СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 9 октября 2022 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	1. Можно ли расставить в клетках таблицы 6×6 числа, среди которых нет одинаковых, так, чтобы в каждом прямоугольнике 1×5 (как вертикальном, так и горизонтальном) сумма чисел была равна 2022 или 2023? *Егор Бакаев*
4	2. Существует ли натуральное число, которое можно представить в виде произведения двух палиндромов более чем 100 способами? (Палиндромом называется натуральное число, которое одинаково читается как слева направо, так и справа налево.) *Егор Бакаев*
5	3. Пятиугольник $ABCDE$ описан около окружности. Углы при его вершинах A, C и E равны $100°$. Найдите угол ACE. *Михаил Евдокимов*
5	4. Можно ли раскрасить все натуральные числа, большие чем 1, в три цвета (каждое число — в один цвет, все три цвета должны использоваться) так, чтобы цвет произведения любых двух чисел разного цвета отличался от цвета каждого из сомножителей? *Михаил Евдокимов*
5	5. У Пети есть 8 монет, про которые он знает только, что 7 из них настоящие и весят одинаково, а одна фальшивая и отличается от настоящей по весу, неизвестно в какую сторону. У Васи есть чашечные весы — они показывают, какая чашка тяжелее, но не показывают, насколько. За каждое взвешивание Петя платит Васе (до взвешивания) одну монету из имеющихся у него. Если уплачена настоящая монета, Вася сообщит Пете верный результат взвешивания, а если фальшивая, то случайный. Петя хочет определить 5 настоящих монет и не отдать ни одну из этих монет Васе. Может ли Петя гарантированно этого добиться? *Александр Грибалко, Алексей Заславский*

СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 9 октября 2022 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

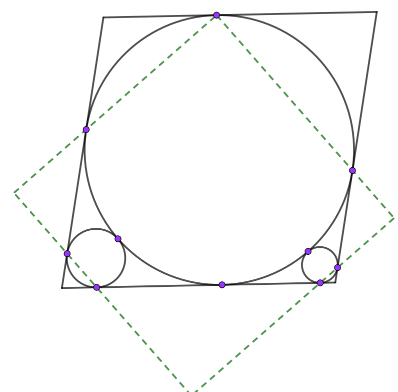
баллы задачи

3 1. При каком наибольшем натуральном m число $m! \cdot 2022!$ будет факториалом натурального числа?

Борис Френкин

5 2. Большая окружность вписана в ромб, каждая из двух меньших окружностей касается двух сторон ромба и большой окружности, как на рисунке справа. Через точки касания окружностей со сторонами ромба провели четыре штриховые прямые, как на рисунке. Докажите, что они образуют квадрат.

Егор Бакаев



5 3. На прямой отмечено 2022 точки так, что каждые две соседние точки расположены на одинаковом расстоянии. Половина точек покрашена в красный цвет, а другая половина — в синий. Может ли сумма длин всевозможных отрезков, у которых левый конец красный, а правый — синий, равняться сумме длин всех отрезков, у которых левый конец синий, а правый — красный? (Концы рассматриваемых отрезков — не обязательно соседние отмеченные точки.)

Александр Грибалко

5 4. Дан остроугольный неравнобедренный треугольник. Одним действием разрешено разрезать один из имеющихся треугольников по медиане на два треугольника. Могут ли через несколько действий все треугольники оказаться равнобедренными?

Егор Бакаев

5. Доска $2N \times 2N$ покрыта неперекрывающимися доминошками 1×2. По доске прошла хромая ладья, побывав на каждой клетке по одному разу (каждый ход хромой ладьи — на клетку, соседнюю по стороне). Назовём ход *продольным*, если это переход из одной клетки доминошки на другую клетку той же доминошки. Каково

1 а) наибольшее;

4 б) наименьшее возможное число продольных ходов?

Борис Френкин

СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 23 октября 2022 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 1. Сто друзей, среди которых есть Петя и Вася, живут в нескольких городах. Петя узнал расстояние от своего города до города каждого из оставшихся 99 друзей и сложил эти 99 чисел. Аналогично поступил Вася. Петя получил 1000 км. Какое наибольшее число мог получить Вася? (Города считайте точками плоскости; если двое живут в одном и том же городе, расстояние между их городами считается равным нулю.)

Борис Френкин

2. Для каждого из чисел 1, 19, 199, 1999 и т.д. изготовили одну отдельную карточку и записали на неё это число.

2 а) Можно ли выбрать не менее трёх карточек так, чтобы сумма чисел на них равнялась числу, все цифры которого, кроме одной — двойки?

3 б) Пусть выбрали несколько карточек так, что сумма чисел на них равна числу, все цифры которого, кроме одной — двойки. Какой может быть его цифра, отличная от двойки?

Сергей Маркелов

6 3. Барон Мюнхгаузен утверждает, что нарисовал многоугольник и точку внутри него так, что любая прямая, проходящая через эту точку, делит этот многоугольник на три многоугольника. Может ли барон быть прав?

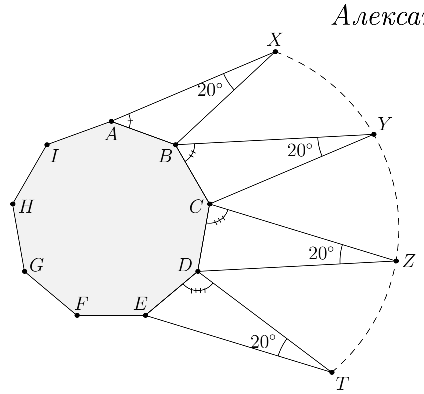
Татьяна Казицына

7 4. Пусть $n > 1$ — целое число. В одной из клеток бесконечной белой клетчатой доски стоит ладья. Каждым ходом она сдвигается по доске ровно на n клеток по вертикали или по горизонтали, закрашивая пройденные n клеток в чёрный цвет. Сделав несколько таких ходов, не проходя никакую клетку дважды, ладья вернулась в исходную клетку. Чёрные клетки образуют замкнутый контур. Докажите, что число белых клеток внутри этого контура даёт при делении на n остаток 1.

Александр Грибалко

9 5. На сторонах правильного девятиугольника $ABCDEFGHI$ во внешнюю сторону построили треугольники XAB, YBC, ZCD и TDE. Известно, что углы X, Y, Z, T этих треугольников равны 20° каждый, а среди углов XAB, YBC, ZCD и TDE каждый следующий на 20° больше предыдущего. Докажите, что точки X, Y, Z, T лежат на одной окружности.

Егор Бакаев



10 6. Петя прибавил к натуральному числу N натуральное число M и заметил, что сумма цифр у результата та же, что и у N. Тогда он снова прибавил M к результату, потом — ещё раз, и т.д. Обязательно ли он когда-нибудь снова получит число с той же суммой цифр, что и у N?

Александр Шаповалов

7. Известно, что среди нескольких купюр, номиналы которых — попарно различные натуральные числа, есть ровно N фальшивых. Детектор за одну проверку определяет сумму номиналов всех настоящих купюр, входящих в выбранный нами набор. Докажите, что за N проверок можно найти все фальшивые купюры, если

3 а) $N = 2$;

8 б) $N = 3$.

Сергей Токарев

СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 23 октября 2022 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

5 1. Какой наибольший рациональный корень может иметь уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c — натуральные числа, не превосходящие 100?

Михаил Евдокимов

5 2. Даны два взаимно простых числа p, q, больших 1 и различающихся больше, чем на 1. Докажите, что найдется натуральное n, для которого

$$\text{НОК}(p + n, q + n) < \text{НОК}(p, q).$$

Михаил Малкин

6 3. Даны две концентрические окружности Ω и ω. Хорда AD окружности Ω касается ω. Внутри меньшего сегмента AD круга с границей Ω взята произвольная точка P. Касательные из P к окружности ω пересекают большую дугу AD окружности Ω в точках B и C. Отрезки BD и AC пересекаются в точке Q. Докажите, что отрезок PQ делит отрезок AD на две равные части.

Иван Кухарчук

7 4. В клетчатом квадрате между любыми двумя соседними по стороне клетками есть закрытая дверь. Жук начинает с какой-то клетки и ходит по клеткам, проходя через двери. Закрытую дверь он открывает в ту сторону, в которую идёт, и оставляет дверь открытой. Через открытую дверь жук может пройти только в ту сторону, в которую дверь была открыта. Докажите, что если жук в какой-либо момент захочет вернуться в исходную клетку, то он сможет это сделать.

Александр Перепечко

8 5. В бесконечной арифметической прогрессии, где все числа натуральные, нашлись два числа с одинаковой суммой цифр. Обязательно ли в ней найдётся ещё одно число с такой же суммой цифр?

Александр Шаповалов

6. Известно, что среди нескольких купюр, номиналы которых — попарно различные натуральные числа, есть ровно N фальшивых. Детектор за одну проверку определяет сумму номиналов всех настоящих купюр, входящих в выбранный нами набор. Докажите, что за N проверок можно найти все фальшивые купюры, если

2 а) $N = 2$;

7 б) $N = 3$.

Сергей Токарев

7. У N друзей есть круглая пицца. Разрешается провести не более 100 прямолинейных разрезов, не перекладывая части до окончания разрезаний, после чего распределить все получившиеся кусочки между всеми друзьями так, чтобы каждый получил суммарно одну и ту же долю пиццы по площади. Найдутся ли такие разрезания, если

5 а) $N = 201$;

5 б) $N = 400$?

Андрей Аржанцев

БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

1. [3] Можно ли расставить в клетках таблицы 6×6 числа, среди которых нет одинаковых, так, чтобы в каждом прямоугольнике 1×5 (как вертикальном, так и горизонтальном) сумма чисел была равна 2022 или 2023?

(*Е. Бакаев*)

Ответ: нельзя. **Решение**. Пусть это удалось. Числа в соседних углах различаются на 1, так как каждое из них дополняет четыре клетки между ними до прямоугольника 1 × 5. Пусть a – наименьшее число из угловых. Тогда в соседних с ним углах стоят числа a + 1. Противоречие.

2. [4] Существует ли натуральное число, которое можно представить в виде произведения двух палиндромов более чем 100 способами? (Палиндромом называется натуральное число, которое одинаково читается как слева направо, так и справа налево.)

(*Е. Бакаев*)

Ответ: существует. Рассмотрим палиндром $1_n = \underbrace{1\ldots1}_{n}$.

Способ 1. Если n кратно k, то 1_n делится на палиндром 1_k, причём частное – тоже палиндром, состоящий из единиц, разделённых группами из k – 1 нуля. Осталось выбрать число n, имеющее более 100 собственных делителей. Например, 2^{101}.

Замечание. Число 6_n делится не только на 1_k, но и на 2_k, 3_k и 6_k. Это позволяет уменьшить n до числа, имеющего более 25 собственных делителей, например, годится $n = 720 = 2^4{\cdot}3^2{\cdot}5$.

Идея способа 2. Заметим, что если при умножении палиндромов не происходит переносов из одного разряда в другой, то произведение – тоже палиндром. Рассмотрим произведение $11\cdot101\cdot1\underbrace{0\ldots0}_{3}1\cdot1\underbrace{0\ldots0}_{7}1\cdot1\underbrace{0\ldots0}_{15}1\cdot1\underbrace{0\ldots0}_{31}1\cdot1\underbrace{0\ldots0}_{63}1\cdot1\underbrace{0\ldots0}_{127}1 = 1_{256}$. Можно доказать, что при умножении любого числа этих сомножителей переносов не происходит и получается палиндром из нулей и единиц. Поскольку 8 множителей можно $2^7 = 128$ способами разбить на две группы, можно получить 128 различных (поскольку множители взаимно просты) представлений числа 1_{256} в виде произведения двух палиндромов.

Замечание 2. Соображения из замечания к способу 1 показывают, что годится число 6_{64}. Можно показать, что подходит даже число

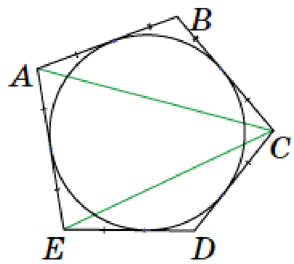
$$11\cdot101\cdot1001\cdot1\,\underbrace{0\ldots0}_{3}\,1\cdot1\,\underbrace{0\ldots0}_{4}\,1\cdot1\,\underbrace{0\ldots0}_{5}\,1\cdot1\,\underbrace{0\ldots0}_{6}\,1\cdot1\,\underbrace{0\ldots0}_{7}\,1.$$

3. [5] Пятиугольник $ABCDE$ описан около окружности. Углы при его вершинах A, C и E равны 100°. Найдите угол ACE.

(*М. Евдокимов*)

Ответ: 40°. Несложно понять, что такой пятиугольник существует.

Решение 1. Прямые, соединяющие вершины с центром O вписанной окружности ω, являются биссектрисами углов пятиугольника. Поэтому $\angle OAE = \angle OEA = 50°$, $\angle AOE = 80°$. Пусть ω касается сторон BC и AE в точках K и M соответственно. Тогда $\angle OCK = 50°$, и прямоугольные треугольники OMA, OKC и OME равны по катету и противолежащему углу. Значит, $OA = OC = OE$, т. е. точки A, C и E лежат на окружности с центром O. Следовательно, $\angle ACE = \frac{1}{2}\angle AOE = 40°$.



Решение 2. Так как углы A, C, E равны, все касательные к окружности из этих вершин равны. Поскольку касательные из вершины B тоже равны, треугольник ABC равнобедренный, и треугольник CDE тоже (аналогично). Сумма углов B и D равна $540° – 3\cdot100° = 240°$, поэтому $\angle ACB + \angle ECD = (2\cdot180° – 240°):2 = =60°$, а $\angle ACE = 100° – 60° = 40°$.

4. [5] Можно ли раскрасить все натуральные числа, большие 1, в три цвета (каждое число – в один цвет, все три цвета должны использоваться) так, чтобы цвет произведения любых двух чисел разного цвета отличался от цвета каждого из сомножителей?

(*М. Евдокимов*)

Ответ: нельзя. **Решение**. Пусть удалось раскрасить числа в синий, красный и зелёный цвета. Можно считать, что число 2 синее, а 4 не красное. Возьмём красное число k. Тогда число $2k$ зелёное, а $2\cdot(2k)$ красное. С другой стороны, $4\cdot k$ не красное. Противоречие.

5. [5] У Пети есть 8 монет, про которые он знает только, что 7 из них настоящие и весят одинаково, а одна фальшивая и отличается от настоящей по весу, неизвестно в какую сторону. У Васи есть чашечные весы – они показывают, какая чашка тяжелее, но не показывают, насколько. За каждое взвешивание Петя платит Васе (до взвешивания) одну монету из имеющихся у него. Если уплачена настоящая монета, Вася сообщит Пете верный результат взвешивания, а если фальшивая, то случайный. Петя хочет определить 5 настоящих монет и не отдать ни одну из этих монет Васе. Может ли Петя гарантированно этого добиться?

(*А. Грибалко, А. Заславский*)

Ответ: может. **Решение**. Обозначим монеты A, B, C, D, E, F, G, H. Петя отдаёт H и просит Васю сравнить $A + B$ с $C + D$.

1) Вася отвечает, что весы в равновесии. Тогда монеты A, B, C, D настоящие (независимо от того, какая монета досталась Васе). Петя отдаёт G за сравнение A с E. Если Вася ответит, что их веса не равны, то монета F настоящая. В противном случае монета E настоящая.

2) Вася отвечает, что $A + B$ тяжелее. Тогда монеты E, F, G настоящие. Петя отдаёт D за сравнение A с B. Если Вася отвечает, что их веса не равны, то более лёгкая из этих двух и монета C настоящие. В противном случае монеты A и B настоящие.

Случай, когда $C + D$ тяжелее рассматривается аналогично.

10–11 классы

1. [3] При каком наибольшем натуральном m число $m!\cdot 2022!$ будет факториалом натурального числа?

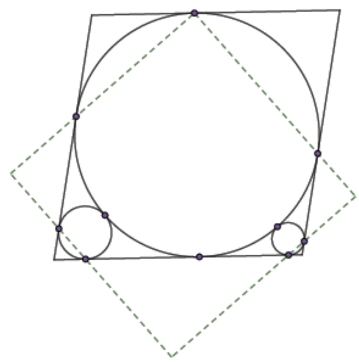
(*Б. Френкин*)

Ответ: при $m = 2022! - 1$.

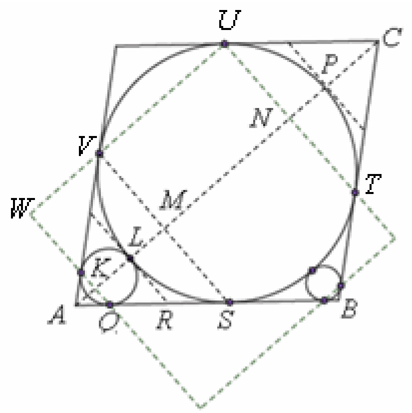
Решение. $(2022! - 1)!\cdot 2022! = (2022!)!$. Если $m \geq 2022!$, то $m! < m!\cdot 2022! < (m + 1)!$.

2. [5] Большая окружность вписана в ромб, каждая из двух меньших окружностей касается двух сторон ромба и большой окружности, как на рисунке справа. Через точки касания окружностей со сторонами ромба провели четыре штриховые прямые, как на рисунке. Докажите, что они образуют квадрат.

(*Е. Бакаев*)



Решение. Полученная фигура – прямоугольник, поскольку её стороны из симметрии перпендикулярны диагоналям ромба. Осталось проверить равенство его сторон. Для этого проведём несколько дополнительных прямых, перпендикулярных диагонали AC, и обозначим некоторые точки (см. рисунок).



Решение 1. Докажем, что $KL = LM$.

Способ 1. $RQ = RL = RS$ как касательные, проведённые из одной точки. Из равенства $RQ = RS$ по теореме Фалеса получаем $KL = LM$. □

Способ 2. $\angle KQL = \angle RQL$ (они измеряются половинами равных дуг), то есть QL – биссектриса угла KQR. Аналогично SL – биссектриса угла ASM. Следовательно. точка L равноудалена от прямых KQ, AB и SM, т.е. $KL = LM$. □

Далее, одна из сторон полученного в условии прямоугольника равна KN. Из симметрии $LM = NP$. Тогда $KN = LP$, то есть диаметру вписанной в ромб окружности.

Аналогично и другая сторона прямоугольника равна этому диаметру.

Решение 2. Рассмотрим гомотетию с центром L, переводящую маленькую окружность, вписанную в угол A, в большую окружность. Она переводит AQ в параллельную ей касательную к большой окружности, то есть в CU. При этом точка Q переходит в точку U, то есть точки Q, L, U лежат на одной прямой. Далее, $\angle VUL = \angle LUS$ как вписанные опирающиеся на симметричные дуги, поэтому прямоугольные треугольники QUW и QUS равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, $UW = US$. Аналогично и смежная с UW сторона полученного прямоугольника равна US.

3. [5] На прямой отмечено 2022 точки так, что каждые две соседние точки расположены на одинаковом расстоянии. Половина точек покрашена в красный цвет, а другая половина – в синий. Может ли сумма длин всевозможных отрезков, у которых левый конец красный, а правый – синий, равняться сумме длин всех отрезков, у которых левый конец синий, а правый – красный? (Концы рассматриваемых отрезков – не обязательно соседние отмеченные точки.)

(*А. Грибалко*)

Ответ: не может. **Решение**. Можно считать, что отмеченные точки – целые числа от 1 до 2022. Достаточно показать, что сумма S длин всех отрезков с разноцветными концами нечётна.

Способ 1. Пусть красно-чётных точек x, тогда красно-нечётных и сине-чётных – по $y = 1011 - x$, значит, сине-нечётных – x. «Разноцветные» отрезки чётной длины не влияют на чётность S, а количество таких отрезков нечётной длины равно $x^2 + y^2$. Осталось заметить, что числа x и y разной чётности.

Способ 2. Пусть k – координата красного конца отрезка, а c – синего. Заменим длину $|k - c|$ этого отрезка на $k + c$ – чётность S не изменится. Но теперь в сумме по всем «разноцветным» отрезкам каждое число встретится ровно 1011 раз, то есть сумма равна $1011(1 + 2 + ... + 2022)$. Она нечётна, так как в скобках 1011 нечётных слагаемых.

Способ 3. Приведём только идею. Можно проверить, что S чётна, для какой-то конкретной раскраски (например, когда слева направо идут сначала все синие точки, а потом все красные), после чего проверить, что чётность у S сохраняется, если менять местами цвета соседних точек.

4. [5] Дан остроугольный неравнобедренный треугольник. Одним действием разрешено разрезать один из имеющихся треугольников по медиане на два треугольника. Могут ли через несколько действий все треугольники оказаться равнобедренными?

(*Е. Бакаев*)

Ответ: не могут. **Решение**. Докажем, что всегда среди имеющихся треугольников найдется неравнобедренный непрямоугольный треугольник. В начальный момент это так.

Пусть на очередном ходе имеющийся неравнобедренный непрямоугольный треугольник ABC был разрезан по медиане BM. Так как он неравнобедренный, медиана BM не совпадает с высотой, то есть один из углов AMB, CMB – тупой. Пусть это угол AMB. Покажем, что AMB – нужный нам треугольник. Он тупоугольный (и значит, непрямоугольный). Так как $\angle ABC \neq 90°$, медиана BM не равна половине стороны AC, следовательно, $AM \neq BM$. Кроме того, $AB > AM$ и $AB > BM$ (AB – сторона напротив наибольшего угла в треугольнике AMB). Значит, треугольник AMB – неравнобедренный.

5. Доска $2N\times2N$ покрыта неперекрывающимися доминошками 1×2. По доске прошла *хромая* ладья, побывав на каждой клетке по одному разу (каждый ход хромой ладьи – на клетку, соседнюю по стороне). Назовём ход *продольным*, если это переход из одной клетки доминошки на другую клетку той же доминошки. Каково

а) [1] наибольшее;

б) [4] наименьшее возможное число продольных ходов?

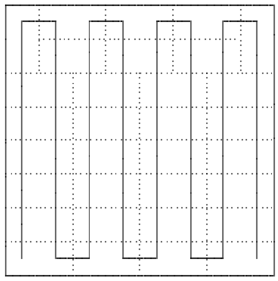
(*Б. Френкин*)

а) **Ответ:** $2N^2$ ходов. **Решение**. *Оценка*. Количество продольных ходов не превосходит количества $2N^2$ доминошек (так как в каждой доминошке не более одного продольного хода).

Пример. Возьмём любой обход ладьей и занумеруем клетки в порядке обхода. Пусть клетки $2k - 1$ и $2k$ образуют доминошку для всех k от 1 до $2N^2$. Тогда число продольных ходов равно числу доминошек.

б) **Ответ:** 1 ход при $N = 1$; 2 хода при $N \geq 2$. **Решение**. Случай $N = 1$ очевиден.

Пусть $N \geq 2$. *Оценка*. При проходе угла один из двух ходов будет продольным. Один угол может быть началом пути ладьи, другой – концом, а оставшиеся углы придётся проходить. Поэтому будет хотя бы два продольных хода.



Пример. Положим в верхние углы доски по вертикальной доминошке, а все остальные положим горизонтально. Пусть ладья идёт змейкой из левого нижнего угла (см. рисунок). Продольными будут лишь два хода – в вертикальных доминошках.

СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

8 – 9 классы

1. [4] Сто друзей, среди которых есть Петя и Вася, живут в нескольких городах. Петя узнал расстояние от своего города до города каждого из оставшихся 99 друзей и сложил эти 99 чисел. Аналогично поступил Вася. Петя получил 1000 км. Какое наибольшее число мог получить Вася? (Города считайте точками плоскости; если двое живут в одном и том же городе, расстояние между их городами считается равным нулю.)

Борис Френкин

Ответ. 99000 км.

Решение. *Оценка*. Пусть Вася живёт в городе V, а Петя – в городе P. Рассмотрим произвольного Васиного друга (это может быть и Петя), пусть он живёт в городе X. По неравенству треугольника $VX \leq PV + PX$, а эта сумма не больше суммы Пети, т. е. 1000 км. Значит, сумма расстояний от V до городов всех 99 друзей Васи не более $99 \cdot 1000$ км.

Пример. Все, кроме Васи, живут в одном городе, а Вася – в 1000 км от них.

2. Для каждого из чисел 1, 19, 199, 1999 и т. д. изготовили одну отдельную карточку и записали на ней это число.

а) [2] Можно ли выбрать не менее трёх карточек так, чтобы сумма чисел на них равнялась числу, все цифры которого, кроме одной, – двойки?

б) [3] Пусть выбрали несколько карточек так, что сумма чисел на них равна числу, все цифры которого, кроме одной, – двойки. Какой может быть его цифра, отличная от двойки?

Сергей Маркелов

а) **Ответ**. Можно. **Решение**. Например, 19 + 199 + 1999 + ... + 199999999 = 222222212.

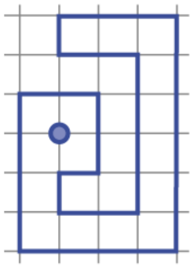
б) **Ответ**. 0 или 1. **Решение**. *Пример* с нулём: 1 + 19 = 20; *пример* с 1 дан в пункте **а**).

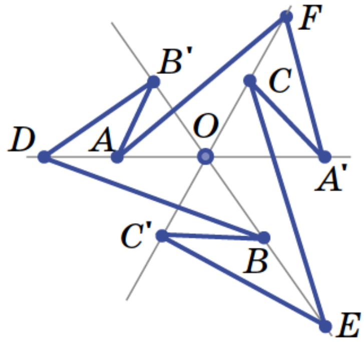
Оценка. Заметим, что $10^n \le 1\underbrace{9\ldots9}_{n} < 2\cdot10^n$. Поэтому сумма S чисел на выбранных k карточках удовлетворяет неравенству $E \le S < 2E$, где число E состоит из k единиц и, возможно, нескольких нулей. Значит, в записи S и $2E$ одинаковое количество цифр, причём хотя бы одна цифра числа S меньше соответствующей цифры числа $2E$, т. е. меньше 2. Это может быть только цифра 0 или 1.

Замечание. Как видно из решения, сумма чисел, начинающихся с единицы и имеющих попарно различное количество цифр, всегда содержит в своей записи 0 или 1.

3. [6] Барон Мюнхгаузен утверждает, что нарисовал многоугольник и точку внутри него так, что любая прямая, проходящая через эту точку, делит этот многоугольник на три многоугольника. Может ли барон быть прав?

Татьяна Казицына





Ответ: может. **Решение**. См. примеры справа. На втором рисунке существенно, что на одной прямой лежит тройка точек A, O, A', тройка B, O, B' и тройка C, O, C'.

4. [7] Пусть $n > 1$ – целое число. В одной из клеток бесконечной белой клетчатой доски стоит ладья. Каждым ходом она сдвигается по доске ровно на n клеток по вертикали или по горизонтали, закрашивая пройденные n клеток в чёрный цвет. Сделав несколько таких ходов, не проходя никакую клетку дважды, ладья вернулась в исходную клетку. Чёрные клетки образуют замкнутый контур. Докажите, что число белых клеток внутри этого контура даёт при делении на n остаток 1.

Александр Грибалко

Решение 1. Пусть сторона клеток доски равна 1. Отметим центр начальной клетки и центры всех клеток, до которых ладья может добраться за один или несколько ходов. Проведём через них синие прямые параллельно линиям сетки. Образуется вспомогательная синяя сетка, разбитая на клетки со стороной n. Если ладья прыгала из клетки A в клетку B, соединим центры этих клеток отрезком. Эти отрезки образуют замкнутый многоугольник; его вершины лежат в узлах синей сетки, а стороны идут по линиям синей сетки. Поэтому площадь многоугольника кратна n^2 (пусть она равна an^2). Периметр его кратен $2n$ (ведь шаги ладьи кратны n, причём сдвиги ладьи влево компенсируются сдвигами вправо, а сдвиги вверх – сдвигами вниз). Далее можно рассуждать по-разному.

Способ 1. Площадь многоугольника состоит из белой клетчатой части и из чёрной каёмки, окружающей белую часть. Разобьём контур многоугольника на отрезки между узлами синей сетки. К каждому из них изнутри прилегает чёрная прямоугольная полоска ширины $\frac{1}{2}$. Её площадь равна $\frac{n}{2}$. Так как число таких полосок чётно, их общая площадь – целое число, кратное n (пусть bn). Но эта «общая площадь» не совпадает с чёрной площадью внутри многоугольника. Несовпадения возникают из-за чёрных клеток в углах многоугольника: если угол равен 90°, то полоски перекрываются по четверти чёрной клетки; а при угле в 270° внутри остаётся четверть клетки, не покрытая полосками. Внешние углы многоугольника равны ±90°, а поскольку сумма внешних углов (с учётом знаков) равна 360°, то внешних углов в 90° на 4 больше, чем внешних углов в –90°, то есть внутренних углов в 90° на 4 больше, чем углов в 270°. Поэтому площадь чёрной каёмки внутри контура меньше суммарной площади полосок на 1. Значит, чёрная площадь внутри многоугольника равна bn – 1, а белая площадь внутри равна тогда an^2 – (bn – 1) = $n\cdot(an - b)$ +1. Но эта площадь равна числу белых клеток!

Способ 2. Проведём через центры всех клеток исходной доски красные прямые параллельно линиям сетки, образуется красная сетка с единичными клетками. Многоугольник, рассмотренный выше, – клетчатый многоугольник на этой сетке, поэтому количество Г красных узлов на его границе равно его периметру, а значит, кратно $2n$. Центром всякой клетки исходной доски является красный узел, поэтому такая клетка целиком лежит внутри этого многоугольника тогда и только тогда, когда внутри этого многоугольника лежит её центр. Поэтому количество В белых клеток внутри многоугольника равно количеству красных узлов внутри него. По формуле Пика для этого многоугольника и красной сетки, $В + \frac{Г}{2} - 1 = an^2$, откуда В ≡ 1 (mod n).

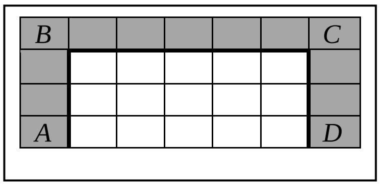
Решение 2. Назовём клетки, в которых может останавливаться ладья, *узлами*. Клетка является узлом, если до какого-то другого узла расстояние как по вертикали, так и по горизонтали кратно n. Чёрный контур вместе с белыми клетками внутри него образуют клетчатый многоугольник M.

Индукция по периметру M. *База*. Наименьший периметр равен $4(n + 1)$ у квадрата, внутри него находится $(n - 1)^2$ белых клеток.

Шаг индукции. Пусть периметр больше $4(n + 1)$.

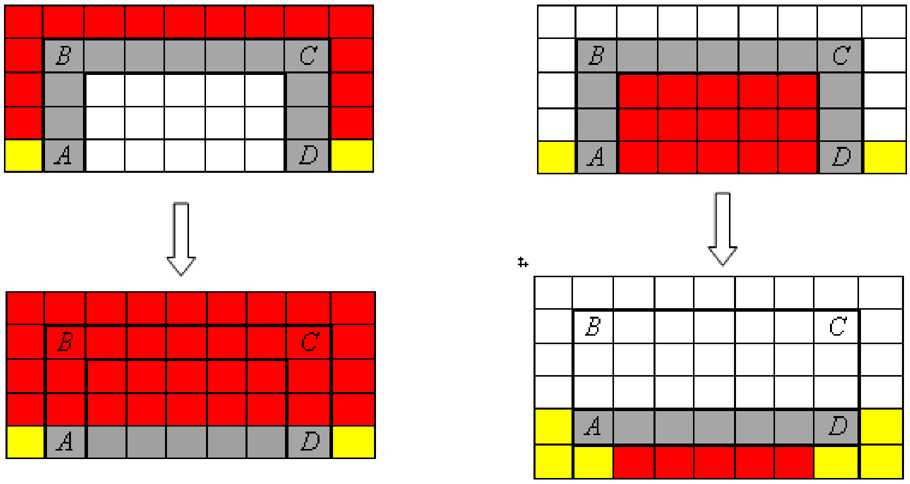
Способ 1. Тогда найдётся клетчатая вертикаль или горизонталь, содержащая узлы, по обе стороны от которой есть чёрные клетки. Она содержит несколько интервалов внутренних белых клеток с концами в чёрных узлах. Выберем любой из этих интервалов, он разбивает чёрный контур на два контура меньшей длины. По предположению индукции внутри каждого из них число белых клеток сравнимо с 1, а на «разбивающем» интервале сравнимо с –1 по модулю n. Поэтому число белых клеток внутри исходного контура сравнимо с 1 + 1 – 1 = 1 (mod n).

Способ 2. Многоугольник M имеет выпуклые (90°) и невыпуклые (270°) углы. Назовём сторону многоугольника *крайней*, если она соединяет два равных угла этого многоугольника. Крайние стороны, очевидно, есть, пусть BC – участок пути, соответствующий кратчайшей из них. Без ограничения общности можно считать, что он горизонтален, а ладья пришла в B снизу из ближайшего узла A и ушла из C вниз в ближайший узел D (см. рисунок справа, где n = 3).



Если из D контур поворачивает в сторону A (или из A в сторону D), то CD – крайняя сторона. Значит, $BC = CD$, то есть $ABCD$ – минимальный квадрат, что противоречит рассматриваемому случаю.

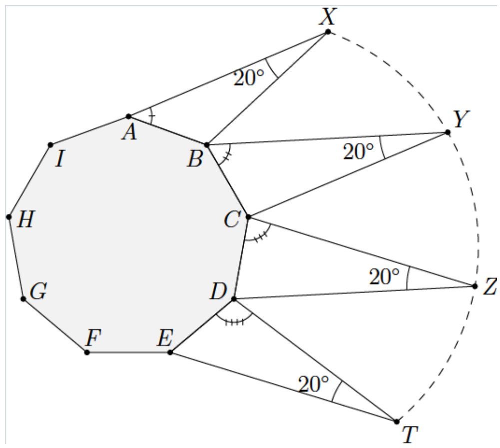
В противном случае внутри «отрезка» AD нет других участков пути ладьи: такой участок обязан быть крайним (путь вверх из его концов невозможен), но это противоречит выбору BC. Таким образом, все клетки между A и D белые либо все они лежат вне многоугольника. Заменим часть пути $ABCD$ «отрезком» AB. При этом многоугольник M потеряет (рис. слева) либо приобретет (рис. справа) белый прямоугольник высоты n, то есть, количество белых клеток по модулю n не изменится. (На рисунках красные клетки заведомо лежат вне многоугольника, а где лежат жёлтые клетки зависит от того, куда продолжается чёрный контур из точек A и D.)



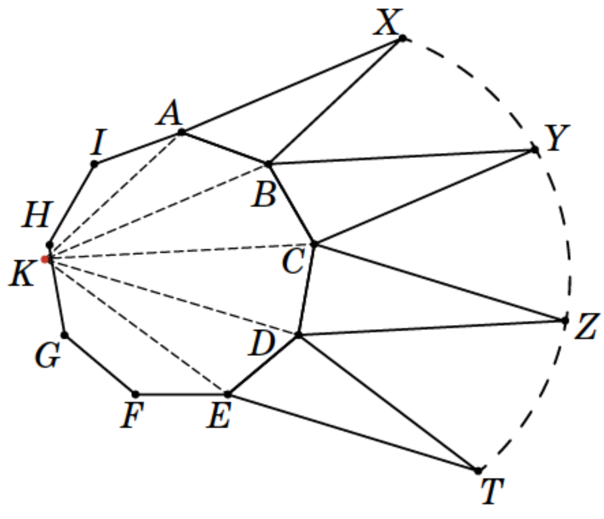
В обоих случаях периметр много-угольника уменьшится, поэтому по предположению индукции число белых клеток в нём сравнимо с 1 по модулю n.

5. [9] На сторонах правильного девятиугольника $ABCDEFGHI$ во внешнюю сторону построили треугольники XAB, YBC, ZCD и TDE. Известно, что углы X, Y, Z, T этих треугольников равны 20° каждый, а среди углов XAB, YBC, ZCD и TDE каждый следующий на 20° больше предыдущего. Докажите, что точки X, Y, Z, T лежат на одной окружности.

Егор Бакаев



Решение 1. Отразив точку X относительно середины AB, получим точку K, лежащую на большей дуге AC описанной окружности девятиугольника (вписанный угол, опирающийся на хорду AB, равен 20°, а $\angle KBA = \angle XAB = \angle YBC - 20° < 160° - 20° = \angle CBA$). Далее, $\angle KCB = \angle KCA + \angle ACB = \angle KBA + 20° = \angle XAB + 20° = \angle YBC$. Значит, треугольники KCB и YBC равны по углам и стороне. Поэтому точка Y симметрична точке K относительно середины BC. Аналогично точки Z и T симметричны точке K относительно середин CD и DE соответственно. Следовательно, точки X, Y, Z, T лежат на окружности, получающейся из окружности, проходящей через середины сторон девятиугольника гомотетией с центром K и коэффициентом 2.



Решение 2 (конспект). Пусть O – центр девятиугольника, O_X, O_Y, O_Z, O_T – центры описанных окружностей Ω_X, Ω_Y, Ω_Z, Ω_T треугольников XAB, YBC, ZCD, TDE соответственно. Указанные описанные окружности равны в силу равенства хорд AB, BC, CD и DE и опирающихся на них вписанных углов, поэтому точки O_X, O_Y, O_Z, O_T лежат на окружности Ω с центром O.

При повороте вокруг O на 360°:9 = 40° по часовой стрелке, Ω_X переходит в Ω_Y, а треугольник XAB – в треугольник $X'BC$, вписанный в Ω_Y. По условию, $\angle YBX' = 20°$, откуда $\angle YO_YX' = 40°$. Таким образом, вектор $\overrightarrow{O_X X}$ переходит в $\overrightarrow{O_Y Y}$ при композиции двух поворотов вокруг O на 40° в *разных* направлениях. Следовательно, $\overrightarrow{O_Y Y} = \overrightarrow{O_X X}$. Аналогично $\overrightarrow{O_T T} = \overrightarrow{O_Z Z} = \overrightarrow{O_Y Y}$. Значит, точки X, Y, Z, T лежат на окружности, получающейся из Ω сдвигом на вектор $\overrightarrow{O_X X}$.

6. [10] Петя прибавил к натуральному числу N натуральное число M и заметил, что сумма цифр у результата та же, что и у N. Тогда он снова прибавил M к результату, потом – ещё раз, и т. д. Обязательно ли он когда-нибудь снова получит число с той же суммой цифр, что и у N?

Александр Шаповалов

Ответ: не обязательно. **Решение**. *Пример*. Пусть N = 2, M = 1008. Число M кратно 16, поэтому все полученные Петей числа дают остаток 2 mod 16. Число с суммой цифр 2 представляется как сумма двух степеней десятки. Степени 1, 10, 10^2 и 10^3 дают остатки 1, 10, 4 и 8 при делении на 16, остальные степени кратны 16. Остаток 2 можно получить лишь двумя способами: 1 + 1 или 10 + 8, они соответствуют числам 2 и 1010. Значит, других чисел с суммой цифр 2 Петя получить не сможет.

7. Известно, что среди нескольких купюр, номиналы которых – попарно различные натуральные числа, есть ровно N фальшивых. Детектор за одну проверку определяет сумму номиналов всех настоящих купюр, входящих в выбранный нами набор. Докажите, что за N проверок можно найти все фальшивые купюры, если **а**) [3] N = 2; **б**) [8] N = 3.

Сергей Токарев

Решение. Можно считать, что детектор выдаёт сумму номиналов *фальшивых* купюр в проверяемом наборе. Первая проверка – весь набор – даст сумму S номиналов всех фальшивых.

а) Вторая проверка – все купюры, меньшие $\frac{S}{2}$, – даст число X. В этом наборе ровно одна фальшивая, поэтому купюры с номиналами X и $S - X$ фальшивые.

Замечание. Во вторую проверку можно было взять по купюре из каждой пары с суммой S.

б) Назовём купюры и числа, меньшие $\frac{S}{3}$, *мелкими*, а остальные – *крупными*.

Вторая проверка – все мелкие купюры – даст число M. Теперь известна и сумма номиналов $K = S - M$ крупных фальшивых купюр. Заметим, что фальшивые есть и среди мелких, и среди крупных купюр. Поэтому возможны два вида троек фальшивых купюр:

(M_1, M_2, K), где числа M_1 и M_2 мелкие с суммой M, и (M, K_1, K_2), где K_1 и K_2 крупные с суммой K, а M мелкое.

Третья проверка – все купюры, меньшие $\frac{M}{2}$, и все крупные, меньшие $\frac{K}{2}$, – даст число X. Видно, что в этом наборе ровно одна фальшивая купюра. Поэтому, если число X мелкое, то тройка фальшивых – это $(X, M - X, K)$, а если крупное, то – $(M, X, K - X)$.

Замечание. Во вторую проверку можно взять наименьшую купюру от каждой тройки с суммой S. В третью проверку можно взять по одной купюре из каждой пары мелких с суммой M и из каждой пары крупных с суммой K.

Вариация решения пункта б).

Первая проверка – все купюры. После неё мы узнаем сумму номиналов всех настоящих купюр, а значит, и сумму номиналов всех фальшивых. Обозначим эту сумму через S_1. Построим таблицу, в которой три столбца, а в строках записаны в порядке возрастания все возможные тройки чисел, равные номиналам купюр, которые дают в сумме S_1.

Вторая проверка – все купюры, номиналы которых попали в первый столбец таблицы. После этой проверки мы будем знать сумму номиналов некоторых купюр в «фальшивой» тройке. Пусть эта сумма равна S_2. В неё точно входит число из первого столбца, так как соответствующая купюра участвовала в проверке. Также в неё может входить число из второго столбца. А вот числа из третьего столбца в ней точно нет, поскольку все числа первого столбца меньше $S_1/3$, а третьего – больше $S_1/3$, поэтому ни одно из чисел третьего столбца не может присутствовать в первом. Удалим из таблицы все строки, в которых ни первое число, ни сумма первого и второго не равны S_2.

Третья проверка – все купюры, номиналы которых находятся во втором столбце оставшейся таблицы. Заметим, что в каждой строке либо первое число равно S_2 и тогда второе число больше S_2, либо сумма первого и второго числа равна S_2 и тогда первое число меньше $S_2/2$, а второе – больше $S_2/2$, но меньше S_2. Значит, никакое число из первого столбца не может стоять во втором столбце. Кроме того, из этого следует, что все числа во втором столбце различны, иначе соответствующие тройки полностью совпадали бы.

Докажем, что и числа из третьего столбца не могли попасть во второй столбец. Предположим, что это не так, и в тройках (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) совпадают числа a_3 и b_2. Тогда $a_1 < a_2 < a_3 = b_2 < b_3$, а так как $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = S_1$, то $b_1 < a_1 < b_1 + b_2$ и $a_1 + a_2 > b_1 + b_2 > b_1$. Это противоречит тому, что в обеих тройках есть числа с суммой S_2.

Таким образом, результатом третьей проверки является номинал второй купюры в «фальшивой» тройке. А так как мы уже доказали, что во втором столбце нет равных чисел, то мы однозначно определим эту тройку.

10–11 классы

1. [5] Какой наибольший рациональный корень может иметь уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c – натуральные числа, не превосходящие 100?

Михаил Евдокимов

Ответ: $-\frac{1}{99}$. **Решение**. Заметим, что $-\frac{1}{99}$ – корень уравнения $99x^2 + 100x + 1 = 0$.

Докажем максимальность. Ясно, что корень x такого уравнения, как в условии, отрицателен. Пусть $|x| < \frac{1}{99}$. Тогда знаменатель q несократимой дроби $|x|$ больше 99. Но, как известно, q – делитель старшего коэффициента a, то есть он не больше 100. Значит, $q = 100$, а $|x| = 0{,}01$. Следовательно, $ax^2 + bx + c > 0 - 100\cdot 0{,}01 + 1 = 0$. Противоречие.

2. [5] Даны два взаимно простых числа p, q, больших 1 и различающихся больше, чем на 1. Докажите, что найдётся натуральное n, для которого НОК$(p + n, q + n)$ < НОК(p, q).

Михаил Малкин

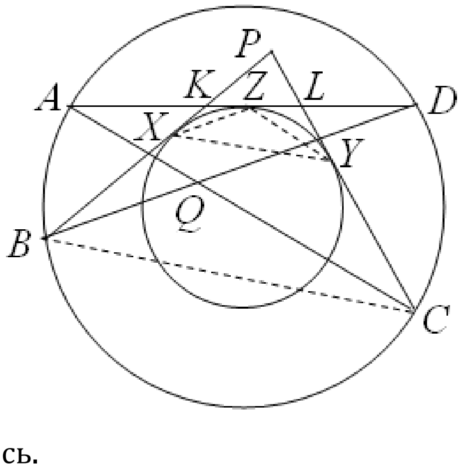
Решение. Можно считать, что число $m = q - p$ не меньше 2. При этом НОД(p, m) = =НОД(p, q) = 1. Числа p и q сравнимы по модулю m, но не кратны m, значит, после увеличения их на некоторое натуральное число $n < m$, станут кратными m.

Докажем, что такое n будет искомым. Заметим, что $(p - 1)(q - 1) > 1\cdot m \geq n + 1$, то есть $pq > p + q + n$. Поэтому $pqm \geq pq(1 + n) > pq + n(p + q + n) = (p + n)(q + n)$.

Поделив на m = НОД$(p + n, m)$ = НОД$(p + n, q + n)$, получим pq > НОК$(p + n, q + n)$.

3. [6] Даны две концентрические окружности Ω и ω. Хорда AD окружности Ω касается ω. Внутри меньшего сегмента AD круга с границей Ω взята произвольная точка P. Касательные из P к окружности ω пересекают большую дугу AD окружности Ω в точках B и C. Отрезки BD и AC пересекаются в точке Q. Докажите, что отрезок PQ делит отрезок AD на две равные части.

Иван Кухарчук



Решение. Пусть O – центр окружностей, AD касается ω в точке Z, а PB и PC касаются ω в точках X и Y и пересекают AD в точках K и L соответственно. Точки A и D симметричны относительно OZ, поэтому Z – середина AD.

Касательные PX и PY симметричны относительно PO, значит, $XY \parallel BC$. Аналогично $XZ \parallel BD$, $ZY \parallel AC$. Рассмотрим гомотетию с центром P, переводящую отрезок BC в XY. Она переводит точку пересечения Q прямых BD и AC в точку пересечения параллельных им прямых XZ и YZ, то есть в точку Z. Следовательно, точки P, Z и Q лежат на одной прямой, что и требовалось.

4. [7] В клетчатом квадрате между каждыми двумя соседними по стороне клетками есть закрытая дверь. Жук начинает с какой-то клетки и ходит по клеткам, проходя через двери. Закрытую дверь он открывает в ту сторону, в которую идёт, и оставляет дверь открытой. Через открытую дверь жук может пройти только в ту сторону, в которую дверь была открыта. Докажите, что если жук в какой-либо момент захочет вернуться в исходную клетку, то он сможет это сделать.

Александр Перепечко

Решение. Если до какой-то закрытой двери можно добраться, направим жука к ней и откроем. Продолжим этот процесс. Общее количество закрытых дверей уменьшается, значит, в некоторый *прекрасный* момент не останется закрытых дверей, до которых можно дойти.

Предположим, что в этот момент осталось непустое множество N недостижимых клеток. Оставшиеся клетки образуют множество D достижимых клеток. Заметим, что все двери между N и D открыты в сторону D. Ясно, что таких дверей хотя бы две. Это значит, что жук когда-то открыл одну из них, попал в D, а потом смог вернуться в N, чтобы открыть вторую дверь. Но нет двери, через которую он мог попасть в N. Противоречие.

Следовательно, в прекрасный момент все клетки достижимы и жук может вернуться в исходную клетку.

Замечание. Аналогично решается задача, где жук гуляет по произвольному графу *без мостов*, рисуя стрелки на рёбрах в направлении их прохода, с запретом ходить против стрелок.

5. [8] В бесконечной арифметической прогрессии, где все числа натуральные, нашлись два числа с одинаковой суммой цифр. Обязательно ли в ней найдётся ещё одно число с такой же суммой цифр?

Александр Шаповалов

Ответ. Не обязательно. **Решение**. См. задачу 6 для 8–9 классов.

6. [2 + 7] См. задачу 7 для 8–9 классов.

7. У N друзей есть круглая пицца. Разрешается провести не более 100 прямолинейных разрезов, не перекладывая части до окончания разрезаний, после чего распределить все получившиеся кусочки между всеми друзьями так, чтобы каждый получил суммарно одну и ту же долю пиццы по площади. Найдутся ли такие разрезания, если

а) [5] $N = 201$; **б**) [5] $N = 400$?

Андрей Аржанцев

Ответ: найдутся. **Решение**. **а**) Пусть площадь пиццы равна 201. Тогда площадь вписанного в неё квадрата равна $\frac{402}{\pi} > 121$. Нарисуем внутри пиццы квадрат со стороной 11 так, чтобы центры квадрата и пиццы совпали. Проведя по 12 разрезов, параллельных сторонам квадрата, получим 121 кусок 1×1. Мысленно склеим куски пиццы вне квадрата и разобьём эту фигуру 40 разрезами через центр на 80 равновеликих кусков (в силу непрерывности это можно сделать, вращая диаметр). Всего хватило 64 разреза.

б) Пусть площадь пиццы равна 400. Тогда площадь вписанного правильного шестиугольника равна $\frac{600\sqrt{3}}{\pi} > 294$. Нарисуем внутри пиццы правильный шестиугольник площади 294 так, чтобы его центр и центр пиццы совпали. Отметим вершины и точки на сторонах шестиугольника так, чтобы каждая сторона разбилась на

7 равных частей. Если провести разрезы, параллельные сторонам шестиугольника через все отмеченные точки (всего таких разрезов $3 \cdot 15 = 45$), разобьём шестиугольник на $6 \cdot 7^2 = 294$ равных правильных треугольника площади 1. Мысленно склеим куски пиццы вне шестиугольника и разобьём эту фигуру 53 разрезами через центр на 106 равновеликих кусков. Всего хватило 98 разрезов.

Замечание. Количество разрезов можно сильно уменьшить, если воспользоваться следующей общей идеей. Положим пиццу нужной площади на единичную сетку, совместив центр пиццы с центром одной из клеток. Проведём все разрезы по линиям сетки, пересекающим пиццу. В результате она разрежется на единичные порции и кусочки по краям, составляющие каёмку. С каемкой поступим, как в вышеизложенном решении. Но по сравнению с ним площадь каемки сильно уменьшится и разрезов потребуется меньше. Например, в пункте а), положив пиццу на квадрат 15×15 и проведя 32 разреза по линиям сетки, мы обнаружим, что кроме квадрата 11×11, она содержит ещё 56 клеток. Площадь каёмки будет равна 24, поэтому всего потребуется $32 + 12 = 44$ разреза.

СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 26 февраля 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. В кабинете сидят N нерях, у каждого на его столе скопилось ненулевое количество мусора. Неряхи выходят обедать по одному (после возвращения предыдущего), а в это время каждый из остальных перекладывает половину мусора со своего стола на стол вышедшего. Может ли случиться, что после того, как все пообедали, количество мусора на столе у каждого будет таким же, как и до обеда, если

1 а) $N = 2$;

3 б) $N = 10$?

Алексей Заславский

2. В треугольнике ABC провели медианы BK и CN, пересекающиеся в точке M.
4 Какое наибольшее количество сторон четырёхугольника $ANMK$ может иметь длину 1?

Егор Бакаев

3. На столе лежат 2023 игральных кубика. За 1 рубль можно выбрать любой кубик и переставить его на любую из четырёх граней, которые сейчас для
5 него боковые. За какое наименьшее количество рублей гарантированно удастся поставить все кубики так, чтобы на верхних гранях у них было поровну точек? (Количества точек на гранях каждого игрального кубика равны числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, суммарное число точек на противоположных гранях всегда равно 7.)

Егор Бакаев

4. Для произвольного числа x рассмотрим сумму

5
$$Q(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{x}{10000} \right\rfloor.$$

Найдите разность $Q(2023) - Q(2022)$.
(Здесь $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Алексей Толпыго

5. На каждой клетке доски 5×5 лежит по одной монете, все монеты внешне одинаковы. Среди них ровно 2 монеты фальшивые, они одинакового веса и легче настоящих, которые тоже весят одинаково. Фальшивые монеты лежат в клетках, имеющих ровно одну общую вершину. Можно ли за одно взвешивание на чашечных весах без гирь гарантированно найти

2 а) 13 настоящих монет;

3 б) 15 настоящих монет;

2 в) 17 настоящих монет?

Рустэм Женодаров, Александр Грибалко, Сергей Токарев

СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 26 февраля 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
4	1. На столе лежат 2023 игральных кубика. За 1 рубль можно выбрать любой кубик и переставить его на любую из четырёх граней, которые сейчас для него боковые. За какое наименьшее количество рублей гарантированно удастся поставить все кубики так, чтобы на верхних гранях у них было поровну точек? (Количества точек на гранях каждого игрального кубика равны числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, суммарное число точек на противоположных гранях всегда равно 7.) *Егор Бакаев*
4	2. Дано натуральное число n. Для произвольного числа x рассмотрим сумму $$Q(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{x}{10^n} \right\rfloor.$$ Найдите разность $Q(10^n) - Q(10^n - 1)$. (Здесь $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.) *Алексей Толпыго*
5	3. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, N — основание биссектрисы угла B. Касательная к описанной окружности треугольника AIN в вершине A и касательная к описанной окружности треугольника CIN в вершине C пересекаются в точке D. Докажите, что прямые AC и DI перпендикулярны. *Михаил Евдокимов*
5	4. Бесконечные возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и $b_1, b_2, b_3, \ldots$ состоят из положительных чисел. Известно, что отношение a_k/b_k целое при любом k. Верно ли, что это отношение не зависит от k? *Борис Френкин*
	5. Даны 5 точек, расстояние между любыми двумя из них больше 2. Верно ли, что расстояние между какими-то двумя из них больше 3, если эти 5 точек расположены
3	а) на плоскости;
3	б) в пространстве? *Алексей Толпыго*

СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 12 марта 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

4 1. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом 30° одна из биссектрис в два раза короче какой-то другой биссектрисы.

Егор Бакаев

5 2. На клетчатой доске 10×10 в одной из клеток сидит бактерия. За один ход бактерия сдвигается в соседнюю по стороне клетку и делится на две бактерии (обе остаются в той же клетке). Затем снова одна из сидящих на доске бактерий сдвигается в соседнюю по стороне клетку и делится на две, и так далее. Может ли после нескольких таких ходов во всех клетках оказаться поровну бактерий?

Александр Грибалко

7 3. Назовём натуральное число *заурядным*, если в его десятичной записи встречаются только нули и единицы. Пусть произведение двух заурядных чисел оказалось заурядным числом. Обязательно ли тогда сумма цифр произведения равна произведению сумм цифр сомножителей?

Виктор Клепцын, Константин Кноп

8 4. На сторонах равностороннего треугольника ABC построены во внешнюю сторону треугольники $AB'C$, $CA'B$, $BC'A$ так, что получился шестиугольник $AB'CA'BC'$, в котором каждый из углов $A'BC'$, $C'AB'$, $B'CA'$ больше $120°$, а для сторон выполнены равенства $AB' = AC'$, $BC' = BA'$, $CA' = CB'$. Докажите, что из отрезков AB', BC', CA' можно составить треугольник.

Давид Бродский

8 5. Натуральные числа от 1 до 100 раскрашены в три цвета: 50 чисел – в красный, 25 чисел – в жёлтый и 25 чисел – в зелёный. Известно, что все красные и жёлтые числа можно разбить на 25 троек так, чтобы в каждой тройке было два красных числа и одно жёлтое, которое больше одного красного и меньше другого. Аналогичное утверждение верно для красных и зелёных чисел. Обязательно ли все 100 чисел можно разбить на 25 четвёрок, в каждой из которых два красных числа, одно жёлтое и одно зелёное, при этом жёлтое и зелёное числа лежат между красными?

Александр Грибалко

6. Пусть X — некоторое множество целых чисел, которое можно разбить на N непересекающихся возрастающих арифметических прогрессий (бесконечных в обе стороны), а меньше чем на N — нельзя. Для любого ли такого X такое разбиение на N прогрессий единственно, если

4 а) $N = 2$;

4 б) $N = 3$?

(Возрастающая арифметическая прогрессия — это последовательность, в которой каждое число больше своего соседа слева на одну и ту же положительную величину.)

Виктор Клепцын

10 7. Правильный 100-угольник разрезали на несколько параллелограммов и два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны.

Александр Юран

СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 12 марта 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
4	1. Даны две последовательности из букв А и Б, в каждой из которых по 100 букв. За одну операцию разрешается или вставить в какое-то место последовательности (возможно, в начало или в конец) любое количество одинаковых букв, или убрать из последовательности любое количество подряд идущих одинаковых букв. Докажите, что из первой последовательности можно получить вторую не более чем за 100 операций. *Владислав Новиков*
5	2. Периметр треугольника ABC равен 1. Окружность ω касается стороны BC, продолжения стороны AB в точке P и продолжения стороны AC в точке Q. Прямая, проходящая через середины сторон AB и AC, пересекает описанную окружность треугольника APQ в точках X и Y. Найдите длину отрезка XY. *Давид Бродский*
6	3. Дан многочлен $P(x)$ степени $n > 5$ с целыми коэффициентами, имеющий n различных целых корней. Докажите, что многочлен $P(x)+3$ имеет n различных действительных корней. *Михаил Малкин*
8	4. Правильный 100-угольник разрезали на несколько параллелограммов и два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны. *Александр Юран*
8	5. Дано целое число $h > 1$. Назовём положительную обыкновенную дробь (не обязательно несократимую) *хорошей*, если сумма её числителя и знаменателя равна h. Скажем, что число h *замечательное*, если каждую положительную обыкновенную дробь, знаменатель которой меньше h, можно выразить через хорошие дроби (не обязательно различные) с помощью операций сложения и вычитания. Докажите, что h замечательное тогда и только тогда, когда оно простое. (Напомним, что у обыкновенной дроби числитель целый, а знаменатель натуральный.) *Татьяна Казицына*
10	6. Середины всех высот некоторого тетраэдра лежат на его вписанной сфере. Обязательно ли тогда этот тетраэдр правильный? *Михаил Евдокимов*
12	7. На острове живут хамелеоны пяти цветов. Когда один хамелеон кусает другого, цвет укушенного хамелеона меняется на один из этих пяти цветов по некоторому правилу, причём новый цвет зависит только от цвета укусившего и цвета укушенного. Известно, что 2023 красных хамелеона могут договориться о последовательности укусов между собой, после которой все они станут синими. При каком наименьшем k можно гарантировать, что k красных хамелеонов, кусая только друг друга, смогут стать синими? (Например, правила могут быть такими: если красный хамелеон кусает зелёного, укушенный меняет цвет на синий; если зелёный кусает красного, укушенный остаётся красным, то есть «меняет цвет на красный»; если красный кусает красного, укушенный меняет цвет на жёлтый, и т. д. Правила смены цветов могут быть другими.) *Михаил Раскин*

44-й Международный математический Турнир городов
Решения задач весеннего тура

Базовый вариант, 8–9 классы

1. В кабинете сидят N неряx, у каждого на его столе скопилось ненулевое количество мусора. Неряхи выходят обедать по одному (после возвращения предыдущего), а в это время каждый из остальных перекладывает половину мусора со своего стола на стол вышедшего. Может ли случиться, что после того, как все пообедали, количество мусора на столах ни у кого не изменится, если **а**) [1] $N = 2$; **б**) [3] $N = 10$?

Алексей Заславский

Ответ: может.

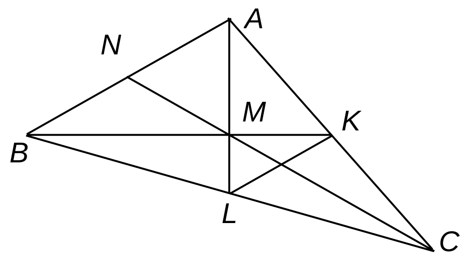
Решение. **а**) Подходит пример, когда у первого ушедшего 2 г мусора, а у второго – 4 г.

б) Занумеруем неряx в порядке их ухода на обед. Пусть на столе i-того неряхи лежит 2^i г мусора. После ухода первого на его столе окажется $2 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^9 = 2^{10}$ г мусора, а на остальных столах вес мусора уменьшится вдвое, то есть произойдёт циклический сдвиг. После ухода второго произойдёт аналогичный сдвиг, а после 10 таких сдвигов на всех столах окажется исходное количество мусора.

2. [4] В треугольнике ABC провели медианы BK и CN, пересекающиеся в точке M. Какое наибольшее количество сторон четырёхугольника $ANMK$ может иметь длину 1?

Егор Бакаев

Ответ: 2 стороны. **Решение**. Подходит, например, любой треугольник, где $AB = AC = 2$. Докажем, что трёх равных сторон быть не может.



Способ 1. Предположим, что хотя бы три стороны четырёхугольника $ANMK$ равны 1. Возможны всего два принципиально различных случая.

1) $AN = NM = MK = 1$. Тогда $NB = 1$, $MB = 2$, значит, $MN + NB = MB$.

2) $KA = AN = NM = 1$. Тогда $AC = 2$, $NC = 3$, значит, $NA + AC = NC$.

В обоих случаях получено противоречие с неравенством треугольника.

Способ 2. Если более двух сторон четырёхугольника равны 1, то либо $AK = NA$, либо $KM = MN$. В первом случае треугольник ABC равнобедренный. Во втором случае $BK = CN = 3$, так что и в этом случае треугольник ABC равнобедренный. Отсюда следует, что $AK = KM = MN = NA$, то есть $AKMN$ – ромб. Противоречие, так как прямые AK и NM не параллельны.

Способ 3. Пусть L – середина стороны BC. Если $NM = NA = NB$, то треугольник AMB прямоугольный. Треугольник LMK подобен треугольнику AMB с коэффициентом 0,5, поэтому $MK < LK = NA$. Далее, $AM > LM$, поэтому у треугольника AMK гипотенуза больше,

чем у треугольника LMK, то есть $AK > LK = NA$. Таким образом в четырёхугольнике $ANMK$ нет трёх равных друг другу сторон.
Случай, когда $KM=KA$ аналогичен, а если $KM \neq KA$ и $NM \neq NA$, то среди отрезков NM, NA, KM, KA также нет трёх равных друг другу.

Замечание. Любые две стороны четырёхугольника $ANMK$ могут быть равны 1. Равенство $NM = NA$ выполнено в треугольнике с перпендикулярными медианами (см. способ 3). Равенство $NA = MK$ выполнено в треугольнике, где $AB =2$, $BK = 3$.

3. [5] На столе лежат 2023 игральных кубика. За 1 рубль можно выбрать любой кубик и переставить его на любую из четырёх граней, которые сейчас для него боковые. За какое наименьшее количество рублей гарантированно удастся поставить все кубики так, чтобы на верхних гранях у них было поровну точек? (Количества точек на гранях каждого игрального кубика равны числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, суммарное число точек на противоположных гранях всегда равно 7.)

Егор Бакаев

Ответ: за 2022 рубля.
Решение 1. Пусть есть пара *противоположных* кубиков, то есть сумма точек на их верхних гранях равна 7. Заметим, что на эту пару потребуется суммарно 2 рубля, к какому бы значению ни захотелось их привести. Будем откладывать пары противоположных, пока они есть. Так как исходное количество кубиков нечётно, то в конце останется хотя бы один кубик. Тогда остальные непарные кубики, каждый не более чем за рубль, можно привести в состояние этого оставшегося кубика. Значит, 2022 рублей хватит.
С другой стороны, мог остаться только один кубик без пары, поэтому 2022 рубля необходимо.

Решение 2. Обозначим через k_i общее количество кубиков с i точками на верхней грани, а через n_i – наименьшее количество рублей, за которое можно на всех верхних гранях сделать по i точек. Тогда $k_1 + \ldots + k_6 = 2023$, а $n_1 = k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + 2k_6 = 2023 + k_6 - k_1$, и аналогично $n_2 = 2023 + k_5 - k_2$, ..., $n_6 = 2023 + k_1 - k_6$. Тогда $n_1 + \ldots + n_6 = 6 \times 2023$. Пусть среди чисел $n_1, \ldots, n_6$ нет числа, меньшего 2023. Тогда $n_1 = \ldots = n_6 = 2023$, откуда $k_1 = k_6$, $k_2 = k_5$, $k_3 = k_4$, поэтому $2023 = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 = 2(k_1 + k_2 + k_3)$ – чётное число. Противоречие. Значит, одно из чисел $n_1, \ldots, n_6$ не превосходит 2022, то есть 2022 рублей в любом случае достаточно.
При $k_1 = \ldots = k_5 = 337$, $k_6 = 338$ получим $n_1 = 2024$, $n_2 = \ldots = n_5 = 2023$, $n_6 = 2022$, то есть 2021 рубля недостаточно.

4. [5] Для произвольного числа x рассмотрим сумму

$$Q(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{x}{10000} \right\rfloor.$$

Найдите разность $Q(2023) - Q(2022)$. (Здесь $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Алексей Толпыго

Ответ: 6. **Решение**. Очевидно, $\left\lfloor\frac{x-1}{k}\right\rfloor \le \left\lfloor\frac{x}{k}\right\rfloor$. Неравенство $\left\lfloor\frac{x-1}{k}\right\rfloor < \left\lfloor\frac{x}{k}\right\rfloor = m$ означает, что $x - 1 < km$ £ x, откуда $x = km$, то есть x делится на k, и тогда $\left\lfloor\frac{x-1}{k}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{x}{k}\right\rfloor - 1$. Верно и обратное: если x кратно k, то $\left\lfloor\frac{x-1}{k}\right\rfloor < \left\lfloor\frac{x}{k}\right\rfloor$.

Значит, среди чисел $\lfloor 2023\rfloor - \lfloor 2022\rfloor$, $\left\lfloor\frac{2023}{2}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{2022}{2}\right\rfloor, \ldots, \left\lfloor\frac{2023}{10000}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{2022}{10000}\right\rfloor$ единиц ровно столько, сколько у числа 2023 натуральных делителей, не превосходящих 2023, а остальные числа равны нулю. *Разность* $Q(2023) - Q(2022)$ равна сумме вышеуказанных чисел, то есть количеству натуральных делителей числа $2023 = 7\times17^2$, а оно равно 6.

5. На каждой клетке доски 5´5 лежит по одной монете, все монеты внешне одинаковы. Среди них ровно 2 монеты фальшивые, они одинакового веса и легче настоящих, которые тоже весят одинаково. Фальшивые монеты лежат в клетках, имеющих ровно одну общую вершину. Можно ли за одно взвешивание на чашечных весах без гирь гарантированно найти **а**) [2] 13 настоящих монет; **б**) [3] 15 настоящих монет; **в**) [2] 17 настоящих монет?

Рустэм Женодаров, Александр Грибалко, Сергей Токарев

Ответ: а) можно; **б)** можно; **в**) нельзя.

Решение. Раскрасим доску и монеты на ней в шахматном порядке (угловые клетки чёрные). Отметим, что обе фальшивые монеты одного цвета.

а) Способ 1. Положим на весы 16 монет, лежащих на краю доски: на одну чашку – 8 чёрных, на другую – 8 белых. Возможны три случая.

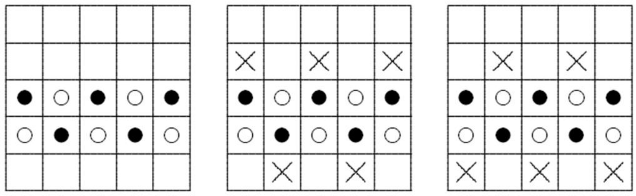
1) Весы в равновесии. Так как фальшивые монеты могли быть на только на одной чаше, их нет среди взвешиваемых монет, то есть все 16 взвешиваемых монет настоящие.

2) Перевесила «чёрная» чашка. Тогда одна фальшивая монета – на «белой» чашке. Следовательно, все 13 чёрных монет настоящие.

3) Перевесила «белая» чашка. Тогда одна фальшивая монета – на «чёрной» чашке. Поэтому центральная монета настоящая. И все 12 белых монет тоже.

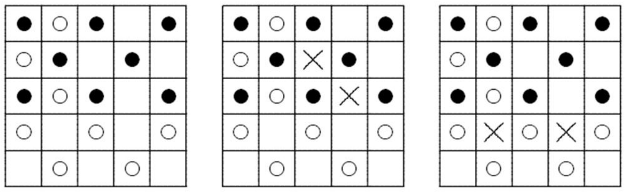
Обобщение. Отложим любую чёрную монету A и всех её соседей по диагонали. Из оставшихся чёрных монет положим на одну чашу не менее 7, а на другую – столько же белых. При равновесии все монеты на весах настоящие (их не меньше 14). Если перевесят чёрные, то все чёрные монеты настоящие, а если белые, то все белые и A.

Способ 2. Положим на чаши 4 чёрные монеты, соседние с центральной, левые – на левую, правые – на правую. При равновесии все чёрные монеты настоящие (так как две фальшивые чёрные монеты не могут быть ни на разных чашах, ни обе вне чаш). Если какая-то чаша перевесит, то настоящие – две монеты на этой чаше и все белые монеты.



б) **Способ 1**. Взвесим чёрные монеты против белых на рисунке слева. В случае равновесия 15 монет в нижних трёх строках настоящие. Если чёрные монеты тяжелее, не взвешиваемая фальшивая монета может находиться только в квадратах, отмеченных крестиками на рис.

в центре. Следовательно, мы нашли $25 - 5 - 5 = 15$ настоящих монет. Если белые монеты тяжелее, ситуация показана на рисунке справа с тем же результатом.



Способ 2. Взвесим чёрные монеты против белых на левом рисунке. В случае равновесия все 16 взвешиваемых монет настоящие. Если чёрные монеты тяжелее, не взвешиваемая фальшивая монета может находиться только в двух квадратах, отмеченных крестиками на центральном рисунке. Таким образом, найдены 25 – 8 – 2 = 15 настоящих монет. Если белые монеты тяжелее, получим тот же результат (правый рисунок.

Способ 3. Из пятой строки две белые монеты положим на левую чашку, две чёрные – на правую, а одну монету отложим. Остальные белые – на правую, чёрные – на левую чашку.

При равновесии все монеты из первых трёх строк настоящие. Если какая-то чашка перевесит, то настоящие – все 12 монет на ней и все монеты из пятой строки (итого 15 монет).

в) Априори любая из 25 монет *подозрительна* (может быть фальшивой). Взвешивание может иметь 3 исхода, поэтому хотя бы при одном из них подозрительными останутся не меньше 9 монет, то есть будет найдено не более $25 - 9 = 16$ настоящих монет.

Замечание. Докажем, что даже 16 настоящих монет гарантированно найти нельзя.
Рассмотрим граф: вершины – клетки, рёбра соединяют пары клеток, имеющих единственную общую вершину. Он распадается на две компоненты – чёрную и белую. Взвешивание – разбиение вершин на три части: П – монеты на правой чашке, Л – на левой, С – монеты на столе. В случае равновесия подозрительными остаются рёбра вида ЛП и СС, покрасим их в красный цвет. Если перевесит правая чашка, подозрительны ребра ЛЛ и ЛС (покрасим их в синий), если левая – ПП и ПС (в зелёный).
Пусть при любом исходе удаётся определить 16 настоящих монет. Тогда подграф, порождённый рёбрами каждого цвета, должен содержать не более 9 вершин. Значит, есть вершины, в которых сходятся разные цвета. Пусть в белой компоненте такая вершина единственна. Удалив её со всеми входящими рёбрами, получим связный граф на 11 вершинах, который не может иметь все рёбра одного цвета. Противоречие.
Следовательно, в белой компоненте хотя бы две «нехороших» вершины. Аналогичное верно и для чёрной компоненты.
Оценим двумя способами суммарное число вершин во всех трёх указанных подграфах. С одной стороны, их не больше $3 \cdot 9 = 27$, с другой – не меньше чем 25 + 2 + 2 («нехорошие вершины» подсчитаны как минимум дважды). Противоречие.

Базовый вариант, 10–11 классы

1. [4] См. задачу 3 младших классов.

2. [4] Дано натуральное число n. Для произвольного числа x рассмотрим сумму

$$Q(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{x}{10^n} \right\rfloor.$$

Найдите разность $Q(10^n) - Q(10^n - 1)$. (Здесь $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Алексей Толпыго

Ответ: $(n + 1)^2$. **Решение**. Очевидно, $\left\lfloor \frac{x-1}{k} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$. Неравенство $\left\lfloor \frac{x-1}{k} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor = m$ означает, что $x - 1 < km$ £ x, откуда $x = km$, то есть x делится на k, и тогда $\left\lfloor \frac{x-1}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - 1$. Верно и обратное: если x кратно k, то $\left\lfloor \frac{x-1}{k} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$. Пусть $y = 10^n$.

Тогда среди чисел $\lfloor y \rfloor - \lfloor y - 1 \rfloor, \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y-1}{2} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{y}{y} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y-1}{y} \right\rfloor$ единиц ровно столько, сколько у числа y натуральных делителей, не превосходящих y, а остальные числа равны нулю. *Разность* $Q(y) - Q(y - 1)$ равна сумме вышеуказанных чисел, и значит, равна количеству натуральных делителей числа $y = 2^n \times 5^n$, то есть $(n + 1)^2$.

3. [5] Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC, N – основание биссектрисы угла B. Касательная к описанной окружности треугольника AIN в вершине A и касательная к описанной окружности треугольника CIN в вершине C пересекаются в точке D. Докажите, что прямые AC и DI перпендикулярны.

Михаил Евдокимов

Решение 1. Рассмотрим центр J вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AC. Поскольку Ð*IAJ* = Ð*ICJ* = 90° (биссектрисы смежных углов перпендикулярны), точки A и C лежат на окружности w с диаметром IJ. По условию Ð*ACD* = Ð*NCD* = Ð*CIN* = Ð*CIJ* = Ð*CAJ*, аналогично Ð*CAD* = Ð*ACJ*. Значит, треугольники ACD и CAJ симметричны относительно серединного перпендикуляра к общей стороне AC. Если точки D и J совпадают, то треугольники IAJ и ICJ равны по катету и гипотенузе. Значит, прямая $ID = IJ$ совпадает с указанным серединным перпендикуляром. Если они не совпадают, точка D также лежит на w и DI ^ DJ || AC.

Решение 2. Пусть перпендикуляр, опущенный из I на AC вторично пересекает описанную окружность треугольника AIC в точке D'. Тогда

Ð*D'AC* = Ð*D'IC* = 90° – $\frac{1}{2}$Ð*C* = $\frac{1}{2}$(Ð*A* + Ð*B*) = Ð*AIN*.

Значит, $D'A$ – касательная к описанной окружности треугольника AIN. Аналогично $D'C$ – касательная к описанную окружности треугольника CIN. Следовательно, D и D' совпадают.

Решение 3. Нетрудно понять, что точки I и D лежат по разные стороны от прямой AC. Поскольку ÐACD = ÐNCD = ÐCIN, ÐCAD = ÐAIN, то

ÐADC = 180° – ÐACD – ÐCAD = 180° – ÐAIC.

Значит, четырёхугольник $AICD$ вписан. Один из углов между хордами AC и DI равен

ÐDAC + ÐADI = ÐAIN + ÐACI = ÐIAB + ÐABI + ÐACI = $\frac{1}{2}$(ÐA + ÐB + ÐC) = 90°.

4. [5] Бесконечные возрастающие арифметические прогрессии a_1, a_2, a_3, ... и b_1, b_2, b_3, … состоят из положительных чисел. Известно, что отношение $\frac{a_k}{b_k}$ целое при любом k. Верно ли, что это отношение не зависит от k?

Борис Френкин

Ответ: верно.

Решение 1. Пусть $a_k = a + ck$, $b_k = b + dk$. Тогда $\lim\limits_{k® ¥}\frac{a_k}{b_k}=\frac{c}{d}$. Но целочисленная последовательность может иметь пределом только целое число, причём все её члены с какого-то момента должны совпадать с этим пределом. Значит, $m = \frac{c}{d}$ – целое число и $\frac{a+ck}{b+dk}=\frac{c}{d}$ при всех достаточно больших k. Но тогда $ad = bc$, то есть $a = bm$, и поскольку c=dm, получаем, что $\frac{a_k}{b_k} = m$ при всех k.

Решение 2. Для положительных чисел p, q, r, s воспользуемся следующим фактом: если $\frac{p}{q}<\frac{r}{s}$, то $\frac{p}{q}<\frac{p+r}{q+s}<\frac{r}{s}$ (легко проверить). Используем обозначения решения 1. Доопределим $a_0 = a$, $b_0 = b$. Предположим, что $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$. Докажем индукцией по $k \geq 0$, что $\frac{a_k}{b_k} < \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} < \frac{c}{d}$. База k=0 получается применением указанного факта к неравенству $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, а переход от k к k+1 – применением факта к неравенству $\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} < \frac{c}{d}$. Тогда последовательность $\frac{a_k}{b_k}$ целых чисел возрастает, оставаясь ограниченной сверху. Противоречие. Аналогично к противоречию ведёт предположение $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$. Значит, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, а тогда и $\frac{a_k}{b_k}=\frac{c}{d}$.

5. Даны пять точек, расстояние между любыми двумя из них больше 2. Верно ли, что расстояние между какими-то двумя из них больше 3, если эти 5 точек расположены

а) [3] на плоскости;

б) [3] в пространстве?

Алексей Толпыго

а) **Ответ:** верно.

Решение 1. **Лемма**. Если в треугольнике две стороны больше 2, а угол между ними больше 105°, то длина третьей стороны больше 3.

Доказательство. Заметим, что $\sin 15^\circ = \dfrac{\sin 30^\circ}{2\cos 15^\circ} > \dfrac{\sin 30^\circ}{2} = \dfrac{1}{4}$. По теореме косинусов квадрат третьей стороны больше $2^2 + 2^2 - 8\cos 105^\circ = 8 + 8\sin 15^\circ > 10 > 3^2$. •

Рассмотрим два случая.

1) Выпуклая оболочка данных пяти точек – пятиугольник *ABCDE*. Тогда один из его углов (пусть *B*) не меньше $3\cdot 180^\circ : 5 = 108^\circ$. По лемме $AC > 3$.

2) Выпуклая оболочка – четырёхугольник или треугольник. Тогда одна из точек (пусть *D*) принадлежит одному из треугольников (пусть *ABC*), образованному тремя другими точками. В этом случае один из углов *ADB*, *ADC*, *BDC* не меньше 120°. По лемме сторона треугольника, на которую он опирается, больше 3.

Замечания. **1**. Случай, когда выпуклая оболочка – отрезок, очевиден.

2. Аналогичные рассуждения доказывают, что найдутся даже точки на расстоянии, большем $1 + \sqrt{5}$. Улучшить этот результат нельзя, что доказывает пример правильного пятиугольника.

б) **Ответ**. Неверно. *Пример*. Рассмотрим пять вершин правильной четырёхугольной пирамиды с равными рёбрами и диагональю основания длины 3. Тогда длины всех рёбер равны $\dfrac{3}{\sqrt{2}} > 2$. Можно даже взять 6 точек – в вершинах правильного октаэдра, или в вершинах правильной треугольной призмы с равными рёбрами, у которой диагональ боковой грани равна 3.

Замечание 1. В условиях задачи в пространстве можно показать, что расстояние между какими-то двумя точками больше $4\sqrt{\dfrac{3}{7}} \approx 2{,}6186$. Этот результат нельзя улучшить, что показывает следующий пример.

Рассмотрим правильную треугольную пирамиду со стороной основания 3 и высотой 1,5. Её боковое ребро равно $\sqrt{3+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{21}}{2} > 2$. Склеив две такие пирамиды основаниями, получим бипирамиду (5 вершин), у которой отношение наибольшего расстояния между вершинами к наименьшему как раз равно $2\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

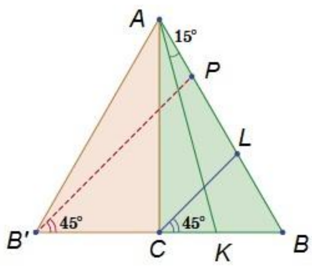
44-й Международный математический Турнир городов
Решения задач весеннего тура

Сложный вариант, 8–9 классы

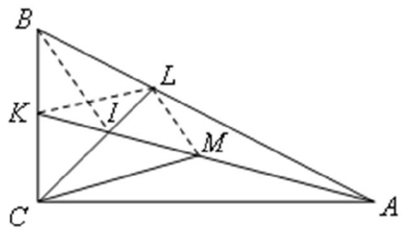
1. [4] Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом 30° одна из биссектрис в два раза короче какой-то другой биссектрисы.

Егор Бакаев

Пусть дан прямоугольный треугольник ABC, $\angle A = 30°$, $\angle C = 90°$. Будем доказывать, что биссектриса AK в два раза больше биссектрисы CL данного треугольника.



Решение 1. Достроим ABC до правильного треугольника ABB'. При этом ÐBAK = 15°. Заметим, что прямая, проходящая через точку B' параллельно CL, высекает в треугольнике ABB' отрезок $B'P$, вдвое больший CL (по свойству средней линии треугольника). К тому же Ð$AB'P$ = 60° – 45° = ÐBAK, а значит, $AK = BP = 2CL$.



Решение 2. Пусть I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC, M – середина AK (см. рисунок справа). Тогда ÐBLC = 75° = ÐAKC, то есть четырёхугольник $BKIL$ вписанный. Значит, ÐKLI = ÐKBI = 30°, но и ÐKMC = 30°, то есть четырёхугольник $CKLM$ тоже вписанный. Поэтому ÐCLM = ÐCKM = 75°, ÐCML = ÐCMK + ÐKML = ÐCMK + +ÐKCL = 75°. Следовательно, $CL = CM = 0{,}5AK$.

Решение 3. Проведём высоту CH. Из подобия треугольников CHL и ACK по острому углу следует, что $CL : AK = CH : AC = 1 : 2$.

2. [5] На клетчатой доске 10´10 в одной из клеток сидит бактерия. За один ход бактерия сдвигается в соседнюю по стороне клетку и делится на две бактерии (обе остаются в той же клетке). Затем снова одна из сидящих на доске бактерий сдвигается в соседнюю по стороне клетку и делится на две, и так далее. Может ли после нескольких таких ходов во всех клетках оказаться поровну бактерий?

Александр Грибалко

Ответ: нет. Раскрасим клетки доски в белый и чёрный цвета в шахматном порядке. Рассмотрим разность между количеством бактерий на белых клетках и количеством бактерий на чёрных клетках. При ходе с чёрной клетки на белую она увеличивается на 3, а при ходе с белой на чёрную уменьшается на 3. Поскольку вначале эта разность равнялась 1 или –1, она никогда не станет кратна 3, в частности, не станет равна 0.

3. [7] Назовём натуральное число *заурядным*, если в его десятичной записи встречаются только нули и единицы. Пусть произведение двух заурядных чисел оказалось заурядным числом. Обязательно ли тогда сумма цифр произведения равна произведению сумм цифр сомножителей?

Виктор Клепцын, Константин Кноп

Ответ: не обязательно. **Решение**. Рассмотрим произведение двух заурядных чисел

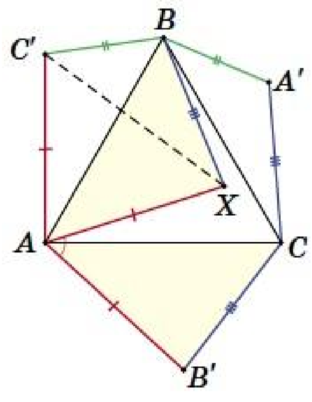
$$(10^2 + 10^4 + 10^8 + \cdots + 10^{1024})(10^{N-2} + 10^{N-4} + 10^{N-8} + \cdots + 10^{N-1024}),$$

где N – большое чётное число (например, миллион). Раскрыв скобки, мы получим много слагаемых, каждое из которых – степень числа 10. Если бы все слагаемые были разными, мы получили бы заурядное число с суммой цифр, равной произведению сумм цифр исходных чисел. Посмотрим, есть ли равные слагаемые. Если $10^a \cdot 10^{N-b} = 10^x \cdot 10^{N-y}$, то $a + N - b = x + N - y$, откуда $a + y = b + x$. Так как a, b, x, y – степени двойки, равенство возможно лишь в случаях $a = x$, $b = y$ (но это одно и то же слагаемое) и $a = b$, $x = y$. Поэтому у нас всего 10 одинаковых слагаемых, равных 10^N, в сумме они дадут 10^{N+1}.

Заметим, что никакие другие слагаемые не равны 10^{N+1}, так как у всех слагаемых показатель степени чётный. Поэтому сумма слагаемых будет заурядным числом, но сумма его цифр будет на 9 меньше, чем произведение сумм цифр исходных чисел.

Вариация. Произведение $(x^{3^9} + x^{3^8} + \ldots + x^{3^2} + x^3 + 1)(x^{-3^9} + x^{-3^8} + \ldots + x^{-3^2} + x^{-3} + 1)$ равно $10 + (x^{3^9-3^8} + x^{3^9-3^7} + \ldots + x^{3^9-3} + x^{3^9}) + (x^{3^8-3^7} + \ldots + x^{3^8-3} + x^{3^8}) + \ldots + (x^{3^2-3} + x^{3^2}) + x^3 + \ldots$ (далее идут отрицательные степени x, отличающиеся от положительных только знаком). Заметим, что степени во всех слагаемых различны, так как любое натуральное число записывается единственным образом в виде суммы степеней троек, каждая из которых повторяется не более двух раз (троичная система счисления).

Подставив $x = 10$ и умножив второй множитель на 10^{3^9}, получим два заурядных числа m и n, их суммы цифр равны 10. Их произведение – заурядное число с суммой цифр 91.



4. [8] На сторонах равностороннего треугольника *ABC* построены во внешнюю сторону треугольники *AB¢C*, *CA¢B*, *BC¢A* так, что получился шестиугольник *AB¢CA¢BC¢* в котором каждый из углов *A¢BC¢ C¢AB¢ B¢CA¢* больше 120°, а для сторон выполнены равенства *AB¢= AC¢ BC¢= BA¢ CA¢= CB¢* Докажите, что из отрезков *AB¢ BC¢ CA¢* можно составить треугольник.

Давид Бродский

Решение. Чтобы из данных отрезков можно было составить треугольник, достаточно доказать, что наибольший из них (пусть это *AC′*) меньше суммы двух других. Повернём треугольник *AB′C* вокруг точки *A* на 60° так, чтобы точка *C* перешла в точку *B*. Точка *B′* перейдёт при этом в новую точку *X* (см. рис.). Заметим, что в треугольнике *C′AX* боковые стороны *AC′* и *AX* равны, а угол между ними больше 60°. Тогда сторона $C'X$ в нём наибольшая и не превосходит $C'B + BX$ по неравенству треугольника. Получаем, что $AC' < C'X \le C'B + BX$, что и требовалось.

5. [8] Натуральные числа от 1 до 100 раскрашены в три цвета: 50 чисел – в красный, 25 чисел – в жёлтый и 25 – в зелёный. Известно, что все красные и жёлтые числа можно разбить на 25 троек так, чтобы в каждой тройке было два красных числа и одно жёлтое, которое больше одного красного и меньше другого. Аналогичное утверждение верно для красных и зелёных чисел. Обязательно ли все 100 чисел можно разбить на 25 четвёрок, в каждой из которых два красных числа, одно жёлтое и одно зелёное, при этом жёлтое и зелёное числа лежат между красными?

Александр Грибалко

Ответ: обязательно. **Решение**. Упорядочим числа каждого цвета по возрастанию. А красные числа ещё и разобьём на две части: первые 25 назовём *малыми*, а следующие 25 – *большими*. Докажем, что можно взять в качестве k-й четверки k-е жёлтое и k-е зелёное числа и из красных k-е малое и k-е большое.

Действительно, k-е жёлтое число больше одного красного числа из своей тройки и из всех троек с меньшими жёлтыми числами, то есть больше хотя бы k красных чисел. Значит, оно больше k-го малого красного числа. С другой стороны, k-е жёлтое число меньше одного красного числа из своей тройки и из всех троек с большими жёлтыми числами, то есть меньше хотя бы $25 - (k - 1)$ красных чисел. Значит, оно меньше k-го большого красного числа. Те же рассуждения справедливы для k-го зелёного числа.

6. Пусть X – некоторое множество целых чисел, которое можно разбить на N непересекающихся возрастающих арифметических прогрессий (бесконечных в обе стороны), а меньше чем на N – нельзя. Для любого ли такого X такое разбиение на N прогрессий единственно, если **а**) [4] $N = 2$; **б**) [4] $N = 3$?

(Возрастающая арифметическая прогрессия – это последовательность, в которой каждое число больше своего соседа слева на одну и ту же положительную величину.)

Виктор Клепцын

6. **а) Ответ:** для любого. **Решение**. Предположим противное – есть четыре арифметические прогрессии A, B, C и D, причём A и B не пересекаются и дают в объединении X, и C и D – тоже. Можно считать, что у прогрессии A разность a не больше, чем у каждой из остальных.

Ясно, что A не совпадает ни с C, ни с D – иначе разбиения совпадают. Тогда A и не содержится целиком ни в C, ни в D (так как у A наименьшая разность). Значит, A пересекается и с C, и с D.

Пусть число x лежит в пересечении A и C, тогда ни одно из чисел x-a и x+a не лежит в C (иначе A совпадает с C). Значит, они оба лежат в D, а разность прогрессии D – делитель числа $2a=(x+a)-(x-a)$, причём не меньший a, то есть это $2a$ или a. Последнее невозможно, поскольку A не совпадает с D. Аналогично получаем, что разность прогрессии C равна $2a$. Тогда прогрессии C и D в объединении дают A, а прогрессия B отсутствует – противоречие.

б) **Ответ**: не для любого. **Решение**. Пусть *X* – все целые числа, дающие остатки 0, 3, 4, 6, 8 или 9 при делении на 12. Первое разбиение: все числа, кратные 3; все числа с остатком 4 от деления на 12; все числа с остатком 8 от деления на 12. Второе разбиение: все числа, кратные 4; все числа с остатком 3 от деления на 6; все числа с остатком 6 от деления на 12.

Докажем, что на две прогрессии разбить *X* нельзя. Предположим противное. Заметим, что тогда минимум четыре числа из 0, 3, 4, 6, 8, 9, 12 принадлежат одной прогрессии. Тогда минимум два из них лежат «с одной стороны» от 6, и поэтому разность этой прогрессии – либо 1, либо 2, либо 3, либо 4. Первые два случая невозможны (возникнут лишние числа), а в остальных двух случаях оставшееся множество – не прогрессия.

7. [10] Правильный 100-угольник разрезали на несколько параллелограммов и два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны.

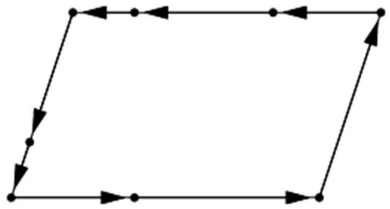
Александр Юран

Решение 1. У каждого параллелограмма с горизонтальными сторонами покрасим верхнюю сторону в синий цвет, а нижнюю в красный. То же сделаем со всеми имеющимися горизонтальными сторонами треугольников (если треугольник снизу от стороны, красим её в синий, иначе – в красный). А если у 100-угольника есть горизонтальные стороны, то их покрасим наоборот: верхнюю в красный цвет, а нижнюю в синий.

Теперь каждый горизонтальный отрезок на рисунке покрашен один раз в синий цвет («снизу») и один раз в красный («сверху»), поэтому синего и красного цвета мы потратили поровну. Но ведь и в каждом параллелограмме, и в нашем 100-угольнике синего и красного цвета было использовано поровну. Поэтому если их стереть и оставить только два треугольника, то в них тоже синего и красного поровну. Другими словами, если у одного есть синяя горизонтальная сторона какой-то длины, то у другого есть красная горизонтальная сторона такой же длины!

Аналогично докажем, что остальные стороны треугольников попарно равны. Следовательно, они равны по трём сторонам.

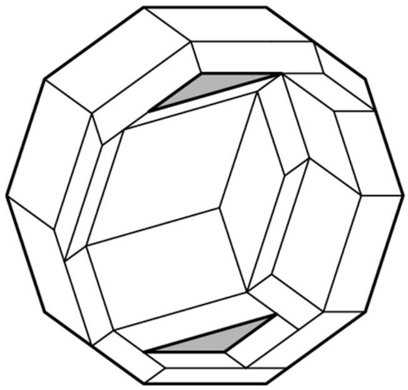
Решение 2. Для каждой фигуры – параллелограмма и треугольника – рассмотрим все вершины фигур на границе. Для каждой фигуры проведём между соседними точками на границе векторы так, чтобы их направление соответствовало обходу границы фигуры против часовой стрелки.



Рассмотрим произвольную прямую ℓ и все векторы, параллельные ей. Сумма этих векторов равна нулю. Действительно, к каждой линии разреза, параллельной ℓ, примыкают наборы противоположных векторов. Если ℓ параллельна сторонам 100-угольника, то сумма векторов, соответствующих противоположным сторонам 100-угольника, также равна нулю, так как они будут направлены в противоположные стороны и равны по длине.

С другой стороны, в каждом параллелограмме сумма векторов, соответствующих противоположным сторонам, равна нулю. Следовательно, и в двух треугольниках сумма всех векторов, параллельных ℓ, также будет нулевой.

Выберем в качестве ℓ прямую, параллельную какой-нибудь из сторон первого треугольника. Получим, что набор векторов второго треугольника, параллельных ℓ, – это векторы, противоположные векторам первого треугольника. Аналогично для двух других сторон. Поэтому для каждой стороны первого треугольника существует параллельная и равная ей по длине сторона второго треугольника. Следовательно, треугольники равны.



Замечание. Разрезания из условия существуют, причём они могут быть устроены достаточно несимметричным образом (например, не обязательно все стороны треугольников параллельны сторонам 100-угольника, треугольники не обязательно: образуют параллелограмм, примыкают к сторонам 100-угольника, симметричны относительно центра 100-угольника). На рисунке справа приведён пример разрезания 10-угольника.

Сложный вариант, 10–11 классы

1. [4] Даны две последовательности из букв А и Б, в каждой из которых по 100 букв. За одну операцию разрешается или вставить в какое-то место последовательности (возможно, в начало или в конец) любое количество одинаковых букв, или убрать из последовательности любое количество подряд идущих одинаковых букв. Докажите, что из первой последовательности можно получить вторую не более чем за 100 операций.

Владислав Новиков

Решение. Сначала решим аналогичную задачу для последовательностей из двух букв, а именно докажем, что из одной последовательности можно получить другую не более чем за 2 операции.

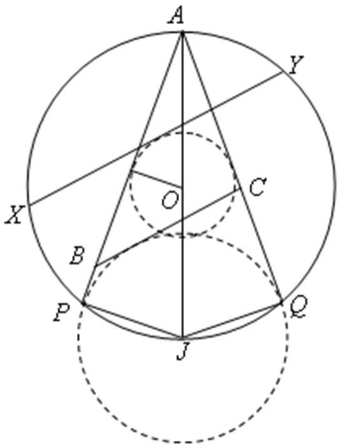
Если одна из последовательностей – это АА, а другая – ББ, уберём все буквы первой последовательности, а затем добавим буквы второй последовательности. В противном случае в последовательностях есть одинаковые буквы (возможно, стоящие на разных местах). Оставим в первой последовательности эту букву, а другую уберём. Затем добавим в нужное место букву, которой недостаёт для второй последовательности.

Вернёмся к первоначальной задаче. Разобьём каждую последовательность на 50 пар подряд идущих букв. За две операции каждую пару первой последовательности можно переделать в соответствующую пару второй последовательности.

2. [5] Периметр треугольника *ABC* равен 1. Окружность w касается стороны *BC*, продолжения стороны *AB* в точке *P* и продолжения стороны *AC* в точке *Q*. Прямая, проходящая через середины сторон *AB* и *AC*, пересекает описанную окружность треугольника *APQ* в точках *X* и *Y*. Найдите длину отрезка *XY*.

Давид Бродский

Ответ. 0,5.



Решение. Отметим, что ω – вневписанная окружность треугольника ABC. Пусть J – её центр. Описанная окружность Ω треугольника APQ – это окружность с диаметром AJ. Пусть O – её центр. Гомотетия с центром в точке A и коэффициентом 0,5 переводит ω в окружность с центром O, касающуюся хорд AP, AQ и XY. Значит, эти хорды равноудалены от центра Ω, то есть имеют равные длины. Но, как известно, длина AP равна половине периметра треугольника ABC, то есть 0,5.

3. [6] Дан многочлен $P(x)$ степени $n > 5$ с целыми коэффициентами, имеющий n различных целых корней. Докажите, что многочлен $P(x) + 3$ имеет n различных действительных корней.

Михаил Малкин

Решение. Пусть $Q(x) = P(x) + 3$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ – корни $P(x)$, $y_i = ½\ (x_i + x_{i+1})$, $1 \le i \le n - 1$. Тогда $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_n)$ (a – ненулевое целое число). Заметим, что $|P(y_i)| \ge (½)^2(^3/_2)^2(^5/_2)^2 > 3$ при всех указанных i. Если n чётно и $a > 0$, то $P(x) \le 0$ на отрезках $[x_1, x_2]$, $[x_3, x_4]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$, а многочлен $Q(x)$ равен 3 в концах этих отрезков и отрицателен в их серединах, то есть имеет по два корня на каждом из них – всего n корней.

Если n чётно и $a < 0$, то $P(x) \le 0$ на отрезках $[x_2, x_3]$, $[x_4, x_5]$, …, $[x_{n-2}, x_{n-1}]$, а $Q(x)$ имеет по два корня на каждом из них и по корню на $(-\infty, x_1)$ и $(x_n, +\infty)$ – всего n корней.

Если n нечётно, то аналогично $Q(x)$ имеет по два корня на каждом из $^{n-1}/_2$ отрезков вида $[x_i, x_{i+1}]$ и корень на одном из интервалов $(-\infty, x_1)$ или $(x_n, +\infty)$ – всего n корней.

4. [8] См. задачу 7 младших классов.

5. [8] Дано целое число $h > 1$. Назовём положительную обыкновенную дробь (не обязательно несократимую) *хорошей*, если сумма её числителя и знаменателя равна h. Скажем, что число h *замечательное*, если каждую положительную обыкновенную дробь, знаменатель которой меньше h, можно выразить через хорошие дроби (не обязательно различные) с помощью операций сложения и вычитания. Докажите, что h замечательное тогда и только тогда, когда оно простое.
(Напомним, что у обыкновенной дроби числитель целый, а знаменатель натуральный.)

Татьяна Казицына

Решение. 1) h – простое число. Пусть n – натуральное число, меньшее h. Поскольку числа n и $h - n$ взаимно просты, найдутся целые a и b, при которых $a(h - n) + bn = 1$. При этом $a\frac{h-n}{n}+b(h-1)\frac{1}{h-1}=\frac{1}{n}$, то есть дробь $\frac{1}{n}$ является алгебраической суммой хороших дробей. Этого достаточно, чтобы получить все дроби со знаменателем n, следовательно, h – замечательное число.

2) h – составное число. Пусть p – один из простых делителей числа h и $p^k < h$ £ p^{k+1}. Заметим, что хорошая дробь со знаменателем, кратным p^k, имеет вид $\frac{h - ap^k}{ap^k}$ ($0 < a < p$), и после сокращения на p её знаменатель не кратен p^k. Значит, всякую хорошую дробь можно записать в виде дроби со знаменателем, не кратным p^k. Но тогда дробь $\frac{1}{p^k}$ не является алгебраической суммой хороших дробей, то есть h – не замечательное число.

6. [10] Середины всех высот некоторого тетраэдра лежат на его вписанной сфере. Обязательно ли тогда этот тетраэдр правильный?

Михаил Евдокимов

Ответ: обязательно. **Решение**. Пусть r – радиус, O – центр вписанной сферы S тетраэдра $ABCD$. Пусть объем V_{OABC} меньше четверти объема V_{ABC} тетраэдра. Тогда r меньше четверти высоты h_D, опущенной на грань ABC, то есть середина этой высоты не может лежать на S. Противоречие.

Отсюда видно, что все высоты равны $4r$, центр O лежит на пересечении высот и делит их в отношении 3:1, считая от вершины. Таким образом, O – пересечение плоскостей, параллельных граням и делящим высоты в отношении 3:1. Но это пересечение совпадает с центром масс вершин тетраэдра, то есть основания высот совпадают с точками пересечения медиан граней.

Пусть K – точка пересечения медиан треугольника ABC. Тогда $AO \perp BCD$, прямая AK – проекция прямой AO на грань ABC. По теореме о трёх перпендикулярах $AK \perp BC$, то есть все высоты граней совпадают с медианами. Следовательно, все грани – равносторонние треугольники.

7. [12] На острове живут хамелеоны пяти цветов. Когда один хамелеон кусает другого, цвет укушенного хамелеона меняется на один из этих пяти цветов по некоторому правилу, причём новый цвет зависит только от цвета укусившего и цвета укушенного. Известно, что 2023 красных хамелеона могут договориться о последовательности укусов между собой, после которой все они станут синими. При каком наименьшем k можно гарантировать, что k красных хамелеонов, кусая только друг друга, смогут стать синими? (Например, правила могут быть такими: если красный хамелеон кусает зелёного, укушенный меняет цвет на синий; если зелёный кусает красного, укушенный остаётся красным, то есть «меняет цвет на красный»; если красный кусает красного, укушенный меняет цвет на жёлтый, и т. д. Правила смены цветов могут быть другими.)

Михаил Раскин

Ответ: при $k = 5$.

Решение. Для начала приведём пример правил, при которых для описанной перекраски потребуется хотя бы 5 красных хамелеонов. Занумеруем цвета так, чтобы красный был первым цветом, а синий – последним. Пусть правила выглядят так: если хамелеон цвета k < 5 кусает хамелеона того же цвета, укушенный меняет цвет на k + 1. Кроме того, хамелеон, укушенный хамелеоном синего цвета, становится синим. Никакие другие ситуации цвета хамелеонов не меняют. Несложно заметить, что если изначально хамелеонов всего 4, то ни у одного из них не получится стать синим. (Действительно, никакой появившийся цвет не может исчезнуть раньше появления синего. Кроме того, никакой цвет не может появиться раньше, чем появятся все предыдущие. Тогда к моменту появления первого синего хамелеона есть хотя бы по одному хамелеону каждого из остальных цветов, то есть это 4 хамелеона разного цвета, но их укусы друг друга уже не изменят их окраски.) С другой стороны, если красных хамелеонов больше 4, то сначала четыре из них приобретают 2-й цвет, потом три – 3-й, два – 4-й, после чего один становится синим и превращает в синих всех остальных.

Теперь докажем, что 5 хамелеонов хватит. Рассмотрим *основную* группу из 2023 хамелеонов, которые постепенно из красных становятся синими, и *контрольную* группу из пяти красных хамелеонов, которых предстоит превратить в синие.

1-й этап. Пусть в основной группе использовалось всего n £ 5 цветов. Пронумеруем эти цвета в соответствии с моментами их первого появления (1-й цвет будет красным). На этом этапе на m-м шаге (1 < m £ n) будем превращать одного из красных хамелеонов контрольной группы в хамелеона цвета m (после этого в контрольной группе будет по одному хамелеону цветов 2, ..., m и 6 – m красных). Для этого рассмотрим момент, когда в основной группе впервые возник хамелеон X цвета m. В начале он был красным и приобрел свой цвет после того, как его укусили несколько хамелеонов, имеющих цвета с меньшими номерами (других до этого момента в основной группе не было). Возьмём в контрольной группе красного хамелеона и устроим ему ту же последовательность кусаний (это возможно, поскольку среди оставшихся хамелеонов есть хамелеоны всех цветов от 1 до m – 1). В конце этого этапа в контрольной группе будет по одному хамелеону цветов 2, ..., n и 6 – n красных.

2-й этап. Перенумеруем цвета в соответствии с моментами их последнего исчезновения в основной группе (n-й цвет будет синим). Рассмотрим момент исчезновения цвета 1. При этом последний хамелеон цвета 1 перекрасился после укуса хамелеона, имеющего цвет с большим номером (хамелеонов с номером 1 в основной группе больше нет). Пусть после окончания 1-го этапа хамелеон контрольной группы с тем же номером укусит всех хамелеонов цвета 1 (если они красные, то их может быть больше одного). Далее аналогично уберём хамелеонов цвета 2, ..., пока все хамелеоны не станут синими.

СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 26 марта 2023 года

1. Дана треугольная пирамида $SABC$, основание которой — равносторонний треугольник ABC, а все плоские углы при вершине S равны α. При каком наименьшем α можно утверждать, что эта пирамида правильная?

М. Малкин

2. Существует ли целое $n > 1$, удовлетворяющее неравенству

$$[\sqrt{n-2} + 2\sqrt{n+2}] < [\sqrt{9n+6}]?$$

(Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)

М. Малкин

3. В таблице 44×44 часть клеток синие, а остальные красные. Никакие синие клетки не граничат друг с другом по стороне. Множество красных клеток, наоборот, связно по сторонам (от любой красной клетки можно добраться до любой другой красной, переходя из клетки в клетку через общую сторону и не заходя в синие клетки). Докажите, что синих клеток в таблице меньше трети.

Б. Френкин

4. Дан треугольник ABC. Пусть I — центр его вписанной окружности, P — такая точка на стороне AB, что угол PIB прямой, Q — точка, симметричная точке I относительно вершины A. Докажите, что точки C, I, P, Q лежат на одной окружности.

И. Кухарчук, А. Юран

5. Назовём рассадку N кузнечиков на прямой в различные её точки k-*удачной*, если кузнечики, сделав необходимое число ходов по правилам чехарды, могут добиться того, что сумма попарных расстояний между ними уменьшится хотя бы в k раз. При каких $N \geqslant 2$ существует рассадка, являющаяся k-удачной сразу для всех натуральных k? (В чехарде за ход один из кузнечиков прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика.)

М. Святловский

6. В ряд слева направо стоят N коробок, занумерованных подряд числами $1, 2, \ldots, N$. В некоторые коробки, стоящие подряд, положат по шарику, оставив остальные пустыми. Инструкция состоит из последовательно выполняемых команд вида «поменять местами содержимое коробок № i и № j», где i и j — числа. Для каждого ли N существует инструкция, в которой не больше $100N$ команд, со свойством: для любой начальной раскладки указанного вида можно будет, вычеркнув из инструкции некоторые команды, получить инструкцию, после выполнения которой все коробки с шариками будут левее коробок без шариков?

И. Митрофанов

СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 26 марта 2023 года

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. *Дана треугольная пирамида $SABC$, основание которой — равносторонний треугольник ABC, а все плоские углы при вершине S равны α. При каком наименьшем α можно утверждать, что эта пирамида правильная?*

М. Малкин

Ответ: 60°.

Докажем, что при $\alpha = 60^\circ$ пирамида правильная. Пусть стороны треугольника ABC равны 1. Заметим, что в любом треугольнике с углом 60° против этого угла лежит средняя по длине сторона (причём если она строго меньше одной из сторон, то строго больше другой). Пусть одно из боковых рёбер пирамиды не равно 1: например, $SA > 1$. Тогда в гранях SAB и SAC рёбра SB и SC будут меньше 1, и значит, в грани SBC ребро BC — не средняя сторона, противоречие.

Покажем теперь, как построить неправильную пирамиду с плоскими углами $\alpha < 60^\circ$ при вершине S.

Первый способ. Сначала боковое ребро SA удаляем, а неудалённую боковую грань SBC вращаем вокруг её ребра основания BC, пока эта грань не окажется в плоскости основания так, что будет содержать треугольник основания. В процессе движения будут «текущие» пирамиды, у которых два равных плоских угла сначала равны α, потом больше α (в момент, когда вершина проектируется в вершину основания — поскольку в этот момент синус угла при вершине S в боковых гранях SAC и SAB равен $1 : SB$, а в грани SBC равен отношению боковой высоты этого треугольника к SB, которая меньше 1), а в конце у «вырожденной» пирамиды они равны $\alpha/2$. Значит, в силу непрерывности, будет ещё раз α.

Второй способ. Рассмотрим треугольник SAB с $SA = SB$ и $\angle S = \alpha$. Так как $AB < SB$, на стороне SA существует такая точка C, что $BC = AB$. Теперь возьмем трёхгранный угол, у которого все плоские углы равны α, и отложим на его ребрах отрезки SA, SB, SC. Пирамида $SABC$ — искомая.

Третий способ. (*Сергей Комаров, 11 класс, СУНЦ МГУ*) Пусть $S'ABC$ — правильная пирамида с плоским углом α при вершине S'. Пусть X, Y — точки, такие, что $XY = AB$, построим на XY треугольники XYZ и XYT так, что $\angle ZXY = \angle ZYX = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\angle TXY = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, $\angle TYX = 90^\circ - \frac{3\alpha}{2}$, тогда понятно что $\angle XTY = \angle XZY = \alpha$. В силу теоремы синусов для этих треугольников имеем

$$\frac{TY}{\sin(90^\circ + \frac{\alpha}{2})} = \frac{XY}{\sin\alpha} = \frac{ZX}{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})} = \frac{ZY}{\sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})},$$

что влечёт $TY = ZX = ZY$, поскольку синусы смежных углов равны.

Пусть теперь S — такая точка на продолжении отрезка $S'B$ за точку B, что $SB = TX$. Тогда $\angle SBC = \angle SBA = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = \angle TXY$, $BC = BA = XY$, и $SB = SB = TX$, тогда $\Delta SBC = \Delta SBA = \Delta TXY$, откуда $SC = SA = TY = ZX = ZY$, и значит $\Delta SCA = \Delta ZXY$ (по трём сторонам). Из всех указанных равенств треугольников следует, что у пирамиды $SABC$ все плоские углы при вершине S равны α, значит она удовлетворяет условиям задачи. Но она не правильная, поскольку прямая $S'B$ не перпенидикулярна ABC, и на ней только одна точка проецируется в центр треугольника ABC, это точка S', а значит не точка S.

2. *Существует ли целое $n > 1$, удовлетворяющее неравенству*

$$[\sqrt{n-2} + 2\sqrt{n+2}] < [\sqrt{9n+6}]?$$

(Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)

М. Малкин

Ответ: нет.

Предположим целое $n > 1$ удовлетворяет этому неравенству. Имеем $[\sqrt{9n+6}]^2 \leqslant 9n+6$, но квадрат целого числа не может давать ни остаток 6, ни остаток 5 от деления на 9, откуда $[\sqrt{9n+6}]^2 \leqslant 9n+4$, значит $[\sqrt{9n+6}] \leqslant [\sqrt{9n+4}]$. Тогда исходное неравенство влечёт неравенство $\sqrt{n-2} + 2\sqrt{n+2} < \sqrt{9n+4}$. Возводя в квадрат и приводя подобные слагаемые, получаем, что $4\sqrt{n^2-4} < 4n-2$, откуда $n^2 - 4 < n^2 - n + \frac{1}{4}$, а тогда $n < 4,25$. Однако, прямая проверка показывает, что при $n \in \{2, 3, 4\}$ исходное неравенство не выполняется — противоречие.

3. *В таблице 44×44 часть клеток синие, а остальные красные. Никакие синие клетки не граничат друг с другом по стороне. Множество красных клеток, наоборот, связно по сторонам (от любой красной клетки можно добраться до любой другой красной, переходя из клетки в клетку через общую сторону и не заходя в синие клетки). Докажите, что синих клеток в таблице меньше трети.*

Б. Френкин

Положим $N = 44$, и пусть b и r — количества синих и красных клеток. Оценим сверху количество M общих сторон красных клеток с синими.

Всего у красных клеток $4r$ сторон, откуда $M \leqslant 4r$. Вдоль краёв таблицы стоит не меньше $2N$ сторон красных клеток, поэтому $M \leqslant 4r - 2N$. Теперь рассмотрим граф, вершины которого — красные клетки, а рёбра соединяют клетки, имеющие общую сторону. По условию граф связен, поэтому количество его рёбер не меньше $r - 1$. Каждому из них отвечает общая сторона двух красных клеток, засчитанная в величине $4r$ два раза, поэтому из M можно вычесть $2(r-1)$. Получаем

$$M \leqslant 4r - 2N - 2(r-1) = 2r - 2N + 2. \quad (1)$$

Оценим теперь M снизу. Сложив количества сторон всех синих клеток, получим $4b$. Ясно, что на одной стороне таблицы не больше $N/2$ сторон синих клеток. Поэтому

$$M \geqslant 4b - 2N. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $4b - 2N \leqslant M \leqslant 2r - 2N + 2$. Поскольку $b + r = N^2$, получаем отсюда $6b \leqslant 2N^2 + 2$, или

$$b \leqslant N^2/3 + 1/3.$$

Поскольку $N^2 = 44^2 \equiv 1 \pmod 3$, а b целое, получаем нужный результат.

4. *Дан треугольник ABC. Пусть I — центр его вписанной окружности, P — такая точка на стороне AB, что угол PIB прямой, Q — точка, симметричная точке I относительно вершины A. Докажите, что точки C, I, P, Q лежат на одной окружности.*

И. Кухарчук, А. Юран

Пусть CI пересекает AB в точке N. Угол AIB тупой, а угол NIB острый, значит P лежит между A и N. Далее $\angle AIP = \angle AIB - 90^\circ = \angle ACB/2 = \angle ACI$, $\angle CAI = \angle IAP$, значит треугольники CAI и IAP подобны. Учитывая это и равенство $QA = AI$, имеем $\frac{IC}{AC} = \frac{PI}{AI} = \frac{PI}{QA}$.

Кроме того,

$$\angle AIP + \angle AIC = \angle ACB/2 + (90^\circ + \angle ABC/2) = 180^\circ - \angle CAB/2,$$

тогда $\angle PIC = 180^\circ - \angle CAB/2 = 180^\circ - \angle CAI = \angle QAC$. Тогда треугольники QAC и PIC подобны по углу и отношению прилежащих сторон, значит $\angle IPC = \angle AQC = \angle IQC$, и точки C, I, P, Q лежат на одной окружности.

Замечание. После доказательства подобия треугольников CAI и IAP можно действовать по-другому. Выберем точку R на продолжении отрезка CA за точку A так, что $AP = AR$; тогда треугольники IAP и QAR равны ($IA = QA$, $AP = AR$, $\angle QAR = \angle CAI = \angle IAP$). Значит, $QRPI$ — равнобокая трапеция, и она вписана. С другой стороны, поскольку $\angle CIQ = \angle CIA = \angle CRQ$, точки C, I, R, Q лежат на одной окружности. Значит, все пять точек C, I, P, Q, R лежат на окружности (QRI).

5. *Назовём рассадку N кузнечиков на прямой в различные её точки k-*удачной*, если кузнечики, сделав необходимое число ходов по правилам чехарды, могут добиться того, что сумма попарных расстояний между ними уменьшится хотя бы в k раз. При каких $N \geqslant 2$ существует рассадка, являющаяся k-удачной сразу для всех натуральных k? (В чехарде за ход один из кузнечиков прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика.)*

М. Святловский

Ответ: при $N \geqslant 3$.

Первое решение. При $N = 2$ как бы кузнечики ни прыгали, расстояние между ними не меняется.

Пусть $N \geqslant 3$. Рассадим 1-го, 2-го и 3-го кузнечиков на прямой в точках с координатами 0, 1, $\sqrt{2}$, назовём этих кузнечиков V, Q, R. Остальные произвольно рассаживаются в другие попарно различные точки. Покажем, что для всякого k кузнечики далее смогут прыгать так, чтобы сумма попарных расстояний уменьшилась хотя бы в k раз (исходную сумму обозначим через P).

Лемма. Пусть три кузнечика сидят на прямой в попарно различных точках и отношение расстояний от одного из них до двух других иррационально. Тогда сколько бы они ни сделали прыжков друг через друга, они всё равно будут в попарно различных точках, и отношение расстояний от одного из них до двух других будет иррационально.

Доказательство леммы. Покажем, что эти условия сохраняются при прыжке. Предположим, для некоторого кузнечика отношение расстояний до двух других рационально, тогда эти расстояния имеют вид a и aq, где q рационально. Тогда расстояние между другими двумя кузнечиками ненулевое и имеет вид $|a \pm aq|$, тогда отношение любых двух расстояний между кузнечиками рационально, противоречие. Пусть какой-то кузнечик перепрыгнул через кузнечика A, тогда расстояния от A до обоих кузнечиков не изменились, а значит отношение этих расстояний осталось иррациональным, в частности расстояния различны, и потому кузнечики по-прежнему находятся в попарно-различных точках.

Перейдём к задаче. Пусть первые несколько ходов будут прыгать только кузнечики V, Q, R и только через друг друга, согласно лемме при таких прыжках они всегда будут оставаться в попарно различных точках. Покажем, что спустя любое количество таких ходов они смогут далее прыгать так, чтобы текущее минимальное из попарных расстояний между ними уменьшилось не менее чем в два раза.

Пусть, не умаляя общности, в текущий момент минимально расстояние между кузнечиками V, Q с координатами a и b, а R имеет координату c. Отметим на прямой все точки с координатами, отличающимися от a на число, кратное $(a - b)$. Понятно, что прыгая друг через друга кузнечики V, Q смогут занять любые две соседние отмеченные точки, тогда R не находится в отмеченной точке (по лемме прыгая только через друг друга V, Q, R остаются в попарно различных точках), тогда V, Q могут занять две соседние отмеченные точки между которыми лежит c, и расстояние от R до одного из кузнечиков будет не более $|a-b|/2$, то есть наименьшее расстояние уменьшилось хотя бы в 2 раза.

Тогда за несколько ходов кузнечики V, Q, R могут уменьшить наименьшее расстояние между ними хотя бы в 2 раза, потом за несколько ходов ещё хотя бы в 2 раза, потом ещё, и т.д, могут за несколько ходов добиться того, чтобы расстояние между какими-то двумя из них было равно некоторому числу t, меньшему $P/(2N(N-1)\cdot k)$ — пусть они так и сделают. Назовём каких-нибудь двух кузнечиков, между которыми расстояние t, хорошими, и одного из них назовём D, далее эти кузнечики уже не прыгают.

Далее, любой кузнечик не из пары хороших может прыгая через пару хороших (в подходящем порядке) смещаться на $2t$ в любую сторону на прямой, и тогда может за несколько прыжков через них оказаться на расстоянии меньшем $2t$ от D, пусть все кузнечики кроме хороших сделают прыжки таким образом. Тогда расстояние от любого кузнечика до D будет меньше $2t$, а значит, все попарные расстояния меньше $4t$, а значит, их сумма меньше $4t\cdot N(N-1)/2 < P/k$.

Второе решение. *(Евгений Эндека, 11 класс, Барнаул)* Для любого $N>2$ предъявим явно начальную рассадку, которая является k-удачной для любого натурального числа k.

Сначала для данного $N>2$ построим конечную геометрическую прогрессию $1, q, \ldots, q^{N-1}$, со знаменателем $q\in(0,1)$, для которой выполнено условие

$$1 = q + q^2 + \ldots + q^{N-1}.$$

Требуемый набор существует при любом целом $N>2$, поскольку уравнение

$$q + q^2 + \ldots + q^{N-1} - 1 = 0$$

имеет решение на интервале $(0,1)$, так как левая часть меняет знак на его концах.

Расположим теперь N кузнечиков в следующих начальных точках:

$$0,\ 1,\ (1+q),\ (1+q+q^2),\ \ldots,\ (1+q+\ldots+q^{N-3}),\ (1+q+\ldots+q^{N-2}).$$

Рассмотрим прыжок первого кузнечика через второго; тогда его новая координата будет равна $2 = 1+1 = 1+q+q^2+\ldots+q^{N-1}$. Получилось, что прыгнувший кузнечик стал самым правым, а все кузнечики теперь расположены в точках

$$1,\ (1+q),\ \ (1+q+q^2),\ \ldots,\ (1+q+\ldots+q^{N-2}),\ (1+q+\ldots+q^{N-1}).$$

Сдвинув начало координат на 1 вправо, получим координаты кузнечиков

$$0,\ q,\ (q+q^2),\ \ldots,\ (q+\ldots+q^{N-2}),\ (q+\ldots+q^{N-1}).$$

Таким образом, кузнечики уменьшили свои координаты ровно в q раз. Если указанный шаг (прыжок самого левого кузнечика через ближайшего соседа) повторять r раз, то попарные расстояния изменятся в q^r раз, что позволит достичь любого нужного уменьшения $1/K$.

6. *В ряд слева направо стоят N коробок, занумерованных подряд числами 1, 2, ..., N. В некоторые коробки, стоящие подряд, положат по шарику, оставив остальные пустыми.*

Инструкция состоит из последовательно выполняемых команд вида «поменять местами содержимое коробок № i и № j», где i и j — числа. Для каждого ли N существует инструкция, в которой не больше $100N$ команд, со свойством: для любой начальной раскладки указанного вида можно будет, вычеркнув из инструкции некоторые команды, получить инструкцию, после выполнения которой все коробки с шариками будут левее коробок без шариков?

И. Митрофанов

Ответ: да.

Давайте считать, что все шарики синие. В пустые коробки положим по красному шарику. Теперь пустых коробок нет. Покажем даже более сильное утверждение: что для любого N есть инструкция не длиннее чем $3N$ со следующим свойством.

Пусть в N коробочках, стоящих в ряд, лежат красные и синие шарики, причём для хотя бы одного из цветов шарики этого цвета лежат подряд (такие конфигурации назовём непрерывными). Тогда можно вычеркнуть часть строк и получить инструкцию, после выполнения которой все синие шарики будут левее всех красных шариков, а также можно получить инструкцию, после которой все красные шарики левее всех синих (нумерация коробок слева направо).

Понятно, что для $N = 1$ такая инструкция есть. Покажем, как из инструкции для $k \geqslant 1$ сделать инструкцию для $2k$ и для $2k-1$, этого будет достаточно. Обозначим $N = 2k$ или $2k-1$.

Инструкция для N будет выглядеть так:

I группа: сначала все пары вида $(i, k+i)$ в любом порядке

Если N нечетно, сюда приходится добавить все пары вида $(i+1, i+k)$ при $i \geqslant 1$ (назовём эти команды дополнительными).

II группа: инструкция для k первых коробочек из индукционного предположения

III группа: все пары различных чисел вида $(i, N+1-i)$ в любом порядке

При $N = 2k$ длина этой инструкции не превышает $k + 3k + k = 5k \leqslant 3N$.

При $N = 2k-1$ длина этой инструкции не превышает $2(k-1)+3k+(k-1) = 6k-3 = 3N$. Теперь почему она работает. Есть тот цвет, которого не больше k, назовём его основным. Покажем, что можно выполнить часть инструкций I группы так, чтобы все камни основного цвета лежали среди первых k коробочек, и при этом конфигурация среди первых k коробочек будет тоже непрерывной.

Есть четыре варианта того, как могут располагаться камни основного цвета.

1) они идут подряд, и все они среди левых k коробок — ничего делать не надо;

2) они идут подряд, и все они среди правых коробок — используем все пары вида $(i, k+i)$;

3) они есть и среди левых k коробок, и среди остальных правых, при этом они идут подряд. Заметим, что ни в какой паре вида $(i, i+k)$ нет двух камней основного цвета. Все основные камни тогда перенесем справа налево (тогда камни не основного цвета будут среди первых k камней лежать подряд.

4) Камни основного цвета — самые первые и самые последние. Перенеся последние влево (при нечётном N используя дополнительные операции), получаем требуемое.

(Про это всё проще думать, если мыслить расположение коробочек не в ряд, а по окружности.)

После этого применим часть инструкций II группы, чтобы среди первых k коробочек слева оказались все камни основного цвета.

После этого окажется, что среди N коробочек сначала идут подряд камни одного цвета, а потом камни другого. То есть мы пришли либо к искомой ситуации, либо к зеркальной. Перестановками третьей группы, если надо, отразим конфигурацию, и получим что хотели получить.