На почетку беше реч

др Небојша Икодиновић, **Крагујевац**

Циљ овог чланка је да бар мало дочара снагу математике и њених апстрактних идеја, али и да укаже на чињеницу да је математика „жива“ и увек „млада“ наука и да нуди веома велики простор за нова истраживања.

Поћи ћемо од једног општег проблема, који се можда не уклапа у слику о математичким проблемима, бар не ону која може да се створи решавањем задатака из стандардних збирки. Реч је о проблему који је тесно повезан са великим бројем истраживања у савременој математици (алгебри, геометрији или логици, на пример), али и рачунарству (computer science).

Проблем речи

Трансформације речи. Претпоставимо да је задат неки *алфабет* и посматрајмо све коначне низове ових симбола (слова) – *речи*. Речи не морају саме по себи имати икакво значење.

Нека је задат и известан коначан списак међусобно еквивалентних речи који нам омогућава да делове било које речи, који су такође неке речи, заменимо еквивалентним речима.

Конкретно, ако је задата наша азбука (А, Б, В, ..., Ч, Џ, Ш) и списак: А≡АР МА≡УМ, НОНО≡НО, ТИ≡ТЕ, ТИМА≡ЕТНО, ТЕКА≡НОСТ, ТЕМА≡Т, тада можемо *доказати* да су речи МАТЕМАТИКА и УМЕТНОСТ међусобно **еквивалентне**. Тако (подвлачећи низове слова који ће бити промењени и надвлачећи оне који су управо промењени) имамо:

МАТЕМАТИКА ≡ УМТЕМАТИКА ≡ УМТИМАТИКА ≡ УМЕТНОТЕКА ≡ УМЕТНОНОСТ
≡ УМЕТНОСТ.

Ову игру речима можемо наставити и доказивати да је, на пример, и НОНОНО≡НО, ТИКА≡НОНОСТ, СТЕК≡СТИК, и тако даље. У сваком случају, *еквивалентност две речи доказујемо навођењем низа трансформација које су дозвољене, тј. низа речи при чему се свака реч добија из претходне у складу са задатим списком.*

Општији проблем. Размотримо сада општији проблем: за сваке две речи у задатом „рачуну“ сазнати јесу ли еквивалентне или нису. Наравно, како има бесконачно много различитих речи под решењем се подразумева поступак (алгоритам) који „распознаје“ еквивалентност сваког пара речи.

На пример, како ћемо сазнати јесу ли речи МАТЕМАТИКА и АРТ еквивалентне или не? Свако трагање за доказом еквивалентности ове две речи ће се безуспешно завршити! Зашто? Зато што ове две речи **нису еквивалентне** у нашем „рачуну“. Да бисмо утврдили да је немогуће добити АРТ од МАТЕМАТИКА коришћењем задатог списка поступамо на сасвим другачији начин од начина доказивања еквивалентости две речи. Најједноставније је, можда, уочити следеће: у свакој допустивој замени на нашој листи број појављивања слова Т исти је са обе стране. За реч МАТЕМАТИКА тај број је једнак 2, док је за реч АРТ тај број 1. Према томе, не постоји начин да се добије АРТ из МАТЕМАТИКА дозвољеним заменама.

О решивости општег проблема. Приметимо да када су две речи еквивалентне, можемо то показати навођењем низа трансформација које су дозвољене, док када две речи нису еквивалентне морамо прибећи аргументима **о** правилима која су нам дата.

Ако две задате речи **јесу** еквивалентне, онда то можемо утврдити „маханички" - једним систематским прављењем спискова последица једне од задатих речи у складу са задатим правилима[†]. Тада се друга од задатих речи, уколико је еквивалентна са првом, мора наћи на неком од ових спискова. Систематско прављење спискова подразумева да за сваку реч са списка једноставно можемо дати и доказ њене еквивалентности са полазном речју. При трагању за доказом свакако је пожељно употребити и интелигенцију, али није неопходно. Овај поступак се може применити и за било који други избор почетног списка. Наравно, поступак је у извесном смислу само теоријски остварив будући да чак и у веома једноставним рачунима може довести до „катастрофалног" броја случајева.

Међутим, нема таквог очигледног поступка, у општем случају, за утврђивање да две задате речи **нису** еквивалентне, и тада је неопходно да посегнемо за интелигенцијом да бисмо то и доказали. Испоставља се да не постоји јединствен поступак који се може користити универзално за све могуће изборе почетног списка, што има за последицу чињеницу да се не може алгоритамски утврдити да ли су две дате речи еквивалентне. У том смислу, **у општем случају нема алгоритамског решења проблема речи**. Постоје чак и одређени избори почетног списка за које нема алгоритма за утврђивање када две речи нису еквивелнетне. Један такав списак, за речи над енглеском абецедом A, B, C, ..., Y, Z је: AH ≡ HA, OH ≡ HO, AT ≡ TA, OT ≡ TO, TAI ≡ IT, HOI ≡ IH, THAT ≡ ITHE.

Напомена о алгоритмима. Нећемо улазити у детаље како се *доказује* да не постоји поступак (алгоритам) да се нешто обави. Рећи ћемо само, да се појам *алгоритма* (поступка) може строго дефинисати и анализирати математичким средствима. Наиме, овај појам је вековима постојао у математици без прецизне дефиниције (сетите се само када је настао Еуклидов алгоритам за налажење највећег заједничког делиоца два броја). Чак и данас се често под алгоритмом, интуитивно, подразумева *механички процес који се корак по корак изводи над коначним скупом података при чему је сваки корак недвосмислено дефинисан, изводи се у коначном времену и у ограниченом делу простора.* Иако наведена реченица доста добро одговара свакодневној употреби овог појма, она се не може узети за (строгу) математичку дефиницију. Први покушаји да се да строга формална анализа и математички модел појма алгоритма одиграли су се тек у XX веку, првенствено као резултат рада на основама математике и покушаја да се реше неки одатле произашли проблеми, а убрзо затим и у вези са брзим развојем електронских рачунских машина. Грубо речено, истраживања у овом правцу највише су била мотивисана потребом да се изучавају проблеми типа: *Показати да не постоји алгоритам за решавање неког проблема.* Пред задацима оваквог типа интуитивни појам алгоритма је потпуно немоћан (бескористан (!)).

Налажење „добрих" поступака (алгоритама) је вероватно најважнији посао савремених матемематематичара и програмера. За велики број проблема речи постоје „добри" алгоритми који их решавају (са једним ћемо се ускоро и упознати). Али, много је и веома „тешких" проблема речи. А већ смо видели да постоје проблеми речи који су нерешиви, те је бесмислено трагати за таквим поступцима.

[†] На пример, полазећи од једне речи тражимо њене непосредне последице, формирајући тако списак свих речи које су јој еквивалентне применом тачно једне од допустивих замена; пошто су речи коначни низови симбола а и дозвољених замена има само коначно много, овај наш списак ће бити такође коначан. Затим, за сваку од речи са управо направљеног списак правимо списак њених непосредних последица, те спискове непосредних последица нових речи и тако даље. У овом случају доказ еквивалентности неке речи са списка и речи од које смо кренули даје нам „пут" који спаја полазну реч и изабрану реч са списка.

Један решив проблем речи. Веома често се уопштава појам *речи* и *допустиве замене* у следећем смислу: осим уобичајених речи задатог алфабета узима се у обзир и *празна реч* која не садржи ни једно слово; означићемо је са Λ. Заједно са овом речи дозвољавају се и замене облика $R \equiv \Lambda$ које допуштају да се из речи избаци реч R, као и да се реч R може уписати између било која два слова речи коју трансформишемо, или испред ње или иза ње.

Посматрајмо сада алфабет који садржи само два слова σ и ρ и нека је списак допустивих замена: $\sigma\sigma \equiv \Lambda$, $\rho\rho\rho \equiv \Lambda$, $\rho\sigma \equiv \sigma\rho\rho$.

Поступак утврђивања еквивалентности односно нееквивалентности било које две речи задатог алфабета произилази из чињенице да се **свака реч** задатог алфабета може трансформисати у једну од следећих **шест** речи: Λ, ρ, $\rho\rho$, σ, $\sigma\rho$, $\sigma\rho\rho$. Ових шет речи назваћемо *сведене речи*. Трансформације се одвијају у следећим етапама.

1. Уколико у датој речи нема слова ρ одмах прећи на етапу **2**, а уколико нема слова σ прећи на етапу **3**. Ако се, пак, у датој речи појављују и слово σ и слово ρ, треба испремештати слова σ лево од слова ρ све док сва слова σ не дођу испред свих слова ρ. Читајући реч слева на десно прво појављивање пара $\rho\sigma$ треба заменити са $\sigma\rho\rho$, те затим исти поступак применити на нову реч све док се не добије реч облика $\sigma\cdots\sigma\rho\cdots\rho$ коју треба пренети у другу етапу обраде.

$$\begin{aligned} &\sigma\underline{\rho\sigma}\rho\sigma\rho\rho \\ \equiv\ &\sigma\sigma\rho\rho\underline{\rho\sigma}\rho\rho \\ \equiv\ &\sigma\sigma\rho\underline{\rho\sigma}\rho\rho\rho \\ \equiv\ &\sigma\sigma\underline{\rho\sigma}\rho\rho\rho\rho\rho \\ \equiv\ &\sigma\sigma\sigma\rho\rho\rho\rho\rho\rho\rho\rho \end{aligned}$$

2. *Постепено избацивати парове суседних слова σ, док год је то могуће.* Уколико реч коју трансформишемо не садржи слово ρ поступак трансформације је готов и излаз је Λ **или** σ. У супротном добиће се реч једног од облика $\rho\cdots\rho$ или $\sigma\rho\cdots\rho$ коју даље треба трансормисати у етапи **3**.

$$\begin{aligned} &\underline{\sigma\sigma}\sigma\rho\rho\rho\rho\rho\rho\rho\rho \\ \equiv\ &\sigma\rho\rho\rho\rho\rho\rho\rho\rho \end{aligned}$$

3. Постепено избацивати тројке суседних слова ρ, док год је то могуће. На крају, добијена реч садржи највише једно слово σ и не више од два слова ρ.

$$\begin{aligned} &\sigma\underline{\rho\rho\rho}\rho\rho\rho\rho\rho \\ \equiv\ &\sigma\underline{\rho\rho\rho}\rho\rho \\ \equiv\ &\sigma\rho\rho \end{aligned}$$

Остаје још да се покаже да су сваке две сведене речи међусобно нееквивалентне.

Наиме, у свим допустивим заменама број појављивања слова σ на левој страни и број појављивања слова σ на десној страни је истовремено паран или истовремено непаран. То значи да је парност броја појављивања слова σ *инваријанта* за „ланце" еквиваленција. Одавде директно следи да нека сведена реч која садржи слово σ није еквивалентна ни једној речи која не садржи слово σ.

Аналогно важи и за слово ρ, односно, парност појављивања слова ρ је такође једна инваријанта за „ланце" еквиваленција. Зато, сведена реч која која садржи једно или три појављивања слова ρ није еквивалнетна ни једној од сведених речи која садржи два појављивања слова ρ или, пак, не садржи слово ρ.

Две уочене инваријанте директно доказују нееквивалнетност свих могућих парова различитих сведених речи, осим пара који чине $\rho\rho$ и Λ и пара $\sigma\rho\rho$ и σ. Међутим, лако се закључује да и ове парове чине међусобно нееквивалентне речи: из $\rho\rho \equiv \Lambda$, следило би, на пример, да је $\rho\rho\rho \equiv \rho\rho$ што је немогуће због друге инваријанте.

Дакле, свака реч је еквивалентна једној од шест набројаних речи, те су две речи еквивалентне ако и само ако се своде на исту сведену реч.

Ако неко не види смисао проблема речи и његову везу са математиком, ево конкретног примера који даје значење управо уведеном рачуну.

Рачуни

Већини је *рачун* прва асоцијација на математику. Ако занемаримо чињеницу да већина мисли само на рачун са бројевима, можемо рећи да је асоцијација углавном добра. Наиме, данас, поред рачуна са бројевима, модерна математика обилује рачинума са разним другим објектима. Тако, рачуна се са истином и неистином $\top \wedge \neg\bot = \top$, рачуна се са скуповима $(\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\}) \setminus \{2\} = \{3\}$, са функцијама, $(x^2)' = 2x, \ldots$

Испоставља се да је увођење сваког новог математичког рачуна представљало велики корак напред у историји човечанства.

Тако, први (можда и највећи) корак напред представља замена рачуна са конкретним стварима (овцама („две овце и две овце су четири овце“), деблима и сл.) *рачуном са (айсшракшним сшварима!) бројевима* $(2+2=4)$!

Права ренесанса почиње када је рачун са римским бројевима замењен рачуном са бројевима записаним у позиционом систему (који користимо и данас). Покушајте да откријете поступак сабирања или, пак, множења два броја записана на римски начин (наравно, резултат треба да буде римски број и бројеви се не смеју преводити у позициони систем).

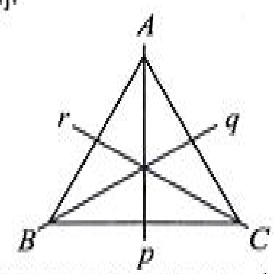
Наука је у XVIII веку почела да се развија до, дотада, неслућених размера када је откривен такозвани диференцијално-интегрални рачун.

Откриће рачунара (и да не наводимо шта све са њима) дугујемо, између осталог, и Буловом рачуну (са „истином“ и „неистином“) и рачунима који су након њега развијени.

Рачуна се и у геометрији!

Један рачун у геометрији. Нека је ABC једнакостраничан троугао и O његов центар. Посматрајмо следеће трансформације (такозване изометријске) које овај троугао „преводе“ у самог себе [реч је о *симешријама* једнакостраничног троугла]:

- осне симетрије у односу на праве које садрже једно теме троугла и његов центар, и
- ротације у смеру супротном кретању казаљке на сату за угао од $120°$, $240°$ или $360°$ око центра O.



Пошто је свака од ових трансформација потпуно одређена сликама темена A, B, C можемо писати

$$\mathcal{S}_p = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}, \mathcal{S}_q = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}, \mathcal{S}_r = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R}_{O,120°} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}, \mathcal{R}_{O,240°} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}, \mathcal{R}_{O,360°} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}.$$

Будући да је свака симетрија датог троугла одређена одговарајућом трансформацијом његових темена, те да су горе побројане све могућности изометријских трансформација темена, закључујемо да смо набројали све могуће симетрије овог троугла.

Важно је приметити да се остваривањем било којих двеју симетрија датог троугла такође добија нека симетрија. На пример, резултат две узастовне ротације за $120°$ је ротација за $240°$. Ако након симетрије у односу на праву p применимо ротацију за $120°$ постижемо исто као да смо применили симетрију у односу на r, и тако даље. На овај начин долазимо до рачуна са трансформацијама

$$\mathcal{R}_{O,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O,120^\circ} = \mathcal{R}_{O,240^\circ},\ \mathcal{R}_{O,120^\circ} \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_r,\ \ldots$$

чију основу чини његова „*таблица множења*":

$\circ$	$\mathcal{R}_{O,360^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,120^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,240^\circ}$	$\mathcal{S}_p$	$\mathcal{S}_q$	$\mathcal{S}_r$
$\mathcal{R}_{O,360^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,360^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,120^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,240^\circ}$	$\mathcal{S}_p$	$\mathcal{S}_q$	$\mathcal{S}_r$
$\mathcal{R}_{O,120^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,120^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,240^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,360^\circ}$	$\mathcal{S}_q$	$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{S}_p$
$\mathcal{R}_{O,240^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,240^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,360^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,120^\circ}$	$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{S}_p$	$\mathcal{S}_q$
$\mathcal{S}_p$	$\mathcal{S}_p$	$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{S}_q$	$\mathcal{R}_{O,360^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,240^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,120^\circ}$
$\mathcal{S}_q$	$\mathcal{S}_q$	$\mathcal{S}_p$	$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{R}_{O,120^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,360^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,240^\circ}$
$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{S}_q$	$\mathcal{S}_p$	$\mathcal{R}_{O,240^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,120^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,360^\circ}$

И као што смо навикли у „рачунима" са бројевима, и овога пута можемо:
– израчунавати вредности сложенијих израза: $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$, $(\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_q) \circ \mathcal{R}_{O,120^\circ}$, $\mathcal{S}_p \circ (\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r)$, $(\mathcal{R}_{O,240^\circ} \circ \mathcal{S}_p) \circ (\mathcal{S}_q \circ (\mathcal{S}_q \circ \mathcal{R}_{O,120^\circ}))$, ...
– решавати једначине: $\mathcal{R}_{O,240^\circ} \circ X = \mathcal{S}_r$, $\mathcal{R}_{O,240^\circ} \circ (X \circ X) = \mathcal{S}_r, \ldots$
– откривати алгебарске законитости:

• у изразима можемо занемаривати (избацивати, или пак премештати) заграде будући да за произвољне трансформације X, Y, Z важи једнакост $X \circ (Y \circ Z) = (X \circ Y) \circ Z$ - математичким језиком, операција $\circ$ је *асоцијативна*;

• како $\mathcal{R}_{O,360^\circ}$ „не мења ништа" она је *неутрални елемент*, тј. за сваку трансформацију X је $X \circ \mathcal{R}_{O,360^\circ} = X$ и $\mathcal{R}_{O,360^\circ} \circ X = X$;

• за сваку трансформацију X постоји њој инверзна Y, тј. она са којом дата транформација даје неутралну, $X \circ Y = \mathcal{R}_{O,360^\circ}$ и $Y \circ X = \mathcal{R}_{O,360^\circ}$;

• трансформацијама не смемо мењати места у изразима, односно операција $\circ$ није комутативна ($\mathcal{S}_p \circ \mathcal{R}_{O,120^\circ} \neq \mathcal{R}_{O,120^\circ} \circ \mathcal{S}_p$).

Често се при писању израза, једноставности ради, изоставља знак операције. Ако то урадимо у нашем рачуну са трансформацијама, изрази ће буквално постати речи над алфабетом $\mathcal{S}_p$, $\mathcal{S}_q$, $\mathcal{S}_r$, $\mathcal{R}_{O,120^\circ}$, $\mathcal{R}_{O,240^\circ}$, $\mathcal{R}_{O,360^\circ}$, док нам таблица директно даје списак допустивих трансформација: $\mathcal{R}_{O,360^\circ}\mathcal{R}_{O,360^\circ} = \mathcal{R}_{O,360^\circ}$, $\mathcal{R}_{O,360^\circ}\mathcal{R}_{O,120^\circ} = \mathcal{R}_{O,120^\circ}, \ldots$

Проблем речи и рачун са симетријама троугла. Ако се само мало боље удубимо у рачун са трансформацијама приметићемо да се помоћу $\mathcal{S}_p$ и $\mathcal{R}_{O,120^\circ}$ могу изразити све остале трансформације: $\mathcal{R}_{O,240^\circ} = \mathcal{R}_{O,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O,120^\circ}$, $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{R}_{O,120^\circ}, \ldots$

Ова чињеница нам омогућава да значајно поједноставимо наш рачун. То поједностављење ће дати конкретан геометријски смисао нашем рачуну са речима над $\{\sigma, \rho\}$.
– Пошто трансформација $\mathcal{R}_{O,360^\circ}$ ништа не мења можемо је назвати и „празном" трансформацијом и идентификовати је са празном речју Λ.
– Ознаке $\mathcal{S}_p$ и $\mathcal{R}_{O,120^\circ}$ заменимо краћим ρ и σ, редом.

Уз ове нове ознаке имамо да је $\sigma\sigma = \Lambda$, $\rho\rho\rho = \Lambda$ и $\rho\sigma = \sigma\rho\rho$. Већ наслућујете: свака трансформација је једна од сведених речи!

Проблем речи и математика. Проблем речи, настао у неким специјалним деловима савремене математике, данас далеко превазилази оквире ове математичке дисциплине и има велико и теоријско и практично значење.

Општи проблем речи је у блиској вези са разним математичким теоријама. Свака математичка формула је заправо *реч* у неком посебном алфабету (који садржи слова, заграде, ознаке за бројеве, ознаке за логичке операције и тако даље), те поступак извођења последице из неке претпоставке можемо описати као низ преобликовања речи на основу некаквих дозвољених замена које су, пак, у складу са *чиновима* логичког закључивања, нпр:

$$2x + 3 = 7 \equiv 2x = 7 - 4 \equiv x = 4 : 2 \equiv x = 2,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \equiv (\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0)\left(\frac{1}{n} < \varepsilon\right).$$

Задатак. Речи над енглеском абецедом A, B, C, ..., Y, Z дозвољено је трансформисати по следећим правилима.

$$\begin{aligned} \text{EAT} &\equiv \text{AT} \\ \text{ATE} &\equiv \text{A} \\ \text{LATER} &\equiv \text{LOW} \\ \text{PAN} &\equiv \text{PILLOW} \\ \text{CARP} &\equiv \text{ME} \end{aligned}$$

Доказати да су речи LAP и LEAP еквивалентне. Да ли су еквивалентне речи CATERPILLAR и MAN? А речи MEAT и CARPET?

Задатак. На табли је написана реч $BBABBAABAABAB$. У сваком кораку је дозвољено избрисати два суседна слова BA или додати два суседна слова AB на било ком месту у речи. Да ли је могуће на овај начин дату реч претворити у реч:
(а) $BBAABBABAABBA$;
(б) $ABBABAAABBAAB$;
(в) $BABAABAABBABB$?

Задатак. Посматрајмо све речи над алфабетом $\{0, 1\}$. Реч над овим алфабетом може се трансформисати убацивањем, брисањем или дописивањем слева или здесна речи облика xxx, при чему је x било која рач задатог алфабета. Може ли се на овај начин свака реч трансформисати на једну од речи 01 или 10?

Задатак. Наћи све симетрије квадрата и формирати одговарајућу таблицу. Наћи везу добијеног рачуна са симетријама квадрата и трансформацијама речи над алфабетом $\{\sigma, \rho\}$: $\sigma\sigma = \Lambda, \rho\rho\rho\rho = \Lambda, \rho\sigma = \sigma\rho\rho\rho$.

На сличан начин, анализирајте све симетрије произвољног правилног n-тоугла.

Литература

[1] Н. Икодиновић: *Збирка задатака из теорије група*, Универзитет у Крагујевцу Природно-математички факултет, Крагујевац, 2003.

[2] Р. Пенроуз: *Царев нови ум*, О рачунарима, уму и законима физике, Информатика, Београд, 2004.

[3] B. A. Trahtenbrot: *Što su algoritmi*, Algoritmi i računski automati, Školska knjiga, Zagreb, 1978.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2007/08 година