Osječki matematički list 18 (2018), 15-24

Nestandardni matematički zadatci i monotone funkcije

Darija Marković*, Amanda Glavaš †

Sažetak

U ovom radu razmatramo nestandardne zadatke te nestandardne metode za rješavanje zadataka. Iskazujemo i dokazujemo niz tvrdnji vezanih za monotonost funkcija. U posljednjem dijelu rada, uz pomoć dokazanih tvrdnji, pokazujemo postupak rješavanja zadataka nestandardnim metodama.

Ključne riječi: *nestandardni zadatci, nestandardne metode, monotonost funkcija*

Nonstandard mathematical problems and monotone functions

Abstract

In this paper we discuss nonstandard problems and nonstandard methods for solving problems. We state and prove several facts about monotone functions. In the last part of the paper we use these facts to show the process of solving mathematical problems by nonstandard methods.

Keywords: *nonstandard problems, nonstandard methods, monotone functions*

*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: darija@mathos.hr
†Strojarska tehnička škola Osijek, email: amanda.glavas@skole.hr

1 Nestandardni zadatci i nestandardne metode

Prema Kurniku [3], matematički zadatak je složeni matematički objekt, a općenito se može izdvojiti pet sastavnica koje karakteriziraju svaki zadatak. To su: uvjeti (dane i tražene veličine, uvjeti i objekti kojima su opisane veze između onoga što je dano i onoga što se traži), cilj (određivanje nepoznate veličine, svojstva, dokazivanje tvrdnje,...), teorijska osnova (činjenice koje su u vezi s uvjetima i ciljem zadatka; otkrivaju se analizom, a njihovom primjenom se uspostavljaju novi odnosi i uvjeti zadatka), rješavanje (slijedi nakon analize, način na koji se od uvjeta dolazi do cilja) i osvrt (provjera valjanosti rješenja).

Za postizanje viših obrazovnih ciljeva, razvijanja matematičkih vještina i sposobnosti, osim provjere rezultata vrlo je bitan i moment procjene rezultata na samom početku (prije i nakon provedene analize). Procjena usmjerava mišljenje učenika i otvara prostor za samoispravak pri svakom koraku rješavanja zadatka jer učenik zna što otprilike u svakom koraku može očekivati.

Iako je uobičajeno da sami učenici, a ponekad i nastavnici, govore za neke zadatke da su lakši, a za neke da su teži, težina zadatka je vrlo individualna. Naime, težina nekog zadatka je subjektivna i usko je povezana s onime tko zadatak rješava, njegovim predznanjem, pripremljenošću i slično. Matematički zadatci najčešće se dijele prema složenosti kao mjerljivom i objektivnom svojstvu (koliko podzadataka sadrži, koliko različitih matematičkih područja integrira i slično).

Prema složenosti zadataka, Kurnik, u [3], definira dvije skupine: standardne i nestandardne zadatke. „Standardni zadatci su zadatci kod kojih nema nepoznatih sastavnica: uvjeti su postavljeni jasno i precizno, cilj je očigledan, teorijska osnova se lako uočava i bez dublje analize, a način rješavanja je poznat i teče prirodno i prema očekivanjima." Ili jednostavno rečeno, to su zadatci za koje postoje ustaljeni postupci rješavanja kao što su npr. deriviranje, određivanje determinante i dijeljenje polinoma, a njihova važnost je u tome što su sredstvo kojim se postiže bolje i brže usvajanje novih sadržaja. „Nestandardni zadatci su zadatci kod kojih je bar jedna sastavnica nepoznata." Poseban slučaj nestandardnih zadataka su problemski zadatci kod kojih je nepoznato više od dvije sastavnice.

1.1 Nestandardni zadatci

Iako postoji vrlo precizna definicija nestandardnih zadataka, učenici nestandardnim zadatcima većinom nazivaju zadatke koji izgledaju složeno ili neuobičajeno. Također, zadatci se mogu nazivati nestandardnima kada zahtijevaju neku ne-rutinsku metodu rješavanja, kada za njih ne poznajemo postupak ili algoritam rješavanja, drugim riječima ne-shematski tipovi zadataka.

Na primjer, kada se u zadatku zahtijeva pronalaženje minimalne ili maksimalne vrijednosti funkcije, standardna metoda za rješavanje takvog zadatka koristi derivaciju funkcije. No, pod određenim uvjetima, problemi minimuma i maksimuma mogu se riješiti poznavanjem određenih svojstava, ograničenja ili primjenama poznatih nejednakosti. Još neki od primjera nestandardnih zadataka su zadatci čiji je skup rješenja ograničen na cijele brojeve ili se može reducirati na nelinearan sustav jednadžbi koji ima više varijabli nego jednadžbi.

Dakle, općenito se može reći, nestandardni je zadatak onaj kod kojeg standardna metoda rješavanja ne vodi direktno do rješenja ili nije primjenjiva, a „nestandardna metoda rješavanja problemskih zadataka je postupak povezivanja naizgled nepovezanih matematičkih područja i odabir prikladnih generalizacija, u skladu s danim uvjetima, kako bi se došlo do rješenja.“[1].

Ilustrirajmo razliku između standardnih i nestandardnih zadataka jednostavnim primjerom. Ako je potrebno riješiti kvadratnu jednadžbu $x^2 - 7x + 2 = 0$, onda se njezina rješenja vrlo lako mogu odrediti koristeći poznatu formulu $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. No, ukoliko se u zadatku traži dokazivanje tvrdnje: „Pokažimo da za kvadratnu jednadžbu $x^2 + ax + 1 - b = 0$, kojoj su rješenja prirodni brojevi, broj $a^2 + b^2$ ne može biti prost“, standardna metoda i formula ne pomažu pri rješavanju.

To je primjer nestandardnog zadatka koji se (prema [4]) rješava kroz četiri etape: razumijevanje problema, stvaranje plana, izvršenje plana i osvrt. U zadatku se pojavljuju dva parametra a i b, a skup rješenja ograničen je na skup prirodnih brojeva. Stoga je, kako bismo riješili ovaj zadatak, potrebno znati nešto više od same formule, moramo imati metodu koja će iskoristiti ograničenje, odnosno uvjet zadatka. U ovom slučaju vidjet ćemo da su to Vièteove formule i poznavanje elementarne teorije brojeva.

Na početku rješavanja svakog zadatka polazimo od zadanih uvjeta i podataka (etapa razumijevanja problema) te pokušavamo uspostaviti vezu između njih. U ovom slučaju su zadani podatci da su rješenja jednadžbe x_1, x_2 prirodni brojevi te da broj $a^2 + b^2$ nije prost.

Kako trebamo pokazati da broj $a^2 + b^2$ (kojeg čine koeficijenti jednadžbe) nije prost, možemo uspostaviti vezu rješenja s parametrima preko Vièteovih formula (etapa stvaranja plana) pa imamo sljedeće:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -a \\ x_1 \cdot x_2 &= 1 - b. \end{aligned}$$

Kako su x_1 i x_2 prirodni brojevi, iz Vièteovih jednakosti proizlazi da su a i b cijeli brojevi te pitanje je li $a^2 + b^2$ prost broj tek sada postaje smisleno. Uočavamo da prebacivanjem jedinice u drugoj jednakosti na lijevu stranu, a potom kvadriranjem obje jednakosti i zbrajanjem možemo dobiti upravo taj broj.

$$\begin{aligned}
(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 &= a^2 \\
(x_1 \cdot x_2 - 1)^2 = x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2 + 1 &= b^2 \\
x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2 + 1 &= a^2 + b^2 \\
1 + x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2 &= a^2 + b^2 \\
(1 + x_1^2) + (1 + x_1^2) \cdot x_2^2 &= a^2 + b^2 \\
(1 + x_1^2) \cdot (1 + x_2^2) &= a^2 + b^2.
\end{aligned}$$

Izvođenje navedenih operacija odgovara Polyinoj etapi izvršenja plana, a nakon toga slijedi diskusija rješenja u osvrtu. Kako su x_1 i x_2 prirodni brojevi, to su oni ≥ 1, pa je $(1 + x_1^2), (1 + x_2^2) \geq 2$, tj. $(1 + x_1^2) \cdot (1 + x_2^2) \geq 4$. Konačno zaključujemo kako broj $a^2 + b^2$ nije prost jer se može prikazati u obliku umnoška dvaju brojeva strogo većih od jedan.

Izdvojimo neke od glavnih značajki i korist nestandardnih zadataka: razvijanje logičkog mišljenja i kreativnosti, razvoj kognitivnih znanja analize, sinteze i vrednovanja, stjecanje vještina koncentracije, ustrajnosti i dosjetljivosti i integriranje matematičkih sadržaja.

Razlog koji učenike odbija od rješavanja nestandardnih zadataka je taj što ne postoji garancija da će oni na kraju zadatak uspješno riješiti. Učenici svaki nestandardni zadatak vide kao izolirani slučaj i rijetko vide korisnost određene metode, odnosno mogućnost primjene na druge zadatke.

Zbog toga je bitno u matematičkom poučavanju što je više moguće koristiti zadatke koji zahtijevaju znanje iz više različitih matematičkih područja kako bi se istaknula cjelovitost matematike. Nestandardni zadatci ukazuju upravo na to da matematika nije sačinjena od više disjunktnih tematskih dijelova nego je ona jedno povezano cijelo. Zato je vrlo važno nakon rješavanja nestandardnih zadataka, potražiti generalizaciju metode kojom se došlo do rješenja te ju pokušati primijeniti na druge zadatke.

Nadalje, ukoliko učenici jedanput vide neko elegantno rješenje određenog zadatka, ali ne pristupaju i drugim zadatcima na isti način, neće ga niti zapamtiti. Nasuprot tome, ako nastavnik opetovano koristi isti pristup cijelu godinu te uz to još usporedi primijenjenu metodu sa standardnim pristupom, učenici će taj pristup zapamtiti i znati cijeniti.

2 Monotone funkcije

U ovom dijelu iskazat ćemo definiciju monotone funkcije, te dokazati niz tvrdnji vezanih uz monotone funkcije koje će nam koristiti pri rješavanju zadataka. Razmatramo realne funkcije realne varijable, odnosno $f\colon D \to \mathbb{R}$, gdje je $D \subseteq \mathbb{R}$. Ukoliko je zbog preciznosti potrebno istaknuti o domeni koje funkcije je riječ, za domenu funkcije f pisat ćemo $D(f)$.

Definicija 2.1. Kažemo da je funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$ *rastuća na intervalu* $\langle a, b\rangle \subseteq D$ ako

$$\big((x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle) \wedge (x_1 < x_2)\big) \Rightarrow \big(f(x_1) \leq f(x_2)\big).$$

Ako u definiciji umjesto znaka $\leq$ stoji znak $\geq$, kažemo da je funkcija f *padajuća na intervalu* $\langle a, b\rangle$. Ako u definiciji umjesto znaka $\leq$ stoji znak $<$, kažemo da je funkcija f na intervalu $\langle a, b\rangle$ *strogo rastuća*. Analogno se definira i pojam *strogo padajuće funkcije na intervalu*.[1]

Rastuće funkcije i padajuće funkcije zajednički se nazivaju *monotone funkcije*.

Propozicija 2.1. Zbroj dvije rastuće (padajuće) funkcije je rastuća (padajuća) funkcija. Ukoliko je barem jedna od funkcija strogo monotona, tada je i zbroj strogo monoton.

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati za zbroj rastućih funkcija. Preostale tvrdnje dokazuju se analogno.

Neka su f i g rastuće funkcije, te definiramo $h(x) = f(x) + g(x)$ gdje je $D(h) = D(f) \cap D(g)$. Neka su $x_1, x_2 \in D(h)$ takvi da je $x_1 < x_2$. Tada je:

$$\begin{aligned} h(x_2) - h(x_1) &= f(x_2) + g(x_2) - (f(x_1) + g(x_1)) \\ &= (f(x_2) - f(x_1)) + (g(x_2) - g(x_1)). \end{aligned}$$

Kako su i f i g rastuće funkcije vrijedi $f(x_1) \leq f(x_2)$ i $g(x_1) \leq g(x_2)$, tj. $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ i $g(x_2) - g(x_1) \geq 0$. Dakle vrijedi $h(x_2) - h(x_1) \geq 0$, odnosno h je rastuća funkcija. $\square$

Propozicija 2.2. Ako je funkcija f neprekidna strogo rastuća (strogo padajuća) na intervalu I, onda jednadžba $f(x) = 0$ ima najviše jedno rješenje u intervalu I.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje barem dva različita rješenja ove jednadžbe. Neka vrijedi $f(x_1) = f(x_2) = 0$ i $x_1 < x_2$. Tada je $f(x_2) -$

[1] Definicija prema [2]

$f(x_1) = 0$, što je u kontradikciji s pretpostavkom kako je f strogo monotona (neovisno radi li se o strogo rastućoj ili strogo padajućoj funkciji). Dakle, vrijedi tvrdnja propozicije. $\square$

Propozicija 2.3. Kompozicija dvije rastuće ili dvije padajuće funkcije je rastuća funkcija.

Dokaz. Neka je $h(x) = (g \circ f)(x)$ gdje je $D(h) = \{x \in D(f) \ : \ f(x) \in D(g)\}$ i neka za $x_1, x_2 \in D(h)$ vrijedi $x_1 < x_2$.

Slučaj 1. Ako su f i g rastuće funkcije, tada je $f(x_1) \leq f(x_2)$ i $g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$. Dakle, h je rastuća funkcija.

Slučaj 2. Ako su f i g padajuće funkcije, tada je $f(x_1) \geq f(x_2)$ i $g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$. Dakle, h je rastuća funkcija. $\square$

Propozicija 2.4. Kompozicija rastuće (padajuće) i padajuće (rastuće) funkcije je padajuća funkcija.

Dokaz. Neka je $h(x) = (g \circ f)(x)$ gdje je $D(h) = \{x \in D(f) \ : \ f(x) \in D(g)\}$ i neka za $x_1, x_2 \in D(h)$ vrijedi $x_1 < x_2$, te neka je f rastuća, a g padajuća funkcija. Tada je $f(x_1) \leq f(x_2)$ i $g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$, odnosno h je padajuća funkcija.
Drugi slučaj dokazuje se analogno. $\square$

Sljedeće dvije tvrdnje direktne su posljedice propozicije 2.4, no kako se oba slučaja često pojavljuju u zadatcima korisno ih je posebno istaknuti. Za dokaz korolara 2.1 dovoljno je uzeti $g(x) = -x$, a u dokazu korolara 2.2 staviti $g(x) = \frac{1}{x}$.

Korolar 2.1. Ako je funkcija f rastuća (padajuća) na intervalu I, tada je funkcija $-f$ padajuća (rastuća) na tom intervalu.

Korolar 2.2. Ako je funkcija f rastuća (padajuća) na nekom intervalu I i stalnog predznaka na tom intervalu, tada je funkcija $\frac{1}{f}$ padajuća (rastuća) na tom intervalu.

Propozicija 2.5. Umnožak dvije nenegativne rastuće (padajuće) funkcije je opet rastuća (padajuća) funkcija.

Dokaz. Pretpostavimo da je $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ za sve $x \in D(f) \cap D(g)$ te da su obje funkcije rastuće. Tada za $x_1 < x_2$ vrijedi

$$f(x_2)g(x_2) - f(x_1)g(x_1) = \big(f(x_2) - f(x_1)\big)g(x_2) + \big(g(x_2) - g(x_1)\big)f(x_1) \geq 0.$$

Drugi slučaj dokazuje se analogno. $\square$

3 Rješavanje nestandardnih zadataka korištenjem monotonih funkcija

Upravo dokazane tvrdnje možemo iskoristiti pri rješavanju različitih tipova zadataka. Neki od njih su: ispitivanje monotonosti funkcije, rješavanje određenih iracionalnih, eksponencijalnih i logaritamskih jednadžbi te određivanje broja rješenja jednadžbi. Zadatci ovog tipa standardno bi se rješavali korištenjem derivacije funkcije ili nekom tehnikom rješavanja iracionalnih jednadžbi.

Zadatak 3.1. Odredimo monotonost funkcije $f(x) = \frac{x^2+3}{15-x}$, $x \in \langle 0, 15 \rangle$.

Rješenje. Uočimo da funkciju f možemo zapisati kao umnožak dvije funkcije $f(x) = (x^2+3) \cdot \frac{1}{15-x}$ pri čemu su obje rastuće ($\frac{1}{15-x}$ je rastuća prema korolaru 2.2) i nenegativne na zadanom intervalu. Koristeći propoziciju 2.5, zaključujemo da je funkcija f rastuća. ◀

Zadatak 3.2. Odredimo monotonost funkcije $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x - 3}$.

Rješenje. Uočavamo da je funkcija f kompozicija $f(x) = (g \circ h)(x)$ funkcija $g(x) = \sqrt{x}$ i $h(x) = x^3 + 2x - 3$. Kako su funkcije g i h rastuće, po propoziciji 2.3 njihova kompozicija je također rastuća funkcija. ◀

Zadatak 3.3. Riješimo jednadžbu $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$.

Rješenje. Ukoliko ne želimo standardnim postupkom rješavati danu iracionalnu jednadžbu, tada nakon nekoliko pokušaja i pogrešaka, odnosno isprobavanja različitih vrijednosti za x, nalazimo da je $x = 2$ jedno njezino rješenje. Pokažimo da je to i jedino rješenje dane jednadžbe.

U tu svrhu razmotrimo monotonost funkcije $f(x) = \sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} - 4$. Primjenom propozicije 2.1 zaključujemo da je ona strogo rastuća na cijeloj domeni $D(f) = [\frac{3}{2}, \infty\rangle$. Sada iz propozicije 2.2 slijedi da je $x = 2$ i jedino rješenje jednadžbe. ◀

Napomena 3.1. Preporuča se zadatak prvo riješiti standardnim postupkom (kvadriranje, pojednostavljivanje i odabir rješenja koje zadovoljava uvjete i polaznu jednadžbu), a zatim i nestandardnim radi usporedbe i ilustriranja korisnosti poznavanja i razumijevanja teorije te njene primjene kod rješavanja zadataka.

Zadatak 3.4. Koliko pozitivnih rješenja ima jednadžba $\frac{x^4+5x-12}{x} = 7$?

Rješenje. Primijetimo kako x ne može biti nula jer je nula nultočka nazivnika. Zato možemo dijeliti s x, pa to i učinimo na lijevoj strani. Nakon dijeljenja dobijemo: $x^3 + 5 - \frac{12}{x} = 7$ pa je $x^3 - \frac{12}{x} = 2$. Lako se vidi da je $x = 2$ jedno rješenje dobivene jednadžbe.

Kada bismo pokazali da je funkcija $f(x) = x^3 - \frac{12}{x} - 2$ strogo rastuća na skupu $\langle 0, \infty\rangle$, to bi značilo da postoji samo jedno pozitivno rješenje jednadžbe $f(x) = 0$. Koristeći korolar 2.1, korolar 2.2 i propoziciju 2.1, zaključujemo da je funkcija $f_2(x) = -\frac{12}{x} - 2$ strogo rastuća. Sada je ponovno zbog propozicije 2.1 funkcija f strogo rastuća kao zbroj dviju strogo rastućih funkcija ($f_1(x) = x^3$ i $f_2(x) = -\frac{12}{x} - 2$). Dakle, polazna jednadžba ima samo jedno pozitivno rješenje. ◀

Zadatak 3.5. Riješimo jednadžbu $3^x + 4^x = 5^x$.

Rješenje. Kako je $(3, 4, 5)$ Pitagorina trojka, jedno rješenje zadane jednadžbe je $x = 2$, a jer je funkcija $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$ strogo padajuća, po propoziciji 2.2 zaključujemo da je to i jedino rješenje dane jednadžbe. ◀

Zadatak 3.6. Riješimo jednadžbu $\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$.

Rješenje. Uvedimo supstituciju $y = \log_3 x$. Tada je $x = 3^y$ i $1 + \sqrt{x} = 1 + (\sqrt{3})^y$. Iz polazne jednadžbe sada imamo $1 + (\sqrt{3})^y = 2^y$. Lako se pogodi jedno rješenje $y = 2$. Kako bismo pokazali da drugih rješenja nema, podijelimo dobivenu jednadžbu s $(\sqrt{3})^y$. Nakon dijeljenja dobijemo $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^y + 1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^y$. Kako je $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$, a $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$, to je funkcija $f(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^y + 1 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^y$ strogo padajuća, te dobivena jednadžba može imati najviše jedno rješenje. Sada je rješenje polazne jednadžbe $x = 3^2 = 9$. ◀

Zadatak 3.7. Riješimo jednadžbu $x^{\log_2 3} + 1 = x^2$.

Rješenje. Kako je $x > 0$, možemo uvesti supstituciju $x = 2^y$. Dobivamo jednadžbu $3^y + 1 = 4^y$ čije je rješenje $y = 1$. Kako bismo pokazali da je to jedinstveno rješenje, jednadžbu zapišemo u obliku $1 + \left(\frac{1}{3}\right)^y = \left(\frac{4}{3}\right)^y$. Kako je funkcija $f(y) = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^y - \left(\frac{4}{3}\right)^y$ strogo padajuća, prema propoziciji 2.2 dobivena jednadžba može imati najviše jedno rješenje. Sada je rješenje polazne jednadžbe $x = 2^1 = 2$. ◀

Zadatak 3.8. Riješimo sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-y} + (x-y)^3 &= 2 \\ x^2 - 6y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje. Primijetimo prvo kako izraz ispod korijena mora biti nenegativan, odnosno $x - y \geq 0$ tj. $x \geq y$. Dodatno, funkcija koja se nalazi na lijevoj strani prve jednadžbe je rastuća (kao funkcija od $t = x - y$). Za jednadžbu $\sqrt{t} + t^3 = 2$ lako se uoči rješenje $t = 1$, a po propoziciji 2.2 to je i jedino rješenje te jednadžbe. Zbog toga je $x - y = 1$. Uvrštavanjem $x = y + 1$ u drugu jednadžbu sustava i nakon pojednostavljivanja dobijemo kvadratnu jednadžbu: $y^2 - 4y + 2 = 0$. Njezina su rješenja $y_1 = 2 - \sqrt{2}$ i $y_2 = 2 + \sqrt{2}$, te za rješenje sustava dobijemo $(x_1, y_1) = (3 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$ i $(x_2, y_2) = (3 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$. ◀

U nastavku je nekoliko dodatnih zadataka koje je moguće riješiti korištenjem svojstava monotonih funkcija.

Zadatak 3.9. Dokažite da su sljedeće funkcije padajuće:

(a) $f(x) = \sqrt{4 - x}$,

(b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x}}$.

Zadatak 3.10. Odredite monotonost sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$,

(b) $g(x) = \frac{1}{x+3} - \sqrt{x+1}$,

(c) $h(x) = \frac{5x+3}{3-x}, x \in \langle 3, \infty \rangle$.

Zadatak 3.11. Riješite jednadžbe:

(a) $\sqrt{x} + x^3 - \frac{2}{x} = 0$,

(b) $\sqrt[4]{x+2} + \sqrt[4]{x-2} = \sqrt[4]{4}$,

(c) $2^x + 3^x + 4^x = 3$.

Zahvala

Autorice zahvaljuju anonimnim recenzentima koji su korisnim primjedbama, prijedlozima i komentarima pridonijeli kvaliteti ovog rada.

Literatura

[1] E. Grigorieva, *Methods of Solving Nonstandard Problems*, Springer International Publishing Switzerland, 2015.

[2] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Gradska tiskara, Osijek, 1998.

[3] Z. Kurnik, *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*, Element, Zagreb, 2010.

[4] G. Polya, *How To Solve It*, Princeton University Press, New Jersey, 1973.