ ;  
 б)  $12x^5-20x^3-8x^2+44x$ ; в)  $35a^5b^2-25a^4b^2+15a^2b^2+10ab^2$ ; г)  $15a^4x^6-a^5x^5-5a^4x^4$ .  
 305. а)  $2a+20$ ; б)  $-3x$ ; в)  $-2x^2+4x$ ; г)  $x^3-4xy+y^3$ . 306. а)  $5a^3-20a^2b+21ab^2-2b^3$ ;  
 б)  $-12a^3-8a^2$ ; в)  $-5x^3y-2x^2y^2+xy^3$ ; г)  $-x^4-x^3+6x^2$ .

- 16** 307. а)  $10xy+15x+4y+6$ ; б)  $12x^2-5x-3$ ; в)  $5xy-2x-30y+12$ ; г)  $x^2+x-6$ .  
 308. а)  $8a^2+18ab+9b^2$ ; б)  $15a^2-2ab-8b^2$ ; в)  $12a^4-7a^2b-10b^2$ ; г)  $3a^4-13a^2b^2+14b^4$ .  
 309. а)  $a^3-b^3$ ; б)  $a^3+b^3$ ; в)  $8a^3+27b^3$ ; г)  $64b^3-125a^3$ . 310. а)  $2a^3-a^2+a+4$ ;  
 б)  $14-51x+22x^2+45x^3$ ; в)  $28a^3-45a^2-2a+15$ ; г)  $-40x^3+50x^2-7x-6$ .  
 311. а)  $a^2-b^2+2bc-c^2$ ; б)  $x^2-2xz-y^2+z^2$ ; в)  $x^3+3x^2-10x-24$ ;  
 г)  $a^2b+a^2c+ab^2-ac^2-b^2c-bc^2$ . 312. а)  $a^4-1$ ; б)  $10x^3-11x^2-11x-2$ ; в)  $2a^3-7a^2+a+4$ ;  
 г)  $28x^3-45x^2+38x-15$ . 313. а)  $-45x^3-58x^2+19x+14$ ; б)  $-40a^3+70a^2-17a-10$ ;  
 в)  $x^5-32$ ; г)  $32a^5+1$ . 314. а)  $6a^7-23,4a^6+46,3a^5-35,75a^4-38,75a^3-24a^2+110a-4$ ;  
 б)  $3,5y^4-8,2y^3-14,5y^2-36,8y+8$ ; в)  $-0,5x^4-0,875x^3-1,75x^2-3,5x+1$ ;  
 г)  $-3a^5+6a^4+2a^3-5a^2+8a-12$ . 315. а)  $26a^2-42$ ; б)  $4x^3+2x^2$ ; в)  $-18x^2-2xy+14y^2$ ;  
 г)  $5a^2$ . 316. а)  $n^3-n$ ; б)  $8n^3-8n$ ; в)  $8n^3-12n^2-2n+3$ .

- 17** 317. а)  $a^2-4$ ; б)  $x^2-y^2$ ; в)  $25-a^2$ ; г)  $81-x^2$ . 318. а)  $25x^2-4$ ; б)  $49-25a^2$ ;  
 в)  $9a^2-25b^2$ ; г)  $64x^2-169y^2$ . 319. а)  $\frac{4}{9}x^2-36$ ; б)  $\frac{9}{16}a^2-\frac{1}{9}b^2$ ; в)  $0,04-x^2$ ; г)  $1,21a^2-0,25b^2$ .  
 320. а)  $25x^4-9y^6$ ; б)  $\frac{1}{25}x^4-25y^2$ ; в)  $\frac{1}{49}a^{10}-\frac{4}{81}b^6$ ; г)  $\frac{4}{9}a^4b^2-0,01c^2$ .  
 321. а)  $36x^4-0,36y^6$ ; б)  $1\frac{7}{9}a^2-2\frac{1}{4}b^2$ ; в)  $\frac{4}{25}x^2y^4-0,04z^2$ ; г)  $6,25a^4-2,25b^4$ .  
 322. а) 6391; б) 9996; в) 39984; г) 999900; д) 249856; е) 35,99; в) 48,9975; ж)  $24\frac{3}{4}$ .

- 18** 323. а)  $x^2+6x+9$ ; б)  $x^2-4x+4$ ; в)  $225+30x+x^2$ ; г)  $36-12x+x^2$ .  
 324. а)  $9a^2+30ab+25b^2$ ; б)  $4a^2-28ab+49b^2$ ; в)  $4a^2-12a+9$ ; г)  $81+90x+25x^2$ .  
 325. а)  $4x^2-2xy+\frac{y^2}{4}$ ; б)  $\frac{x^2}{16}+4x+64$ ; в)  $0,04x^2-2xy+25y^2$ ; г)  $16x^2+4xy+0,25y^2$ .  
 326. а)  $x^6-10x^3y+25y^2$ ; б)  $36x^4+84x^2y^3+49y^6$ ; в)  $25x^4-60x^2y^5+36y^{10}$ ;  
 г)  $x^8+\frac{1}{2}x^4y^4+\frac{1}{16}y^8$ . 327. а)  $a^4b^2-2a^2bc+c^2$ ; б)  $1+2a^3b^2+a^6b^4$ ; в)  $x^{2n}+4x^n+4$ ;  
 г)  $x^{2n}-6x^n y^n+9y^{2n}$ . 328. а) 961; б) 9604; в) 994009; г) 1004004; д) 51,84; е)  $72\frac{1}{4}$ .

329. а)  $-2a^2 + 60ab - 66b^2$ ; б)  $95x^2 - 54xa - 57a^2$ ; в)  $-4a + 2$ ; г)  $21x^2 + 40xy + 32y^2$ .

330. а)  $-3a^2 - 19ab - 5b^2$ ; б)  $-x^4 + x^3 - 3x^2 + 1$ ; в)  $5a^2$ ; г) 144.

19 331. а)  $3x$ ; б)  $-3y$ ; в)  $-3a$ ; г)  $2b$ . 332. а)  $3,5x$ ; б)  $-2,2y$ ; в)  $-2\frac{2}{3}a$ ; г)  $\frac{4}{7}b$ .

333. а) 8; б)  $-5$ ; в)  $-5$ ; г) 4. 334. а)  $3a^3$ ; б)  $-4b$ ; в)  $-5x^5$ ; г)  $2y$ . 335. а)  $4x$ ; б)  $-9b^2$ ; в)  $-8y$ ; г)  $7b^2$ . 336. а)  $4ab^2$ ; б)  $-7a^2$ ; в)  $-6x^4y^2$ ; г)  $3xy$ . 337. а)  $3a^2b$ ; б)  $-9a^2c$ ;

в)  $-\frac{1}{2}yz^2$ ; г)  $\frac{1}{2}xy^2$ . 338. а)  $2a^2b$ ; б)  $-10b$ ; в)  $-y$ ; г)  $\frac{3}{4}xy^3$ . 339. а)  $\frac{2a^2}{b^2}$ ; б)  $-0,04\frac{b^2}{a^2}$ ; в)  $-\frac{3z}{2x}$ ; г)  $\frac{1}{3x^2y^2z^2}$ . 340. а)  $4a$ ; б)  $-2$ ; в)  $-2x$ ; г)  $-3a$ . 341. а)  $-10a^3$ ; б)  $2a^2c$ ; в)  $-2x$ ; г)  $-x^3$ .

342. а)  $3a + 4b$ ; б)  $-5x + 3y$ ; в)  $15a^2 - b$ ; г)  $-3x^2 + 4x - 1$ ; д)  $4a - 2b + 3c$ ; е)  $-4,5ab - 3,5bc - 2,5ac$ .

343. а)  $3a^2 - 2$ ; б)  $11a^3 + 6a - 2$ ; в)  $a^2 + b^3 + c$ ; г)  $1 - 2x + 3x^2$ . 344. а)  $0,2y - 0,4z + 0,5x$ ;

б)  $-1,2x^2 + 1,3x - 1,4$ ; в)  $8a - 7b + 6c$ ; г)  $-3x^2 + 2x + 1$ . 345. а)  $2y - 4x - 3x^2y^2$ ;

б)  $-4 - 3ab + 5a^2b^2$ ; в)  $-2bc^2 + 5a^2c - 3ab^2$ ; г)  $2x^3z - 5yz^2 - 3x^2y^2$ . 346. а)  $-3a^3 + 6a + 9$ ;

б)  $4a + 8 - 12b$ ; в)  $-2xyz^2 + z - 4y^2$ ; г)  $4ab^2 - 3bc^2 + 2a^2c$ . 347. а)  $7a - 2a^2$ ; б) 0;

в)  $-6a - b$ ; г)  $xyz - x$ . 348. а)  $17 - 15x$ ; б)  $-x^2 - 2x$ ; в)  $30,8a - 4,7$ ; г)  $3\frac{1}{3}a^2 - 8\frac{1}{2}a$ .

349. а)  $-x - 3y + 2$ ; б)  $4a - 5b$ ; в)  $6x + 18y$ ; г)  $1\frac{1}{2}x^2$ .

20 350. а)  $x + 3$ ; б)  $x - 4$ ; в)  $x - 3$ ; г)  $x - 2$ . 351. а)  $2x - y$ ; б)  $3x - 2y$ ; в)  $3x - 4y$ ;

г)  $4x - 5y$ . 352. а)  $3x^2 + 4x - 2$ ; б)  $5x + 4$ ; в)  $x^2 - x + 1$ ; г)  $a^2 - ab$ .

353. а)  $x - y$ ; б)  $3x - 2y$ ; в)  $3x^2 - 4x + 2$ ; г)  $x^3 + 5$ . 354. а)  $x^2 + x + 2$ ; б)  $x^2 + 3x + 2$ ;

в)  $5x^2 - 3x + 1$ ; г)  $-3x^3 + 2x^2 - x + 1$ . 355. а)  $a^2 + 2a + 4$ ; б)  $a^3 - 2a^2 + 4a - 8$ ;

в)  $a^4 - a^3 + a^2 - a + 1$ ; г)  $16a^4 + 20a^2 + 25$ . 356. а)  $a + 1$ ; б)  $a^2 - 2ab + b^2$ ; в)  $4a^2 + 4ab + b^2$ ;

г)  $9a^2 - 12ab + 4b^2$ . 357. а)  $x - 4y$ ; б)  $2,7x^3 - 1\frac{5}{8}$ ; в)  $2x^2 - 4x + 3$ ; г)  $x + 1$ .

21 358. Бројни изрази: а), г), ф). Рационални изрази: б), в), д), е), ж). 359. б), в) г), д).

360. в), г), е), ж). 361. а)  $-1071$ ; б)  $15\frac{7}{128}$ ; в)  $4,5$ ; г)  $75\frac{1}{4}$ . 362. а)  $3\frac{11}{15}$ ; б)  $-2$ ; в)  $\frac{3}{4}$ ;

г) 0. 363. а) 5; б)  $-\frac{1}{4}$ ; в) 1; г)  $-1$ . 364. а)  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; б)  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; в)  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; г)  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

365. а)  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ ; б)  $\mathbb{R} \setminus \{8\}$ ; в)  $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ ; г)  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ . 366. а)  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}$ ; б)  $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ ;

в)  $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$ ; г)  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ . 367. а)  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ ; б)  $\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$ ; в)  $\mathbb{R}$ ; г)  $\mathbb{R}$ . 368. а)  $\mathbb{R} \setminus \{1; 5\}$ ;

б)  $\mathbb{R} \setminus \{-3; -4\}$ ; в)  $\mathbb{R} \setminus \{0; 6\}$ ; г)  $\mathbb{R} \setminus \{7; -3\}$ . 369. а)  $\mathbb{R}^+$ ; б)  $\mathbb{R}^+$ ; в)  $n \geq 3$  и  $n \in \mathbb{N}$ ; г)  $n > 2$  и  $n \in \mathbb{N}$ .

22 370.  $3 \cdot 5$ ;  $2^3 \cdot 3$ ;  $2^2 \cdot 3^2$ ;  $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ ;  $2^3 \cdot 3^2$ ;  $2^3 \cdot 3 \cdot 5$ ;  $2^2 \cdot 7^2$ ;  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ ;  $2^9$ ;  $2^2 \cdot 3 \cdot 101$ .

371. а)  $2(x + y)$ ; б)  $7(x - y)$ ; в)  $5(2x + y)$ ; г)  $9(x - 2y)$ ; д)  $6(x + 2)$ ; е)  $8(1 - 3x)$ ;

- е)  $5(1+x)$ ; ж)  $3(x-1)$ . **372.** а)  $x(a-b)$ ; б)  $a(x-1)$ ; в)  $c(d+b)$ ; г)  $y(x-z)$ ;  
 д)  $x(x+y)$ ; е)  $a^3(a-1)$ ; ж)  $4b(2a+1)$ ; з)  $4x^2(1+3y)$ . **373.** а)  $4x^2y^2(xy-2)$ ;  
 б)  $3a^2(3a-2b)$ ; в)  $-5y(2a+5b)$ ; г)  $2a^2b(4b^2+3a)$ ; д)  $2ax(ab+3x)$ ; е)  $5ab^2(a^2c-4)$ .  
**374.** а)  $3(x+2y-3z)$ ; б)  $7(2x-3y+1)$ ; в)  $a(x+y-z)$ ; г)  $5a(b-c+d)$ .  
**375.** а)  $5x(x-2y-y^2)$ ; б)  $4ax(1-2x+3x^2)$ ; в)  $5x^2y(3xy+2-4y^2)$ ; г)  $3ab(1-2ab+3a^2b^2)$ .  
**376.** а)  $m(a+b+c+d)$ ; б)  $x(a-b-c+d)$ ; в)  $2a(x+2y-3z-4t)$ ; г)  $ax(1-bx+cx^2-dx^3)$ .  
**377.** а)  $(x-y)(a+b)$ ; б)  $(a-b)(x-y)$ ; в)  $(a-2)(5x+3y)$ ; г)  $(x-4)(4a-9b)$ .  
**378.** а)  $(y+1)(x+3)$ ; б)  $(3x+2)(4x-5)$ ; в)  $(x-y)(a+b)$ ; г)  $(a+b)(1-3x)$ .  
**379.** а)  $(x+y)(3a-1)$ ; б)  $(y-5)(2x-1)$ ; в)  $(b+c)(a-2)$ ; г)  $(y-3)(2x-3)$ .  
**380.** а)  $(x-2)(a+b-c)$ ; б)  $(x^2+1)(2a-3b+5c)$ ; в)  $(a-c)(3x-2y+1)$ ; г)  $(x-y)(4a-5b-3)$ .  
**23** **381.** а)  $(x-3)(x+3)$ ; б)  $(5-y)(5+y)$ ; в)  $(11-x)(11+x)$ ; г)  $(x-1)(x+1)$ .  
**382.** а)  $(3x-7)(3x+7)$ ; б)  $(15-4y)(15+4y)$ ; в)  $(9x-10)(9x+10)$ ; г)  $(2x-13)(2x+13)$ .  
**383.** а)  $(x-6y)(x+6y)$ ; б)  $(4x-11y)(4x+11y)$ ; в)  $(17x-15y)(17x+15y)$ ;  
 г)  $(25x-24y)(25x+24y)$ . **384.** а)  $5(2x-1)(2x+1)$ ; б)  $2(x-3y)(x+3y)$ ; в)  $5(3-x)(3+x)$ ;  
 г)  $7(2x-3y)(2x+3y)$ . **385.** а)  $\left(\frac{2}{3}x-\frac{5}{7}y\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{5}{7}y\right)$ ; б)  $\left(\frac{1}{8}-\frac{2}{5}y\right)\left(\frac{1}{8}+\frac{2}{5}y\right)$ ;  
 в)  $(0,5x-0,2y)(0,5x+0,2y)$ ; г)  $(0,1-1,1x)(0,1+1,1x)$ . **386.** а)  $x(x-5)(x+5)$ ;  
 б)  $2x(x-1)(x+1)$ ; в)  $2y(9-y)(9+y)$ ; г)  $xy(y-2)(y+2)$ . **387.** а)  $(a+b-c)(a+b+c)$ ;  
 б)  $-b(2a+b)$ ; в)  $x(x-6)$ ; г)  $x(16-x)$ . **388.** а)  $4ab$ ; б)  $-4xy$ ; в)  $20a$ ; г)  $-16x$ .  
**389.** а)  $11(2a+1)$ ; б)  $-8(a+1)$ ; в)  $-4(x+3y)(4x-y)$ ; г)  $-(xy+8)(5xy+2)$ . **390.** а) 3400;  
 б) 1100; в) 400; г) 633; д) 860; е) 344500; ж)  $\frac{100}{3}$ ; з) 305. **391.** а) 1 б) 1;  
**392.** а) 1575, Упатство.  $(40-5)(40+5)=40^2-5^2$ ; б) 9996; в) 39991; г) 359984; д) 999900.  
**24** **393.** а)  $(x+5)^2$ ; б)  $(y-7)^2$ ; в)  $(a+11)^2$ ; г)  $(b-9)^2$ . **394.** а)  $(6x+2y)^2$ ;  
 б)  $(5x-3y)^2$ ; в)  $(7a+4b)^2$ ; г)  $(2a-3b)^2$ . **395.** а)  $(11x-1)^2$ ; б)  $(1+5x)^2$ ; в)  $(1-x)^2$ ;  
 г)  $(4x+1)^2$ . **396.** а)  $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)^2$ ; б)  $\left(\frac{3}{4}x-\frac{2}{3}y\right)^2$ ; в)  $\left(\frac{5}{6}a+\frac{3}{5}b\right)^2$ ; г)  $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2$ .  
**397.** а)  $(5x+0,1)^2$ ; б)  $(0,5-x)^2$ ; в)  $(0,2x+0,3y)^2$ ; г)  $(0,4x-2,5y)^2$ . **398.** а)  $(5+4x)^2$ ;  
 б)  $(2x-7y)^2$ ; в)  $(16-3x)^2$ ; г)  $(4x+15y)^2$ . **399.** а)  $2(x+1)^2$ ; б)  $3(3x-2y)^2$ ; в)  $x(x-4)^2$ ;  
 г)  $b(3a+b)^2$ . **400.** а)  $7y(x+2)^2$ ; б)  $6a(x-3a)^2$ ; в)  $3(5xy-1)^2$ ; г)  $15xy^2(x-3y)^2$ .

401. а)  $(x-y-3)(x-y+3)$ ; б)  $(3x-1+y)(3x-1-y)$ ; в)  $(5-a+b)(5+a-b)$ ;  
 г)  $8(3+y)(4-y)$ . 402. а)  $(3x+2)(5x-3)$ ; б)  $-2(2x-1)(x+3)$ ; в)  $(x+1)(3x-2)$ ;  
 г)  $(x-2)(7x+11)$ ; д)  $(3x-1)(7x+6)$ .

25

403.  $4^4; 16^3; 2^{14}; 8^5$ . 404. 625 пати. 405. а) 58. Упатство.  $1000^{19} = 10^{3 \cdot 19} = 10^{57}$ , бројот има 57 нули плус 1; б) 45; в) 19; г) 40. 406. 32 и 28.

407. 936. Уџајџсџво. Збирот на цифрите на бараниот број е  $3x+x+2x=9 \cdot k$  или  $6x=9 \cdot k$ . За  $k=1$  не е возможно, бидејќи  $x=\frac{9}{6}$ , а за  $k=2$ ,  $x=3$  па бараниот број ќе биде 936. За  $k=3$  не е возможно. Зошто?

408. 96125, Уџајџсџво. Броевите 125; 216; 343; 512 и 729 се единствените трицифрени броеви што се кубови на некој број. Бараниот број треба да завршува на еден од нив. Бидејќи нема квадрат на број кој завршува на 2; 3 или 7, останува дека последните три цифри можат да бидат 125 или 512. Најголем квадрат на број кој има три цифри е 961, а тој го исполнува условот на задачата, па затоа бараниот најголем број е 96125. 409.  $2n \cdot (2n+2) = 4n(n+1)$ . Бидејќи  $n \in \mathbb{N}$ , во производот  $n \cdot (n+1)$  барем еден од множителите е парен, па затоа  $n \cdot (n+1) = 2k$ .

Значи  $2n \cdot (2n+2) = 4n \cdot (n+1) = 4 \cdot 2k = 8k$ . 410.  $10a+b+10b+a = 11 \cdot (a+b)$ .

411.  $(10a+b) - (10b+a) = 3 \cdot (3a-3b)$ . 412.  $a^2 - (a-1)(a+1) = a^2 - a^2 + 1 = 1$ .

413. 20. Уџајџсџво. Види ја задачата 412. 414. 2009010. Уџајџсџво. Ако извршиш групирање како разлика од квадрати, се добиваат 1002 собироци  $4007+4003+\dots+7+3$ . Ако нив ги групираш се добива  $(4007+3)+(4003+7)+\dots = 501 \cdot 4010$ .

415.  $2^{5n} - 2^{5n} \cdot 2^3 + 2^{5n} \cdot 2^5 + 2^{5n} \cdot 7 = 2^{5n} \cdot (1-8+32+7) = 2^{5n} \cdot 32 = 2^{5(n+1)} = (2^{n+1})^5$ .

416. 13225, Уџајџсџво. Во секој ред или колона извлечи пред заграда заеднички множител. 417. 12; 14; 16; 18. Уџајџсџво.  $(2n+4)(2n+6) - 2n(2n+2) = 120$ . 418. 49; 50.

419. 24; 26. 420. а)  $(5^{2n+4} \cdot 2^{6n}) : (5^{2n+3} \cdot 2^{6n-3}) = 5^{2n+4-2n-3} \cdot 2^{6n-6n+3} = 5 \cdot 8 = 40$ ;

б)  $\frac{3 \cdot 3^n}{3^{n-2} \cdot 3^3} = \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}} = 1$ ; в)  $\frac{3^{2n+4} \cdot 2^{6n}}{3^{2n+3} \cdot 2^{6n-3}} = 3^{2n+4-2n-3} \cdot 2^{6n-6n+3} = 3 \cdot 8 = 24$ .

421.  $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4) = 5n+10 = 5 \cdot (n+2)$ . За  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n+2 \geq 3$ ,

следува дека збирот е сложен број. 422.  $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + (n+4)^2$ ,

со степенување и трансформирање во нормален вид се добива  $5 \cdot (n^2 + 4n + 6)$ .

423.  $\overline{aaa} = 100a + 10a + a = 111a = 37 \cdot 3a$ .

424.  $111^{222} \cdot 3^{222} - 111^{333} \cdot 2^{333} = 111 \cdot (111^{221} \cdot 3^{222} - 111^{332} \cdot 2^{333}) = 37 \cdot 3 \cdot (111^{221} \cdot 3^{222} - 111^{332} \cdot 2^{333})$ .

425. а) 3; б) 8; в) 27; г) 6.



426.  $\overline{abOc} - \overline{cOba} = 1000a + 100b + c - 1000c - 10b - a = 999a + 90b - 999c = 9 \cdot (111a + 10b - 111c)$ .  
 427.  $\overline{aOb} + \overline{bOa} = 100a + b + 100b + a = 101a + 101b = 101(a + b)$ . 428.  $a \cdot (a+1) + (a+1) = a^2 + a + a + 1 = (a+1)^2$ . 429.  $2a(2a+2) + 1 = 4a^2 + 4a + 1 = (2a+1)^2$ . 430.  $(2a+1)(2a+3) + 1 = 4a^2 + 6a + 2a + 3 + 1 = 4a^2 + 8a + 4 = (2a+2)^2$ .

### ТЕМА 3

### КРУЖНИЦА И МНОГУАГОЛНИК. ПЛОШТИНА

1. 1.  $\angle AOB = 54^\circ$ . 2.  $\angle AOB = \angle COD$ . 3. а), б), д) и е). 4.  $\angle AOB = 72^\circ$ . 5.  $160^\circ$ .  
 6. а)  $72^\circ$ ; б)  $20^\circ$ ; в)  $80^\circ$ ; г)  $96^\circ$ ; д)  $54^\circ$ . 7. а)  $\frac{1}{9}$ ; б)  $\frac{1}{4}$ ; в)  $\frac{2}{5}$ ; г)  $\frac{2}{3}$ . 8.  $\angle AOC = 120^\circ$ .  
 9.  $\angle BOC = 205^\circ 13'$ . 10.  $\angle AOB = 80^\circ$ ,  $\angle BOC = \angle AOC = 140^\circ$ . 11.  $\angle AOB = 36^\circ$ ,  
 $\angle BOC = 72^\circ$ ,  $\angle COD = 108^\circ$ ,  $\angle AOD = 144^\circ$ . 12. Дијаметрите  $AC$  и  $BD$  образуваат 4 еднакви централни агли на кои им одговараат еднакви тетиви. 13.  $d = \frac{r}{2} = 19 \text{ mm}$ .  
*Уџаџсџво*. Радиусот, половината од тетивата и растојанието образуваат правоаголен триаголник, чиешто остри агли се  $60^\circ$  и  $30^\circ$ . 14.  $d = 8 \text{ cm}$ . 15.  $\angle BOD = 58^\circ$ ,  $\angle DOE = 58^\circ$ ,  
 $\angle EOC = 64^\circ$ .

2. 16. а)  $62^\circ$ ; б)  $28^\circ 10'$ ; в)  $46^\circ 15' 40''$ . 17. а)  $26^\circ$ ; б)  $114^\circ 30'$ ; в)  $55^\circ 3' 30''$ .

18. *Уџаџсџво*. Аголот  $\beta$  конструирај го како периферен агол над ист кружен лак со централниот агол  $\alpha$ . 19. а) Периферниот агол ќе се зголеми два пати; б) ќе се намали два пати; в) ќе се зголеми за  $17^\circ$ ; г) ќе се намали за  $9^\circ$ . 20. а)  $40^\circ$ ; б)  $12^\circ$ ; в)  $112^\circ 30'$ .

21. а)  $\frac{1}{2}$ ; б)  $\frac{1}{4}$ ; в)  $\frac{1}{5}$ ; г)  $\frac{1}{8}$ . 22.  $53^\circ$  и  $106^\circ$ . 23.  $\angle PSN = 38^\circ$ .

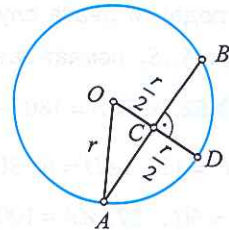
24.  $\angle ADB = \angle ADC + \angle CDB = \angle ADC + \angle CAB = 44^\circ + 26^\circ = 70^\circ$ . 25.  $\angle MPT = 60^\circ$ ,  $\angle MPN = 30^\circ$ .

26.  $\angle ACD = \angle ABD = 50^\circ$ . Оттука  $\angle CAD = 180^\circ - (70^\circ + 50^\circ) = 60^\circ$ . 27.  $\angle A = 37^\circ$ ;  
 $\angle B = 64^\circ$ ;  $\angle C = 79^\circ$ . 28.  $45^\circ, 75^\circ$  и  $60^\circ$ . 29.  $54^\circ, 54^\circ$  и  $72^\circ$ . 30.  $72^\circ 30'$ ;  $72^\circ 30'$  и  $35^\circ$ .

31. Централниот и периферниот агол се соодветно  $60^\circ$  и  $30^\circ$ , а дијагоналите се два пати поголеми од помалата страна на правоаголникот, т.е. по 14 cm.

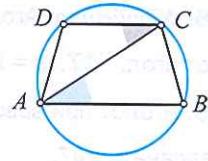
32. а) Од дадените агли се добива дека  $\gamma = 70^\circ$  откаде  $\angle AOB = 140^\circ$ ,  $\angle BOC = 96^\circ$   
 и  $\angle COA = 124^\circ$  (како централен агол); б)  $\angle AOB = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 180^\circ - (24^\circ + 31^\circ) = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$ . Аналогно  $\angle BOC = 114^\circ$  и  $\angle COA = 121^\circ$ . 33.  $\triangle ACO$  е правоаголен со хипотенуза  $r$  и катета  $\frac{r}{2}$ , што значи  $\angle AOC = 60^\circ$ .

Бидејќи  $\triangle ADO$  е рамностран следува дека централниот агол  $\angle AOB = 120^\circ$ , а периферниот агол што одговара на тетивата  $AB$  е  $60^\circ$ .





59.  $73^\circ, 99^\circ, 107^\circ, 81^\circ$ . 60. а) Нека  $AC$  е дијагонала.  $AB \parallel CD$  од каде што  $\angle BAC = \angle DCA$  (како наизменични агли.)  $\overline{AD} = \overline{BC}$  како тетиви со еднакви периферни агли.



61.  $30^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 150^\circ$ . 62. Согледај дека спротивните агли не се суплементни. 64. Види задача 35. 65. Според дијагоналите  $AC$  и  $BD$ ,  $ABCD$  е делтоид, што значи  $\angle B = \angle D = 90^\circ$ . Од друга страна  $\angle C = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ . 66. в) и г).

5 67. б) Не може, бидејќи  $5 + 4 \neq 8 + 7$ . 68.  $\overline{AD} = 11$  см. 69. а)  $\overline{AD} = 10$  см;

б)  $\overline{CD} = 4,8$  см; в)  $\overline{AB} = 6,4$  см. 70.  $\overline{BC} = 9$  dm,  $\overline{CD} = 6$  dm,  $\overline{AD} = 12$  dm, па  $L = 42$  dm.

71.  $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$ . Бидејќи  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = L$ , следува  $(\overline{AB} + \overline{CD}) + (\overline{BC} + \overline{AD}) = L$ , т.е.  $2(\overline{AB} + \overline{CD}) = L$ , или  $\overline{AB} + \overline{CD} = \frac{L}{2}$ . 72.  $\overline{DC} = 16$  см,  $\overline{AD} = 10$  см. Уиџисџво. Користи ја претходната задача. 73.  $\overline{AB} = 10,8$  см,  $\overline{AD} = 8,5$  см. 74.  $\overline{AB} = 7$  см,  $\overline{AD} = 6$  см.

75.  $L = 60$  см. 76. Од 71. задача  $L = 2(\overline{AB} + \overline{CD})$ , а средната линија на трапез е  $m = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD})$ , т.е.  $m = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot L = \frac{1}{4} \cdot L$ . 77.  $L = 18$  см. 78.  $m = 32$  см. 79.  $\overline{AB} + \overline{CD} \neq \overline{AD} + \overline{BC}$ .

(Кога би било  $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$ , би се добило  $\overline{AB} = \overline{BC}$ , т.е. би бил квадрат).

80.  $a = 12$  см;  $b = 4$  см. 81.  $L = 2(\overline{BC} + \overline{AD})$ ,  $\overline{BC} = \overline{AD} = c$  па  $L = 2 \cdot 2c = 4c$ .

6 82. а) 5; б) 11; в) 12 страни. 83. Не може. 84. Тие агли се по  $135^\circ$ . 85.  $100^\circ$ .

86.  $n = 27$ . 87. Кај 12 - аголникот. 88. Кај четириаголникот. 89. 27. 90.  $n = 12$ .

91.  $n = 8, \alpha = 135^\circ$ . 92. а)  $1440^\circ$ ; б)  $2880^\circ$ ; в)  $3960^\circ$ . 93. а)  $\alpha = 168^\circ$ ; б)  $\alpha = 120^\circ$ .

(Уиџисџво.  $\alpha = 180^\circ - \alpha_1$ ). 94.  $n = 20, D_{20} = 170$ . 95.  $n = 8$ . 96.  $n = 10$ , а збирот на внатрешните агли е  $1440^\circ$ . 97.  $n = 5$ . 98. Не, бидејќи се добива  $n = 14, 4$ .

99. Во  $\triangle ABC : 36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$ ; Во  $\triangle ACD : 72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$ . 100.  $L = 58,1$  см. 101.  $a = 3,15$  см.

102.  $n = 11$ . 103.  $L = 165$  см.

7 104. а)  $120^\circ$ ; б)  $\angle AOB \approx 51^\circ 25' 43''$ ; в)  $36^\circ$ . 105.  $\angle AOB = 24^\circ, \angle OAB = \angle OBA = 78^\circ$ .

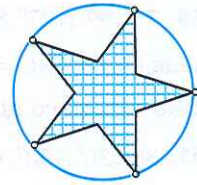
106.  $\angle MKN = 30^\circ$ . 107. Овие три агли се периферни агли над еднакви тетиви во кружницата опишана околу петаголникот. 108.  $70^\circ$ . 109. а)  $n = 20$ ; б)  $n = 16$ ;

в)  $n = 12$ ; г)  $n = 40$ . 110. Не постои. 111. а)  $150^\circ$ ; б)  $30^\circ$ ; в)  $30^\circ$ . 112. а)  $160^\circ$ ;

б)  $170^\circ$ . 114. Најмногу  $120^\circ$ , и тоа кај рамностран триаголник. 115.  $n = 15, D_{15} = 90$ .

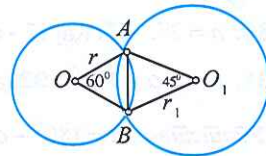
**116. Ујайсїво:** Аголот меѓу апотемите е еднаков со централниот агол. **117.**  $n = 10$ . **118.**  $168^\circ$ .

**119.** Аголот при врвот на ѕвездата е  $36^\circ$ . Види ја задачата **99** и задачата **107**.



**8** **120. Ујайсїво.** Со помош на кружница  $k(O; 3,5\text{cm})$  и централен агол  $\angle AOB = 120^\circ$ . **121.**  $k(O; 3,8\text{cm})$  и централен агол  $\angle AOB = 90^\circ$ . **125. Ујайсїво.** Нацртај го карактеристичниот триаголник  $ABO$  со основа  $\overline{AB} = a$  и агли при основата  $\alpha = 54^\circ$ . **126.** Карактеристичниот триаголник  $ABO$  има основа  $\overline{AB} = a$  и агли при основата  $\alpha = 67^\circ 30'$ . **129. Ујайсїво.** Конструирај го карактеристичниот триаголник  $ABO$  кој е рамностран триаголник со висина  $h = r$ . Страната  $\overline{OA} = R$  е еднаква на радиусот на опишаната кружница околу бараниот триаголник. **131. Ујайсїво.** Прво конструирај рамнокрак триаголник  $ACO$  со основа  $\overline{AC} = 4,5\text{cm}$  и агли при основата од  $30^\circ$ . Кружницата  $k(O; R = \overline{OA})$  е опишаната кружница околу бараниот шестаголник. **133. Ујайсїво:** Применувај ја постапката од **131** задача со таа разлика што  $\overline{AC} = 3,2\text{cm}$  и аглите при основата се  $45^\circ$ . **134.** Карактеристичниот триаголник  $ABO$  се конструира така што точките  $A$  и  $B \in R$  со од различна страна на  $OS$  и  $\angle SOA = \angle SOB = 30^\circ$ . **135.** Нека  $T$  е допирната точка на  $k$  со тангентата повлечена од точката  $S$ ,  $A$  и  $B \in R$  и  $\angle TOA = \angle TOB = 30^\circ$ .  $\triangle ABO$  е карактеристичен триаголник на шестоаголникот. **137.** а)  $n = 5$ ; б)  $n = 8$ ; в)  $n = 10$ .

**138.** Центрите  $O$  и  $O_1$  на  $k$  и  $k_1$  се од различни страни на  $AB$  и  $\angle ABO = \angle BAO = 60^\circ$ ,  $\angle BAO_1 = \angle ABO_1 = 67^\circ 30'$ , а радиусите се  $r = \overline{OA} = \overline{OB}$ ,  $r_1 = \overline{O_1A} = \overline{O_1B}$ .



**9** **140.** а)  $c \approx 20\text{cm}$ ; б)  $b = 12\text{cm}$ ; в)  $a = 72\text{cm}$ ; г)  $a = 7\text{cm}$ ; д)  $b = 77\text{cm}$ ; е)  $c = \frac{5}{12}\text{dm}$ .

**141.** а)  $a = 15\text{cm}, b = 13\text{cm}, c = 14\text{cm}, L = 42\text{cm}$ . **142.** а)  $b = 21\text{cm}, c = 29\text{cm}, L = 70\text{cm}$ ; б)  $L = 56\text{cm}$ . **143.** Периметарот на триаголникот ќе се зголеми за  $6,1\%$ . **144.**  $b = 52\text{cm}, L = 156\text{cm}$ . **145.** а)  $b = 4\text{cm}, c = \sqrt{6^2 + 4^2} \approx 7,2\text{cm}, L \approx 17,2\text{cm}$ . **146.** а)  $b = 10\text{cm}, c \approx 15,62\text{cm}, L \approx 37,62\text{cm}$ ; б)  $L \approx 261,64\text{cm}$ . **147.**  $b = \sqrt{17} \approx 4,12\text{cm}, c = \sqrt{65} \approx 8,06\text{cm}, L \approx 20,18\text{cm}$ .

**148.** а)  $c = 2 \cdot 5 = 10\text{cm}, b = 8\text{cm}, L = 24\text{cm}$ ; б)  $L \approx 14,47\text{cm}$ . **149.** Ортоцентарот се наоѓа во темето  $C$  на правиот агол, а центарот на опишаната кружница  $C_1$  во средината на хипотенузата  $c = 20\text{cm}$ . Оттука  $\overline{CC_1} = t_c = \frac{c}{2} = 10\text{cm}$ . **150.**  $12\text{m}$ . **151.** На висина од  $4\text{m}$ .

152. 110m 153. 17km. 154. 25km. 155. а) 39km; б)  $(5t)^2 + (12t)^2 = 52^2$ ,  $t^2 = 16$ , т.е.  $t = 4h$ .

156.  $p = 64$  см,  $q = 36$  см,  $a = 80$  см,  $b = 60$  см. 157.  $15^2 + b^2 = (25 - b)^2$ , на непознатата катета добиваме дека е  $b = 8$  см. 158.  $a = 18$  см,  $b = 24$  см. Уиайсїво. Претстави ги катетите на следниот начин:  $a = x - 3$ ,  $b = x + 3$ , па се добива равенката

$$(x - 3)^2 + (x + 3)^2 = 30^2, \text{ од каде } x = 21.$$

10 159. г)  $d = 3,7$  см. 160. а)  $L = 42$  см; б)  $L = 6,8$  dm; в)  $L = 158$  см; г)  $L \approx 70,7$  см.

161. а)  $L \approx 120$  см, Уиайсїво.  $(2b)^2 + b^2 = d^2$ . 162. б) 32 м.

163. 17 см. 164. а)  $L \approx 22,22$  см; б)  $L = 19$  см. 165. а)  $d \approx 8,5$  см.

167.  $L \approx 57,24$  см. 168.  $\overline{MN} = \sqrt{45} \approx 6,7$  см.

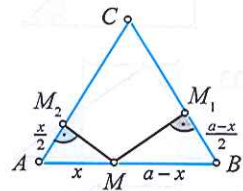
169.  $a^2 = d^2 - a^2$ ,  $a^2 = (d - a)(d + a)$ . Од овде  $a^2 = (a\sqrt{2} - a) \cdot 9,64$ ; (бидејќи  $a + d = 9,64$ ). Од оваа равенка се добива  $a \approx 3,95$  см,  $L \approx 15,8$  см. 170.  $\overline{EF} \approx 11,31$  см,

$L \approx 27,31$  см. 172. Уиайсїво.  $a = \frac{2h}{\sqrt{3}}$ . 173.  $b = 4$  см,  $a = 6,93$  см,  $L = 21,86$  см.

174.  $L \approx 16,4$  см. 175. Ако  $\overline{AM} = x$ , тогаш  $\overline{AM}_2 = \frac{x}{2}$ ,  $\overline{MB} = a - x$ ,  $\overline{BM}_1 = \frac{a - x}{2}$ .

$$\text{Оттаму } \overline{MM}_2 + \overline{MM}_1 = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} + \sqrt{(a - x)^2 - \left(\frac{a - x}{2}\right)^2};$$

$$\overline{MM}_2 + \overline{MM}_1 = \frac{x}{2}\sqrt{3} + \frac{a - x}{2}\sqrt{3} = \left(\frac{x}{2} + \frac{a - x}{2}\right)\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = h.$$



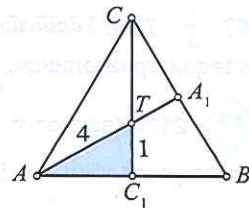
176.  $L \approx 32,79$  см.

11 177. а)  $b \approx 9,43$  см,  $L \approx 28,86$ ; б)  $L = 50$  см. 178. а)  $L = 96$  см; б)  $L = 100$  см.

179. Уиайсїво.  $b = \frac{L - a}{2}$ ,  $h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ . 180. Периметарот ќе се зголеми за 36 см ( $L = 36$  см,  $L_1 = 72$  см).

181. Дадената висина  $h$  е воедно и тежишна линија кон основата, па  $\overline{TC}_1 = \frac{1}{3}h = 1$  см,  $\overline{AT} = \frac{2}{3}t$ ,  $\frac{a}{2} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$ ;

$$a \approx 7,74 \text{ см}, L \approx 17,54 \text{ см.}$$



$a \approx 7,74$  см,  $L \approx 17,54$  см.

182. а)  $L = 40$  см; б)  $L = 91,2$  см. 183. а)  $d_1 = 24$  см; б)  $d_2 = 12$  см.

184.  $d_1 = 6$  cm,  $d_2 = 10,4$  cm. 185.  $a \approx 3,5$  cm,  $L \approx 14$  cm.

186. Уїаїсїво.  $a^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{3d}{2}\right)^2$ . 187.  $h = 4$  cm. 188. а)  $L = 92$  cm; в)  $L = 46$  cm.

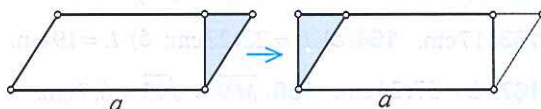
189. а)  $L = 68$  cm. 190.  $h = 12$  cm. 191. а)  $c \approx 3,5$  cm,  $L \approx 18$  cm; б)  $b = 3$  cm,  $L = 18$  cm.

192.  $L = 20$  cm,  $d = \sqrt{48}$  cm. Уїаїсїво. Од  $\frac{8-b}{2} = \frac{b}{2}$  се добива  $b = c = 4$  cm. 193. 2 m.

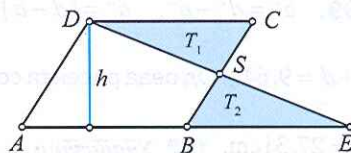
194.  $L = 18$  cm,  $d_1 = 5$  cm,  $d_2 \approx 7,2$  cm.

12 195. Поради основното својство  $3^\circ$ .

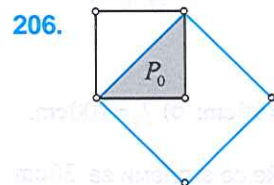
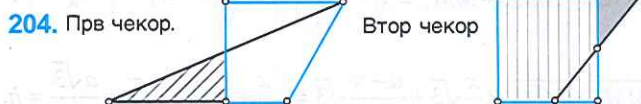
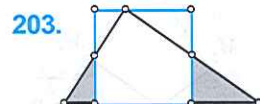
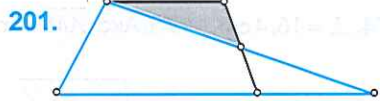
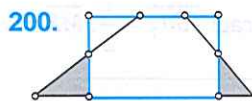
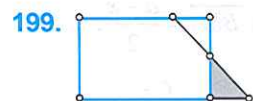
196. Треба да се отсеке обоениот триаголник и да се премести лево (како на цртежот).



197. Точката  $S$  е средина на отсечката  $BC$ . Обоениот триаголник  $T_1$  се завртува околу точката  $S$ , така што  $C$  се поклопи со  $B$  и  $D$  со  $E$ .



198. Уїаїсїво. Искористи го цртежот на задача 197.



Нека плоштината на обоениот триаголник е  $P_0$ . Тогаз плоштината на дадениот квадрат е  $P_1 = 2 \cdot P_0$ , а на новиот  $P_2 = 4 \cdot P_0 = 2 \cdot P_1$ .

207.  $\frac{1}{4}$ . 208. Уїаїсїво: Необоените правоаголници со дијагоналата се поделени на складни триаголници.

13 212. Квадратот и тоа за  $1$  cm<sup>2</sup>. 217.  $L = 24 \cdot 4 = 96$  cm,  $a = 24$  m,  $P = 576$  m<sup>2</sup>.

Трајче употребил  $96 : 5 = 480$  m жица. 218. Плоштината на патеката е

$P = 17,4^2 - 15^2 = 77,76$  m<sup>2</sup>, а бројот на плочките ќе биде 2592. 220.  $b = 55$  m,

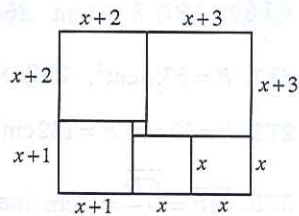
$P = 2640$  m<sup>2</sup> =  $26,4a$ . 221.  $P = 116 \cdot 75 = 8700$  m<sup>2</sup> =  $87a$ . Потребно е 304,5 kg семе.

222. 287,5 плочки. 224.  $P = 7 \cdot 15 = 105 \text{ cm}^2$ .

228. Од цртежот  $(x+1) + x + x = (x+2) + (x+3)$ ,

односно  $3x+1 = 2x+5$ ,  $x = 4 \text{ cm}$ ,  $L = 2 \cdot 13 + 2 \cdot 11 = 48 \text{ cm}$ ,

$P = 13 \cdot 11 = 143 \text{ cm}^2$ .



14 231.  $h_a = 8,2 \text{ cm}$ ,  $h_b = 4,1 \text{ cm}$ . 232. а) Ќе се зголеми два пати;

б) ќе се зголеми два пати; в) ќе се зголеми четири пати. 234. 102,084 kg семе.

235. 30 cm. 236.  $h_b = 6 \text{ m}$ . 237.  $b > h$  од каде  $a \cdot b > a \cdot h$ . 238. Ако  $a > b$ ,  $\frac{a}{b} > 1$ .

$a \cdot h_a = b \cdot h_b$ . Оттука  $\frac{h_b}{h_a} = \frac{a}{b} > 1$ , т.е.  $h_b > h_a$ . 239.  $h = \frac{b}{2} = 4 \text{ cm}$ ,  $P = 11 \cdot 4 = 44 \text{ cm}^2$ .

240.  $P = 5,25 \text{ cm}^2$ . 241. 400 ромбови. 243.  $a = 20 \text{ cm}$ ,  $L = 80 \text{ cm}$ . 244.  $d_2 = 24 \text{ cm}$ ,

$L = 50,6 \text{ cm}$ . 245.  $L = 4 \cdot 15 = 60 \text{ cm}^2$ . 246.  $P = a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}$ . 247.  $P = \frac{5 \cdot 15}{2} = 37,5 \text{ cm}^2$ ;

$a \approx 7,9$ ;  $L \approx 31,6 \text{ cm}$ .

15 248. а)  $P = 832,5 \text{ cm}^2$ ; б)  $P = 0,26875 \text{ m}^2 = 2687,5 \text{ cm}^2$ . 249.  $h_a = \frac{2P}{a}$ ,  $h_a = 19,45 \text{ cm}$ .

250.  $h_b = 7,5 \text{ cm}$ . 251.  $b = 18,9 \text{ cm}$ . 252.  $P = 60 \text{ cm}^2$ . 253.  $h_c = 4,8 \text{ cm}$ . 254.  $b = 4,4 \text{ cm}$ .

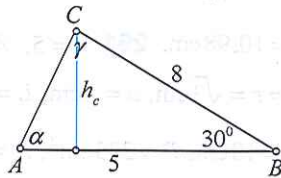
255.  $h = 6 \text{ dm}$ ,  $P = 19,2 \text{ dm}^2$ . 256.  $P = 8 \text{ cm}^2$ . 257. Се добива  $\gamma = 90^\circ$ , односно

$\triangle ABC$  е рамнокрак правоаголен со катети  $a = b = 6 \text{ cm}$ . Оттука  $P = \frac{a \cdot b}{2}$ ,  $P = 18 \text{ cm}^2$ .

258.  $\beta = 30^\circ$ . Висината е  $h_c = 4 \text{ cm}$  (половина

од  $\overline{BC}$  како катета спроти агол од  $30^\circ$ ).

$P = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ cm}^2$ .



259. а)  $h = 11\sqrt{3} \approx 19 \text{ cm}$ ; б)  $P \approx 209 \text{ cm}^2$ . 260.  $P \approx 21 \text{ cm}^2$ .

261. Примени ја истата постапка како во задача 238. 262. а)  $c = 4 \text{ cm}$ ,

$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 6 \text{ cm}^2$ ; б)  $a = 5$ ,  $h_a = 2,4 \text{ cm}$ . 263. а) Ќе се зголеми два

пати; б) ќе се зголеми два пати; в) ќе се зголеми четири пати. 264. Имаат еднакви

основи  $\left( \overline{BM} = \overline{MC} = \frac{\overline{BC}}{2} \right)$  и заедничка височина (висината на  $\triangle ABC$  е спуштена од

$A$  кон страната  $BC$ ). 265. Од  $a - \frac{3}{5}a = 4$  се добива:  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $h = 6 \text{ cm}$ ,  $P = 30 \text{ cm}^2$ .

16 267.  $h = 4$  cm. 268.  $b = 14$  cm. 269.  $a = 12$  cm,  $b = 6$  cm. 270.  $m = 21,5$  cm.

271.  $P = 53,3$  cm<sup>2</sup>. 272. Уйайсїво:  $a + b = L - (c + d)$ , замени во  $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$ .

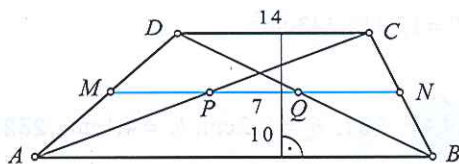
273.  $h = 12$  cm,  $P = 132$  cm<sup>2</sup>. 274.  $a + b = 9 + 16 = 25$ ,  $P = 150$  cm<sup>2</sup>.

275.  $\overline{MP} = \frac{\overline{CD}}{2} = 7$  cm (како средна линија

на триаголникот  $CDA$ .)

Следува:  $\overline{MP} = \overline{PQ} = \overline{QN} = 7$  cm.

Значи  $m = 21$ ,  $P = 210$  cm<sup>2</sup>.



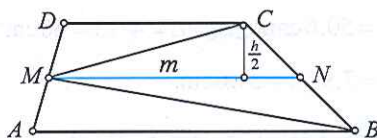
276.  $h = 3,5$  cm;  $P = 84$  cm<sup>2</sup>. 277.  $a = 12$  cm,  $P = 54$  cm<sup>2</sup>. 278.  $P = 27$  cm<sup>2</sup>. 279. Двете

новодобиени фигури се трапези со еднакви основи  $\left( a_1 = a_2 = \frac{a}{2}, b_1 = b_2 = \frac{b}{2} \right)$ , па

$m_1 = m_2$ . Исто така, имаат исти висини ( $h_1 = h_2 = h$ ), што значи  $m_1 h = m_2 h$ , т.е.  $P_1 = P_2$ .

280.  $P_{BCM} = P_{MNC} + P_{MNB} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{h}{2} =$

$$= m \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2} m \cdot h = \frac{1}{2} P_{ABCD}.$$



282.  $\triangle ABD$  е рамностран,  $d_2 = 5$  cm,  $P = 20$  cm<sup>2</sup>.

283. 122 m. 284. Уйайсїво. Примени ја Хероновата формула за плоштините  $P_{ACB}$  и  $P_{ACD}$ .

17 286. а)  $P = 309,12$  cm<sup>2</sup>; б)  $P = 247,8$  cm<sup>2</sup>. 288.  $a = 6$  cm. 289.  $P = 769$  cm<sup>2</sup>.

290.  $h = 10,98$  cm. 291.  $n = 5$ . 292.  $L = 128$  cm,  $a = 16$  cm. 294.  $L = 36$  cm.

295.  $h = r = \sqrt{3}$  cm,  $a = 2$  cm,  $L = 12$  cm,  $P = 6\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>. 296.  $a = R = 8$  cm.

297.  $a_1 = 10$  cm,  $P = 225$  cm<sup>2</sup>,  $P_1 = 150\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>,  $P_1 - P \approx 34,8$  cm<sup>2</sup>. 298. 1,5 пати.

299.  $P_K - (P_T + P_\Psi) \approx 130$  cm<sup>2</sup>.

18 300. 23 m. 301. За 4 m<sup>2</sup>. 303. 60%. 304.  $P = 180$  m<sup>2</sup>. 305. Примени ја

Хероновата формула за плоштина на двата триаголника. 306. Бидејќи  $\overline{BC} > \overline{AC}$ ,

$\angle A > \angle B$ . 307.  $a = 64$  cm,  $h = 126$  cm,  $L = 324$  cm,  $P = 4032$  cm<sup>2</sup>. 308.  $P = 48$  m<sup>2</sup>.

309.  $h = \frac{1}{2}b$ , што значи  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 150^\circ$ . 310.  $P = 2 \cdot 45 = 90$  cm<sup>2</sup>. 312. а)  $P = 99$  dm<sup>2</sup>;

б)  $P = 9$  cm<sup>2</sup>; в)  $P = 10$  cm<sup>2</sup>. 314.  $a = 24$  cm,  $L = 60$  cm,  $h = \sqrt{108} \approx 10,4$ ;  $P \approx 10$  cm<sup>2</sup>.

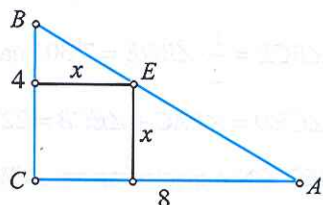


**315.** Едната дијагонала на ромбот е еднаква со висината на траpezот, а другата со средната линија на траpezот т.е.  $d_1 = h = 12\text{ cm}$ ,  $d_2 = m = 8\text{ cm}$ , па  $P = 48\text{ cm}^2$ .

**316.**  $P = \overline{AD} \cdot \overline{MM_1} = 77\text{ cm}^2$ ; Уџајсџво. Конструирај права низ  $M$ , паралелна со  $AD$ . Таа ја сече  $AB$  во  $K$  и  $CD$  во точка  $L$ .  $AKLD$  е паралелограм, а бидејќи  $\triangle BMK \cong \triangle CML$ , паралелограмот и траpezот се еднаквоплошни. **318.** Бараната плоштина, т.е. плоштината на квадратот е  $P = \frac{64}{9}\text{ cm}^2$ .

Уџајсџво  $P_{ABC} = P_{CAE} + P_{BCE}$ , т.е.  $\frac{8 \cdot 4}{2} = \frac{8 \cdot x}{2} + \frac{4 \cdot x}{2}$

од каде што  $x = \frac{8}{3}\text{ cm}$ .



**319.** Уџајсџво. Од  $(n-2) \cdot 180^\circ = 720^\circ$  се добива  $n = 6$  т.е. станува збор за правилен шестаголник.

**19** **321.** б)  $r = 1\text{ cm}$ . **323.** Уџајсџво. а)  $R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ; б)  $R = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

**324.** а)  $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ ; б)  $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . **325.**  $L = 90\pi\text{ cm} \approx 282,6\text{ cm}$ . **326.** а)  $r = 15\text{ cm}$ ;

б)  $r = 5\text{ cm}$ . **327.**  $314\text{ m}$  за  $1\text{ min}$ . **328.** б)  $\ell = 7,1435\text{ cm}$ . **329.**  $r = 20\text{ cm}$ .

**330.** Уџајсџво.  $\alpha = \frac{180^\circ \ell}{r\pi}$ . **331.**  $\ell = \pi\text{ cm} \approx 3,14\text{ cm}$ . **332.**  $\ell = 8\text{ cm}$ . **333.**  $\ell = \pi\text{ cm} \approx 3,14\text{ cm}$ .

**334.**  $\alpha = 120^\circ$ . **335.**  $L = 12\pi\text{ cm}$ .

**20** **337.** б)  $P = 254,34\text{ cm}^2$ . **338.** Уџајсџво.  $R = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ .

**339.** Уџајсџво.  $R = \frac{d}{2}$ ,  $d$  е дијагоналата во квадратот;  $d^2 = 40,5$ ;  $P = \frac{40,5}{4} \cdot \pi\text{ cm}^2$ .

**340.** Уџајсџво.  $R = a = 8\text{ cm}$ . **341.** а)  $r = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ ; б)  $r = \frac{a}{2}$ ; в)  $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . **342.**  $R = \frac{d}{2} = 13\text{ cm}$ .

**343.**  $r = 4\text{ cm}$ ,  $h = 8\text{ cm}$ ,  $P = 36\text{ cm}^2$ . **344.**  $L = 40\pi\text{ cm}$ . **345.**  $r = \sqrt{89} \approx 9,4\text{ cm}$ .

**346.** Плоштината на пресекот на јажето е  $P = 12,56\text{ mm}^2$ , па оптоварувањето е

$400 : 12,56 \approx 31,847 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  што е помало од  $60 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ , т.е. јажето може да го издржи

оптоварувањето. **348.**  $P \approx 22,78\text{ cm}^2$ . **349.**  $r = \sqrt{50} \approx 7\text{ cm}$ . **350.**  $\alpha = 18^\circ$ .

**351.**  $P = 39\pi \approx 122,46\text{ cm}^2$ . **352.** а)  $P_1 = 64 - 16\pi \approx 13,76\text{ cm}^2$ ; б)  $P_2 = 8 - \pi \approx 4,86\text{ cm}^2$ .

**21 353.**  $\alpha = 36^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 84^\circ$ . **354.** Нацртај  $\triangle ABC$  во кој  $\angle A = 60^\circ$  и  $\overline{BC} = 6$  см, па околу него опиши кружница  $k$ . На растојание  $h = 2,5$  см од правата  $BC$  конструирај права  $p \parallel BC$ . Нека  $p \cap k = \{A_1, A_2\}$ . Решение на задачата се  $\triangle A_1BC$  и  $\triangle A_2BC$ . Користи ја еднаквоста на периферните агли над ист кружен лак.

**355.**  $\triangle OAB$  е рамнокрак (Објасни.)

$$\angle BCE = \frac{1}{2} \cdot \angle BOE = 7^\circ 30'$$

$$\angle CED = \angle EAC + \angle ECB = 22^\circ 30'$$

**356.**  $CN$  е дијаметар па  $\angle CMN = 90^\circ$ . Бидејќи  $CH \perp AB$ , следува  $MN \parallel AB$ , т.е.  $ABNM$  е трапез, а штом е впишан во кружница тој е рамнокрак.

**357.**  $t \cap BC = \{P\}$ . Тогаш  $\overline{PA} = \overline{PB}$  и  $\overline{PA} = \overline{PC}$ , како тангентни отсечки од иста точка. Оттука  $P$  е центар на кружница со дијаметар  $BC$ , која ја содржи точката  $A$  и како агол над дијаметарот,  $\angle BAC = 90^\circ$ .

**358.**  $2R - 2r = 8$  т.е.  $R - r = 4$ . Ако замениме  $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ,  $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$  се добива

$$a\sqrt{3} = 24 \text{ см, па одовде } r = 4 \text{ см, } R = 8 \text{ см, а дијаметрите им се } 2r = 8 \text{ см, } 2R = 16 \text{ см.}$$

**359.** Сите внатрешни агли се по  $135^\circ$  ( $90^\circ + 45^\circ$ ) и сите страни се еднакви бидејќи

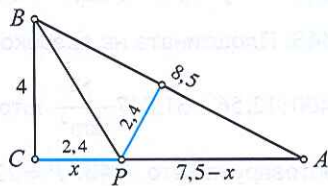
$$\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF} = \overline{GH} = a, \text{ а } \overline{BC} = \overline{DE} = \overline{FG} = \overline{HA} = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}} = a.$$

**360.** Страната на квадратот е 12 см, а отсечоците на хипотенузата се 20 см и 15 см.

**Упатство.** Примени ја постапката од задача 318. **361.**  $a = 30$  см,  $b = 40$  см.

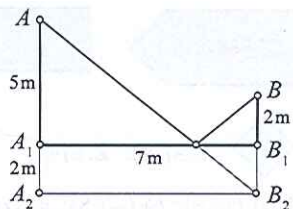
**362.**  $\overline{PC} = x$ . Од  $\frac{(7,5-x) \cdot 4}{2} = \frac{8,5 \cdot 2,4}{2} \Rightarrow x = 2,4$ .

Растојанието од  $P$  до  $AB$  е еднакво со растојанието од  $P$  до  $BC$ , т.е.  $P$  припаѓа на симетралата на  $\angle B$ .



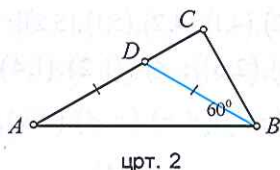
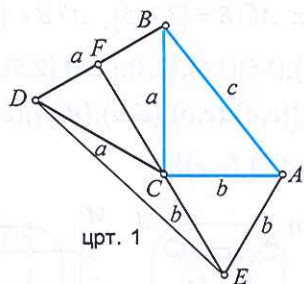
**363.** Катетите се  $a \approx 4,47$  см;  $b \approx 8,94$  см;  $L \approx 23,41$  см;  $P \approx 20$  см<sup>2</sup>.

**364.** Должината на конецот е 9,9m, а растојанието од  $M$  до столбовите е 5m и 2m.



**365.**  $L = a + b + c + \overline{DE}$ ;  $\overline{DE} = 5,29$  ( $\overline{DE}$  се добива од Питагорова теорема кај  $\triangle DEF$ ). Оттука  $L = 14,75$ cm.

Плоштината на  $\triangle DEC$  е половина од плоштината на  $\triangle ABC$ , па плоштината на четириаголникот  $ABDE$  е  $P = 7\sqrt{3}$ cm<sup>2</sup> (црт. 1).



**366.**  $\overline{AC} = a\sqrt{3}$ ,  $\overline{AD} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ ,  $\overline{DC} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Од  $\triangle BCD$ ,  $P_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$ , а од  $\triangle ABD$ ,

$P_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{2}$ , што и требаше да се докаже (црт. 2.) **367.**  $L = 16,61$ cm,

$P = 14,77$ cm<sup>2</sup>. **368.**  $L = 45,64$ cm,  $P = 56$ cm<sup>2</sup>. **369.**  $L = 18$ cm,  $P = 9\sqrt{3} \approx 15,57$ cm<sup>2</sup>.

**370.**  $R \approx 9,8$ cm. **371.** За поголемата основа се добива  $a = 21$ cm, а радиусот на впишаниот круг е  $r = 6$ cm, а неговата плоштина  $P \approx 113,04$ cm<sup>2</sup>. **372.**  $P = 180$ cm<sup>2</sup>.

**373.** Уџаџсџво. Користи четириаголник со нормални дијагонали. Се добива  $P \approx 102$ cm<sup>2</sup>. **374.**  $P = 6 \cdot 8 = 48$ cm<sup>2</sup> (И овде два соседни карактеристични триаголници образуваат делтоид).

**375.**  $MNPQ$  е паралелограм, при што  $MQ$  и  $PN$  се средни линии на  $\triangle ABD$  и  $\triangle BDC$ . Отука  $P_{AMQ} = \frac{1}{4}P_{ABD}$ ,  $P_{CPN} = \frac{1}{4}P_{BCD}$ ,  $P_{AMQ} + P_{CPN} = \frac{1}{4}P_{ABCD}$ .

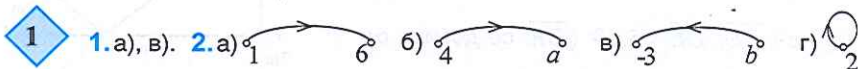
На сличен начин и  $P_{BNM} + P_{DQP} = \frac{1}{4}P_{ABCD}$ . Ако ги собереме, добиваме

$P_{AMQ} + P_{CPN} + P_{BNM} + P_{DQP} = \frac{1}{2}P_{ABCD}$ . Другата половина ја чини паралелограмот  $MNPQ$ .

**376.** 400 пати. **377.** Плоштината на неисенчаниот дел е  $2,565 \cdot 4 = 10,26$ cm<sup>2</sup>, па на исенчаниот ќе биде  $P = 18 - 10,26 = 7,74$ cm<sup>2</sup>. **379.** 50%.

ТЕМА 4

ФУНКЦИЈА. ПРОПОРЦИОНАЛНОСТИ



3. а)  $(m, n)$ ; б)  $(-7, 8)$ ; в)  $(a, a)$ ; г)  $(-3, 3)$ . 4. а)  $P = \{(2, 4)\}$ ; б)  $Q = \{(9, 4), (8, 3), (7, 2), (6, 1)\}$ .

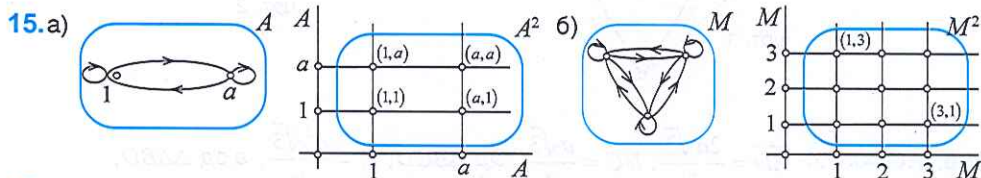
5. а) Решение:  $p = -3 \cdot 2$ ;  $p = -6$ ; б)  $p = 0$ . 6. Уплатство: Реши ги равенките:  $2x - 3 = 3$  и  $y - 2 = 4$ . Одговор:  $x = 3$ ,  $y = 6$ . 7.  $(2, 2), (-2, 10), (3, 0)$ . 9.  $M = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $N = \{3, 5\}$ .

11.  $A = \{m, 1, n, 2, p, 3\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$ . 12. Упатство:  $A \cap B = \{3, 4, 5\}$ ,  $A \setminus B = \{1, 2\}$ .

а)  $\{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}$ ; б)  $\{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}$ .

13. а)  $\{(2, 3), (2, 5)\}$ ; б)  $\{(1, 2), (1, 4), (1, 5)\}$ . 14.  $\{(c, a), (c, b), (d, a), (d, b), (e, a), (e, b)\}$ .

14.  $\{(c, a), (c, d), (d, a), (d, d), (e, a), (e, d), (c, e), (d, e), (e, e)\}$ .



16.  $A = \{1, 3, m\}$ .

2 18.  $A(2, 1)$ ,  $B(-1, 4)$ ,  $C(-4, -2)$ ,  $D(2, -2)$ ,  $E(4, 0)$ ,  $F(0, -3)$ ,  $G(-1, 0)$ ,  $H(0, 1)$ .

19.  $A$  и  $E$  во први;  $B$  и  $F$  во втори;  $C$  и  $G$  во трети;  $D$  и  $H$  во четврти квадрант.  
20. а) I и IV квадрант, на  $x$ -оската; б) II и III квадрант - на  $x$ -оската; в) I и II, на  $y$ -оската; г) I или III квадрант или во коорид. почеток; д) II или IV квадрант; е) III и IV квадрант - на  $y$ -оската.

21. а) I или IV квадрант; б) II или III квадрант; в) на  $y$ -оската.

22. а) I или II квадрант; б) III или IV квадрант; в) на  $x$ -оската.

23.  $y_1 = y_2$ ,  $x_1 = -x_2$ . 24. а)  $B(-3, -4)$ ; б)  $B(1, 0)$ ; в)  $B(2, 3)$ ; г)  $B(-2, 3)$ .

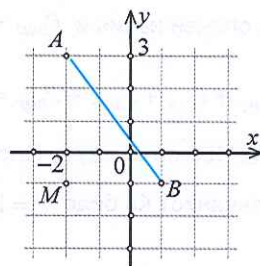
25. а)  $B(-3, 2)$ ; б)  $B(3, -2)$ ; в)  $B(-3, -2)$ .

26. а) на  $y$ -оската; б) на  $x$ -оската; в) на права низ I и IV квадрант, паралелно со  $y$ -оската; г) на права низ I и II квадрант, паралелно со  $x$ -оската.

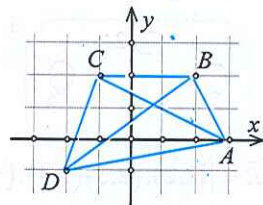
27. а) Решение: Во правоаголниот  $\triangle ABM$ , каде  $M(-2, -1)$ ,

катетите се  $\overline{MA} = 4$ ;  $\overline{MB} = 3$ .  $\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2}$ ,  $\overline{AB} = 5$ .

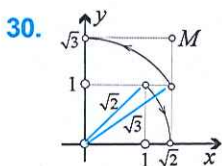
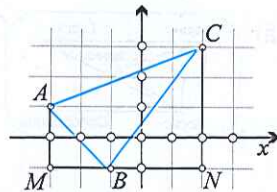
б)  $\overline{AB} = 10$ .



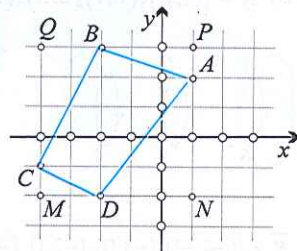
28.  $\overline{AB} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} = 2,24$ ;  
 $\overline{BC} = 3$ ;  $\overline{CD} = 3,16$ ;  $\overline{DA} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26} = 5,1$ ;  
 $\overline{AC} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4,47$ ;  $\overline{BD} = 5$ .



29. Уйайсїво: Од площината на правоаголниот трапез  $AMNC$ , каде  $M(-3,-1)$ ,  $N(2,-1)$ , одземи ја площината на правоаголните триаголници  $BMA$  и  $BNC$ .  
 Одговор:  $P_{\Delta ABC} = 7$ .



31. Уйайсїво. Плоштината на четириаголникот  $ABCD$  е половина од площината на квадратот  $MNPQ$ .  
 Одговор:  $P_{ABCD} = 12,5$ .



32. а) 4 и 2; б) 1 и 5. 33. а)  $\sqrt{5} + \sqrt{40} + \sqrt{41} \approx 15$ ; б)  $5 + \sqrt{32} + \sqrt{41} + \sqrt{34} \approx 23$ .

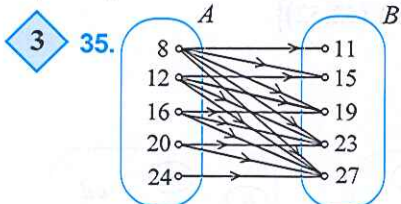
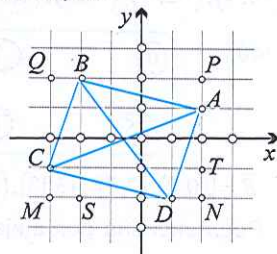
34. а)  $\overline{AB} = \overline{CD} = \sqrt{17}$ ;  $\overline{AD} = \overline{BC} = \sqrt{10}$ .  $ABCD$  е паралелограм

б) Уйайсїво: Од площината на правоаголникот  $MNPQ$  ( $M(-3,-2)$ ,  $N(2,-2)$ ,  $P(2,2)$ ,  $Q(-3,2)$ ) одземи ги площините на правоаголните триаголници  $DMC$ ,  $CQB$ ,  $BPA$  и  $DNA$ .

Одговор:  $P_{ABCD} = 13$ ;

в) Уйайсїво: Воочи ги точките  $T(2,-1)$  и

$S(-2,-2)$ .  $\overline{AC} = \sqrt{CT^2 + AT^2}$ ;  $\overline{BD} = \sqrt{DS^2 + BS^2}$ . Одговор:  $\overline{AC} = \sqrt{29} \approx 5,4$ ;  $\overline{BD} = 5$ .



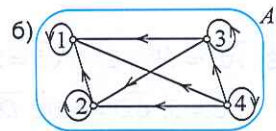
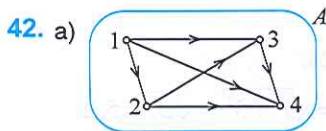
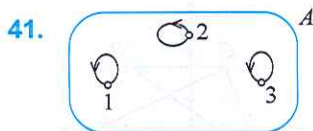
36.  $\overline{R} = \{(a,b), (h,b), (g,f), (e,f), (c,d)\}$ .

37.  $\overline{R} = \{(a,1), (b,2), (d,4), (e,1)\}$ .

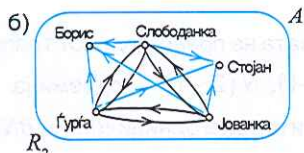
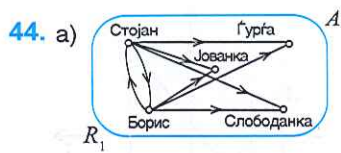
38.  $\overline{R}_1 = \{(2,2), (2,9), (8,2), (15,9), (6,8), (6,13)\}$ ,

$\overline{R}_2 = \{(3,7), (3,1), (5,11)\}$ ;  $R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ .

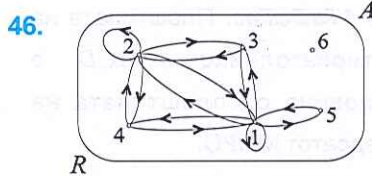
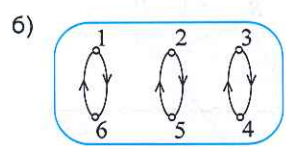
39.  $(a,n), (b,m), (b,p)$ .



43.  $\bar{R} = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$ .



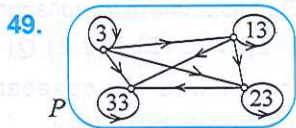
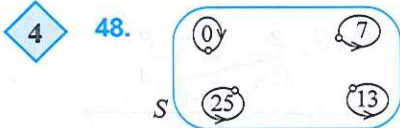
45. а)  $\bar{R} = \{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}$ ;



47.  $\bar{R}_1 = \{(-4,-1), (-3,0), (-2,1), (-1,2), (0,3), (1,4), (2,5), (3,6), (4,7), (5,8), (6,9), (7,10), (8,11), (9,12)\}$ ;

$\bar{R}_2 = \{(-4,-6), (-3,-5), (-2,-4), (-1,-3), (0,-2), (1,-1), (2,0), (3,1), (4,2), (5,3), (6,4), (7,5), (8,6), (9,7)\}$ ;

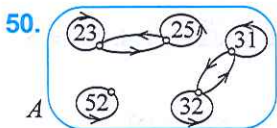
$\bar{R}_3 = \{(-3,9), (-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4), (3,9)\}$ .



$\bar{R} = \{(0,0), (7,7), (13,13), (25,25)\}$ .

Рефлексивна релација.

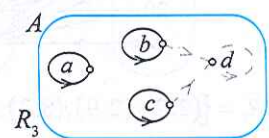
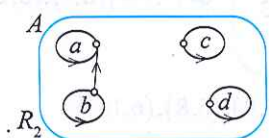
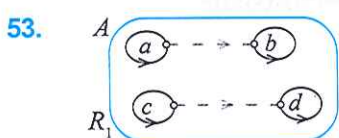
Рефлексивна релација.



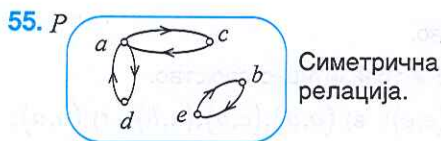
$\bar{R} = \{(23,23), (23,25), (25,23), (25,25), (31,31), (31,32), (32,31), (32,32), (52,52)\}$ .

Рефлексивна релација.

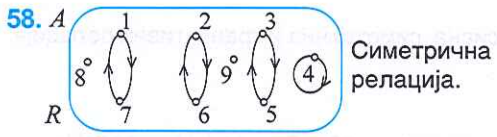
51.  $R_1$  и  $R_4$ . 52.  $R_1$  е под б),  $R_2$  е под в), а  $R_3$  е под а).



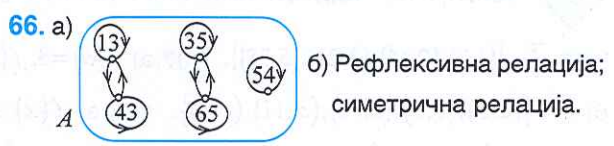
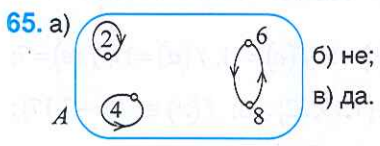
54.  $R_1$ .



56.  $R_3$  и  $R_2$ . 57. Уишисиво. Во  $R_1 : (b,a)$  и  $(c,d)$ ; во  $R_2 : (4,3)$ ; во  $R_3 : (p,m), (n,p)$  и  $(n,m)$ .



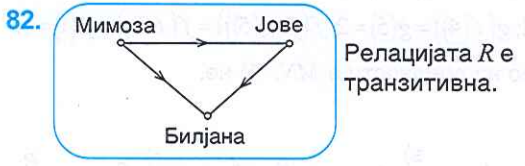
59. Не е рефлексивна, не е симетрична.  
60. Рефлексивна и симетрична.  
61. Рефлексивна и симетрична.  
62. Рефлексивна. 64. Да.



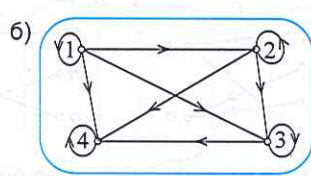
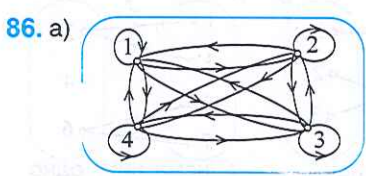
67.  $(11,11), (12,12), (13,13), (14,14), (16,16), (16,14), (13,11)$ . 68. Изостави го членот  $(40,70)$ .

69. Трите релации се рефлексивни. Симетрична е само релацијата  $R_1$ .  
70. а)  $R_1$ ; б)  $R_2$ . 71. а)  $R_1$ ; б) Нема. 72.  $R_1$  и  $R_2$  не се рефлексивни.  $R_2$  е симетрична релација. 75. Не е рефлексивна, не е симетрична. 76. Не е симетрична.

5 78.  $R_1, R_3, R_4, R_6$  и  $R_7$ . 79. а) да; б) да; в) не. 80.  $\bar{R}_1 = \{(1,3), (3,1), (2,2)\}$ ;  $\bar{R}_2 = \{(4,1), (4,2), (4,3), (3,1), (3,2), (2,1)\}$ ;  $\bar{R}_3 = \{(4,1), (1,4), (2,2)\}$ . Антисиметрична е релацијата  $R_2$ .



83.  $R_1, R_2$  и  $R_3$ . 84.  $R$  е транзитивна релација. 85.  $R$  е антисиметрична и транзитивна релација.



87. Рефлексивна, симетрична и транзитивна релација.  
88. а), б) и г) антисиметрична и транзитивна; в) Рефлексивна, симетрична и транзитивна; д) и е) рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.  
89. Антисиметрично и транзитивно својство.  
90. Антисиметрично и рефлексивно својство. 1. Антисиметрично својство.  
92. Ниту едно својство. 93. Антисиметрично и транзитивно својство.

94. Ниту едно својство. 95. Симетрично својство.

96. Рефлексивно, симетрично, антисиметрично и транзитивно својство.

97. а)  $(b,b), (c,c), (a,c), (a,d), (b,d)$ ; б)  $(d,d), (e,e)$ ; в)  $(a,d), (c,b), (a,b)$ ; г)  $(a,a)$ ;  
 д)  $(c,c), (d,d)$ ; ђ)  $(a,a), (b,b), (c,c)$ .

98.  $R_1$  е транзитивна релација,  $R_2$  е рефлексивна, симетрична и транзитивна релација,  $R_3$  е антисиметрична релација.

6 100.  $R_1$  и  $R_3$ . 102. Пресликување е релација  $g$ . 103. Да. 104. Не. 105. Не.

106.  $\bar{f} = \{(1,7), (2,14), (3,21), (5,35)\}$ . 107. а)  $f(a)=3, f(b)=5, f(c)=11, f(d)=11, f(e)=7$ ;

б)  $\bar{f} = \{(a,3), (b,5), (c,11), (d,11), (e,7)\}$ . 108. а)  $f(x) \in \{7, 19, 22\}$ ; б)  $f(x) \in \{7, b+7, 17\}$ ;

в)  $f(x) \in \{-5, -1, 0, 1\}$ . 109.  $A = \{1, a, b, 4, 5, m\}$ ,  $V = \{a, b, c, 2, 3\}$ .

110. а)  $f(1)=-2; f(10)=7; f(100)=97$ ; б)  $f(1)=-2; f(10)=97; f(100)=9997$ ;

в)  $f(1)=-1; f(10)=89; f(100)=9899$ ; г)  $f(1)=1; f(10)=4; f(100)=34$ .

111. а) и в). 112. а), б), д), е). 113. а)  $\{-5, -2, -3, 2\}$ ; б)  $\{7, 1, 3, -7\}$ ; в)  $\{-6, 3, 6, 1\}$ ;

г)  $\{4, 1, 0, 25\}$ ; д)  $\{3, 1, 31\}$ ; ђ)  $\{-5, 1, -1, 9\}$ . 114. а)  $f(3)=4$ ; б)  $g(-1)=3$ ;

в) **Решение.**  $f(f(x)) = f(3x-5) = 3(3x-5)-5 = 9x-20$ ; г)  $f(g(x)) = -3x+1$ ;

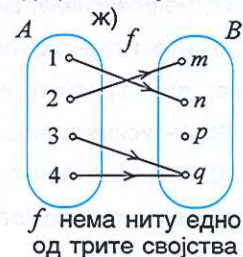
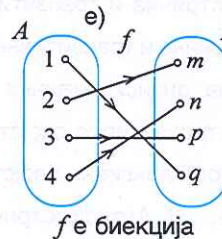
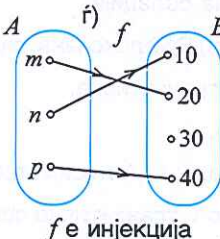
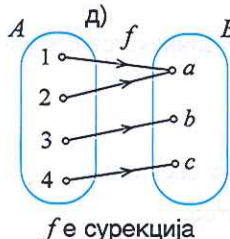
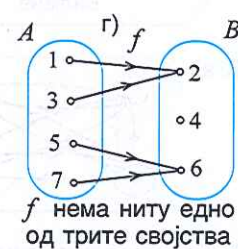
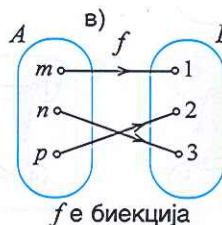
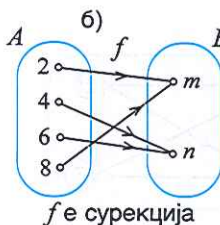
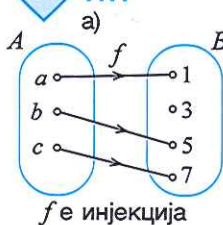
д) **Уиайсџво:**  $f(f(1)) = f(3 \cdot 1 - 5) = f(-2)$ . **Одговор:**  $-11$ ; ђ)  $f(g(-1)) = 4$ ;

115. а)  $\Gamma f = \{(1,3), (2,1), (3,2), (4,5), (5,4)\}$ ;  $\Gamma g = \{(1,2), (2,1), (3,1), (4,3), (5,2)\}$ ;

б)  $f(2)=1; f(f(3))=f(2)=1; f(g(1))=f(2)=1; g(f(4))=g(5)=2; f(f(g(5)))=f(f(2))=f(1)=3$ .

116. а) Домен е  $AB$ , кодомен и множество на вредности е  $MN$ ; б) не.

7 117.



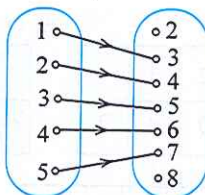


118. а) ниту еден од трите вида; 120.

б) биекција.

119. а) биекција; б) инјекција;

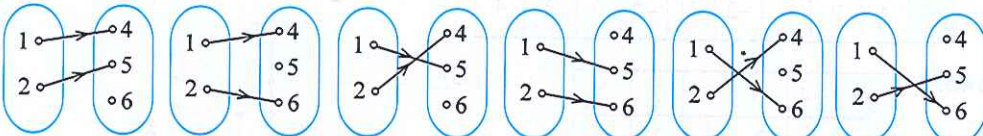
в) ниту едно од трите својства



инјекција.

121. а) да; б) не.

123. Има 6 начини.



124. Да. Обратното не важи. 126.  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{a, b, c, d\}$ . 127. Да. 128. Не.

129. а) да; б) не; в) не; г) не. 130. а) (2,5) или (2,6); б) (3,4) или (3,5); в) (4,7); г) (c,b) или (c,c) или (c,d); д) (d,c); е) (d,d).

8 132. а)  $f(0) = 3$ ;  $f(-2) = 2$ ;  $f(1) = \frac{3}{5}$ ; 133. а)  $f(\text{Земја}) = 1$ ;

$f(\text{Јупитер}) = 5, 2$ ;  $f(\text{Нептун}) = 30$ . 134. а) Уйайсиџво.  $2x+1=2 \Leftrightarrow 2x=1$ ;  $x = \frac{1}{2}$ ; б)  $x = -1$ ;

в)  $x = -\frac{1}{2}$ . 135. а) Решение.  $f(2) = 2 + 4 = 6$ ;  $6 = 3x + 1$ ;  $3x = 5$ ;  $x = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$ ; б)  $x = -\frac{1}{3}$ ;

в)  $x = -2$ ; г)  $x = 1$ ; д)  $x = 1\frac{1}{2}$ ; е)  $x = 2$ . 136. а)  $y = (x-2) \cdot 180^0$ ; б)  $\mathbb{N}$ .

137.

|           |     |     |    |    |   |    |    |
|-----------|-----|-----|----|----|---|----|----|
| $x$       | -3  | -2  | -1 | 0  | 1 | 2  | 3  |
| а) $f(x)$ | -14 | -10 | -6 | -2 | 2 | 6  | 10 |
| б) $g(x)$ | 9   | 7   | 5  | 3  | 1 | -1 | -3 |

138.

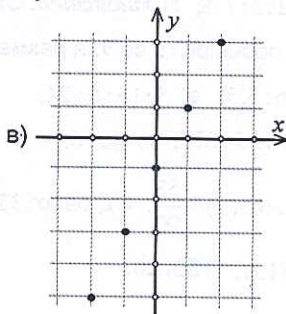
|        |                |               |    |    |    |                |
|--------|----------------|---------------|----|----|----|----------------|
| $x$    | 1              | 3             | -2 | 0  | 6  | -1             |
| $f(x)$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | -2 | -1 | 2  | $-\frac{1}{2}$ |
| $g(x)$ | 3              | 7             | -3 | 1  | 13 | -1             |

139. а) 9 h; б) околу 8 h; в) најниска во 4 h, а највисока во 12 h.

140.  $A = \{-1, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 4\frac{1}{4}, 5\}$ . 141. а)  $\Gamma_f = \{(-2, -5), (-1, -3), (0, -1), (1, 1), (2, 3)\}$ ;

б)

|        |    |    |    |   |   |
|--------|----|----|----|---|---|
| $x$    | -2 | -1 | 0  | 1 | 2 |
| $f(x)$ | -5 | -3 | -1 | 1 | 3 |



142. а)

|        |   |   |     |      |
|--------|---|---|-----|------|
| $x$    | 2 | 5 | 440 | 1111 |
| $f(x)$ | 0 | 0 | 1   | 1    |

б)  $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ .

143. а)

|        |    |    |    |   |   |   |   |   |
|--------|----|----|----|---|---|---|---|---|
| $x$    | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f(x)$ | 3  | 1  | -2 | 3 | 1 | 0 | 4 | 2 |

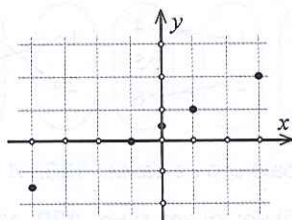
б)

|        |    |    |    |    |   |   |   |   |   |
|--------|----|----|----|----|---|---|---|---|---|
| $x$    | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f(x)$ | -2 | -1 | 0  | 1  | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 |

в)

|        |    |    |    |    |    |    |   |   |   |
|--------|----|----|----|----|----|----|---|---|---|
| $x$    | -4 | -3 | -2 | -1 | 0  | 1  | 2 | 3 | 5 |
| $f(x)$ | 4  | 2  | 0  | -2 | -4 | -2 | 0 | 2 | 4 |

144. а)  $y = 4x$ ; б)  $y = x + 3$ .



145. а)

|        |                |    |               |   |   |
|--------|----------------|----|---------------|---|---|
| $x$    | -4             | -1 | 0             | 1 | 3 |
| $f(x)$ | $-\frac{3}{2}$ | 0  | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 |

146.  $f(0) = -\frac{1}{2}$ ;  $f(1) = 0$ ;  $f(2) = \frac{1}{2}$ ;  $f(3) = 1$ ;  $f(a) = \frac{a-1}{2}$ ;  $f(a+1) = \frac{a}{2}$ ;  $f(x+1) = \frac{x}{2}$ .

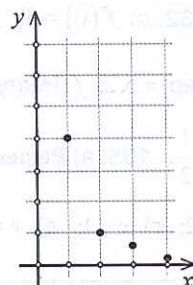
147. а)

|     |        |
|-----|--------|
| $x$ | $f(x)$ |
| 1   | 4      |
| 2   | 5      |
| 3   | 6      |
| 4   | 7      |



б)

|     |               |
|-----|---------------|
| $x$ | $f(x)$        |
| 1   | 4             |
| 2   | 1             |
| 3   | $\frac{4}{9}$ |
| 4   | $\frac{1}{4}$ |



9

148. а) 4:1; б) 5:1; в) 3:1. 149. а) 6; б) 0,5; в) 0,05; г) 2,8; д) 40; е) 100; ж) 100.

150. а) 0,43; б) 0,59; в) 0,78; г) 0,3; д) 0,13; е) 18,75.

151. а) 15; б) 60; в) 10000; г) 150; д) 1,5; е) 0,02; ж) 24. 152. 1:10000000. 153. 3,5 cm.

154. а) 16:15; б) 1:125; в) 4:63; г)  $4b:3a$ ; д)  $2:3(a+b)$ ; е)  $(b-a):(b+a)$ .

155. а)  $x = 4$ ; б)  $x = 2,4$ ; в)  $x = 0,31$ ; г)  $x = 33,6$ ; д)  $x = 0,6$ ; е)  $x = \frac{35}{68}$ .

156. а) 3:4:5; б) 5:9:11; в) 2:3:7:8; г) Уїайїїїво. Стави 3:2=6:4. Одговор. 1:6:4; д) Уїайїїїво. Размерот 4:7 прошири го со 9, а размерот 9:11 прошири го со 7.

Одговор. 36:63:77; е) 2:5:6:3,5; ж) 5:15:6:24.

157. а) 85:17; б) 360:12; в) 125:225; г) 40:6.

158. а) Уїайїїїво.  $0,3(6) = \frac{33}{90}$ ;  $0,5(7) = \frac{52}{90}$ . Одговор: 33:52; б) Уїайїїїво.  $0,0(4) = \frac{44}{990}$ .

Одговор: 1:2; в) 249750:108151. 159. 20.

160. а) Решение.  $4+5=9$ ;  $90:9=10$ . Бараните броеви се  $4 \cdot 10=40$  и  $5 \cdot 10=50$ ; б) 35 и 55.

161. 35 kg бакар и 21 kg цинк. 162.  $60^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $100^\circ$  и  $120^\circ$ .

10 163. а) да; б) не; в) да; г) не; д) не. 164. Да. 166.  $150:30=15:3=5$ ;  $210:42=15:3=5$ .  
Добиените размери имаат иста вредност (т.е. 5). Значи, пропорцијата важи.

167. Да. 168. а)  $x=4$ ; б)  $x=\frac{232}{21}$ ; в)  $x=20$ ; г)  $x=512$ . 169. Уиайсйво.  $150=6 \cdot 25$ .

Одговор. 120 kg брашно. 170. а)  $\frac{25}{4}g=6,25g$ ; б)  $\frac{25}{400}g=0,0625g$ ; в)  $0,34375g$ ; г)  $62,5g$ .

171. а) 1:5; б) 1:7,5; в) 1:5,6; г) 1:12,5; д) 1:24; е) 1:7.

172. а)  $x=0,4$ ; б)  $x=0,04$ ; в)  $x=4\frac{23}{30}$ ; г)  $x=\frac{1}{13}$ ; д)  $x=\frac{1}{9}$ ; е)  $x=\frac{3}{10}$ .

173. 16,5 години. 174. 2720 денари. 175. Уште 15 работници. 176.  $\beta=52^\circ$ ,  $\gamma=78^\circ$ .

11 177. а) 40; б)  $\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ ; в) 1,6; г)  $7a$ ; д) 24; е) 0,1.

178. а) Уиайсйво. Од  $\sqrt{1 \cdot 9}=3$ , следува: 3 е геометриска средина за 1 и 9. Бараната пропорција е  $1:3=3:9$  или  $3:1=9:3$  или  $3:9=1:3$  или  $9:3=3:1$ ;

б)  $\sqrt{36 \cdot 4}=12$ ;  $4:12=12:36$ ;  $12:4=36:12$ ;  $12:36=4:12$  или  $36:12=12:4$ ;

в)  $\sqrt{405 \cdot 5}=45$ ;  $405:45=45:5$ ;  $5:45=45:405$ ;  $45:5=405:45$ ;  $45:405=5:45$ .

179. а) 1 и 36; 2 и 18; 3 и 12; 4 и 9; б) 1 и 64; 2 и 32; 4 и 16; в) 1 и 144; 2 и 72; 3 и 48;  
4 и 36; 6 и 24; 8 и 18; 9 и 16; г) 1 и 400; 2 и 200; 4 и 100; 5 и 80; 8 и 50; 10 и 40; 16 и 25.

180. а) Решение.  $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}=\frac{10}{15}$ , т.е. тоа е продолжена пропорција или  $2:6:10=3:9:15$ ;

б) не; в) да.  $\frac{7}{14}=\frac{50}{100}=\frac{9}{18}$ . 181. а) Уиайсйво: Нека деловите се  $x, y$  и  $z$ .  $x:y:z=2:3:7$

и  $x+y+z=432$ . Одговор. 72, 108 и 252; б) 129, 86, 43, 258; в) 798, 266, 665, 532, 133.

182.  $36^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 144^\circ$ . 183.  $a=96$ ;  $b=144$ ;  $c=240$ ;  $d=384$ . 184. Основи: 4 cm и 16 cm,  
а краци 10 cm. 185. Лушпата има 6,5 g; жолчката 19,5 g; белката 32,5 g.

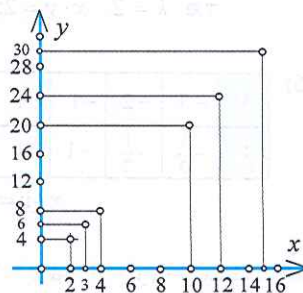
186. 3,6 ha, 4,8 ha, 4,2 ha. 187. 60 и 36. 188. а) 592; б) 111:148:3139. 84:308:168.

12 190. а) Да. б) Не, затоа што  $1:3 \neq 7:22$ . в) Да.

191. а)  $y=9$ ; б)  $y=15$ ;  $\frac{y}{x}=\frac{9}{3}=3$ ;  $\frac{y}{x}=\frac{15}{5}=3$ . Еднакви се.

192. а)

|     |   |   |   |    |    |    |    |
|-----|---|---|---|----|----|----|----|
| $x$ | 2 | 3 | 4 | 10 | 12 | 15 | 16 |
| $y$ | 4 | 6 | 8 | 20 | 24 | 30 | 32 |



193. а) 

|   |    |    |   |   |    |    |
|---|----|----|---|---|----|----|
| x | -2 | -1 | 0 | 2 | 5  | 12 |
| y | -8 | -4 | 0 | 8 | 20 | 48 |

$$k = \frac{-8}{-2} = 4; y = 4x;$$

б) 

|   |   |    |    |     |     |     |
|---|---|----|----|-----|-----|-----|
| x | 1 | 5  | 8  | 40  | 50  | 66  |
| y | 9 | 45 | 72 | 360 | 450 | 594 |

$$k = \frac{9}{1} = 9; y = 9x;$$

в) 

|   |               |   |               |               |   |    |
|---|---------------|---|---------------|---------------|---|----|
| x | 3             | 4 | 6             | 7             | 8 | 16 |
| y | $\frac{3}{4}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{7}{4}$ | 2 | 4  |

$$k = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}; y = \frac{1}{4}x.$$

194. а) Уїайсїво.  $36 = k \cdot 9$ . Одговор.  $k = 4$ ; б)  $y = 2,5 \cdot x$ , т.е.  $k = 2,5$ ; в)  $\frac{1}{5} \cdot x$ .

т.е.  $k = \frac{1}{5}$ . 195. а) Уїайсїво.  $600 : (9 + 1) = 60$ . Одговор. 60 г калај; б) 2 кг.

196. 

|                   |                   |                   |                    |
|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| 1 cm <sup>3</sup> | 2 cm <sup>3</sup> | 5 cm <sup>3</sup> | 12 cm <sup>3</sup> |
| 7,05 g            | 14,1 g            | 35,25 g           | 84,6 g             |

197. а) 

|   |   |     |
|---|---|-----|
| x | 0 | 1   |
| y | 0 | 1,5 |

б) 

|   |   |     |
|---|---|-----|
| x | 0 | -3  |
| y | 0 | 2,5 |

в) 

|   |    |   |   |
|---|----|---|---|
| x | -3 | 0 | 3 |
| y | -1 | 0 | 1 |

$$1 = k \cdot 3; k = \frac{1}{3};$$

$$y = \frac{1}{3}x.$$

$$1,5 = k \cdot 1; k = 1,5;$$

$$y = 1,5x;$$

$$2,5 = k \cdot (-3); k = -\frac{5}{6};$$

$$y = -\frac{5}{6}x;$$

13 198. а) Уїайсїво.  $300 : 60 = 5$ ;  $300 : 75 = 4$ ;

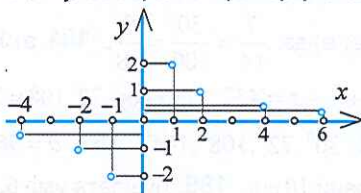
б) Тие се обратно пропорционални.

|   |         |         |         |         |          |
|---|---------|---------|---------|---------|----------|
| v | 60 km/h | 75 km/h | 80 km/h | 90 km/h | 100 km/h |
| t | 5 h     | 4 h     | 3h45min | 3h20min | 3 h      |

199. а) Уїайсїво.  $4 \cdot 3 = 6 \cdot 2 = 8 \cdot \frac{3}{2} = 10 \cdot \frac{6}{5} = 12 \cdot 1$ , т.е.  $x$  и  $y$  се обратно пропорционални величини. б) Да. в) Да.

200. 

|   |                |    |    |   |   |               |               |
|---|----------------|----|----|---|---|---------------|---------------|
| x | -4             | -2 | -1 | 1 | 2 | 4             | 6             |
| y | $-\frac{1}{2}$ | -1 | -2 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ |



201. а) Уїайсїво.  $(-2) \cdot (-1) = 2$ ,

т.е.  $k = 2$ ,  $x \cdot y = 2$ ;

|   |    |    |                |   |   |               |
|---|----|----|----------------|---|---|---------------|
| x | -2 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4             |
| y | -1 | -2 | -4             | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ |

б) 

|   |                |                |    |   |               |               |               |               |
|---|----------------|----------------|----|---|---------------|---------------|---------------|---------------|
| x | -3             | -2             | -1 | 1 | 2             | 3             | 4             | 8             |
| y | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | -1 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |

$$x \cdot y = 1.$$

в) 

|   |      |    |     |    |   |     |      |
|---|------|----|-----|----|---|-----|------|
| x | -4   | -2 | -1  | 1  | 2 | 4   | 8    |
| y | -2,5 | -5 | -10 | 10 | 5 | 2,5 | 1,25 |

$$x \cdot y = 10.$$

202. За  $x = 4$ ,  $y = 3$ , за  $x = 10$ ,  $y = 1,2$ ;  $4 \cdot 3 = 12$ ,  $10 \cdot 1,2 = 12$ , т.е. производите  $(x \cdot y)$  се еднакви.

203.

a) 

|   |    |    |   |   |
|---|----|----|---|---|
| x | -2 | -1 | 1 | 2 |
| y | -1 | -2 | 2 | 1 |

За  $x = -2, y = -1$ .  
 $x \cdot y = (-2)(-1) = 2$ ,  
 т.е.  $k = 2, x \cdot y = 2$ .

б) 

|   |    |    |
|---|----|----|
| x | -1 | 1  |
| y | 2  | -1 |

За  $x = -1, y = 2$ .  
 $x \cdot y = (-1) \cdot 2 = -2$ ,  
 т.е.  $k = -2, x \cdot y = -2$ .

204. а)

|   |      |                 |    |   |                |     |
|---|------|-----------------|----|---|----------------|-----|
| x | -4   | -3              | -2 | 2 | 3              | 4   |
| y | -2,5 | $-3\frac{1}{3}$ | -5 | 5 | $3\frac{1}{3}$ | 2,5 |

б) 

|   |     |                |               |                |   |
|---|-----|----------------|---------------|----------------|---|
| x | -10 | -20            | 20            | $\frac{50}{3}$ | 2 |
| y | -1  | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{5}$  | 5 |

205. а) Обратна; б)  $6 \cdot 12 = 72, k = 72; x \cdot y = 72$ . 206. а)  $x \cdot y = 24$ ; б) да. в)  $k = 24$ .

207. а)

|   |    |               |    |    |    |    |    |    |                |    |
|---|----|---------------|----|----|----|----|----|----|----------------|----|
| x | -8 | -6            | -4 | -2 | -1 | 1  | 2  | 4  | 6              | 8  |
| y | 1  | $\frac{4}{3}$ | 2  | 4  | 8  | -8 | -4 | -2 | $-\frac{4}{3}$ | -1 |

б) Уиџисџво. Неколку точки од табелата претстави во координатната рамнина и поврзи ги со крива линија, како на цртежот бидејќи  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

в) C, E, F и H.

208. а)  $-3 \cdot 5 = k$ , т.е.  $k = -15$ . б)  $x \cdot y = -15$ .

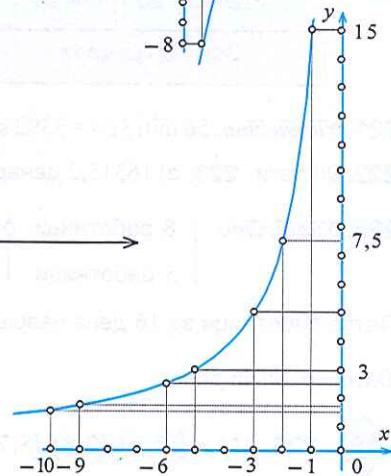
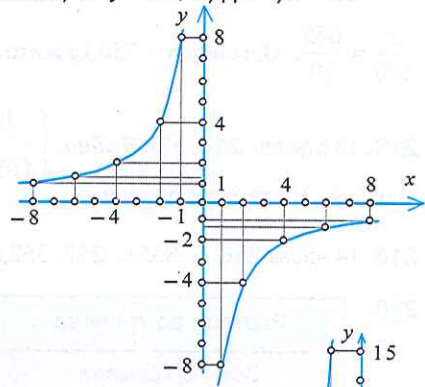
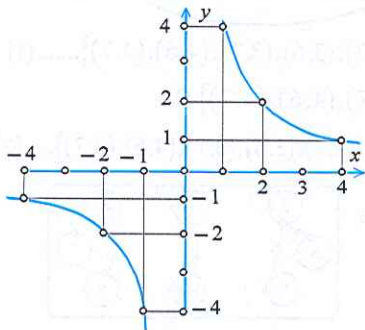
в) 

|   |     |                |     |    |    |     |    |
|---|-----|----------------|-----|----|----|-----|----|
| x | -10 | -9             | -6  | -5 | -3 | -2  | -1 |
| y | 1,5 | $1\frac{2}{3}$ | 2,5 | 3  | 5  | 7,5 | 15 |

г) Уиџисџво. Точките од табелата претстави ги во координатна рамнина и поврзи ги со крива линија како на цртежот затоа што  $x \in [-10, -1]$ .

209.

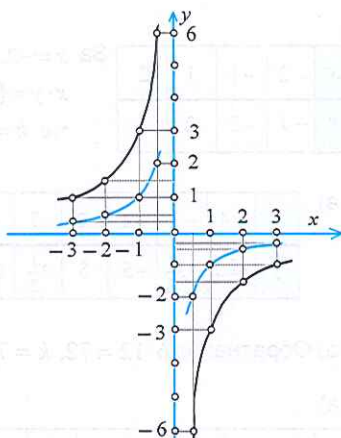
|   |    |    |    |   |   |   |
|---|----|----|----|---|---|---|
| x | -4 | -2 | -1 | 1 | 2 | 4 |
| y | -1 | -2 | -4 | 4 | 2 | 1 |



210. а)  $x \cdot y = 12$  е плошина на правоаголникот; б)  $x \cdot y = 20$  е плошина на паралелограм што е составен од два триаголници со основа  $x$  и висина  $y$ .

211.

|                |               |                |    |                |               |    |                 |                |
|----------------|---------------|----------------|----|----------------|---------------|----|-----------------|----------------|
| $x$            | -3            | -2             | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1  | 2               | 3              |
| $-\frac{1}{x}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$  | 1  | 2              | -2            | -1 | $-\frac{1}{2}$  | $-\frac{1}{3}$ |
| $-\frac{3}{x}$ | 1             | $1\frac{1}{2}$ | 3  | 6              | -6            | -3 | $-1\frac{1}{2}$ | -1             |



14 212. Уйайсїво.

↑ 100 kg жито    ↑ 90 kg брашно  
 ↓ x kg жито    ↓ 675 kg брашно

$\frac{x}{100} = \frac{675}{90}$ . **Одговор.**  $x = 750$  kg жито.

213. 18 одеда. 214. Уйайсїво. ↑ 16 работници    ↓ 21 ден     $\frac{16+x}{16} = \frac{21}{14}$   
 (16+x) работници    ↓ 14 дена

**Одговор.** Уште 8 работници.

215. 14 часа. 216. 2,835 л. 217. 362,5 kg. 218. 1056 парчиња. 219. 11,4 m.

220.

|                    |       |      |       |        |      |
|--------------------|-------|------|-------|--------|------|
| Раствор во грамови | 10    | 20   | 30    | 55     | 100  |
| Сол во грамови     | 0,625 | 1,25 | 1,875 | 3,4375 | 6,25 |

221. Уйайсїво. 56 min 32 s = 3392 s; 1 h 15 min 48 s = 4548 s. **Одговор.** 20466 пати.

222. 90 пати. 223. а) 16315,2 денари; б) 375 евра. 224. а) 36 дена; б) 36 работници.

225. Уйайсїво. ↓ 8 работници    ↑ 40 дена    , т.е.  $x = 64$  дена.  
 ↓ 5 работници    ↑ x дена

Петте работници за 16 дена завршиле  $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$  од работата.  $\frac{1}{4} \cdot 40$  дена = 10 дена.

**Одговор.** За 46 дена.

15 226.  $M^2 = \{(7,7), (7,8), (8,7), (8,8)\}$ .  $M$

228. Решение.  $(A \cap B) \times C = \{2,3,4\} \times \{6,7\} = \{(2,6), (2,7), (3,6), (3,7), (4,6), (4,7)\} \dots (1)$

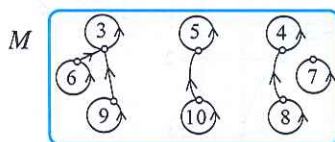
$(A \times C) \cap (B \times C) = \{(1,6), (1,7), (2,6), (2,7), (3,6), (3,7), (4,6), (4,7)\} \cap$

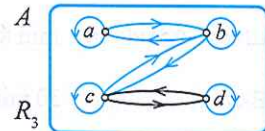
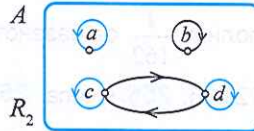
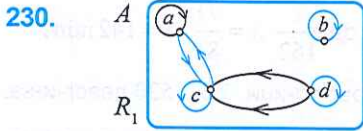
$\cap \{(2,6), (2,7), (3,6), (3,7), (4,6), (4,7), (5,6), (5,7)\} = \{(2,6), (2,7), (3,6), (3,7), (4,6), (4,7)\} \dots (2)$

Од (1) = (2) следува дека доказот е завршен.

229.  $\bar{R} = \{(3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (8,8),$

$(9,9), (10,10), (6,3), (9,3), (10,5), (8,4)\}$ .



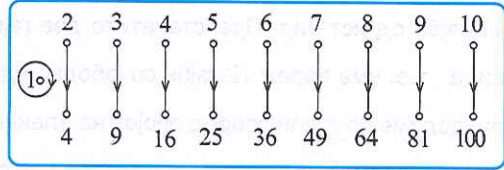


232.  $(3,1), (7,5), (9,5), (7,9), (9,7), (1,1), (5,5), (7,7), (9,9).$

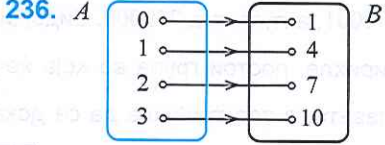
233.

234.  $f(10)=7; f(50)=47; f(100)=97;$

$f(a)=a-3; f(a+1)=a-2; f(x-3)=x-6.$



235. Пример.  $\Gamma_{f_1} = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}; \Gamma_{f_2} = \{(1,1), (2,2), (3,4)\}; G_{f_3} = \{(1,1), (2,3), (3,2)\};$   
 $\Gamma_{f_4} = \{(1,1), (2,4), (3,3)\}; \Gamma_{f_5} = \{(1,1), (2,3), (3,4)\}.$

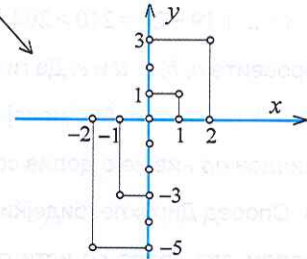


237. а) Не. б) Да. в) Не. г) Не - ако не е сурјекција.

238.

|   |    |    |    |   |   |
|---|----|----|----|---|---|
| x | -2 | -1 | 0  | 1 | 2 |
| y | -5 | -3 | -1 | 1 | 3 |

биекција



Домен е множеството  $A$ , а кодомен е множеството  $\{-5, -3, -1, 1, 3\}.$

239. а) 1,6 (1); б) 10,26415; в) 0,413;

- г) 15; д) 4; е) 100; ж) 750; з) 80.

240. а)  $x=4;$

- б)  $x=33,6;$  в)  $x=480;$  г)  $x=10;$  д)  $x=3;$  е)  $x=0,0625.$

241. а) 3 : 1; б) 390 : 1; в) 10 : 3; г) 7 : 4; д) 25 : 64;

- е) 401 : 34; ж) 4 : 1; з) 2 : 117.

242. 5 : 4.

243. а) 15 момчиња. б) Уйайсиџво. Ако  $a$  е број на момчиња, а  $b$  број на девојчиња,  $a:b=3:4$ , каде  $a=b-4$ , т.е.  $(b-4):b=3:4$ . Одговор.  $b=12$  девојчиња,  $a=9$  момчиња.

в) 12 момчиња. 244. 1 : 10000000. 245. 35 cm. 246. 2,646 ha. 247. а)  $x=460;$  б)  $x=1;$

в)  $x=\frac{3}{10};$  г)  $x=10;$  д)  $x=-4;$  е)  $x=7.$

248. Уйайсиџво. Ако  $x$  е висина на зградата, тогаш  $2:1,2=x:5,4$ . Одговор.  $x=9$  m. 249. а)  $a:b:c:d=8:11:3:2,5;$  б)  $x:y:z=3:8:10.$

в) Уйайсиџво. Продолжената пропорција формирај ја од пропорциите  $b:a=6:5$  и  $a:c=10:7$ . Одговор.  $b:a:c=6:5:3,5.$

250.  $90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 30^\circ, 150^\circ.$  251. 610 ден, 1220 ден, 1830 ден. 252. а)  $k=2,5$ , права пропорционалност; б)  $k=0,5$ , права пропорционалност; в)  $k=3,6$ , обратна пропорционалност.

254. Решение. 6 цевки ... 162 min  
 4 цевки ....  $x$  min  $x=243$  min. За 1 min четирите цевки ќе наполнат  $\frac{1}{243}$

од базенот, а за 30 min  $\frac{30}{243} = \frac{10}{81}$ . Останува да се наполни уште  $\frac{71}{81}$  од базенот.

Шесте цевки за 1 min ќе наполнат  $\frac{1}{162}$  од базенот, па од  $\frac{1}{162} \cdot x = \frac{71}{81}$ ,  $x = 142$  min.

Вкупно:  $142 \text{ min} + 30 \text{ min} = 172 \text{ min}$ . **255.** 9 часа. **256.** 3 работници. **257.** 520 девојчиња.

**258.** 57,6 kg. **259.** 26 kg. **260.** 6 дена. **262.** Нека 33 гајби се ставени на 3 места и тоа по 11 гајби од ист вид. Преостанатите две гајби ќе бидат со јаболка од некој од трите вида, т.е. има барем 12 гајби со јаболка од ист вид. **263.** Жителите на Скопје ќе ги

разделиме во групи според бројот на влакна на главата, т.е. во групата 0 се оние што имаат 0 влакна на главата, во групата 1 се оние што имаат 1 влакно на главата итн., а во групата 200000 се оние што имаат 200000 влакна на главата. Вакви групи има точно 200001, а луѓе има 750000. Бидејќи  $750000 = 3 \cdot 200001 + 149997$ , според принципот на Дирихле, постои група во која ќе има барем 4 лица кои имаат ист број влакна на главата, а тоа требаше да се докаже. **264.** Ако поделбата биде: на првото дете 0

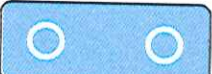
ореви, на второто 1 орев, на третото 2 итн, на дваесет и првото 20. Но, тогаш  $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 19 + 20 = 210 > 200$ . Значи, некои деца ќе имаат ист број ореви. **265.** Нека се тоа броевите  $a, b, c, d$  и  $e$ . Да ги разгледаме збирите:  $a, a + b, a + b + c, a + b + c + d$  и  $a + b + c + d + e$ . Ако некој од нив е делив со 5, тогаш тврдењето е докажано. Нека

ниеден од нив не е делив со 5. Тогаш при делење со 5 се добиваат остатоци 1, 2, 3 или 4. Според Дирихле, бидејќи има 5 збира, а 4 остатоци (1, 2, 3 или 4), следува дека има барем два збира со исти остатоци. Нивната разлика, пак, е број делив со 5, а тоа требаше да се докаже. **266. Уиџисџиво.** Со паралелно поместување доведи правите да минуваат низ иста точка. Тогаш полниот агол го делат на 38 дела. Ако сите прави

образуваат еднакви агли, тогаш секој од нив има  $9^\circ 28' 26'' < 10^\circ$ . Разгледај го случајот кога аглите не се еднакви. **267.** Три јаболка. **268. Уиџисџиво.** Ако се земат 36 топчиња, можно е од нив да има по 9 од секоја боја. Следното 37-мо топче го решава проблемот.



# СОДРЖИНА

|   |                                       |     |
|---|---------------------------------------|-----|
| <b>ТЕМА 1</b>   | ВЕКТОРИ, ТРАНСЛАЦИЈА И РОТАЦИЈА       | 3   |
| <b>ТЕМА 2</b>   | СТЕПЕНИ. КВАДРАТЕН КОРЕН.<br>ПОЛИНОМИ | 23  |
| <b>ТЕМА 3</b>   | КРУЖНИЦА И МНОГУАГОЛНИК.<br>ПЛОШТИНА  | 61  |
| <b>ТЕМА 4</b>   | ФУНКЦИЈА. ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ            | 95  |
|  | ОДГОВОРИ, УПАТСТВА И РЕШЕНИЈА         | 131 |

Автор: **Јово Стефановски**

Рецензенти: Д-р Наум Целакоски - Машински факултет - Скопје  
Миле Гочев - наставник во ОУ „11 Октомври“ - Скопје  
Ѓорѓе Серафимов - наставник во ОУ „Видое Подгорец“ - Струмица

Стручни соработници: Даниела Тачевска - Николов, Гоце Шопкоски,  
Милчо Аврамоски, Јордан Дудески

Уредник: **Јово Стефановски**

CIP - Каталогизација во публикација на Народна и универзитетска библиотека „Св. Климент Охридски“ - Скопје

372.851(076.32) = 163.3

СТЕФАНОВСКИ, Јово

Збирка задачи по математика : за VIII одделение / Јово Стефановски - Скопје:

Алби, 2003, 178 стр.: 23 cm

ISBN 9989 - 919 - 50 - X

COBISS. MK - ID 53498122

**Издавач**

ДРУШТВО ЗА ИЗДАВАЧКА ДЕЈНОСТ  
„АЛБИ“ ДОО, Скопје  
ул. „Даме Груев“ бр. 7, Скопје  
Управител: Александар Стефановски

\*

Јово Стефановски  
ЗБИРКА ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКА  
VIII одделение деветгодишно основно образование

\*

Лектура  
Сузана Стојковска

\*

Компјутерска обработка  
Милчо Аврамоски, Бобан Аврамоски, Блаже Тофиловски

\*

Коректура  
Авторите

\*

Со решение на Министерот за образование и наука бр. 10-1933/1 од  
01.09.2005 година оваа книга е одобрена за употреба во осмо  
одделение осумгодишно основно образование или деветто  
деветгодишно основно образование

\*

Ниеден дел од оваа книга не смее да се умножува, фотокопира и на  
кој било начин репродуцира без писмено одобрение на издавачот

\*

Ракописот е предаден во печат во јули 2013 година.

Печатењето е завршено во јули 2013 година.

Обем 178 страници, формат 17 x 23 cm

Тираж 1000 примероци.

Отпечатено во печатница „НАУМОВСКИ“ Скопје