

О НЕКИМ НИЗОВИМА БРОЈЕВА

Ратко Тошић, Нови Сад

На једном иностраном такмичењу из математике био је постављен следећи задатак:

Поређати бројеве од 1 до 100 у низ тако да се свака два суседна броја разликују за 2 или за 3.

Ми ћемо се у овом чланку позабавити следећим питањем:

За које природне бројеве n је могуће поређати у низ природне бројеве од 1 до n тако да се свака два суседна броја разликују за 2 или за 3?

Ради сажетијег изражавања дефинишемо (2, 3)-низ као низ бројева у коме се свака два суседна члана разликују за 2 или за 3. То могу бити било који природни бројеви, али ми ћемо се ограничити на низове у којима се сваки од n узастопних природних бројева појављује тачно једанпут. Пођимо од најједноставнијих случајева.

Лако се види да није могуће на тај начин уредити прва три броја, тј. бројеве од 1 до 3.

Прва четири броја могуће је уредити на два начина:

$$2, 4, 1, 3 \quad (1)$$

и

$$3, 1, 4, 2. \quad (2)$$

Наведимо и по један начин уређивања првих пет, шест и седам бројева:

$$1, 3, 5, 2, 4 \quad (3)$$

$$2, 5, 3, 1, 4, 6 \quad (4)$$

$$2, 5, 7, 4, 1, 3, 6 \quad (5)$$

Уз мало експериментисања, стрпљиви читалац ће наћи и неке друге могућности за низове првих пет, шест и седам бројева.

Приметимо следеће: Ако у неком (2, 3)-низу бројева од 1 до n сваки број повећамо за једну исту вредност добићемо поново (2, 3)-низ чији су чланови неких

n узастопних природних бројева. На пример, ако сваки члан низа (5) повећамо за 7, добићемо (2, 3)-низ

$$9, 12, 14, 11, 8, 10, 13. \quad (6)$$

Ако низ (6) надовежемо на низ (5), добићемо (2, 3)-низ првих 14 природних бројева. То је било могуће јер је разлика првог члана низа (6) и последњег члана низа (5) једнака 3.

Уопште, лако закључујемо да важи:

Нека је A (2, 3)-низ бројева од 1 до n и B (2, 3)-низ бројева од $n + 1$ до $n + m$. Ако је разлика првог члана низа B и последњег члана низа A једнака 2 или 3, онда се надовезивањем низа B на низ A добија (2, 3)-низ природних бројева од 1 до $n + m$.

Сад лако видимо да се првих 100 природних бројева могу поређати у (2, 3)-низ. Низ природних бројева од 1 до 100 разбијамо на 25 делова од по 4 узастопна броја и сваку четворку уређујемо као (2, 3)-низ, полазећи од низа (1). Тако добијамо 25 низова облика

$$4k + 2, 4k + 4, 4k + 1, 4k + 3$$

за $k = 0, 1, 2, \dots, 24$. Надовезивањем тих низова добијамо (2, 3)-низ бројева од 1 до 100:

$$2, 4, 1, 3, 6, 8, 5, 7, \dots, 98, 100, 97, 99.$$

Истим поступком можемо да конструишемо (2, 3)-низ бројева од 1 до n за сваки природан број дељив са 4 ($n = 4k$).

Приметимо да низ (2) нисмо могли користити при конструкцији (2, 3)-низа бројева од 1 до 100, јер бисмо добили низ

$$3, 1, 4, 2, 7, 5, 8, 6, \dots$$

у коме је разлика петог и четвртог члана једнака 5.

Користећи низове (3), (4) и (5), читалац може сада лако решити задатак 1, који је дат на крају чланка.

Приметимо да повећањем сваког члана низа (1) за 5 добијамо низ 7, 9, 6, 8, који се може надовезати на низ (3) (Зашто?) и на тај начин добити (2, 3)-низ првих 9 природних бројева. Комбинујући тај поступак, тј. надовезивање нових (2, 3)-низова четири броја, можемо добити (2, 3)-низ бројева од 1 до n за сваки природан број облика $4k + 1$.

Преостаје да се размотре случајеви $n = 4k + 2$ и $n = 4k + 3$. До резултата ће читалац сам лако доћи решавајући задатке 2 и 3.

Закључак је: За сваки природан број $n > 3$ постоји (2, 3)-низ бројева од 1 до n .

Задаци за самостални рад

1. Да ли постоји (2, 3)-низ првих n природних бројева за:
1) $n = 2012$; 2) $n = 2010$; 3) $n = 2009$?
2. Полазећи од низова (4) и (1), докажи да постоји (2, 3)-низ бројева од 1 до n за сваки природан број облика $4k + 2$.
3. Полазећи од низова (5) и (1), докажи да постоји (2, 3)-низ бројева од 1 до n за сваки природан број облика $4k + 3$.
4. Објасни на који начин је могуће добити (2, 3)-низ за бројеве од 1 до 2011.

5. Користећи низове (1) и (5), конструиши (2, 3)-низ за бројеве од 1 до 11, а затим нађи још један начин за добијање (2, 3)-низа за бројеве од 1 до 2013. (Претходно разложи број 2013 на прсте чиниоце.)
6. На колико начина је могуће направити (2, 3)-низ бројева од 1 до n ако је:
1) $n = 5$; 2) $n = 6$?

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија