Инваријанте

прва-2 верзија: 7.11.2013.

Душан Ђукић

1. Квадратна таблица 3×3 је попуњена бројевима $0, 1, \ldots, 8$ на уобичајен начин. У сваком кораку можемо да одаберемо два суседна поља и бројеве у њима умањимо за вредност мањег, не мењајући остале. Да ли се оваквим изменама може добити таблица попуњена нулама?

   Решење. Не може. Обојмо поља таблице црно и бело, попут шаховске табле. Разлика збира на црним и збира на белим пољима се оваквим корацима не мења, а у почетку она је 4.

2. На квадратној табли 10×10, девет поља је обрасло у коров. Сваког дана коров нападне неко поље које дели страницу са бар два поља обрасла у коров. Може ли се у коначном времену догодити да коров заузме сва поља табле?

   Решење. Укупан обим дела табле под коровом не може да порасте. У почетку, он је највише 36, а обим целе табле је 40, па је одговор негативан.

3. У почетку су на табли исписани бројеви $1, 2, \ldots, 2010$. У једном кораку је дозвољено заменити нека два броја a и b бројем $ab+a+b$. Да ли је могуће на овај начин добити број (а) $2^{2011}-1$; (б) 2^{2011}?

   Решење. Производ бројева на табли увећаних за 1 се не мења јер је $(a+1)(b+1) = (ab+a+b)+1$, дакле он је константно једнак 2011!. Ако добијемо број $2^{2011}-1$, то значи да 2^{2011} дели 2011!, што није тачно. Ако добијемо 2^{2011}, то значи да $2^{2011}+1$ дели 2011!, а то није тачно јер $\frac{1}{3}(2^{2011}+1)$ има све просте делиоце веће од 2011.

4. Једнакостранични троугао ABC са $AB = n$ подељен је на n^2 јединичних једнакостраничних троуглова. У сваком темену неког од малих троуглова уписан је по један број, и то 1 у теменима A, B, C и тачки D таквој да је $AD = \sqrt{3}$, а 0 у свим осталим тачкама. У једном кораку можемо да бројеве уписане у свим теменима неког ромба странице 1 (који се састоји од два мала троугла) повећамо или смањимо за исту вредност. За које n се може постићи да сви уписани бројеви постану нуле?

   Решење. Означимо са u и v векторе дужине 2 дуж страница AB и AC. Обележимо све тачке M за које је $\overrightarrow{AM} = mu + nv$ за неке $m, n \in \mathbb{Z}$. Нека је S збир свих уписаних бројева, а S' збир бројева у обележеним тачкама. Сваки ромб има тачно једно обележено теме, па се вредност $4S' - S$ не мења.

   За парно n, почетна вредност $4S'-S$ је 8, па није могуће учинити све уписане бројеве нулама. С друге стране, за непарно n можемо постићи циљ. То је једноставно за $n = 3$; нека је $n > 3$ непарно и нека су B' и C' тачке на страницама AB и AC редом са $BB' = CC' = 2$. У по два потеза можемо смањити бројеве у B, C за по 1, а у B', C' их увећати за 1. Овако сводимо задатак на аналоган за $n-2$; продужавамо индукцијом.

5. Дато је $2n$ различитих тачака у равни, међу којима n црвених и n плавих. Доказати да се може повући n дужи, свака са по једним црвеним и једним плавим крајем, тако да никоје две немају заједничких тачака.

   Решење. Кад се две дужи AB и $A'B'$ секу, заменимо их са AB' и $A'B$. Збир дужина свих дужи се смањује. Зато повуцимо n дужи са минималним збиром дужина.

6. На папиру су у почетку исписани полиноми $x, x^3, \ldots, x^{2k+1}, \ldots$. Ако су у једном тренутку на табли написани полиноми $f(x)$ и $g(x)$, дозвољено је дописати и неки од полинома $af(x)+b$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a \geq 0)$, $f(x)+g(x)$ или $f(g(x))$. Да ли је могуће, служећи се оваквим правилима, добити полином $x^{2011} - 20x + 11$?

Решење. Није. Сви полазни полиноми су неопадајући. Све операције чувају ово својство. Како полином $x^{2011} - 20x + 11$ није неопадајући на целом $\mathbb{R}$ (наиме, $f(0) > f(1)$), њега није могуће добити.

7. У почетку је на табли исписано n јединица. У једном кораку је дозвољено избрисати бројеве x и y са табле, и уместо њих написати број $\frac{x+y}{4}$. После $n-1$ корака на табли ће остати само један број. Доказати да овај број није мањи од $\frac{1}{n}$.

   Решење. Збир реципрочних вредности свих бројева на табли не расте приликом сваког корака, јер је $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$. Тај збир је у почетку једнак n, па ако на крају остане само број a, он задовољава $\frac{1}{a} \leq n$.

8. На табли су написани бројеви $0, 1, \sqrt{2}$. У једном кораку дозвољено је додати једном од тих бројева разлику друга два помножену неким рационалним бројем. Могу ли се оваквим операцијама добити бројеви $0, 2, \sqrt{2}$?

   Решење. Сваки број који се добија овим операцијама може се представити у облику $a + b\sqrt{2}$ за неке $a, b \in \mathbb{Q}$, и то на јединствен начин. Придружимо таквом броју тачку (a, b) у координатној равни. Тако у сваком тренутку бројевима на табли одговарају три тачке у равни које одређују неки троугао. Наведена операција помера једно теме троугла паралелно наспрамној страници, што значи да се његова површина не мења, те остаје једнака $\frac{1}{2}$ колика је била у почетку (троугао са теменима $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$). Међутим, бројевима $0, 2, \sqrt{2}$ одговара троугао површине 1, па се они не могу добити.

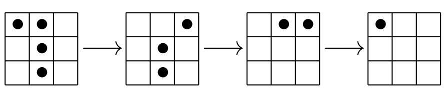
9. У сали има 2011^2 сијалица поређаних у темена квадратне решетке странице 2010. У почетку је k сијалица упаљено. У сваком кораку бирамо јединични квадрат, и ако су у њему три сијалице упаљене, палимо и четврту. За које најмање k постоји почетна позиција која допушта да у коначном времену све сијалице буду упаљене?

   Решење. Сваки јединични квадрат може се искористити у највише једном кораку. Како јединичних квадрата има 2010^2, највише толико сијалица се може упалити. Следи да је $k \geq 2011^2 - 2010^2 = 4021$.
   С друге стране, ако су упаљене све сијалице дуж две суседне странице квадрата, њих има тачно 4021 и лако се види да се могу упалити све сијалице.

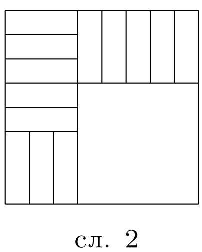
10. На бесконачној шаховској табли је поређано n^2 жетона распоређених у квадрат $n \times n$, на сваком пољу по један жетон. Игра се следећа игра. У једном потезу се један жетон премести у хоризонталном или вертикалном правцу, преко жетона на суседном пољу, на следеће поље, ако је оно слободно. Прескочени жетон се уклања са табле. За које n се може постићи да на табли остане тачно један жетон?

    Решење. Претпоставимо да је могуће завршити игру за $n = 3m$. Нумеришимо врсте и колоне редом целим бројевима. Нека је S_k ($k \in \{0, 1, 2\}$) број жетона на пољима (i, j) за које је $i + j \equiv k \pmod 3$. При сваком потезу обрће се парност сва три броја S_0, S_1, S_2 - два се смањују за 1, а трећи порасте за 1. У почетку су $S_0 = S_1 = S_2 = 3m^2$ исте парности, а на крају нису, што је контрадикција.

    За $3 \nmid n$ могуће је испунити циљ. За $n \leq 2$ то је лако проверити. За $n \geq 4$, низом потеза са слике 1 уклањамо по три жетона у правоугаонику 1×3, користећи још један жетон и једно слободно поље. Тако можемо свести игру са $n \times n$ квадрата на $(n-3) \times (n-3)$ квадрат (слика 2).



сл. 1



сл. 2

11. У сваком темену петоугла је уписан по један цео број, при чему је збир свих пет бројева позитиван. Све док међу уписаним бројевима има негативних, вршимо следећу операцију: одаберемо три узастопна броја x, y, z ($y < 0$) и заменимо их бројевима $x+y, -y, z+y$. Доказати да се овај процес завршава у коначно много корака.

   Решење. Приметимо да збир S свих пет бројева остаје константан. Посматрајмо израз
$$F(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \sum_i (a_{i+1} - a_{i-1})^2,$$
   при чему је a_i број уписан у теме A_i петоугла $A_1A_2A_3A_4A_5$ ($a_0 = a_5$, $a_6 = a_1$). Како је $F(u, x+y, -y, z+y, v) - F(u, x, y, z, v) = 2yS$, вредност F се смањује приликом сваке операције. Пошто се природан број не може неограничено смањивати, тврђење следи.

12. На неким целобројним тачкама бројевне праве налази се по неколико каменчића. Дозвољено нам је да изводимо једну од следећа два типа операције:

   (1) Уклања се по један камен са тачака $n-1$ и n, и ставља један на тачку $n+1$;

   (2) Уклањају се два камена са тачке n и ставља по један на тачке $n-2$ и $n+1$.

   Доказати да после неког времена нећемо више моћи да извршимо ниједну операцију, као и да завршна позиција не зависи од редоследа потеза.

   Решење. Нека се у тачки n налази x_n каменчића. За $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ важи $\phi^2 = \phi + 1$, дакле $\phi^{n-1} + \phi^n = \phi^{n+1}$ и $\phi^{n-2} + \phi^{n+1} = 2\phi^n$. Следи да се збир $S = \sum_n x_n\phi^n$ не мења. Између осталог, кад год је $x_n > 0$, важиће $\phi^n < S$. То значи да се, почев од неког тренутка, највеће n за које је $x_n > 0$ (означимо га са N) више неће мењати, дакле остаје $x_N = 1$. Слично, највеће $n < N$ за које је $x_n > 0$ се не мења почев од неког тренутка, итд, према томе игра се мора завршити.

   У завршној позицији је $x_n \in \{0, 1\}$ и $x_n x_{n+1} = 0$ за све n, и $\sum_n x_n\phi^n = S$. Довољно је показати да, ако је $\sum_n x'_n\phi^n = S$ и $x'_n \in \{0,1\}$ и $x'_n x'_{n+1} = 0$, онда је $x'_n = x_n$ за све n. Претпоставимо да је $N = \max\{n \mid x_n \neq x'_n\}$ и нека је без смањења општости $x_N = 1$ и $x'_N = 0$. Имамо $\sum_{n\leq N} x_n\phi^n = \sum_{n\leq N} x'_n\phi^n$. С друге стране је $\sum_{n\leq N} x'_n\phi^n < \phi^{N-1} + \phi^{N-3} + \phi^{N-5} + \cdots = \frac{\phi^{N+1}}{\phi^2-1} = \phi^N \leq \sum_{n\leq N} x_n\phi^n$, што је контрадикција.

13. За округлим столом седи 2010 гусара који распоређују златнике између себе. У почетку капетан држи све златнике. У сваком кораку, ако неки гусар поседује бар два златника, један од тих гусара даје по један златник својим суседима.

   (а) Доказати да за $n \geq 2010$ гусари никад неће завршити расподелу.

   (б) Доказати да за $n < 2010$ они морају да заврше, ма како радили.

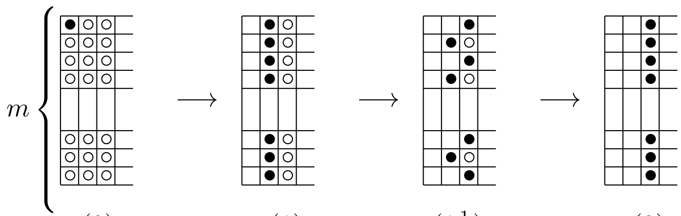
   Решење. Случај $n > 2010$ је тривијалан. Нека је $n = 2010$. Претпоставимо да се може доци до ситуације у којој свако има по један златник. Нумеришимо гусаре бројевима $1, \ldots, 2010$. У сваком моменту, доделимо сваком златнику редни број гусара који га поседује; нека је C збир ових бројева по свим златницима. Број C се не мења, или се мења за тачно 2010. Међутим, у почетку је C дељиво са 2010, а на крају је једнако $1 + 2 + \cdots + 2010 = 1005 \cdot 2011$ што није дељиво са 2010, и то је контрадикција.

   Посматрајмо сада случај $n < 2010$. Ако гусар A даје свом суседу B златник z_{AB}, и у неком каснијем моменту B даје по златник својим суседима, можемо да сматрамо без смањења општости да гусару A даје управо златник z_{AB}. Овако можемо да претпоставимо да сваки златник само циркулише између два фиксна суседна гусара. Како има мање златника него парова суседних гусара, постоје суседни гусари који никад неће разменити златнике. То значи да постоји гусар G који даје златнике само коначно много пута. Ако његов сусед даје златнике бесконачно много пута, G ће гомилати златнике до бесконачности, што је немогуће. Следи да сваки гусар игра само коначно много пута, и расподела је готова у коначном времену.

14. На правоугаоној табли $m \times n$ се игра следећа игра са жетонима чија је једна страна бела, а друга црна. На сваком од mn поља се у почетку налази по један жетон, и то окренут на белу страну, осим жетона у једном углу који је окренут на црну. У једном потезу је дозвољено узети по један жетон окренут на црну страну, и при том се сви њему суседни жетони окрећу. За које m и n можемо да уклонимо све жетоне с табле?

   Решење. Нека је A број жетона окренутих на белу страну, а B број парова жетона суседних по страници. Уклањањем црног жетона са k белих и l црних суседа, A се смањује за $k - l$, а B за $k + l$, што значи да $A + B$ не мења парност. У почетку је $A + B = 3mn - m - n - 1$. Ако успемо да уклонимо све жетоне, на крају ће важити $A + B = 0$, према томе $2 \mid 3mn - m - n - 1$, што значи да бар један од m, n мора да буде непаран.

   С друге стране, ако је нпр. m непарно, можемо постићи циљ. Као на слици, можемо доћи до позиције (1) у m потеза; у $\frac{m+1}{2}$ потеза сводимо је на позицију $(1\frac{1}{2})$, па у следећих $\frac{m-1}{2}$ потеза на позицију (2). Настављамо док не испразнимо све колоне.



(0) (1) $(1\frac{1}{2})$ (2)

15. На реалној правој је распоређено n бува. Нека је λ реалан број. У једном потезу можемо да одаберемо две буве у тачкама A и B, где је A лево од B, и пустимо буву из тачке A да скочи преко B у тачку C такву да је $\overrightarrow{BC} = \lambda \overrightarrow{AB}$. За које λ је могуће, за сваку тачку M на правој, коначним низом потеза сместити све буве десно од тачке M?

   Решење. Претпоставимо да је $\lambda > \frac{1}{n-1}$. У сваком потезу одаберимо крајњу леву буву и пустимо је да прескочи крајњу десну. Означимо са d и δ највеће и најмање растојање између две буве у неком моменту. Очигледно је $d \geq (n-1)\delta$. Када крајња лева бува прескочи крајњу десну, најмање растојање неће бити мање од δ, јер је $\lambda d \geq \delta$. Притом се крајња десна бува померила удесно за бар δ, па према томе у коначном броју потеза може да се премести десно од M, након чега то могу и остале буве.

   Нека је сада $\lambda < \frac{1}{n-1}$. Придружимо свакој буви њену координату на правој и означимо са s_k збир свих координата у k-том кораку, а са w_k координату крање десне буве. Важи $s_k \leq n w_k$. Нека у $(k+1)$-том потезу бува у тачки A прескаче преко буве у B у тачку C, и нека су a, b, c редом координате A, B, C. Због $s_{k+1} - s_k = c - a$ имамо $\lambda(b - a) = c - b = s_{k+1} - s_k + a - b$, одакле је $s_{k+1} - s_k = (1+\lambda)(b-a) = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c - b)$. Следи $s_{k+1} - s_k \geq \frac{1+\lambda}{\lambda}(w_{k+1} - w_k)$, тј. израз $Z_k = \frac{1+\lambda}{\lambda} w_k - s_k$ не расте. То значи да је $Z_0 \geq \frac{1+\lambda}{\lambda} w_k - s_k \geq (\frac{1+\lambda}{\lambda} - n) w_k$, па је w_k ограничено одозго јер је $\frac{1+\lambda}{\lambda} > n$, дакле немогуће је отерати буву произвољно далеко.

16. У линији је поређано n жетона, сваки са једном црном и једном белом страном. У почетку је свима бела страна горе. У сваком кораку, ако је могуће, уклањамо по један жетон са белом страном горе, али не један од крањих; при том два жетона који су му најближи на обе стране (лево и десно) окрећемо. Доказати да можемо да постигнемо да нам остану само два жетона ако и само ако $n - 1$ није дељиво са 3.

   Решење. За почетак, приметимо да се парност броја црних жетона не мења, те он остаје паран.

   Сваком белом жетону ћемо придружити број $(-1)^k$ ако се лево од њега налази тачно k црних жетона. Збир S свих придружених бројева по модулу 3 се не мења. У коначној позицији S је 0 ако су остала два црна жетона, а 2 ако су остала два бела. У почетку је $S = n$, па је зато немогуће да буде $n \equiv 1 \pmod{3}$.

С друге стране, игра са n жетона се своди на случај $n-3$ жетона уклањањем другог, четвртог и трећег жетона, тим редом. Како су случајеви $n \in \{2, 3\}$ тривијални, следи да се игра може завршити за свако $n \not\equiv 1 \pmod{3}$.

Београд, 2002-2013