

Сава Гроздев  
Софија

## ЦРВЕНКАПА И ДИОФАНТОВАТА РАВЕНКА ОД ПРВ РЕД

Едно утро Црвенкапа дотрча во кујната на нејзината баба и рече:

- Бабо, сакам варено јајце!

- Добро, дете мое, но за да е како што ти го сакаш, јајцето треба да се вари точно 15 минути. За жал, часовникот застанал и не можам да измерам 15 минути. Треба да го почекаме дедо ти, кој отиде да купи батерија за часовникот.

- Но, бабо, зашто не го употребиш песочниот часовник?

- Не можам да го употребам, бидејќи тој мери 7 минути. Исто така, не можам да го употребам ниту песочниот часовник на дедо ти, биј тој пак мери 11 минути.

- Бабо, види како ќе измериме 15 минути. Истовремено ќе ги пуштиме и двата часовника. Кога првиот ќе измери 7 минути, ќе го ставиме јајцето да се вари. Бидејќи  $11 - 7 = 4$ , точно после 4 минути ќе истече песокот од вториот часовник. Значи, можеме да измериме 4 минути. Но, тогаш ќе го завртиме вториот часовник и тој ќе измери уште 11 минути. Ете, бидејќи  $11 + 4 = 15$  измеривме 15 минути.

Восхитена од математичките способности на внучката, бабата зеде да го искористи предлогот. Јајцето беше сварено точно за 15 минути и Црвенкапа со задоволство го изеде. Само што заврши со појадокот, во кујната влезе дедото на Црвенкапа.

- Црвенкапа, ајде да видам каква математичарка си! – рече дедото и покажа две кофи, кои ги носеше со себе. – Едната кофа собира 8 литри, а другата собира 14 литри. Треба да измерам точно 4 литри, но не знам како да постапам.

- Дедо, таа задача е многу лесна! – рече Црвенкапа и додаде. – Ајде, наполни ја кофата од 14 литри со вода од чешмата.

Дедото ја наполни кофата и ја погледна Црвенкапа.

- А сега, дедо, со водата од 14-литарската кофа наполни ја втората кофа. Бидејќи втората кофа собира 8 литри, во првата ќе останат  $14 - 8 = 6$  литри. Сега истури ја водата од втората кофа и во неа претури ги оние 6 литри кои ти останаа во првата кофа. Повторно наполни ја кофата од 14 литри. Сега имаме 14 литри во првата кофа и 6 литри во втората кофа. Понатаму дополни ја втората кофа со водата од првата. Ќе претуриш  $8 - 6 = 2$  литра,

бидејќи втората кофа собира 8 литри, а во неа имашр 6 литри. Што добивме? Имаме  $14 - 2 = 12$  литри во првата кофа и 8 литри во втората. Сега, истури ја водата од втората кофа и втората кофа наполни ја со вода од првата кофа. Тогаш во првата кофа ќе останат твоите  $12 - 8 = 4$  литри.

- Браво Црвенкапа, а од каде ги знаеш овие досетки?

- Дедо, забележи, дека  $14 \cdot 2 - 8 \cdot 3 = 28 - 24 = 4$ . Тоа значи, дека двапати догоре ја полниме кофата од 14 литри и три пати сме ја наполниле кофата од 8 литри. Точно тоа и го направивме, се разбира со определен редослед. Пред малко ја решив задачата да се измерат 15 минути со помош на двата песочни часовника, единиот од кои мери 7 минути, а другиот – 11 минути. Во неа искористив дека  $2 \cdot 11 - 7 = 15$ . Тоа значи, дека часовникот за 11 минути е употребен двапати, а другиот часовник – еднаш. На прв поглед двете задачи се различни, но всушност принципот им е един и ист. Општата задача е да се најадат цели броеви  $x$  и  $y$  такви, што при дадени цели броеви  $a, b$  и  $c$  да е исполнето равенството  $ax + by = c$ . Оваа равенка се нарекува Диофантова равенка, и за неа на училиште учевме минатата седмица. Наставничката ни кажа дека овие равенки се нарекуваат според античкиот математичар Диофант, кој живеел во 3. век. Уште се нарекуваат и неопределени равенки, бидејќи имаат повеќе од една непозната. Се интересираме само за решенијата, кои се цели броеви. Во случајот со кофите Диофантовата равенка е  $14x + 8y = 4$ , а во случајот со часовниците равенката е  $11x + 7y = 15$ . И во двата случаја Диофантовите равенки имаат решение. Но, има равенки, кои немаат решения. Таква е, на пример, Диофантовата равенка  $14x + 8y = 3$ . Затоа, дедо, ако побараше да ти измерам 3 литри со твоите кофи, ќе ти одговорев, дека тоа не е можно. Ако сакаш да научиш повеќе, прочиј го подолу тоа, што ни го кажа наставничката.

**Дефиниција 1.** Најголемиот број меѓу сите заеднички делители на броевите  $a$  и  $b$  се нарекува најголем заеднички делител на  $a$  и  $b$ . Го означуваме со  $NZD(a, b)$  или само  $(a, b)$ .

Например  $(10, 25) = 5$ ;  $(6, 21) = 3$ ;  $(4, 16) = 4$ ;  $(5, 22) = 1$ .

**Дефиниција 2.** Ако најголемиот заеднички делител на броевите  $a$  и  $b$  е еднаков на 1, т.е. ако  $(a, b) = 1$ , тогаш броевите  $a$  и  $b$  ги нарекуваме *заемно прости*.

**Дефиниција 3.** Равенката од видот  $ax+by=c$ , каде  $a, b$  и  $c$  се цели броеви и  $ab \neq 0$ , се нарекува *линеарно Диофантова равенка од прв ред со две непознати*.

**Теорема 1.** Линеарната Диофантова равенка  $ax+by=c$  има решение ако и само ако најголемиот заеднички делител  $d=(a,b)$  на броевите  $a$  и  $b$  е делител на бројот  $c$ .

**Доказ.** Зборовите „ако и само ако“ означуваат, дека условот  $d=(a,b)$  да е делител на  $c$  е потребен и доволен, т.е. ако равенката има решение, тогаш со сигурност  $d=(a,b)$  е делител на  $c$  и обратно, ако  $d=(a,b)$  е делител на  $c$ , тогаш равенката има решение. Доказот, дека условот е доволен е доста сложе и затоа ќе го пропуштиме. Но, доказот, дека условот е потребен е лесно. Навистина нека  $(x_0, y_0)$  е решение на равенката. Тоа значи, дека  $ax_0+by_0=c$ . Бидејќи  $d=(a,b)$  е делител на  $a$  и  $b$ , добиваме дека  $d$  е делител на левата страна на равенката и затоа е делител и на десната страна на равенката, т.е.  $d$  е делител на  $c$ . ■

**Теорема 2.** Ако  $d=(a,b)$  е делител на  $c$  и  $(x_0, y_0)$  е решение на равенката  $ax+by=c$ , тогаш сите решенија на оваа равенка се дадени со формулите  $x=x_0+\frac{b}{d}t$ ,  $y=y_0-\frac{a}{d}t$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ .

**Доказ.** Од  $ax_0+by_0=c$  следува

$$ax+by=a(x_0+\frac{b}{d}t)+b(y_0-\frac{a}{d}t)=ax_0+by_0+\frac{ab}{d}t-\frac{ab}{d}t=c,$$

што значи, дека  $x=x_0+\frac{b}{d}t$ ,  $y=y_0-\frac{a}{d}t$ , за секој  $t \in \mathbb{Z}$ .

Ќе докажеме, дека секое решение може да се претстави во оваа форма. Нека  $(x, y)$  е решение. Имаме  $ax+by=ax_0+by_0$ , т.е.  $a(x-x_0)=b(y_0-y)$  и оттука  $\frac{a}{d}(x-x_0)=\frac{b}{d}(y_0-y)$ . Бидејќи  $d=(a,b)$ , важи  $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})=1$  и од последното равенство следува, дека  $\frac{b}{d}$  е делител на  $x-x_0$  и  $\frac{a}{d}$  е делител на  $y_0-y$ . Значи,  $x-x_0=\frac{b}{d}u$  и  $y_0-y=\frac{a}{d}v$  за некои цели броеви  $u$  и  $v$ . Ако замениме во равенството  $a(x-x_0)=b(y_0-y)$ , добиваме  $u=v$  со што доказот е завршен.

За решавање на линеарните Диофантови равенки од први ред со две непознати постојат два основни метода – на Евклид и на Ојлер. Ние ќе го користиме методот на Ојлер.

**Задача 1.** Со методот на Ојлер ќе ја решиме Диофантовата равенка  $738x + 621y = 45$ .

Нека  $(x, y)$  е решение на равенката. Бидејќи  $621 < 738$ , ако се земе предвид дека  $738 = 1 \cdot 621 + 117$ ,  $45 = 0 \cdot 621 + 45$  добиваме

$$y = \frac{-738x + 45}{621} = -x + \frac{-117x + 45}{621}.$$

Од горното равенство заклучуваме, дека  $\frac{-117x + 45}{621} = t$  е цел број. Се ослободуваме од именителот и добиваме  $621t + 117x = 45$ , и тоа е нова Диофантова уравнение од истиот вид, но со помали коефициенти пред непознатите. Продолжуваме на ист начин и го изразуваме  $x$  со  $t$ , бидејќи  $117 < 621$ . Бидејќи  $621 = 5 \cdot 117 + 36$  и  $45 = 0 \cdot 117 + 45$ , добиваме

$$x = \frac{-621t + 45}{117} = -5t + \frac{-36t + 45}{117}.$$

Така, бројот  $\frac{-36t + 45}{117} = u$  е цел и  $117u + 36t = 45$  е нова Диофантова равенка со помали коефициенти. Понатаму го изразуваме  $t$  со  $u$  и ако земеме предвид дека  $117 = 3 \cdot 36 + 9$ ,  $45 = 1 \cdot 36 + 9$  добиваме

$$t = \frac{-117u + 45}{36} = -3u + 1 + \frac{-9u + 9}{36} = -3u + 1 + \frac{-u + 1}{4}.$$

Бројот  $\frac{-u + 1}{4} = v$  е цел и  $4v + u = 1$ . Процесот запира, бидејќи коефициентот пред непознатата  $u$  е еден и  $u$  се изразува со  $v$ . Добиваме дека  $u = -4v + 1$  и враќајќи се наназад наоѓаме:

$$t = -3u + 1 + v = -3(-4v + 1) + 1 + v = 13v - 2$$

$$\begin{aligned} x &= -5t + u = -5(-3u + 1 + v) + u = 16u - 5 - 5v \\ &= 16(-4v + 1) - 5 - 5v = -69v + 11 \end{aligned}$$

$$y = -x + t = 69v - 11 + 13v - 2 = 82v - 13.$$

Последните две равенства го даваат таканареченото *параметарско претставување* на сите решенија на почетната равенка, т.е.

$$x = -69v + 11, \quad y = 82v - 13, \quad v = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

**Задача 2.** Располагаме со два песочни часовника – единиот мери 11 минути, а вториот – 7 минути. Дали е можно со помош на овие два часовника да се измерат 15 минути?

**Решение.** Одговорот на задачата е позитивен. Нека со  $x$  и  $y$  означиме колку пати го користиме првиот и вториот часовник, соодветно. Тогаш важи  $11x + 7y = 15$ , и тоа е линеарна Диофантова равенка од прв ред со две непознати. Таа има решение, бидејќи  $(11, 7) = 1$ . Ќе ја решиме со методот на Ојлер:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{-11x+15}{7} = -x + 2 + \frac{-4x+1}{7} = -x + 2 + t \\
 \frac{-4x+1}{7} &= t \Leftrightarrow 7t + 4x = 1 \\
 x &= \frac{-7t+1}{4} = -t + \frac{-3t+1}{4} = -t + u \\
 \frac{-3t+1}{4} &= u \Leftrightarrow 4u + 3t = 1 \\
 t &= \frac{-4u+1}{3} = -u + \frac{-u+1}{3} = -u + v \\
 \frac{-u+1}{3} &= v \Leftrightarrow u = -3v + 1.
 \end{aligned}$$

Се враќаме нанзад:

$$\begin{aligned}
 t &= -u + v = 3v - 1 + v = 4v - 1 \\
 x &= -t + u = -4v + 1 - 3v + 1 = -7v + 2 \\
 y &= -x + 2 + t = 7v - 2 + 2 + 4v - 1 = 11v - 1.
 \end{aligned}$$

Сите решенија на равенката се  $x = -7v + 2$ ,  $y = 11v - 1$ , каде  $v$  е произволен цел број. Ако  $v = 0$ , тогаш  $x = 2$  и  $y = -1$ . Тоа значи следното (Обрни внимание на негативните броеви!):

Ги стартуваме двата часовника едновремено. Вториот часовник мери 7 минути. Од тој момент натаму можеме да измериме точно  $11 - 7 = 4$  минути, оставајќи го првиот часовник, т.е. точно после 4 минути песокот во првиот часовник ќе истече. После тие 4 минути го вртиме првиот часовник и чекаме песокот да истече. На тој начин мериме уште 11 минути или вкупно  $11 + 4 = 15$  минути. Првиот часовник е употребен 2 пати ( $x = 2$ ), а вториот е употребен еднаш, но со одземање на измереното време од него ( $y = -1$ ). ■

**Задача 3.** Располагате со две кофи за вода – едната е од 14 литри, а втората е од 8 литри. Дали е можно со помош на двете кофи да се измерат точно 4 литри?

**Решение.** Одговорот на поставеното прашање е позитивен. Нека првата и втората кофа се искористени  $x$  и  $y$  пати, соодветно. Тогаш треба да е исполнето  $14x + 8y = 4$  и ова е линеарна Диофантова равенка од прв ред со две непознати. Таа има решение, бидејќи  $(14, 8) = 2$  и 2 е делител на 4. Ако ги поделиме двете страни на равенката со 2, добиваме  $7x + 4y = 2$ . Ќе го користиме методот на Ојлер:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{-7x+2}{4} = -x + \frac{-3x+2}{4} = -x + t \\
 \frac{-3x+2}{4} &= t \Leftrightarrow 4t + 3x = 2
 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-4t+2}{3} = -t + \frac{-t+2}{3} = -t + u$$

$$\frac{-t+2}{3} = u \Leftrightarrow t = -3u + 2.$$

Се враќаеме наназад:

$$x = -t + u = 3u - 2 + u = 4u - 2$$

$$y = -x + t = -4u + 2 - 3u + 2 = -7u + 4.$$

Така, сите решенија са  $x = 4u - 2$ ,  $y = -7u + 4$ , каде  $u$  е произволно цел број. Ако  $u = 0$ , тогаш  $x = -2$  и  $y = 4$ . Тоа значи:

Ја полниме кофата од 14 литри. Од неа ја полниме втората кофа. Тогаш во првата кофа остануваат  $14 - 8 = 6$  литра. Ја празниме втората кофа и во неа ги тураме 6-те литри од првата кофа. Одново ја полниме кофата од 14 литри. Од неа ја дополнуваме втората кофа. Дополнуваме точно 2 литра. Тогаш во првата кофа остануваат  $14 - 2 = 12$  литра. Сега ја празниме втората кофа и ја полниме со вода од првата кофа. Во првата кофа остануваат  $12 - 8 = 4$  литри и задачата е решена.

Последователните чекори можеме да ги прикажеме на следниот начин:

$$(0, 0) \rightarrow (14, 0) \rightarrow (6, 8) \rightarrow (6, 0) \rightarrow (0, 6) \rightarrow$$

$$(14, 6) \rightarrow (12, 8) \rightarrow (12, 0) \rightarrow (4, 8) \rightarrow (4, 0). \blacksquare$$

**Задача 4.** Реши ја Диофантовата равенка  $14x + 8y = 3$ .

**Решение.** Равенката нема решение, бидејќи  $(14, 8) = 2$  и 2 не е делител на десната страна на равенката, т.е. на 3. ■

### Задачи за самостојна работа

**Задача 5.** Определи ги целобројните решенија на равенката:

а)  $13x - 2y = 7$ ;      б)  $24x + 3y = 15$ ;      в)  $7x - 28y = 15$ .

**Задача 6.** Во множеството природни броеви реши ја равенката:

а)  $5x + 6y = 7$ ;      б)  $-4x + 12y = 64$ ;      в)  $8x - 24y = 7$ .

**Задача 7.** Определи ги целите броеви  $x$  и  $y$ , за кои  $5x + 11y = 3$  и збирот  $x + y$  е можно најмалиот природен број.

**Одговор.**  $(x, y) = (5, -2)$

**Задача 8.** Определи ги целите броеви  $x$  и  $y$ , за кои  $3x + 14y = 5$  и разликата  $y - x$  е можно најмалиот прост природен број.

**Одговор.**  $(x, y) = (-73, 16)$

**Задача 9.** Определи ги целите броеви  $x$  и  $y$ , за кои  $2x + 3y = 7$  и бројот  $-xy$  е можно најмалиот точен квадрат.

**Одговор.**  $(x, y) = (-7, 7)$

**Задача 10.** Определи ги целите броеви  $x$  и  $y$ , кои се делат на 9 и за кои  $-5x + 3y = 9$ .

**Одговор.**  $(x, y) = (27u + 9, 45u + 18)$ , каде  $u$  е произволен цел број.

Статијата прв пат е објавена во списанието НУМЕРУС на СММ