Светослав Дојчев
Бугарија

ДАЛИ Е МОЖНО? ДАЛИ ПОСТОИ?

Уште од најстари времиња секојдневниот живот и налагал на математиката да решава различни задачи, во кои се барал одговорот на прашањата од насловот на нашето четиво. Многу од тие прашања, пред да станат дел од богатата математичка ризница, биле преокупација на плеада знаменити математичари. Меѓу задачите кои се обидувале да ги решат античките математичари биле и следните:

- Со линиар и шестар да се конструира квадрат, чија плоштина е еднаква на плоштината на даден круг (задача на квадратура на круг).
- Со линијар и шестар даден агол да се подели на три еднакви агли (задача за трисекција на агол).

Иако, повеќе антички математичари се досетиле дека овие задачи немаат решение, сепак требало да поминат дваесетина векови за да се докаже дека задачите немаат решение.

Леонард Ојлер, еден од најголемите математичари, согледал дека вредностите на квадратниот трином x^2+x+41, за $x=0,1,2,...,39$ се прости броеви, но за $x=40$ вредноста е сложен број. Оттука, природно го поставил прашањето *дали постои полином со една променлива, чија вредност е прост број, кога променливата се менува во множеството природни броеви*. Одговорот на ова прашање е негативен. Меѓутоа, ако допуштиме полиномот да има повеќе променливи, тогаш нештата се менуваат. Имено, во 1970 година рускиот математичар Матијасевич ја вчудоневиде математичката јавност, конструирајќи полином со 21 променлива кој го има следното својство: *ако вредноста на полиномот за некои цели вредности на променливите е позитивен број, тогаш тој број е прост*.

Слично, во 1993 година професорот Ендрју Вајс стана светска сензација објавувајќи го доказот на знаменитата *Последна теорема на Ферма*, поставена во 17-от век од знаменитиот француски математичар Пјер Ферма: *аали постојат природни броеви* $a,b,c,n;\ \ n>2$ *такви, што* $a^n+b^n=c^n$, на која самиот Ферма предвидел негативен одговор.

А, што ќе кажете за следното прашање: *Дали може ако располагаме само со една летва (не подолга од* $2m$*) и обичен метар, да ја измериме обиколката на земјината топка*?

Можда е чудно, но одговорот на претходното прашање е позитивен. Имено, само со летва и обичен метар античкиот математичар Ератостен успеал да ја измери обиколката на земјината топка.

Сигурно дека ова не се единствените примери од ваков вид, кои го привлекле вниманието на математичарите низ вековите. Да се обидеме да решиме неколку задачи од сличен тип, со што ќе го илустрираме начинот на работа кај задачите во кои се бара одговор на прашањата од насловот на нашето четиво.

Задача 1. Дали може бројот

а) 1994, б) 1993

да се запише како збир и производ на едни и исти природни броеви.

Решение. а) "Наједноставното" претставување на бројот 1994 како производ е $1994 = 2 \cdot 997$. Но, збирот на броевите 2 и 997 е помал од 1994, што значи дека во собирањето "нешто ни недостига". Останува да забележиме, дека ако во производот $2 \cdot 997$ додаваме множители, еднакви на 1, тој нема да се промени, додека збирот $2 + 997 + 1 + 1 + \ldots$ постојано ќе се зголемува за 1 и ќе "достигне" 1994.

Според тоа, одговорот на поставеното пашањее позитивен и треба само да го изброиме потребниот број единици. Имаме,

$$1994 = 2 \cdot 997 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 1}_{995\text{множители}} = 2 + 997 + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1 + 1}_{995\text{собирци}}.$$

б) Одговорот на поставеното прашање е негативен. Имено, 1993 е прост број, па затоа ако се претстави како производ на два или повеќе множители, тогаш едниот множител е 1993, а другите се единици. Но, тогаш збирот на множителите е поголем од 1993. ♦

Задача 2. Сметководителот Киро направил годишна пресметка на списанието "Нумерус" и со задоволство забележал дека таа е позитивна, т.е. приходите ги надминуваат расходите. Потоа, со запрепастување констатирал дека пресметката за секои пет последователни месеци е негативна, т.е. расходите ги надминуваат приходите. Како е тоа можно?

Решение. Разгледај ја следната табела

Месец	Приходи	Расходи	Биланс
Јануари	100 000	30 000	+70 000
Февруари	20 000	20 000	0
Март	15 000	15 000	0
Април	10 000	110 000	-100 000
Мај	30 000	10 000	+20 000
Јуни	30 000	10 000	+20 000
Јули	30 000	10 000	+20 000
Август	30 000	10 000	+20 000
Септември	10 000	110 000	-100 000
Октомври	15 000	15 000	0
Ноември	20 000	20 000	0
Декември	100 000	30 000	+70 000

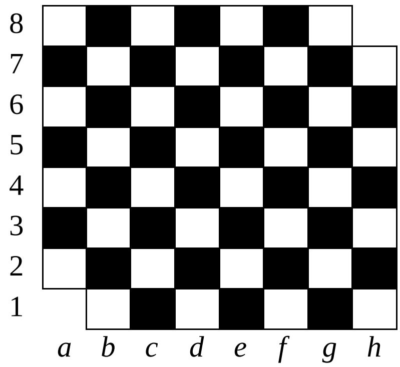
Самостојно провери, дека сите услови на задачата се исполнети, т.е. дека навистина пресметките на сметководителот се точни.

Дали се сети на што се должи ваквата “аномалија”. Многу едноставно! Во годишната пресметка месечните пресметки учествуваат “рамноправно”, додека во последователните петмесечни периоди тоа не е така: јануарската пресметка на пример се зема само еднаш, а додека јунксата учествува петпати. Обиди се самостојно да конструираш ваква табела! ♦

Спореди ги решенијата на задачите 1 а) и 2. Дали тие имаат нешто заедничко? Забележуваме дека и во двата случаи, за да докажеме, дека нешто е можно или постои, ние го посочивме претставувањето на бројот 1994 како збир и производ на исти природни броеви, односно конструиравме табела со саканото својство. Искористениот метод за решавање на овие задачи се нарекува **конструктивен метод**. Меѓутоа, во математиката при решавањето на задачи користиме и таканаречени неконструктивни методи, за кои подоцна ќе стане збор.

Кога во една задача сакаме да докажеме дека некој настан не е можен или дека не постои некој математички објект, корисно е да го користиме “методот” на **двојна негација**. Примената на овој метод ќе ја покажеме на следната задача.

Задача 3. Од обична шаховска табла се отсечени најдолното лево и најгорното десно квадратче. Дали е можно останатиот дел на таблата да се покрие со плочки од домино, при што секоја плочка покрива точно две квадратчиња? Плочките меѓу себе не се препокриваат.



Решение. За оваа задача прв пат слушнав во како ученик во петто одделение, на математичка секција. Брзо пресметав, дека на таблата остануваат 62 квадратчиња, секое домино покрива по две квадратчиња, па затоа таблата ќе се покрие со $62:2=31$ домино. Кога решението му го објаснив на учителот, тој без да каже ниту еден збор пред мене стави табла и плочки од домино. И така почна мојата работа на проблемот. После низа неуспешни обиди констирав дека јас покривањето не можам да го направа. Сигурно веќе се досетивте дека такво покривање не е можно. А, мојата пресметка?

Ајде да размислуваме заедно. Да допуштиме, дека останатиот дел од таблата може да се покрие на саканиот начин. Отсечените квадратчиња од таблата се обоени во црна боја. Понатаму, како и да поставиме едно домино врз две квадратчиња, тоа одма ќе покрие едно бело и едно црно квадратче. Бидејќи допуштивме дека таблата може да се покрие, добиваме дека бројот на белите квадратчиња е еднаков на бројот на црните квадратчиња. Но, во нашиот случај тоа не е можно, бидејќи нашата табла има 32 бели и 30 црни квадратчиња. Според тоа, нешто не е во ред, а тоа е нашата претпоставка дека покривањето е можно. ♦

Ако добро размислиме ќе забележиме дека наоѓњето на правилниот одговор е најтешкото, но истовремено и најпривлечното нешто кај задачите од ваков вид. Претходното се однесува и на следната задача.

Задача 4. Дали може секоја страна на еден триаголник да е поголема од $100cm$, а неговата плоштина да е помала од $0,01cm^2$?

Решение. На прв поглед одговорот на поставеното прашање треба да е негативен. Но, тоа е “само на прв поглед”. Нека конструираме рамнокрак ΔABC со основа $\overline{AB}=200cm$ и висина $\overline{MC}=0,00001cm$. Јасно, секоја од неговите страни е поголема од $100cm$, а неговата плоштина е

$$P=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{MC}=\frac{1}{2}\cdot 200\cdot 0,00001cm^2=0.001cm^2,$$

што значи, одговорот на поставеното прашање е позитивен. ♦

При решавањето на претходната задача го искористивме конструктивниот метод. Но, овој метод практично е неприменлив во задачи во кои треба да се покаже постоење на некој објект ако треба да разгледаме, на пример, 1000000 објекти или во задачи во кои треба да покажеме дека некој објект има, на пример, 500 својства. За да се справат со вакви те и слични на нив тешкоти математичарите разработиле и други методи, наречени **неконструктивни методи**. Таков метод е применет при решавањето на следната задача.

Задача 5. Дали може од 1994 цели броеви да се изберат

а) 183; б) 182,

броеви, за кои разликата на секои два од нив се дели со 11?

Решение. Прво да забележиме, дека разликата на два цели броја се дели со 11 ако и само ако броевите даваат исти остатоци при делење со 11.

а) Да претпоставиме дека тоа е можно и да ги разгледаме броевите 1,2,3,...1994. Според претпоставката меѓу нив има 183 броеви, кои даваат еден и ист остаток при делење со 11. Обиди се самостојно, дека тоа не е можно бидејќи броевите 1, 12, 23, 34, ..., 1992, кои ги има точно 182 даваат остаток 1; броевите 2, 13, 24, 35, ..., 1993 кои ги има точно 182 даваат остаток 2 итн, додека се исцрпат остатоците.

б) Одговорот на поставеното прашање е позитивен. Но, за да дојдеме до него, не можеме да го искористиме конструктивниот метод. Имено, не сме во состојба да ги наведеме броевите за кои разликата на секои два се дели со 11, бидејќи сите 1994 броеви се произволни, па затоа овде ќе го искористиме ***принципот на Дирихле***. Можни остатоци при делење со 11 се: 0, 1, 2, ..., 10 и ги има точно 11. Да разгледаме 11 кутии нумерирани со броевите од 0 до 10 и секој од броевите да го ставиме во кутијата нумерирана со бројот кој е еднаков на остатокот на бројот при делење со 11. Бидејќи имаме 1994 броеви и $1994 = 11 \cdot 181 + 3$, добиваме дека барем во една кутија ќе имаменајмалку 182 броја и тоа се бараните броеви. ♦

На крајот, обиди се самостојно да ги решиш следните задачи.

Задача 6. Дали постои четирицифрен природен број, кој после бришењето на првата цифра се намалува

а) 73 пати, б) 72 пати?

Задача 7. Дали постои природен број чиј производ на цифри е еднаков на 2000? Во случај на позитивен одговор најди го најмалиот меѓу броевите со наведеното својство.

Задача 8. Дали може природните броеви од 1 до 25 да се поделат на неколку групи така, што во секоја група најголемиот број да е еднаков на збирот на останатите броеви од групата?

Задача 9. Дали може да се изберат пет цели броеви такви, што со собирање на секои два два од нив се добијат десет последователни цели броеви?

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ