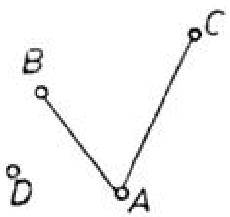
M. Ilić-Dajović (Beograd)

O JEDNOJ VRSTI GRAFOVA

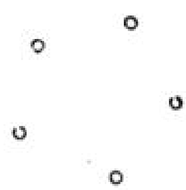
1. Autobuska stanica A povezana je direktnim linijama sa mestima B i C, ali nije povezana sa mestom D. Iz A se stiže u B u jednom pravcu, a u C u drugom pravcu. Na slici 1 su na jedan način predstavljene autobuske veze AB i AC. Mesta su predstavljena tačkama, a veze dužima; tačka D nije povezana s tačkom A.

Ta slika predstavlja jedan graf. *Graf* je, dakle, sastavljen od skupa tačaka (to su *temena grafa*) i skupa linija kojima su te tačke povezane (to su *ivice grafa*). Graf na sl. 1 ima četiri temena (jedno je izolovano) i dve ivice.

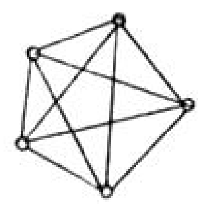
Da li postoji graf bez ivica? — Postoji; to je graf sastavljen od jednog ili više temena. Na primer, takav je graf na sl. 2, koji predstavlja



Sl. 1



Sl. 2



Sl. 3

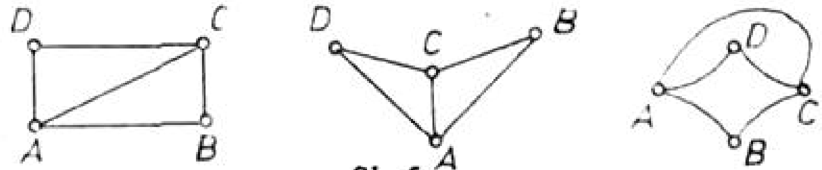
Sl. 4

skup od 5 učesnika šahovskog turnira pre početka turnira; po završetku turnira, graf na sl. 3 predstavlja sve odigrane partije (svakoj partiji odgovara po jedna ivica).

Da li postoji graf bez temena? — Ne postoji.

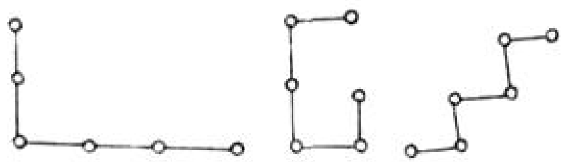
Iako svaka ivica ima dva temena — početak i kraj — ipak postoji jedan graf sa samo jednom ivicom i samo jednim temenom; to je tzv. *petlja* (sl. 4).

2. U svakom grafu je bitno koje je teme s kojim temenom povezano, a da li su ivice grafa prave ili krive, to nema značaja. Zato sva tri grafa na sl. 5 imaju, u tom smislu, »isti oblik« (to se kaže: *izomorfni* *su*). Takođe su grafovi na sl. 6 izomorfni, a i dva grafa na sl. 7 su izomorfni grafovi. Poslednji od ovih grafova liči na drvo, pa se tako i zove: *drvo*. Ako taj graf uporedimo, recimo, sa bilo kojim od grafova na sl. 5, videćemo da nijedan od ova tri grafa nije drvo.

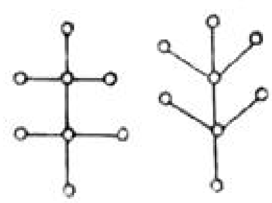


Sl. 5

Po čemu se, onda, drvo razlikuje od grafa koji nije drvo? — ***Drvo*** *je graf bez izolovanih temena čija su svaka dva temena povezana samo jednim nizom* (to se kaže: lancem) *ivica.* — Na primer, na bilo kojem od izomorfnih grafova na sl. 5 postoje između svaka dva temena po tri »veze«; tako su temena ***A*** i ***B*** vezana ivicom ***AB***, zatim lancem ***AC***, ***CB*** i lancem ***AD***, ***DC***, ***CB***. Međutim, na drvetu kao što su grafovi



Sl. 6



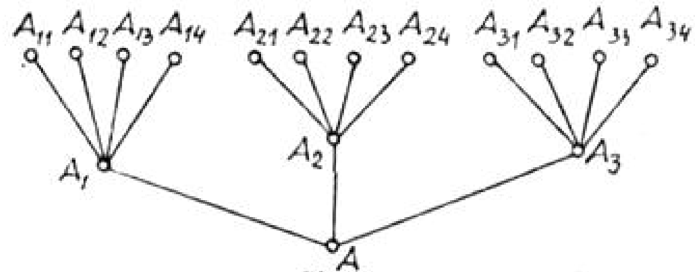
Sl. 7

na sl. 7, *između svaka dva temena postoji samo po jedna »veza«*, tj. *po jedan lanac koji ta temena spaja* bilo direktno (ivicom) bilo preko drugih temena (prelaženje istom ivicom dva ili više puta ne dolazi u obzir); to je jedna od karakterističnih osobina drveta. Na osnovu toga možemo odmah zaključiti da takvu osobinu ima i svaki graf na sl. 6, pa, iako nijedan od njih ne liči na drvo u prirodi, ipak su to, u matematičkom smislu, tri drveta.

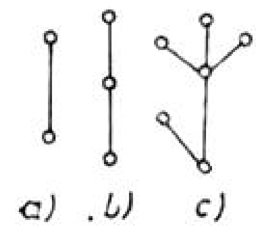
Evo kako drvo prikazuje jedan zadatak razvrstavanja.

Na veslačkom takmičenju četveraca bez kormilara osvojena su po jedno prvo, drugo i treće mesto. Pored medalja, za pobednike su pripremljene i diplome. Kako je najpovoljnije te diplome grupisati pre predaje da bi se, zatim, predaja izvršila bez zastoja?

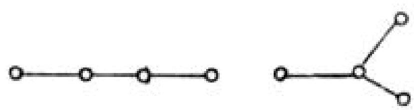
Sve diplome se nalaze na jednom mestu — to je tačka A. Sada ih treba najpre razvrstati na tri grupe (A_1, A_2 i A_3), koje odgovaraju **I, II** *i* **III** mestu, a zatim u svakoj grupi rasporediti po četiri diplome onim redom kako su veslači sedeli u čamcu i kako će stajati na počasnom postolju. — Odgovarajući graf je (sl. 8) drvo koje liči na pravo, razgranato drvo u prirodi; svakom veslaču odgovara po jedno teme $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{34}$.



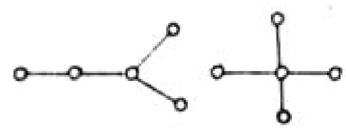
Sl. 8



Sl. 9



Sl. 10



Sl. 11

3. Najprostije drvo (ako izuzmemo drvo svedeno samo na jedno teme) jeste drvo sa dva temena i jednom ivicom (sl. 9a). Drvo koje ima jednu ivicu više, mora imati i jedno teme više, jer, granajući se, drvo dobija nove ivice, a svaka nova ivica donosi i po jedno novo teme (sl. 9b, 9c i 8). Na osnovu toga zaključujemo: ako pođemo od drveta koje ima samo jednu ivicu (i $1+1$ teme, sl. 9a) i dodajemo koliko pod hoćemo novih ivica, uvek će *broj temena biti za* 1 *veći od broja ivica* (i to je karakteristična osobina drveta u teoriji grafova).

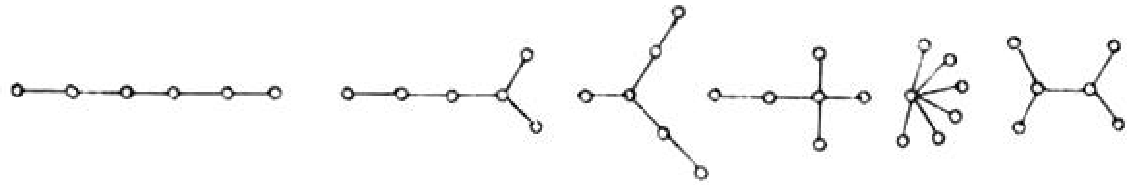
Zadatak. Nacrtati sva neizomorfna drveta sa n temena ako je $n=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

R e š e n j e. Za $n=2$ (sl. 9a) i $n=3$ (sl. 9b) postoji samo po jedno drvo.

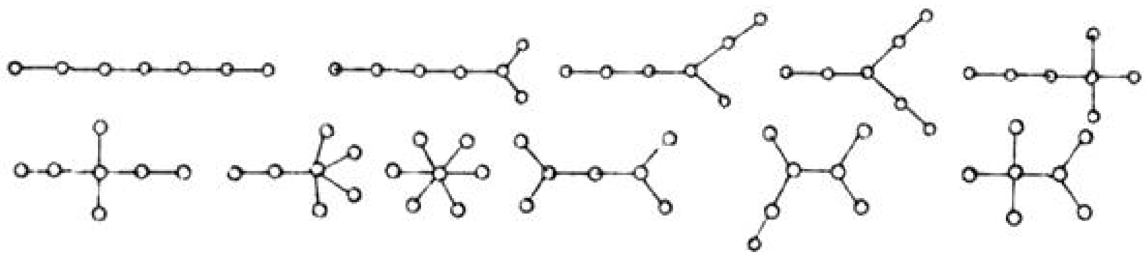
Za $n=4$ imamo dva drveta (sl. 10), a za $n=5$ tri drveta (sl. 11); sva drveta crtamo položeno radi boljeg korišćenja prostora na stranici.

Za $n=6$ imamo šest drveta (sl. 12), a za $n=7$ ima ih 11 (sl. 13). Počev odatle, broj drveta se naglo povećava. Tako, sa 8 temena ima 23 drveta (sl. 14), sa 9 temena ima ih 47, sa 10 temena 105, sa 11 temena 235, a sa 12 temena (da se zadržimo na tome) ima 551 drvo.

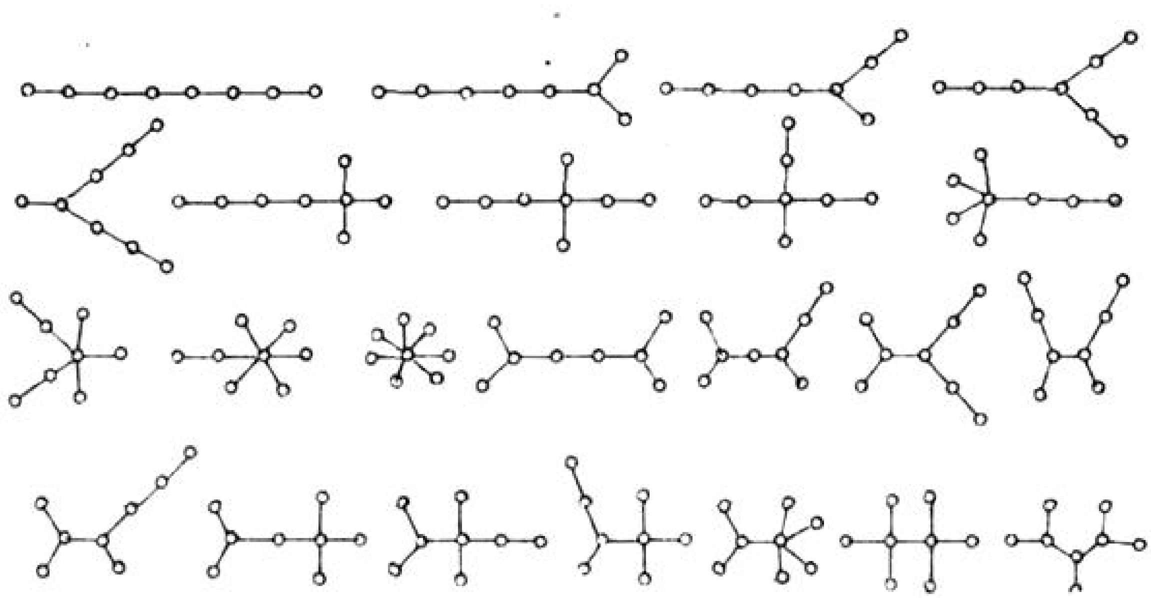
Ne treba misliti da je, kada se radi o većem broju temena ($n=10$ ili veće od 10) lako naći sva drveta sa tim brojem temena; reći ćemo samo to da se pri tom moraju koristiti i druge osobine takvih grafova, o kojima ovde nismo mogli govoriti.



Sl. 12 ($n=6$)



Sl. 13 ($n=7$)



Sl. 14 ($n=8$)

Predlažemo vam da nacrtate, po ugledu na sl. 14, sva drveta (ima ih 47) sa 9 temena.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија