ЈБМО 2019

1. Определи ги сите прости броеви p такви што постојат природни броеви x, y, z такви што бројот
$$x^p + y^p + z^p - x - y - z$$
е производ на точно три различни прости броја.
Решение. Да забележиме дека простите броеви 2, 3 5 се решенија на задачата бидејќи за (x, y, z) можеме соодветно да ги земеме тројките $(1,1,6)$, $(1,2,3)$, $(1,1,2)$ при што во сите три случаи вредноста на дадениот израз е еднаква на $30 = 2\cdot 3\cdot 5$. Ќе докажеме дека тоа се единствените решенија. Нека $p > 5$. Според малата теорема на Ферма имаме
$x^p - x \equiv 0 (\bmod p), \quad x^p - x \equiv 0 (\bmod 2), \quad x^p - x \equiv 0 (\bmod 3)$
(слично за y и z), па затоа
$$x^p + y^p + z^p - x - y - z \equiv 0 (\bmod 6p).$$
Сега, од условот на задачата следува дека мара да биде
$$x^p + y^p + z^p - x - y - z = 6p.$$
Бидејќи барем еден од броевите x, y, z е поголем од 1, да кажеме $x \geq 2$, добиваме
$$x^p + y^p + z^p - x - y - z \geq x^p - x = x(x^{p-1} - 1) \geq 2(2^{p-1} - 1) = 2^p - 2.$$
Но, зсо математичка индукција може да се докаже дека за $p \geq 7$ важи
$$2^p - 2 > 6p.$$
Според тоа, за $p > 5$ бројот $6p = 2\cdot 3p$ е вистински делител на бројот $x^p + y^p + z^p - x - y - z$, па затоа овој број во случајов не може да биде производ на точно три прости броја.

2. Нека a, b се два различни цели броја и c е позитивен реален број таков што важи
$$a^4 - 2019a = b^4 - 2019b = c.$$
Докажи дека
$$-\sqrt{c} < ab < 0.$$
Решение. Со одземање на дадените равенства добиваме

$$2019(a-b)=a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2),$$

па како $a\neq b$, добиваме дека важи

$$2019=(a+b)(a^2+b^2).$$

Јасно, $a+b>0$.

Со собирање на дадените равенства добиваме

$$\begin{aligned}2c&=a^4+b^4-2019(a+b)=a^4+b^4-(a+b)^2(a^2+b^2)\\&=-2ab(a^2+ab+b^2)>0.\end{aligned} \qquad (1)$$

Од последното неравенство следува $a\neq 0, b\neq 0$, па како

$$a^2+ab+b^2=(a+\tfrac{1}{2}b)^2+\tfrac{3}{4}b^2>0,$$

од (1) добиваме $ab<0$.

Понатаму,

$$a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab>-ab,$$

па затоа од (1) следува

$$-c=ab(a^2+ab+b^2)<-(ab)^2,$$

односно $c>(ab)^2$, па затоа

$-\sqrt{c}<ab<\sqrt{c}$.

Со тоа и второто неравенство е докажано.

3. Во триаголникот $ABC, \overline{AB}<\overline{AC}$ симетралата на страната BC ги сече правите AB и AC во точките P и Q, соодветно. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ABC$, а M и N се средините на отсечките BC и PQ, соодветно. Докажи дека правите HM и AN се сечат на кружницата опишана околу $\triangle ABC$.

Решение. Јасно,

$$\measuredangle APQ=\measuredangle BPM=90^\circ-\measuredangle MBP=90^\circ-\measuredangle CBA=\measuredangle HCB,$$

$$\measuredangle AQP=\measuredangle MQC=90^\circ-\measuredangle QCM=90^\circ-\measuredangle ACB=\measuredangle CBH,$$

од каде следува слечноста на триаголниците APQ и HCB. Бидејќи M и N се соодветно средини на страните BC и PQ триаголниците AQN и HBM се исто така слични. Според тоа, важи

$$\measuredangle ANQ=\measuredangle HMB.$$

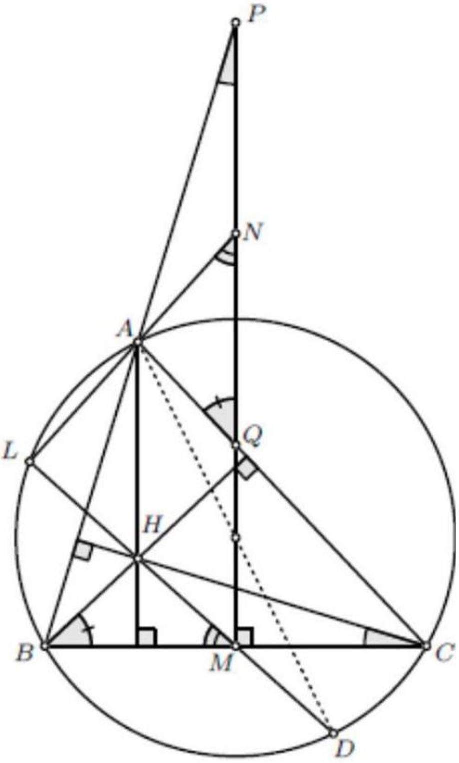
Со L да ја означиме пресечната точка на правите AN и HM. Тогаш важи

$$\measuredangle MNL = 180^\circ - \measuredangle LNM - \measuredangle NML$$
$$= 180^\circ - \measuredangle LMB - \measuredangle NML$$
$$= 180^\circ - \measuredangle NMB = 90^\circ.$$

Нека D е точката на опишаната кружница околу триаголникот ABC дијаметрално спротивна на темето A. Познато е дека M е средина на отсечката HD, па затоа точките L,H,M,D се колинеарни и важи

$$\measuredangle DLA = \measuredangle MLA = \measuredangle MLN = 90^\circ.$$

Според тоа, AD е дијаметар на кружницата опишана околу триаголникот ABC и $\measuredangle DLA = 90^\circ$, па заклучуваме дека точката L припаѓа на кружницата опишана околу триаголникот ABC, што и требаше да се докаже.



4. Табла 5×100 е поделена на 500 единечни квадрати (полиња), од кои n се обоени со црбна боја, додека останатите квадрати се бели. Два единечни квадрати се соседни ако имаат заедничка страна. Ако секое поле на таблата има најмногу две соседни црни полиња, определи ја најголемата можна вредност на n.

Решение. За секое поле на дадената табла го разгледуваме бројот на црните полиња кои се соседни на тоа поле. Со S да го означиме бројот на таквите соседи за сите 500 полиња. Од условот на задачата следува

$$S \leq 2 \cdot 500 = 1000.$$

Секое црно поле кое се наоѓа во агол на таблата е соседно на точно две полиња и со тоа истото во збирот S допринесува за 2. Црните полиња кои се на границата на дадената табла, а не се во аглите, имаат точно три соседни полиња, па во S секое од нив допринесува за 3. Црните полиња кои се наоѓаат во внатрешноста на дадената табла имаат точно 4 соседни полиња, па во S секое од нив допринесува за 4. Броевите на овие црни полиња да ги означиме со a,b,c. Од претходните разгледувања следува

$$S = 2a + 3b + 4c, \quad a \le 4, b \le 202, c \le 294.$$

При овие услови треба да се определи најголемата можна вредност на изразот

$$n = a + b + c.$$

Забелжуваме дека ако a го зголемиме за 1, а c го намалиме за 1, тогаш збирот $a+b+c$ не се менува, додека збирот S се намалува за 2. Слично, ако го зголемиме b за 1, а го намалиме c за 1, тогаш збирот $a+b+c$ не се менува, додека збирот S се намалува за 1. Според тоа, најголемата можна вредност на збирот $a+b+c$ се достигнува кога a и b примаат најголема можни вредности. А тоа е $a = 4, b = 202$. Тогаш

$$4c \le 1000 - 2 \cdot 4 - 3 \cdot 202 = 386 \text{, т.е. } c \le 96.$$

Притоа имаме

$$n \le 4 + 202 + 96 = 302.$$

Останува да покажеме дека постои боење на таблата за кое $n = 302$. Ако сите рабни полиња на таблата ги обоиме во црно, добиваме $a = 4, b = 202$. Преостанува уште да обоиме $c = 96$ полиња во средниот ред на таблата во црно, без полињата во првата и полсената колона (кои веќе се обоени во црно) и полињата во втората и претпоследната колона кои остануваат бели. Со ова доказот е завршен.

Забелешка. а) Може да се докаже дека боењето при кое $n = 302$ е единствено.

б) Горното боење, во случај кога имаме табла со димензии 5×8 е прикажано на цртежот десно. Притоа $n = 4 + 18 + 4 = 26$.