

**Ристо Малчески
Даниел Велинов
Самоил Малчески**

ОДБРАНИ ОЛИМПИСКИ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИЈА

Скопје, 2022

Рецензент:

Д-р Зоран Мисајлески,

Градежен факултет, Скопје

СОДРЖИНА

Предговор	5
1. Триаголник	7
2. Четириаголник	18
3. Примена на тригонометријата	28
4. Неравенства	33
5. Дополнителни задачи	36
Решенија на задачите	
1. Триаголник	43
2. Четириаголник	81
3. Примена на тригонометријата	118
4. Неравенства	142
5. Дополнителни задачи	155
Литература	175

ПРЕДГОВОР

Пред вас е мала збирка од 220 геометриски задачи кои се задавани на математички натпревари, почнувајќи од регионално до национално ниво. Задачите се поделени во пет глави и тоа:

1. Триаголник,
2. Четириаголник,
3. Примена на тригонометријата,
4. Неравенства и
5. Дополнителни задачи.

Првите две глави содржат задачи за кои може да се каже дека, со исклучок на неколку задачи, се до ниво на Јуниорската балканска олимпијада, па затоа истите може да се користат за подготовка на завршните натпревари на учениците до 15,5 години, односно за Јуниорската македонска и Јуниорската балканска математичка олимпијада. Се разбира, вакви и слични задачи се задаваат и на олимпијадите за учениците од средното образование (БМО, ИМО, ЕМК и слично), па затоа презентираниите задачи се добро дојдени и за учениците од средното образование.

Претходно кажаното важи за задачите содржани во четвртата глава, а додека задачите од третата и петтата глава исклучиво се наменети за учениците од средното образование. Имајќи предвид дека поголемиот дел од оваа книга е наменет за учениците до 15,5 години, во книгата се содржани мал број задачи за чие решавање се користи степен на точка, а не се содржани задачи кои се решаваат со теоремите на Ојлер, Птоломеј, Симсон, Стјуарт, Чева, Манелај, Паскал, Дезарг, Лајбниц, Карно и слично, како и задачи кои се решаваат со помош на пол и полари, хомотетија, инверзија, симетрија, ротација и слично. Една од причините за ваквиот пристап е што во книгата [21], како и во статиите [5], [11], [14] - [20], [22]-[24] кои се јавно достапни и се наоѓаат на сајтот <https://matemackitalent.mk> се содржани голем број решени задачи од наведените области кои се на ниво на задачите кои се задаваат на националните и меѓународните математички олимпијади.

Во оваа пригода сакаме да му се заблагодариме на рецензентот д-р Зоран Мисајлески чиј ангажман не само што придонесе да се намалат грешките кои го пратат издавањето на било кој ракопис, туку и со своите забелешки допринесе за подобрување на ракописот во целина. Се надеваме дека оваа мала збирка решени задачи ќе најде свое место во подготовката на учениците како за националните, така и за меѓународните натпревари, со што ќе даде и свој придонес во развојот на учениците надарени за математика.

Како што рековме, издавањето на секоја книга неодминливо е пропратено со грешки и тоа како од технички, така од стручен аспект. Оттука, особено ќе бидеме благодарни на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе придонесе за подобрување на ракописот, а посебно за отстранување на евентуалните грешки.

Скопје
мај, 2022 г.

Авторите

1 ТРИАГОЛНИК

1. Дадени се триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ за кои е исполнето $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = 60^\circ$ и $\angle ABC + \angle A_1B_1C_1 = 180^\circ$. Докажи дека

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{A_1C_1}.$$

2. Во паралелограмот $ABCD$ со остар агол во темето A , кружницата која минува низ точките A, B и D ги сече правите BC и CD во точките K и L , соодветно. Во оваа кружница точката N е дијаметрално спротивна на точката A . Докажи дека N е центар на опишаната кружница на триаголникот CKL .
3. Во остроаголниот триаголник ABC точките A_1 и B_1 се соодветно подножјата на висините повлечени од A и B , а H е ортоцентарот на триаголникот. Нека k_1 и k_2 се соодветно кружниците со центри B и H кои минуваат низ точката B_1 . Тангентите повлечени од точката C на кружниците k_1 и k_2 , различни од правата AC , ги допираат кружниците k_1 и k_2 во точките K и N , соодветно. Докажи дека правата KN минува низ точката A_1 .
4. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Нека D е подножјето на висината повлечена од темето A , а M и N се соодветно подножјата на нормалите повлечени од D на AB и AC . Правата MN ја сече опишаната кружница k на $\triangle ABC$ во точките P и Q , а правата AD по втор пат ја сече k во точката R . Докажи дека D е центар на впишаната кружница на триаголникот PQR .
5. На страните на $\triangle ABC$ се дадени точките $A', A'' \in BC$, $B', B'' \in CA$ и $C', C'' \in AB$. Докажи, ако $\triangle A'B'C'$ и $\triangle A''B''C''$ имаат заедничко тежиште, тогаш отсечките $A'B'$ и $A''B''$ имаат заедничка точка.
6. Дадени се остроаголен $\triangle ABC$ и точка D во неговата внатрешност таква што $\angle ADB - \angle ACB = 90^\circ$ и $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}$.
- а) Пресметај го збирот $\angle DAC + \angle DBC$.
- б) Пресметај $\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}$.

7. Даден е триаголник ABC . Кружницата k_1 минува низ точките A и B и ја допира правата AC , а кружницата k_2 минува низ точките A и C и ја допира правата AB . Кружницата k_1 ја сече правата BC во точката D ($D \neq B$) и ја сече кружницата k_2 во точката E ($E \neq A$). Докажи дека правата DE ја подели отсечката AC .
8. Во остроаголен триаголник ABC точката D е подножје на висината повлечена од темето A , а P и Q се соодветно подножјата на нормалите повлечени од точката D на правите AB и AC . Симетралите на $\angle BDP$ и $\angle CDQ$ ги сечат правите AB и AC во точките K и L , соодветно. Докажи дека центарот на впишаната кружница на триаголникот DPQ припаѓа на правата KL .
9. Даден е $\triangle ABC$ со ортоцентар H . Опишаната кружница ω околу $\triangle HAB$ по втор пат ја сече отсечката BC во точката D . Правата DH ја сече отсечката AC во точката P , а Q е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ADP$. Докажи дека центарот на ω лежи на опишаната кружница околу $\triangle BDQ$.
10. Даден е разностран $\triangle ABC$ со опишана кружница ω . Тангентата на ω во точката C ја сече правата AB во точката D . Нека I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Правите AI и BI ја сечат симетралата на $\angle BDC$ во точките Q и P , соодветно. Нека M е средината на отсечката PQ . Докажи дека правата MI го преполовува лакот ACB на ω .
11. Правата BD симетрала на агол во $\triangle ABC$ ($D \in AC$) и по втор пат ја сече опишаната кружница околу него Ω во точката E . Нека F е втората пресечна точка на Ω и кружницата со дијаметар DE . Докажи дека правата симетрична на BF во однос на BD минува низ средината на страната AC .
12. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со висини BD и CE . Точките S и T се симетрични на точката E во однос на страните AC и BC , соодветно. Опишаната кружница околу $\triangle CST$ има центар O и по втор пат ја сече правата AC во точката X . Докажи дека правите XO и DE се заемно нормални.
13. Во рамнината се дадени точки A и B , ($A \neq B$). Точката C се движи во рамнината така што $\angle ACB = \alpha$, каде α е даден агол ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). Впишаната кружница во $\triangle ABC$ има центар I и ги допира страните AB, BC и CA соодветно во точките D, E и F . Правите AI и BI ја сечат EF соодветно во точки M и N . Докажи дека:

- а) Отсечката MN има константна должина.
 б) Опишаната кружница околу $\triangle DMN$ минува низ фиксна точка.

14. Даден е остроаголен рамнокрак триаголник ABC , $\overline{AB} = \overline{AC}$. Точката M е средина на пократкиот лак BC на кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Правата низ M паралелна со AC ги сече правите BC и AB во точките D и E , соодветно. Правата низ D паралелна со AB ја сече AC во точката F . Докажи дека $\angle MEF = 90^\circ$.
15. Даден е триаголник ABC . Права која минува низ средината K на страната BC ги сече страната AB и полуправата AC во точките M и L , соодветно. Нека N е средината на отсечката LM . Правата AN пом втор пат ја сече опишаната кружница на триаголникот ABC во точката S . Ако точките K, N, S се различни, докажи дека опишаната кружница околу триаголникот KNS ја допира правата BC .
16. Нека точката P припаѓа на внатрешноста на триаголникот ABC и е таква што $\angle PAB = \angle PCA$ и $\angle PAC = \angle PBA$. Ако D е средина на отсечката AB , докажи дека $\angle APD = \angle ACB$.
17. Рамнокрак $\triangle ABC$ ($\overline{AB} = \overline{AC}$) е впишан во кружница ω . Нека P е произволна точка од лакот BC кој не ја содржи A . Точките I_B и I_C се центрите на впишаните кружници во триаголниците ABP и ACP , соодветно. Докажи дека опишаната кружница околу $\triangle PI_B I_C$ минува низ фиксна точка која не зависи од изборот на точката P .
18. Околу тапоаголен $\triangle ABC$, $\angle ABC > 90^\circ$, е опишана кружница Γ со центар O . Нека B_1 е пресечната точка на правата AB и тангентата на Γ во C , а O_1 е центарот на опишаната кружница околу $\triangle AB_1 C$. Нека B_2 е внатрешна точка за отсечката BB_1 и нека права низ B_2 ја допира Γ во точката C_1 (поблиско до C). Нека O_2 е центарот на опишаната кружница околу $\triangle AB_2 C_1$ и да претпоставиме дека $OO_2 \perp AO_1$. Докажи дека точките O, O_1, O_2, C_1 и C се конциклични (лежат на иста кружница).
19. Во триаголникот ABC точката O е центар на опишаната кружница, A' е подножјето на висината повлечена од темето A , а X е произволна точка на полуправата AA' . Симетралата на $\angle BAC$ по втор пат ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката D . Точката M е средина на отсечката

DX , а N е точка на правата DX таква што $ON \parallel AD$. Докажи дека $\angle BAM = \angle CAN$.

20. Даден е $\triangle ABC$, во кој $\angle ABC > \angle BCA$, T е средина на лакот BAC и I е центар на впишаната кружница. Точката E е таква што $\angle AEI = 90^\circ$ и $AE \parallel BC$. Правата TE по втор ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката P . Определи го $\angle BAC$ ако се знае дека $\angle ABC = \angle IPB$.
21. На страните BC, CA и AB на триаголникот ABC редоследно се дадени точки P, Q и R така што четириаголникот $AQPR$ е тетивен и $\overline{BR} = \overline{CQ}$. Тангентите на опишаната кружница околу триаголникот ABC во точките B и C ги сечат правите PR и PQ во точките X и Y , соодветно. Докажи дека $\overline{PX} = \overline{PY}$.
22. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ таков што $\angle ABC > \angle ACB$. Нека $AD \perp BC$ и $DE \perp AC$ ($D \in BC, E \in AC$). Точката F припаѓа на отсечката DE . Докажи дека $AF \perp BF$ ако и само ако $\overline{EF} \cdot \overline{DC} = \overline{BD} \cdot \overline{DE}$.
23. Кружницата ω ја допира кружницата Ω одвнатре во точката T . Променливата тангента t на кружницата ω ја допира ω во точката S и ја сече кружницата Ω во точката P . Докажи дека центрите на опишаните кружници на сите можни триаголници PST лежат на фиксна кружница.
24. Во триаголникот ABC , симетралата на аголот во темето C ја сече страната AB во точката C_1 . Нормалата од C_1 на правата BC ја сече опишаната кружница на триаголникот во точката K (на спротивната страна на правата BC во однос на C_1). Нормалата од C на AK ја сече AB во точката L . Докажи дека средината на лакот AB (кој не ја содржи точката C) припаѓа на правата KL .
25. Кружницата со центар I ги допира страните BC, CA и AB на триаголникот ABC во точките D, E и F , соодветно. Тежишната линија повлечена од темето A ја сече EF во точката K . Докажи дека K припаѓа на правата DI .
26. Точката D припаѓа на страната AC на триаголникот ABC и е таква што $\overline{BD} = \overline{AC}$. Точката F е во внатрешноста на триаголникот ABC и е таква што $\angle ACF = \frac{1}{2} \angle ADB$ и $\angle CAF = \frac{1}{2} \angle CDB$. Правата BF ја сече AC во точ-

ката E . Докажи дека $\overline{AD} = \overline{CE}$.

27. Нека P е произволна точка во внатрешноста на остроаголниот триаголник ABC , а A_1, B_1, C_1 се симетричните точки на точката P во однос на страните BC, CA, AB , соодветно. Докажи дека тежиштето на триаголникот $A_1B_1C_1$ лежи внатре во триаголникот ABC .
28. Даден е остроаголен триаголник ABC . Внатре во триаголникот е избрана точка M таква што $\angle BMC = 180^\circ - \angle BAC$. Правите BM и CM ги сечат спротивните страни на триаголникот ABC во точките D и E , соодветно. Докажи дека опишаната кружница на триаголникот ADE минува низ фиксна точка (различна од A), независно од изборот на точката M .
29. Нека O е опишаната кружница на остроаголниот триаголник ABC и нека O_1 и O_2 се центрите на опишаните кружници околу триаголниците OAB и OAC , соодветно. Кружниците опишани околу триаголниците OAB и OAC по втор пат ја сечат страната BC во точките D и E , соодветно. Симетралата на страната BC ја сече страната AC во точката F ($F \neq A$). Докажи дека центарот на опишаната кружница околу триаголникот ADE припаѓа на AC ако и само ако точката F припаѓа на правата O_1O_2 .
30. Нека O е центар на опишаната кружница на разностранниот триаголник ABC . Правата OA ги сече висините на триаголникот ABC повлечени од темињата B и C во точките P и Q , соодветно. Ако H е ортоцентарот на триаголникот ABC , докажи дека центарот на опишаната кружница на триаголникот PQH лежи на тежишната линија на триаголникот ABC повлечена од темето A .
31. Во $\triangle ABC$ медијаните AM_A, BM_B и CM_C се сечат во точката M . Кружницата Ω_A минува низ средината на отсечката AM и ја допира отсечката BC во точката M_A . Аналогно се дефинираат кружниците Ω_B и Ω_C . Докажи дека кружниците Ω_A, Ω_B и Ω_C минуваат низ иста точка.
32. Нека AA_1 и CC_1 се висините на разностранниот остроаголен $\triangle ABC$, H и O се соодветно неговиот ортоцентар и центарот на опишаната кружница, а B_0 е средината на страната AC . Правата BO ја сече страната AC во точката P , а правите BH и A_1C_1 се сечат во точката Q . Докажи дека правите HB_0 и

PQ се паралелни.

33. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со $\angle ABC = 90^\circ$. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ја допира страната BC во точката D . Точките X и Z се центрите на впишаните кружници во $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$, соодветно. Правата XZ ги сече правата AD во точката K и опишната кружница околу $\triangle ABC$ во точките U и V . Правата AD по втор пат ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката Y , а точката M е средината на отсечката UV . Докажи дека $\overline{CY} = 2\overline{MK}$.
34. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со висини CK и AL , $K \in AB$ и $L \in BC$. Опишаната кружница околу $\triangle ABC$ по втор пат ги сече правите CK и AL соодветно во точките F и D . Точката E припаѓа на помалиот лак AC , а правите BE и AC се сечат во точката N . Докажи дека, ако
- $$\overline{AF}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{BF}^2,$$
- тогаш $\angle KNB = \angle BNL$.
35. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со висина AD , $D \in BC$ и центар I_a на припишаната кружница која ја допира страната BC . Точката K од продолжението на AB (B е меѓу A и K) е таква што $\angle AKI_a = 90^\circ + \frac{3}{4}\angle ACB$. Правата I_aK го сече продолжението на AD во точка L . Докажи дека правата DI_a е симетрала на $\angle AI_aB$ ако и само ако должината на отсечката AL е еднаква на дијаметарот на кружницата опишана околу $\triangle ABC$.
36. Даден е остроаголен триаголник ABC . Нека M е произволна точка од страната AB , а N е средината на AC . Нека P и Q се подножјата на нормалите повлечени од темето A на правите MC и MN , соодветно. Докажи дека центарот на опишаната кружница на триаголникот PQN припаѓа на фиксна права додека M се менува на страната AB .
37. Нека H и M се соодветно ортоцентарот и тежиштето на разностран $\triangle ABC$. Низ темињата A, B и C се повлечени прави нормални на AM, BM и CM , соодветно. Докажи, дека тежиштето на триаголникот формиран од овие прави лежи на правата MH .
38. Паралелограмот $ABCD$ е таков што $\angle ABC < 90^\circ$ и $\overline{AB} < \overline{BC}$. Точките E и F лежат на опишаната кружница ω околу $\triangle ABC$ и се такви што тангентите

на ω во овие точки минуваат низ темето D . Притоа важи $\angle EDA = \angle FDC$.
Опреди го $\angle ABC$.

39. Даден е $\triangle ABC$ со центар на впишаната кружница I . Точката I_1 е симетрична I во однос на правата BC . Опишаната кружница околу $\triangle BCI_1$ ја сече правата I_1I во точка P . Познато е дека P е надворешна точка за кружницата впишана во $\triangle ABC$. Нека X и Y се допирните точки на тангентите повлечени од P кон впишаната кружница во $\triangle ABC$. Докажи дека отсечката XY се содржи во средната линија на $\triangle ABC$.
40. Во $\triangle ABC$ страните AB и BC се еднакви. Точката D припаѓа на внатрешноста на триаголникот и е таква што $\angle ADC = 2\angle ABC$. Докажи дека удвоеното растојание од B до симетралата на суплементните агли на $\angle ADC$ е еднакво на $\overline{AD} + \overline{DC}$.
41. Даден е $\triangle ABC$. Нека k е опишаната кружница околу $\triangle ABC$, I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$, M е средината на страната AB , а S е средината на лакот ACB . Опреди го $\angle ACB$, ако $\overline{IS} = 2\overline{IM}$.
42. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Кружницата Ω минува низ точката A и нејзиниот центар е на висината AH , $H \in BC$ на $\triangle ABC$. Пресечните точки на Ω со отсечките AB и AC се соодветно точките P и Q при што важи $\overline{AP}^2 = \overline{AQ} \cdot \overline{CQ}$. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Точката K од опишаната кружница околу $\triangle OBC$ е во иста полурамнина со A во однос на правата BC и е таква што $\angle BKA = \angle CKA$. Докажи дека точката K припаѓа на кружницата Ω .
43. Нека CD е висина во $\triangle ABC$, при што $D \in AB$. Кружницата со центар C и радиус CD ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точките E и F . Ако правата EF ја преполовува отсечката CD , опреди го $\angle ACB$.
44. Впишаната кружница k во $\triangle ABC$ ги допира страните AC, BC, CA соодветно во точките M, N, P . Точките X и Y се соодветно на отсечките AM и BN при што $XY \parallel AB$ и ги сече MP и NP соодветно во точките K и L . Правата MK по втор пат ја сече k во точката D , а правата YL по втор пат ја сече k во точката Q . Докажи дека точките K, L, P и Q лежат на една кружница.
45. Даден е $\triangle ABC$ во кој медијаните AA_1 и BB_1 се сечат во точката G . Ако

впишаната кружница во $\triangle ABC$ и впишаната кружница во $\triangle AGB$ ја допираат страната AB во иста точка, докажи дека $\triangle ABC$ е рамнокрак.

46. Даден е $\triangle ABC$ со центар на впишаната кружница I . Нека D е точка од опишаната кружница околу $\triangle ABC$, различна од C таква што DI е симетрала на $\angle ADB$. Ако $\overline{AD} + \overline{BD} = 2\overline{DI}$, докажи дека $\overline{AC} = \overline{BC}$.
47. Висините AH_1, BH_2 и CH_3 на остроаголниот $\triangle ABC$ се сечат во точката H . Над HH_1, HH_2 и HH_3 како над дијаметри соодветно се конструирани кружниците ω_1, ω_2 и ω_3 и притоа $\omega_2 \cap \omega_3 = \{A_1, H\}$, $\omega_1 \cap \omega_3 = \{B_1, H\}$ и $\omega_1 \cap \omega_2 = \{C_1, H\}$. Докажи дека $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.
48. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со ортоцентар H . Надворешната симетрала на $\angle BHC$ ги сече AB и AC во точките D и E , соодветно. Симетралата на $\angle BAC$ ја сече опишаната кружница околу $\triangle ADE$ во точка $K, K \neq A$. Докажи дека правата HK ја преполовува отсечката BC .
49. Нека F е точка од страната BC на $\triangle ABC$ таква што $\overline{AC} = \overline{BF}$. Докажи дека правата која минува низ средината на отсечката CF и е паралелна на симетралата на $\angle ACB$ ја преполовува страната AB .
50. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$. На продолжението на AC преку темето C е избрана точка D таква што $\overline{AC} > \overline{CD}$. Симетралата на $\angle BCD$ ја сече BD во точката N , а M е средина на BD . Тангентата во точката M на опишаната кружница околу $\triangle AMD$ ја сече страната BC во точката P . Докажи дека точките A, P, M и N лежат на една кружница.
51. Нека D е допирната точка на впишаната кружница во $\triangle ABC$ со страната AB . Нека I_1 и I_2 се центрите на впишаните кружници во $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$, соодветно. Докажи дека опишаната кружница околу $\triangle I_1I_2D$ ја допира AB .
52. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Нека H и G се соодветно ортоцентарот и тежиштето на $\triangle ABC$. Точката P е пресекот на медијаната низ B и висината низ A , а точката Q е пресек на медијаната низ C и висината низ B . Ако точките H, G, P и Q лежат на една кружница, докажи дека триаголникот формиран од медијаните на $\triangle ABC$ е сличен на $\triangle ABC$.
53. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ ($\angle ACB = 90^\circ$). Точката O од средната линија

MN (M е средина на AC , N е средина на BC) е таква што $\angle AOC = 90^\circ$, а точката P од отсечката AO е таква што $\angle ACP = \angle BCO$. Докажи дека $\angle ABP = \angle CBO$.

54. Даден е $\triangle ABC$, впишан во кружница k_1 . Кружницата k_2 ја допира k_1 во точката C и страната AB во точката T . Правата CT ја сече k_1 по вторпат во точката Q . Правата QN , $N \in k_2$, е тангента на k_2 . Докажи дека кружницата опишана околу $\triangle ABN$ минува низ центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$.
55. Кружниците k_1 и k_2 се сечат во точките M и N . Низ точка $A \in k_1$, надворешна за k_2 , се повлечени правите AM и AN , кои k_2 по втор пат ја сечат во точките B и C , соодветно. Низ точка D од лакот BM на k_2 , кој не ја содржи N , се повлечени правите DM и DN , кои k_1 по втор пат ја сечат во точките E и F , соодветно. Ако $\overline{AB} = \overline{ED}$ и $\overline{AC} = \overline{FD}$ докажи дека MN е симетрала на отсечката AD .
56. Даден е $\triangle ABC$. Нека M е средина на страната AB . Со P да ја означиме проекцијата на M врз страната BC ($P \in BC$), а со N средината на MP . Определи ги аглиите на $\triangle ABC$, ако $AP \perp CN$ и $\overline{AP} : \overline{CN} = 2\sqrt{3}$.
57. Точката I е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Правата AI ја сече опишаната кружница Ω на $\triangle ABC$ во точката $M \neq A$. Точката J е симетрична на точката I во однос на средината D на страната BC . Правата MJ ја сече кружницата Ω во точката $P \neq M$. Докажи дека една од отсечките PA, PB, PC е еднаква на збирот на другите две.
58. Нека a, b, c се должини на страни на триаголник чии соодветни агли $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 80^\circ$. Докажи дека
- $$a(a+b+c) = b(b+c).$$
59. Даден е $\triangle ABC$ и точки D и E соодветно на полуправите CB и CA такви што $\overline{CD} = \overline{CE} = \frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{2}$. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ и P е средината на лакот AB на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ кој не ја содржи точката C . Докажи дека правата DE ја преполовува отсечката HP .
60. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Кружницата k над дијаметар AB ги сече

страните AC и BC соодветно во точките M и N . Тангентите на кружницата k во точките M и N се сечат во точката P . Ако $\overline{CP} = \overline{MN}$, определи го $\angle ACB$.

61. Даден е $\triangle ABC$ во кој $\angle ACB = 60^\circ$. Низата точки $A_0, A_1, \dots, A_{2006}$ е определена со: $A_0 = A$, A_1 е подножјето на нормалата од A_0 на правата BC , A_2 е подножјето на нормалата од A_1 на правата AC итн. A_{2006} е подножјето на нормалата од A_{2005} на правата AC . Аналогно се дефинира низата $B_0, B_1, \dots, B_{2006}$: $B_0 = B$, B_1 е подножјето на нормалата од B_0 на правата AC итн. Докажи дека правата $A_{2006}B_{2006}$ ја допира впишаната кружница во $\triangle ABC$ ако и само ако

$$\frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{2^{2006} + 1}{2^{2006} - 1}.$$

62. Во $\triangle ABC$, $\overline{AB} > \overline{BC}$, за точката K од страната AB важи $\overline{AK} = \overline{BC} + \overline{BK}$. Правата l минува низ K и е нормална на AB . Докажи дека l , симетралата на AC и симетралата на надворешниот агол во темето B се сечат во една точка.

63. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ во кој се повлечени висините BB_1 и CC_1 кон страните AC и AB ($B_1 \in AC, C_1 \in AB$). Нека M и N се соодветно средините на BB_1 и CC_1 , $P = AM \cap CC_1$ и $Q = AN \cap BB_1$. Докажи дека

а) точките M, N, P и Q се конциклични,

б) ако точките B, C, P и Q се конциклични, тогаш $\triangle ABC$ е рамнокрак.

64. Во $\triangle ABC$, $\angle ACB = 60^\circ$ се повлечени симетралите на аглите AA_1 и BB_1 ($A_1 \in BC, B_1 \in AC$). Правата A_1B_1 ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точките A_2 и B_2 .

а) Докажи дека правата OI е паралелна на A_1B_1 , каде O и I се центрите соодветно на опишаната и впишаната кружница во $\triangle ABC$.

б) Ако R е средината на лакот AB кој не ја содржи точката C , а P и Q се соодветно средините на A_1B_1 и A_2B_2 , докажи дека $\overline{RP} = \overline{RQ}$.

65. Даден е $\triangle ABC$ ($\overline{CA} \neq \overline{CB}$). Нека CL ($L \in AB$) е симетралата на $\angle ACB$. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните AB, BC и CA соодветно во точките M, N и P , а припишаната кружница на $\triangle ABC$ кон страната AB ги

допира AB и продолженијата на страните CA и CB соодветно во точките Q, K и T . Нека k_1, k_2 и k_3 се опишаните кружници соодветно околу $\triangle PKL, \triangle NTL$ и $\triangle CMQ$.

а) Докажи дека втората пресечна точка на k_1 и k_2 припаѓа на правата CL .

б) Докажи дека кружниците k_1, k_2 и k_3 се сечат во една точка.

66. Симетралата на $\angle BAC$ во $\triangle ABC$ ја сече страната BC во точката E , а надворешната симетрала на $\angle ACB$ ја сече полуправата BA во точката F . Ако должината на отсечката AF е еднаква на периметарот на $\triangle ACE$, определи го односот $\angle BAC : \angle ABC$.
67. Надвор од $\triangle ABC$ се конструирани $\triangle PAB$ и $\triangle QAC$ такви што $\overline{AP} = \overline{AB}$, $\overline{AQ} = \overline{AC}$ и $\angle BAP = \angle CAQ$. Отсечките BQ и CP се сечат во точката R . Ако O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle BCR$, докажи дека правите AO и PQ се заемно нормални.
68. Во разностран остроаголен $\triangle ABC$ е повлечена симетралата CL на $\angle ACB$. Точките M, N и P се средини соодветно на страните AB, BC и CA , а точката T допирната точка на впишаната кружница во $\triangle ABC$ и страната AB . Опишаната кружница околу $\triangle NPL$ по втор пат ја сече CL во точката D . Ако L е средина на MT , определи го односот $\overline{CD} : \overline{DL}$.
69. Во $\triangle ABC$ отсечката CL ($L \in AB$) е симетрала на $\angle BCA$. Кружница која минува низ C и L ги сече правата AB и опишаната кружница k околу $\triangle ABC$ по втор пат соодветно во точките M и N , при што A е меѓу M и B , а N е на лакот AB кој не ја содржи C . Аналогно, втора кружница низ C и L ги сече правата AB и опишаната кружница k по втор пат во точките P и Q , при што B е меѓу P и A , а Q е на лакот AB кој не ја содржи C . Докажи дека точките M, N, P и Q лежат на една кружница.
70. Нека AM е медијана на нерамноостраниот $\triangle ABC$, точката O е центар на опишаната околу него кружница и точката G е тежиште на $\triangle AMC$. Докажи дека $OG \perp AM$ ако и само ако $\overline{CA} = \overline{CB}$.
71. Во остроаголен $\triangle ABC$ медијаната CM го дели $\angle ACB$ во однос $2:1$, т.е. $\angle ACM = 2\angle MCB$. Опишаната кружница околу $\triangle ABC$ со центар O по втор пат ја сече опишаната кружница околу $\triangle MOC$ во точката D . Докажи дека CD е симетрала на $\angle ACM$.

2 ЧЕТИРИАГОЛНИК

1. Нека $ABCD$ е правоаголник со центар O и не е квадрат. Правата низ O , нормална на BD , ги сече правите AB и BC во точките E и F , соодветно. Нека M и N се средините на страните CD и AD , соодветно. Докажи дека $FM \perp EN$.
2. Кружница минува низ темињата A и B на тетивниот четириаголник $ABCD$ и ги сече неговите дијагонали AC и BD соодветно во точките E и F . Правите AF и BC се сечат во точката P , а правите BE и AD се сечат во точката Q . Докажи дека правите PQ и CD се паралелни.
3. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$ таков што $\overline{AB} = \overline{AD}$ и $\overline{CD} > \overline{AB} + \overline{BC}$. Докажи дека $\angle ABC > 120^\circ$.
4. Дијагоналите AC и BD на тетивниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката P . Точката Q од отсечката BC е таква што $PQ \perp AC$. Докажи дека правата која минува низ центрите на опишаните кружници околу триаголниците APD и BQD е паралелна со правата AD .
5. Даден е ромб $ABCD$ и точки M и N соодветно на отсечките AB и BC такви што $\overline{DM} = \overline{MN}$. Правата DN ја сече AC во P , а правата DM ја сече AB во R . Докажи дека $\overline{DP} = \overline{PR}$.
6. За конвексниот четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AB} = \overline{BD}$ и $\angle ABD = \angle DBC$. Точката K на дијагоналата BD е таква што $\overline{BK} = \overline{BC}$. Докажи дека важи $\angle KAD = \angle KCD$.
7. За тетивниот четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \overline{AD} \cdot \overline{CD}$. Правите AD и BC се сечат во точката X , а правите AB и CD се сечат во точката Y . Точките E, F, G и H се средините на отсечките AB, BC, CD и DA , соодветно. Симетралата на $\angle AXB$ ја сече отсечката EG во точката S , а симетралата на $\angle AYD$ ја сече отсечката FH во точката T . Докажи дека правите ST и BD се паралелни.

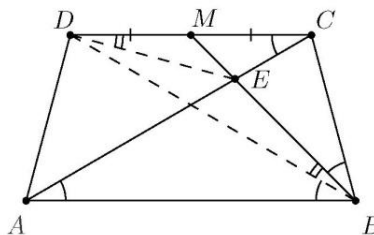
8. Во внатрешноста на конвексен четириаголник $ABCD$ кој не е трапез е дадена точка X таква што $\angle ADX = \angle BCX < 90^\circ$ и $\angle DAX = \angle CBX < 90^\circ$. Ако симетралите на страните AB и CD се сечат во точката Y , докажи дека $\angle AYB = 2\angle ADX$.
9. Даден е паралелограм $ABCD$. Произволна права p низ темето A ги сече полуправите BC и DC во точките X и Y соодветно. Нека K е центарот на припишаната кружница на триаголникот ABX наспроти темето A , а L е центарот на припишаната кружница на триаголникот ADY наспроти темето A . Докажи дека големината на $\angle KCL$ не зависи од изборот на правата p .
10. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез со $AD \parallel BC$. Дијагоналите AC и BD се сечат во точката M . Точките X и Y лежат на страната AB и се такви што $\overline{AX} = \overline{AM}$ и $\overline{BY} = \overline{BM}$. Нека Z е средината на XY и N е пресечната точка на CY и DX . Докажи дека правата ZN е паралелна на основите на трапезот.
11. Даден е остроаголен триаголник ABC во кој $\angle BAC = \alpha$. Точката O е центар на опишаната кружница на $\triangle ABC$, H е негов ортоцентар и F е средина на страната AB . Точката P е во внатрешноста на $\triangle ABC$ и е таква што $\angle APF = \alpha$ и $\angle APB = 180^\circ - \alpha$. Докажи дека $\angle HPO = 180^\circ - \alpha$.
12. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$ таков што $\overline{AB} = \overline{AD}$. Точките M и N припаѓаат на страните CD и BC , соодветно и важи $\overline{DM} + \overline{BN} = \overline{MN}$. Докажи дека центарот на кружницата опишана околу триаголникот AMN припаѓа на отсечката AC .
13. Точките A_1 и C_1 припаѓаат соодветно на страните AB и BC на паралелограмот $ABCD$. Отсечките AC_1 и CA_1 се сечат во точката P , а опишаните кружници околу триаголниците AA_1P и CC_1P по втор пат се сечат во точка Q , внатрешна за триаголникот ACD . Докажи дека $\angle PDA = \angle QBA$.
14. Даден е триаголник ABC и во рамнината на овој триаголник паралелограм $ASCR$ со дијагонала AC . Нека правата која минува низ точката B и е паралелна со CS ги сече правите AS и CR соодветно во точките M и P , а правата која минува низ точката B и е паралелна со AS ги сече правите AR и CS соодветно во точките N и Q . Докажи дека правите RS, MN и PQ се сечат во една точка.

15. Во четириаголникот $ABCD$ е впишана кружница со центар O , при што $\overline{OA}=5$, $\overline{OB}=6$, $\overline{OC}=7$ и $\overline{OD}=8$. Ако M и N се соодветно средините на дијагоналите AC и BD , определи го односот $\frac{\overline{OM}}{\overline{ON}}$.
16. Точките M и N се соодветно на непаралелните страни AD и BC на трапезот $ABCD$ и се такви што дијагоналите на трапезот ја делат отсечката MN на три еднакви дела, но MN не е паралелна со AB . Определи го односот на основите на трапезот.
17. Даден е четириаголник $ABCD$ со $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. Точката M на страната AB е таква што $\overline{AD} = \overline{AM}$. Полуправите DM и CB се сечат во точката N . Точките H и K се подножјата на нормалите соодветно повлечени од точките D и C на правите AC и AN . Докажи дека $\angle MHN = \angle MCK$.
18. Во конвексен четириаголник $ABCD$ дијагоналите AC и BD се сечат во точката E , точката M е средина на AE и точката N е средина на CD . Познато е дека дијагоналата BD е симетрала на $\angle ABC$. Докажи дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен ако и само ако четириаголникот $MBCN$ е тетивен.
19. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Точките M, N, P, Q се средини на страните DA, AB, BC, CD , соодветно, а точката E е пресекот на дијагоналите AC и BD . Кружниците опишани околу $\triangle EMN$ и $\triangle EPQ$ се сечат во точката $F \neq E$. Докажи дека $EF \perp AC$.
20. Нека H е ортоцентарот, а O е центарот на опишаната кружница околу остроаголниот $\triangle ABC$. Точките D и E се подножјата на висините повлечени од темињата A и B , соодветно. Со K да ја означиме пресечната точка на правите OD и BE , а со L пресечната точка на правите OE и AD . Нека X е втората пресечна точка на кружниците опишани околу триаголниците HKD и HLE , а M е средината на страната AB . Докажи дека точките K, L и M се колинеарни ако и само ако X е центар на кружницата опишана околу триаголникот EOD .
21. Нека P е точка на дијагоналата BD на паралелограмот $ABCD$ таква што $\angle PCB = \angle ACD$. Кружницата опишана околу триаголникот ABD ја сече правата AC во точките E и A . Докажи дека $\angle AED = \angle PEB$.

22. Во $\triangle ABC$ ($\overline{AB} \neq \overline{AC}$) впишаната кружница, со центар во точката I , ја допира страната BC во точката D . Нека M е средината на отсечката BC . Докажи дека нормалите повлечени од точките M и D соодветно на правите AI и MI се сечат на правата која ја содржи висината на $\triangle ABC$ повлечена од темето A .
23. Нека H е ортоцентарот на остроаголникот $\triangle ABC$ ($\overline{AB} \neq \overline{AC}$) и нека F ($F \neq A$) е точка на опишаната кружница околу овој триаголник за која важи $\angle AFH = 90^\circ$. Точката K е централно симетрична слика на точката H во однос на точката B , точката P е таква што важи $\angle PHB = \angle PBC = 90^\circ$, а точката Q е подножје на нормалата повлечена од точката B на правата CP . Докажи дека правата HQ ја допира опишаната кружница околу $\triangle FHK$.
24. Нека $ABCD$ е правоаголник. Во појасот меѓу правите AB и CD определи множество точки од кои отсечките AB и CD се гледаат под ист агол.
25. Во конвексен четириаголник $ABCD$ важи
- $$\angle BAC = \angle DAC = 55^\circ, \angle DCA = 20^\circ, \angle BCA = 15^\circ.$$
- Опреди ја големината на $\angle DBA$.
26. Даден е $\triangle ABC$. Нека $BL, L \in AC$ е симетралата на $\angle ABC$, а $AH, H \in BC$ е висината на триаголникот повлечена од темето A . Докажи дека $\angle AHL = \angle ALB$ ако и само ако $\angle BAC = \angle ACB + 90^\circ$.
27. На страните AB и BC на паралелограмот $ABCD$ се конструирани точки E и F такви што DE е симетрала на $\angle ADF$ и $\overline{AE} + \overline{CF} = \overline{DF}$. Правата низ C нормална на DE ги сече страната AD во точката L и дијагоналата BD во точката H . Нека DE ја сече AC во точката N .
- Докажи дека $\overline{AE} = \overline{DL}$.
 - Ако $HN \parallel AD$, докажи дека $\overline{BC} = \overline{CD}$.
 - Ако $HN \parallel AD$, докажи дека $ABCD$ е квадрат.
28. Точката M е средина на отсечката AB , а точката C е внатрешна за AB и $C \neq M$. Во едната полурамнина во однос на правата AB е конструирани рамнокраки триаголници ACK ($\overline{AK} = \overline{CK}$) и BCL ($\overline{BL} = \overline{CL}$), такви што K, C, L и M лежат на една кружница k . Докажи дека $KL \parallel AB$ или $KA \perp LB$.

29. Даден е правоаголен рамнокрак $\triangle ABC$ со хипотенуза AB . Точките P и Q од отсечката AB се такви што $\angle PCQ = 45^\circ$ и P е меѓу A и Q . Опишаните кружници околу триаголниците ACQ и BCP по втор пат се сечат во точката R . Докажи дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle CPQ$ лежи на правата CR .

30. Даден е рамнокрак трапез $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Нека M е средината на CD и E е пресечната точка на AC и BM . Ако $\angle MBC = \angle ABD$, докажи дека $\overline{AD} = \overline{DE}$.



31. Нека $ABCD$ е четириаголник таков што $\angle ACB = 90^\circ$, H е подножјето на висината во $\triangle ABC$ повлечена од темето C и O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABD$. Докажи дека, ако правите AO и DH се заемно нормални, тогаш $\overline{AC} = \overline{AD}$.

32. Точките A_1, B_1 и N се внатрешни соодветно за страните BC, CA и AB на остроаголниот $\triangle ABC$, при што четириаголникот A_1CB_1N е паралелограм, а четириаголникот ABA_1B_1 е тетивен. Опишаната кружница околу $\triangle A_1B_1C$ по втор пат ја сече CN во точката M . Докажи дека правата A_1B_1 е заедничка тангента на кружниците опишани околу триаголниците AMN и BMN .

33. Впишаната кружница во остроаголниот $\triangle ABC$ ги допира страните AB и AC соодветно во точките P и Q . Медијаната CM ја сече отсечката PQ во точката F . Докажи, дека $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ ако и само ако BF е симетрала на $\angle ABC$.

34. Во конвексен четириаголник $ABCD$ со I и J се означени центрите на впишаните кружници во $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$, соодветно. Правата BI ги сече страната AD и опишаната кружница околу $\triangle ABD$ соодветно во точките M и P , а правата BJ ги сече страната CD и опишаната кружница околу $\triangle CBD$ соодветно во точките N и Q . Докажи дека $MN \parallel PQ$ ако и само ако $IJ \parallel PQ$.

35. Во остроаголен триаголник ABC со строго најмала страна BC , H и O се ортоцентарот и центарот на опишаната кружница, соодветно. Опишаната кружница околу триаголникот AHC ја сече правата AB во точката $M \neq A$, а опишаната кружница околу триаголникот AHB ја сече правата AC во точка

$N \neq A$. Докажи дека центарот на опишаната кружница на триаголникот MNH лежи на правата OH .

36. Нека P е точка во внатрешноста на остроаголниот триаголник ABC таква што $\angle BAP = \angle ACP$ и $\angle CAP = \angle ABP$. Нека M и N се центрите на впишаните кружници во триаголниците ABP и ACP , соодветно. Ако R е радиусот на опишаната кружница околу триаголникот AMN , докажи дека важи

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{AP}.$$

37. За точката D на страната BC на триаголникот ABC , со O_b и O_c да ги означиме центрите на опишаните кружници околу триаголниците ABD и ACD , соодветно. Нека претпоставиме дека точките B, C, O_b, O_c припаѓаат на кружница со центар X . Ако H е ортоцентар на триаголникот ABC , докажи дека $\angle DAX = \angle DAN$.

38. Даден е паралелограм $ABCD$ таков што $\overline{AB} < \overline{AC} < \overline{BC}$. Точките E и F припаѓаат на опишаната кружница ω околу $\triangle ABC$ и се такви што тангентите на ω во овие точки минуваат низ точката D и отсечките AD и CE се сечат. Ако $\angle ABF = \angle DCE$, определи го $\angle ABC$.

39. Даден е $\triangle ABC$ ($\overline{AC} > \overline{BC}$) со средна отсечка MN ($M \in AC, N \in BC$). Симетралата на $\angle B$ ја сече правата MN во точката P . Впишаната кружница во $\triangle ABC$ има центар I и ја допира страната BC во точката Q . Нормалите во точките P и Q соодветно на MN и BC се сечат во точката R . Нека S е пресечната точка на правите AB и RN .

а) Докажи дека четириаголникот $PCQI$ е тетивен.

б) Изрази ја должината на отсечката BS преку должините a, b, c на страните на $\triangle ABC$.

40. На страната AB на $\triangle ABC$ зедемени се точки D и E , а на страната AC земена е точка F така што $\overline{AD} = \overline{AC}$, $\overline{BE} = \overline{BC}$ и $\overline{AF} = \overline{AE}$. Ако $\angle ACB = 3\angle EFD$ определи го $\angle ACB$.

41. Нека P е внатрешна точка за страната AB на остроаголниот $\triangle ABC$. Околу $\triangle APC$ и $\triangle BPC$ соодветно се опишани кружници k_1 и k_2 , при што k_1 по втор пат ја сече BC во точката M , а k_2 по втор пат ја сече AC во точката

- N . Тангентата на k_1 во P по втор пат ја сече k_2 во точката S , а тангентата на k_2 во точката P по втор пат ја сече k_1 во точката T . Познато е дека правите AT, BS и CP се сечат во една точка. Докажи дека точките S, M, N и T се колинеарни.
42. Точката M е средина на страната AB на $\triangle ABC$. Кружницата низ точките C и M , која ја допира страната AB ги сече страните AC и BC во точките P и Q . Ако K и L се средините на отсечките CP и CQ докажи дека $\angle CKM = \angle CLM$.
43. Определи ги сите точки E во внатрешноста на квадрат $ABCD$ со следново својство: за секои две заемно нормални прави низ E , кои четирите страни на квадратот ги сечат во внатрешни точки, три од тие точки се темиња на рамностран триаголник.
44. Даден е $\triangle ABC$ и нека M е средина на страната AB . Ако со P и R ги означиме соодветно центрите на припишаните кружници на $\triangle AMC$ соодветно кон страните AM и CM , а со Q и T центрите на припишаните кружници на $\triangle BMC$ соодветно кон страните BM и CM , докажи дека точките P, Q, R и T лежат на една кружница.
45. Даден е паралелограм $ABCD$ таков што $BD \perp AD$. Точките A_1 и A_2 се подножјата на нормалите повлечени од темето A кон правите CD и BC . Отсечката A_1A_2 ја сече AB во точка P , а $AC \cap BD = O$. Ако правите OP и AD се сечат во точката M , докажи дека точките A_1, O, A_2 и M лежат на една кружница.
46. Нека M и N се средини соодветно на страните BC и AC на $\triangle ABC$. Точката P припаѓа на опишаната кружница k околу $\triangle CMN$, при што P и C се во различни полурамнини во однос на правата AB . Отсечката PA по втор пат ја сече k во точката M_1 , а отсечката PB по втор пат ја сече k во точката N_1 . Ако отсечките MM_1 и NN_1 се сечат во точката X , докажи дека $\angle ACX = \angle BCP$.
47. Во трапез $ABCD, AB \parallel CD$, впишаната кружница во $\triangle ABD$ ги допира страните AB и BD соодветно во точките M и N , а впишаната кружница во $\triangle ACD$ ги допира страните AC и DC соодветно во точките P и Q . Докажи дека пресечната точка на правите MN и PQ лежи на средната линија на

трапезот.

48. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со висини AA_1, BB_1, CC_1 и ортоцентар H . Правата низ H паралелна на AB ги сече отсечките C_1B_1 и C_1A_1 соодветно во точките P и Q . Нека M е подножјето на нормалата повлечена од P на BB_1 , а N е подножјето на нормалата повлечена од Q на AA_1 . Со C_0 да ја означиме средината на MN . Аналогно ги дефинираме точките A_0 и B_0 . Докажи дека правите AA_0, BB_0 и CC_0 се сечат во една точка.
49. Точката K е внатрешна за паралелограмот $ABCD$ и е таква што средината M на страната BC е еднакво оддалечена од точките K и D , а средината N на страната CD е еднакво оддалечена од точките K и B . Точката P е средина на отсечката AK . Докажи дека $\angle PBK = \angle PDK$.
50. Даден е $\triangle ABC$ и произволна точка L , внатрешна за страната AB . Кружница низ точките A и L ја допира правата CL и по втор пат ја сече страната AC во точката M . Аналогно, кружница низ точките B и L ја допира правата CL и по втор пат ја сече страната BC во точката N . Симетралата на $\angle ALM$ ја сече AC во точката P , а симетралата на $\angle BLN$ ја сече BC во точката Q . Докажи дека центарот на впишаната кружница во $\triangle MNL$ лежи на отсечката PQ .
51. Точките M, N, P, Q се соодветно средини на страните AB, BC, CD, DA на четириаголникот $ABCD$. Точките F и G се тежишта соодветно на триаголниците BNP и PND . Отсечката MG ја сече FQ во точката K и $\overline{FK} = 6\text{ cm}$. Докажи дека $\overline{KQ} = 9\text{ cm}$.
52. Даден е остроаголен $\triangle ABC$, $\overline{AC} \neq \overline{BC}$, со центар на опишаната кружница O . Права паралелна на AB ја допира опишаната кружница околу $\triangle AOB$ во точката T и ги сече продолженијата на страните CA и CB соодветно во точките X и Y . Нека F е пресечната точка на правите BX и AY . Докажи дека центарот на впишаната кружница во $\triangle FCT$ лежи на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.
53. Четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружница k со центар O , при што точката O е внатрешна за четириаголникот $ABCD$. Познато е дека производот на растојанијата од O до страните AB и CD е еднаков на производот на растојанијата од O до страните AD и BC . Тангентите на k во точките

B и D се сечат во точката P . Докажи дека растојанието од P до правата AC е двапати поголемо од растојанието од O до правата AC .

54. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ впишан во кружница k . Точката P од малиот лак AC на k е таква што $\angle BAC = 2\angle PBC$, а точката Q од малиот лак BC на k е таква што $\angle ABC = 2\angle QAC$. Правата низ средината на малиот лак BC и средината на тетивата PC ја сече правата BP во точката K . Правата низ средината на малиот лак AC и средината на тетивата QC ја сече правата AQ во точката T . Докажи дека $\overline{KT} = \overline{AC} + \overline{BC}$.

55. Даден е трапез $ABCD$ со основи $AB \parallel CD$ и пресечна точка O на неговите дијагонали. Нека N, M, P, Q се соодветно средините на страните AB, BC, CD, DA на трапезот. Определи ја плоштината на трапезот ако

$$\overline{ON} = 14, \overline{OP} = \frac{13}{2}, \overline{OM} = 7, \overline{OQ} = \frac{15}{2}.$$

56. Околу кружница се опишани квадрат и триаголник. Докажи дека барем половина на периметарот на квадратот лежи во триаголникот.

57. На страните BC, CA, AB на $\triangle ABC$ се избрани соодветно точките A_1, B_1, C_1 така што правите AA_1, BB_1, CC_1 се сечат во една точка M . Докажи дека ако M е тежиште на $\triangle A_1B_1C_1$, тогаш M е тежиште и на $\triangle ABC$.

58. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Нека F е пресечната точка на дијагоналите AC и BD на четириаголникот, а E е пресечната точка на правите AD и BC . Ако M и N се средините на отсечките AB и CD , докажи дека

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{EF}} = \frac{1}{2} \left| \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} - \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} \right|.$$

59. Во четириаголникот $ABCD$ таков што $\angle BAD + \angle ADC > 180^\circ$ и впишана кружница со центар I . Низ I е повлечена права која ги сече страните AB и CD соодветно во точките X и Y така што $\overline{IX} = \overline{IY}$. Докажи дека

$$\overline{AX} \cdot \overline{DY} = \overline{BX} \cdot \overline{CY}.$$

60. Во конвексен четириаголник $ABCD$ дијагоналите AC и BD се сечат во точката O . Точките A_1, B_1, C_1, D_1 припаѓаат соодветно на отсечките AO, BO, CO, DO и се такви што $\overline{AA_1} = \overline{CC_1}$ и $\overline{BB_1} = \overline{DD_1}$. Нека M и N се вторите пресечни точки на кружниците опишани соодветно околу $\triangle AOB$ и

$\triangle COD$ и околу $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$, а P и Q се вторите пресечни точки на кружниците опишани соодветно околу $\triangle A_1OB_1$ и $\triangle C_1OD_1$ и околу $\triangle A_1OD_1$ и $\triangle B_1OC_1$. Докажи дека точките M, N, P и Q лежат на една кружница.

61. Даден е остроаголен разностран $\triangle ABC$ со висини CD, AE и BF . Точките E' и F' се симетрични на E и F во однос на точките A и B , соодветно. Точката C_1 припаѓа на полуправата CD и е таква што $\overline{DC_1} = 3\overline{CD}$. Докажи дека $\angle E'C_1F' = \angle ACB$.
62. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Точката M лежи на страната AB на опишаната кружница околу четириаголникот $ABCD$. Точките I_1, I_2 и I_3 се центри на впишаните кружници околу $\triangle MBC, \triangle MCD$ и $\triangle MDA$, соодветно. Докажи дека точките M, I_1, I_2 и I_3 се конциклични.
63. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со $\angle ACB = 90^\circ$, висина CH и медијана CM . Точката N од отсечката MH е таква што $\overline{MN} = \overline{NC}$ и $\overline{NH} = \overline{HB} + \overline{BC}$.
 - а) определи го $\angle BAC$,
 - б) ако точката K од отсечката MC е таква што $KB \perp NC$, определи го $\angle KNC$.
64. Даден е $\triangle ABC$ со центар J на припишаната кружница кон страната BC . Нека M е средина на страната AC и MJ ја сече страната BC во точката N . Ако $\overline{AB} = \overline{BN}$, тогаш $\angle BAC = 2\angle ACB$. Докажи!
65. Даден е остроаголен $\triangle ABC$, во кој впишаната кружница ги допира страните AB и BC соодветно во точките M и N . Симетралите на $\angle ACB$ и $\angle BAC$ ја сечат правата MN соодветно во точките K и P . Ако $\overline{AC} = 2\overline{KP}$, определи го $\angle ABC$.
66. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Точката D е средината на лакот AC од опишаната кружница околу $\triangle ABC$, кој не ја содржи точката B . Нека точката P е проекцијата на D на правата AB , а точката M е средина на отсечката DP . Правата низ P , нормална на BM , ја сече правата BC во точката N . Докажи дека $\angle NDB = 90^\circ$.

3 ПРИМЕНА НА ТРИГОНОМЕТРИЈАТА

- Во кружница со центар O и радиус R е впишан остроаголен $\triangle ABC$. На страната BC е земена точка X таква што $\overline{AX} = \overline{BX}$ и $\overline{OX} = \overline{CX}$. Определи ги аглиите на $\triangle ABC$, ако радиусот на опишаната кружница околу $\triangle AOC$ е еднаков на R .
- Нека k е опишаната кружница околу остроаголниот $\triangle ABC$. Точката M е средина на страната AB , Тангентата на k во A ја сече правата низ M нормална на AC во точката D . Тангентата на k во точката B ја сече правата низ M нормална на BC во точката E . Ако правата DE го дели $\triangle ABC$ на два дела со плоштини 1 и 3, определи го $\angle ACB$.
- Со O и I да ги означиме центрите на опишаната и впишаната кружница на триаголникот ABC , соодветно. Надворешно припишаната кружница ω_a ги допира продолженијата на страните AB и AC соодветно во точките K и M , а страната BC ја допира во точката N . Нека претпоставиме дека средината P на отсечката KM лежи на опишаната кружница на триаголникот ABC . Докажи дека точките O, I и N се колинеарни.
- Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните AB и AC соодветно во точките X и Y . Точката K е средина на лакот AB од опишаната кружница околу триаголникот (не ја содржи точката C). Познато е дека правата XY ја преполовува отсечката AK . Определи го $\angle BAC$.
- Дадени се кружници $k_1(O_1, R)$ и $k_2(O_2, r)$ такви што $R \geq r\sqrt{2}$ и

$$\overline{O_1O_2} = \sqrt{R^2 + r^2} - r\sqrt{4R^2 + r^2}.$$
 Од произволна точка $A \in k_1$ се повлечени тангенти AB, AC ($B, C \in k_2$) на k_2 , кои k_1 ја сечат соодветно во точките D и E . Докажи дека $\overline{BD} \cdot \overline{CE} = r^2$.
- Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со ортоцентар H и центар на опишаната кружница O . Симетралата на CH ги сече страните AC и BC соодветно во точките X и Y . Правите XO и YO ја сечат страната AB соодветно во точките P и Q . Ако $\overline{XP} + \overline{YQ} = \overline{AB} + \overline{XY}$, определи го $\angle OHC$.

7. Во остроаголен $\triangle ABC$, $\overline{BC} > \overline{AC}$ е впишана кружница k со центар I . Нека $CH, H \in AB$ и $CL, L \in AB$ се соодветно висината и симетралата на аголот повлечени од темето C , а точките A_1, B_1 и C_1 се средините на страните BC , CA и AB , соодветно. Ако допирната точка на k со страната AB е средина на отсечката HC_1 , тогаш I е центар на опишаната кружница за $\triangle LA_1B_1$. Докажи!
8. Во $\triangle ABC$ е впишана кружница со центар O_1 , која ги допира страните AB, BC и AC соодветно во точките C_1, A_1 и B_1 . Припишаната кружница кон страната AB има центар O_2 и ги допира AB и продолженијата на страните AC и BC соодветно во точките C_2, B_2 и A_2 . Нека O_1C_1 ја сече A_1B_1 во точката M , а O_2C_2 ја сече A_2B_2 во точката N . Докажи дека $\overline{C_1N} = \overline{C_2N}$.
9. Нека I и M се центарот на впишаната кружница и тежиштето на $\triangle ABC$, во кој $\overline{AC} \neq \overline{BC}$. Докажи дека $IM \perp AB$ ако и само ако $\overline{AC} + \overline{BC} = 3\overline{AB}$.
10. Во внатрешноста на правоаголен триаголник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) земена е точка P таква што $\overline{AP} = 4$, $\overline{BP} = 2$ и $\overline{CP} = 1$. Точката Q која е симетрична на точката P во однос на AC припаѓа на кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Определи ги аглиите на $\triangle ABC$.
11. Точката I е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Правата AI ја сече опишаната кружница Ω на $\triangle ABC$ во точката $M \neq A$. Точката J е симетрична на точката I во однос на средината D на страната BC . Правата MJ ја сече кружницата Ω во точката $P \neq M$. Докажи дека една од отсечките PA, PB, PC е еднаква на збирот на другите две.
12. Во $\triangle ABC$ со плоштина S точката H е ортоцентар, точките D, E, F се соодветно подножјата на висините повлечени од темињата A, B, C , а точките P, Q, R се редоследно симетрични на темињата A, B, C во однос на правите BC, CA, AB , соодветно. Познато е дека триаголниците DEF и PQR имаат еднакви плоштини T и дека $T > \frac{3}{5}S$. Докажи дека $T = S$.
13. Нека O е центарот на опишаната кружница околу рамнокракиот $\triangle ABC$ со основа AB . Правата AO го сече кракот BC во точката D . Познато е дека

$\overline{BD}$ и $\overline{CD}$ се цели броеви, а $\overline{AO}-\overline{CD}$ е прост број. Определи ги овие броеви.

14. Во $\triangle ABC$ точките M и N лежат соодветно на страните BC и AC . Отсечките AM и BN се сечат во точката P . Опишаните кружници околу $\triangle ANP$ и $\triangle BMP$ по втор пат се сечат во центарот I на впишаната кружница на $\triangle ABC$. Определи ја должината на отсечката IP ако $\angle ACB = 45^\circ$ и $R_{ABC} = 1$.
15. Во кружница k со радиус 1 е впишан $\triangle ABC$. Точките I и I_a се соодветно центарот на впишаната кружница и центарот на припишаната кружница кон страната BC на $\triangle ABC$. Правата BI ја сече AC во точка B_1 , а правата AI ја сече BC во точка A_1 . Правата B_1A_1 ја сече k во точки P и Q .
 - а) Докажи дека точките I, I_a, P и Q лежат на една кружница.
 - б) Определи го радиусот на опишаната кружница околу $\triangle IPQ$.
16. Нека D е средината на оној лак BC на опишаната кружница на $\triangle ABC$ на кој е точката A и нека $\overline{AB} < \overline{AC}$. Докажи дека подножјето E на нормалата повлечена од точката D на правата AC ја преполовува искршената линија составена од отсечките BA и AC .
17. Даден е рамностран $\triangle ABC$. Над страната AB како над дијаметар е конструирана кружница k . Кружница внатрешно ги допира кружницата k во точката T и страните AN и AC . Тангентата на k во точката T ја сече страната BC во точката Q . Ако $\overline{AB} = 6$, определи ја должината на отсечката CQ .
18. Дадени се кружница k со центар во точката O и точка $A \in k$. На правата OA е земена точка C таква што важи распоредот $O-A-C$ и $\overline{OA} = \overline{AC}$, а точката B е средина на отсечката AC . Нека точката $Q \in k$ е таква што $\angle AOQ$ е тап. Нека правата QO и симетралата на отсечката CQ се сечат во точката P . Докажи дека $\angle POB = 2\angle PBO$.
19. Во триаголник ABC впишаната кружница со центар I ги допира страните AB и AC во точките P и Q , соодветно. Правите BI и CI ја сечат правата PQ во точките K и L , соодветно. Докажи дека опишаната кружница околу триаголникот ILK ја допира впишаната кружница во триаголникот

ABC ако и само ако $\overline{AB} + \overline{AC} = 3\overline{BC}$.

20. Даден е остроаголен разностран $\triangle ABC$ со средини на страните BC, CA и AB соодветно M, N и P . Нека симетралите на AB и AC ја сечат полуправата AM соодветно во точките D и E , а правите BD и CE се сечат во точката F , која е внатрешна за $\triangle ABC$. Докажи дека точките A, N, F и P се конциклични.

21. Во $\triangle ABC$ е повлечена симетралата CC_1 на $\angle ACB, C_1 \in AB$. Точките $P \in C_1B, Q \in BC, R \in AC$ и $S \in AC_1$ се такви што

$$\overline{C_1P} = \overline{PQ} = \overline{QC} \text{ и } \overline{CR} = \overline{RS} = \overline{SC_1}.$$

Докажи дека CC_1 е симетрала на $\angle SCP$.

22. Во $\triangle ABC$ е впишан петаголник $AMNPQ$ со еднакви должини на страни, при што $M \in AB, Q \in AC$ и $N, P \in BC$. Правите MN и PQ се сечат во точката S , а со l ја означуваме симетралата на $\angle MSQ$. Докажи дека $OI \parallel l$, каде O и I се соодветно центрите на опишаната и впишаната кружница во $\triangle ABC$.

23. Даден е $\triangle ABC$. Нека $\angle ACB = 45^\circ$, $\overline{AB} = \sqrt{2}$ и $\overline{BM} = m$, каде M е средината на AC .

а) Ако $\alpha = \angle BAC$, изрази го m како функција од $\text{ctg } \alpha$.

б) Определи ги сите вредности на m , за кои $\angle BAC$ е еднозначно определен.

24. Нека O е центарот на опишаната кружница околу остроаголниот $\triangle ABC$, а M и N се средините на страните AB и BC . Правата CO ја преполовува отсечката MN . Определи ја најмалата можна вредност на $\angle BAC$.

25. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ во кој $\angle ABC + \angle BCD < 180^\circ$. Правите AB и CD се сечат во точката E . Докажи дека $\angle ABC = \angle ADC$ ако и само ако е исполнето равенството

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CE} - \overline{AB} \cdot \overline{AE}.$$

26. Даден е $\triangle ABC$ со симетрали на агли BM и CN ($M \in AC, N \in AB$). Полуправата MN ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката D . Докажи дека

$$\frac{1}{BD} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{CD}.$$

27. Кржница низ темето C на $\triangle ABC$ ја допира страната AB во точката R и ги сече страните AC и BC соодветно во точките P и Q така што

$$\overline{AR} \cdot \overline{BR} = \overline{CR}^2 \text{ и } \overline{AP} \cdot \overline{BQ} = \overline{CP} \cdot \overline{CQ}.$$

Докажи дека CR е висина или симетрала на агол во $\triangle ABC$.

28. Во остроаголен разностран $\triangle ABC$ се повлечени тежишната линија AM и висината AH . На правите AB и AC се избрани точките Q и P соодветно при што $QM \perp AC$ и $PM \perp AB$. Опишаната кржница околу $\triangle PMQ$ по втор пата ја сече правата BC во точката X . Докажи дека $\overline{BH} = \overline{CX}$.

29. Во внатрешноста на правоаголен триаголник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) земена е точка P таква што $\overline{AP} = 4$, $\overline{BP} = 2$ и $\overline{CP} = 1$. Точката Q која е симетрична на точката P во однос на AC припаѓа на кржницата опишана околу $\triangle ABC$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.

30. Даден е остроаголен $\triangle PBC$, $\overline{PB} \neq \overline{PC}$. Точките A и D припаѓаат соодветно на страните PB и PC , а точките M и N се соодветно средините на отсечките BC и AD . Правите AC и BD се сечат во точката O , и од точката O се повлечени нормали $OE \perp AB$, $E \in AB$ и $OF \perp CD$, $F \in CD$.

а) Докажи дека, ако точките A, B, C, D се конциклични, тогаш

$$\overline{EM} \cdot \overline{FN} = \overline{EN} \cdot \overline{FM}.$$

б) Дали од

$$\overline{EM} \cdot \overline{FN} = \overline{EN} \cdot \overline{FM},$$

следува дека точките A, B, C, D се конциклични?

31. Определи ја должината на страната на најмалиот рамностран триаголник во кој може да се постават три кржници со радиуси 2, 3 и 4 кои немаат заеднички внатрешни точки.

4 НЕРАВЕНСТВА

1. Докажи дека во правоаголен триаголник важи $a+b < c+h$, каде a и b се должините на катетите, c е должината на хипотенузата и h е должината на висината повлечена кон хипотенузата.

2. Нека a, b и c се страни на триаголник и

$$A = \frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ca}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b} \text{ и}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}} + \frac{1}{\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}} + \frac{1}{\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}}.$$

Докажи дека $AB \geq 9$.

3. Докажи го неравенството

$$(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \geq 27P^2,$$

каде h_a, h_b, h_c се должините на висините, t_a, t_b, t_c се должините на тежишните линии и P е плоштината на триаголникот ABC .

4. Нека t_a, t_b, t_c се должините на тежишните линии повлечени соодветно од темињата A, B, C во $\triangle ABC$. Докажи дека

$$t_a t_b + t_b t_c + t_c t_a < \frac{5}{4}(ab + bc + ca).$$

5. На страната BC на триаголникот ABC се дадени точки D и E , при што D е меѓу B и E . Ако p_1 и p_2 се соодветно периметрите на триаголниците ABC и ADE , докажи дека $p_1 > p_2 + 2\min\{\overline{BD}, \overline{CE}\}$.

6. Даден е $\triangle ABC$. Точката D е средина на страната BC , а на страните AC и AB соодветно се земени точки E и F такви што $\overline{DE} = \overline{DF}$ и $\angle EDF = \angle BAC$. Докажи го неравенството

$$\overline{DE} \geq \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{4}.$$

7. Нека O е внатрешна точка на $\triangle ABC$ и нека AO, BO, CO ги сечат страните BC, CA, AB соодветно во точките A_1, B_1, C_1 . Ако AA_1 е најдолга од отсечките AA_1, BB_1 и CC_1 докажи дека

$$\overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1} \leq \overline{AA_1}.$$

8. Нека AM и BN ($M \in BC, N \in AC$) се симетрали соодветно на $\angle BAC$ и $\angle ABC$ во $\triangle ABC$. Ако $AM \cap BN = I$, а опишаните кружници соодветно околу $\triangle ANI$ и $\triangle BMI$ по втор пат се сечат во точката L која припаѓа на страната AB , докажи дека плоштината на $\triangle MNL$ е помала или еднаква на четвртина од плоштината на $\triangle ABC$.
9. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник таков што $\overline{AB} = 1$, $\angle BAE = \angle ABC = 120^\circ$, $\angle CDE = 60^\circ$ и $\angle ADB = 30^\circ$. Докажи дека плоштината на петаголникот $ABCDE$ е помала од $\sqrt{3}$.
10. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со радиус на впишаната кружница r . Нека H е ортоцентарот, а A', B', C' се подножјата на висините h_a, h_b, h_c повлечени соодветно од темињата A, B, C . Да означиме $a = \overline{BC}, b = \overline{CA}, c = \overline{AB}$. Нека d_a, d_b, d_c се растојанијата на ортоцентарот до страните BC, CA, AB , соодветно. Ако $a \geq b \geq c$ докажи дека:
 - а) $h_a \leq h_b \leq h_c$, б) $d_a \geq d_b \geq d_c$,
 - в) $\overline{AH} \leq \overline{BH} \leq \overline{CH}$, и г) $d_a + d_b + d_c \leq 3r$.
11. Даден е триаголник ABC со страни a, b, c и плоштина S .
 - а) Докажи дека постои триаголник $A_1B_1C_1$ со страни $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$.
 - б) Ако S_1 е плоштината на триаголникот $A_1B_1C_1$ докажи дека $S_1^2 \geq \frac{S\sqrt{3}}{4}$.
12. Точката X припаѓа на страната AB на тетивниот четириаголник $ABCD$ и е таква што дијагоналата BD ја преполовува отсечката CX , а дијагоналата AC ја преполовува отсечката DX . Определи ја најмалата можна вредност на количникот $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$.
13. Во триаголникот ABC симетралите на внатрешните агли во темињата A и B ги сечат спротивните страни во точките D и E , соодветно. Докажи дека $\overline{DE} \leq (3 - \sqrt{8})(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA})$. Определи ги аглиите на триаголникот за кој важи знак за равенство.
14. Нека A, B и C се центрите на три кружници со радиуси r_a, r_b и r_c , соодветно, кои две по две се допираат однадвор. Ако r е радиусот на впишаната

кржница во триаголникот ABC , докажи дека

$$r^2 \leq \frac{1}{9}(r_a^2 + r_b^2 + r_c^2).$$

15. Даден е трапез $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Ако R_1 и R_2 се радиусите на опишаните кружници околу триаголниците ACD и BCD , докажи дека $4R_1R_2 \geq \overline{AB}^2$.

16. Низ пресекот на дијагоналите на конвексен четириаголник е повлечена произволна права. Докажи дека должината на делот на правата внатре во четириаголникот не е поголема од должината на барем една негова дијагонала.

17. Нека $ABCDEF$ е конвексен шестаголник со плоштина S . Докажи дека $\overline{AC}(\overline{BD} + \overline{BF} - \overline{DF}) + \overline{CE}(\overline{BD} + \overline{DF} - \overline{BF}) + \overline{AE}(\overline{BF} + \overline{DF} - \overline{BD}) \geq 2\sqrt{3}S$. (*)

18. Нека m_c и l_c се должините на медијаната и симетралата на аголот при темето C во $\triangle ABC$ со плоштина S . Ако $\gamma = \angle BCA$, докажи дека

$$m_c l_c \geq S \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}.$$

19. Нека M е тежиште на $\triangle ABC$. Докажи го неравенството

$$\sin \angle CAM + \sin \angle CBM \leq \frac{2}{\sqrt{3}},$$

- а) ако опишаната кружница околу $\triangle AMC$ ја допира правата AB ,
б) за произволен $\triangle ABC$.

20. Симетралите на внатрешните агли при темињата A и B на $\triangle ABC$ ги сечат спротивните страни соодветно во точките D и E . Во четириаголникот $ABDE$ е впишан ромб така што на секоја страна на четириаголникот се наоѓа точно по едно теме на ромбот. Ако $\angle BAC = \alpha$ и $\angle ABC = \beta$, докажи дека барем еден агол на ромбот не е поголем од $\max\{\alpha, \beta\}$.

21. Нека M, N, P се произволни точки редоследно на страните BC, CA, AB на остроаголникот $\triangle ABC$. Докажи дека е точно барем едно од неравенствата

$$\overline{NP} \geq \frac{1}{2} \overline{BC}, \quad \overline{PM} \geq \frac{1}{2} \overline{CA}, \quad \overline{MN} \geq \frac{1}{2} \overline{AB}.$$

5 ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Впишаната кружница на тангентниот петаголник $ABCDE$ ја допира страната BC во точката K . Ако $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$, докажи дека $\angle EKB = 90^\circ$.
2. Во тетивен петаголник $ABCDE$ важи $\overline{AB} = \overline{BC}$ и $\overline{CD} = \overline{DE}$. Отсечките AD и BE се сечат во точката P , а отсечката BD ги сече CA и CE во Q и T , соодветно. Докажи дека триаголникот PQT е рамнокрак.
3. Во кружница е впишан конвексен петаголник $ABCDE$. Точките M и N се внатрешни соодветно за страните ED и CD . Отсечката MN ја сече AD во точката K и BD во точката L . Докажи дека, ако четириаголникот $ABLK$ е тетивен, тогаш и четириаголникот $ECNM$ е тетивен.
4. Даден е конвексен шестаголник. Нека s е збирот на должините на трите отсечки кои ги поврзуваат средините на спротивните страни на шестаголникот. Докажи дека постои точка, внатрешна за шестаголникот, таква што збирот на растојанијата од неа до страните на шестаголникот е помал или еднаков на s .
5. Даден е конвексен шестаголник. Секоја од трите прави, кои ги поврзуваат средините на спротивните страни, го дели шестаголникот на два дела со еднакви плоштини. Докажи дека овие три прави се сечат во една точка.
6. Нека шестаголникот $ABCDEF$ е впишан во кружница, $AC \cap BE = H$, $AD \cap CE = I$, $BD \perp CF$ и $\overline{AI} = \overline{CI}$. Докажи дека $\overline{CH} = \overline{AH} + \overline{DE}$ ако и само ако $\overline{GH} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{DE}$.
7. Езеро има форма на конвексен стоаголник $A_1A_2 \dots A_{100}$ со центар на симетрија во точката O . На езерото се наоѓа остров $B_1B_2 \dots B_{100}$, каде B_i е средина на отсечката OA_i . Островот е заграден со висок сид и преку сидот ништо не се гледа. Во две дијаметрално спротивни точки на брегот се наоѓаат двајца стражари. Докажи дека секоја точка на брегот ја гледа барем еден стражар.
8. На страната AB на $\triangle ABC$ со $\angle ACB = 50^\circ$ е земена произволна точка O . Опишаната кружница k_1 околу $\triangle AOC$ ја сече отсечката BC во точката N .

Опишаната кружница k_2 околу $\triangle BOC$ ја сече отсечката AC во точката M . Правата ON ја сече k_2 во точката D , а правата OM ја сече k_1 во точка P . Правите PA и DB се сечат во точката Q . Определи ја големината на $\angle AQB$

9. Нека AM е медијана на нерамностраниот $\triangle ABC$, точката O е центар на опишаната околу него кружница и точката G е тежиште на $\triangle AMC$. Докажи дека $OG \perp AM$ ако и само ако $\overline{CA} = \overline{CB}$.

10. Дадена е кружница k и точка P надвор од неа. Променлива права s која минува низ точката P ја сече кружницата k во точките A и B . Нека M и N се средините на лаците определени со точките A и B и точката C на отсечката AB е таква што $\overline{PC}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$. Докажи дека $\angle MCN$ не зависи од изборот на правата s .

11. На дијаметар на кружница со радиус $\sqrt{5}$ се земени точки M и N кои се еднакво оддалечени од нејзиниот центар. Низ M е повлечена тетива AB , а низ N е повлечена тетива AN така што важи

$$\frac{1}{\overline{MB}^2} + \frac{1}{\overline{NC}^2} = \frac{3}{\overline{MN}^2},$$

Определи го растојанието од центарот на кружницата до точките M и N .

12. Нека ABC е правоаголен триаголник со катети $\overline{AC} = 1$ и $\overline{BC} = 2$. Низ точка A_1 од катетата BC , за која $\overline{A_1C} \neq \frac{1}{3}$, е повлечена права, паралелна на AB , која AC ја сече во точка B_1 . Нека C_1 е подножјето на нормалата спуштена од B_1 на AB . Низ C_1 е повлечена права, паралелна на AC , која BC ја сече во точка A_2 . Правата низ A_2 паралелна на AB , ја сече AC во точка B_2 итн. Пресметај

а) $\frac{3\overline{A_{n+1}C}-1}{3\overline{A_nC}-1},$

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{A_n B_n C_n}.$

13. Допирните точки на впишаната кружница во даден триаголник и неговите темиња го делат периметарот на триаголникот на шест отсечки. Избираме три од нив, кои формираат триаголник и за нив ја повторуваме постапката. Докажи дека, по низа вакви операции се добива триаголник кој има агол 60° или агол помал од 1° .

14. Темињата на два квадрати со плоштини S и T лежат на страните на правоаголен $\triangle ABC$, при што три од нив лежат на хипотенузата AB со должина

природен број c . Дали е можно $\frac{S}{2}$ и $\frac{T}{2}$ да се заемно прости броеви:

а) за некој $c < 70$, б) за некој $c > 70$.

15. Даден е трапез $ABCD$, $BC \parallel AD$. Точката M е средина на основата BC , а точката P припаѓа на основата AD . Правата PM ја сече правата CD во точката Q така што C лежи меѓу Q и D . Нормалата на основите низ точката P ја сече правата BQ во точката K . Докажи дека $\angle QBC = \angle KDA$.
16. Дадени се кружница k со центар во точката O и точка $A \in k$. На правата OA е земена точка C таква што важи распоредот $O-A-C$ и $\overline{OA} = \overline{AC}$, а точката B е средина на отсечката AC . Нека точката $Q \in k$ е таква што $\angle AOQ$ е тап. Нека правата QO и симетралата на отсечката CQ се сечат во точката P . Докажи дека $\angle POB = 2\angle PBO$.
17. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник таков што $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{BD} = 2\overline{AD}$ и $\overline{AB} = \overline{AE}$, каде $E = AB \cap CD$. Пресметај $\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}$.
18. Нека D е точка на страната AB на триаголникот ABC , а k е опишаната кружница на триаголникот ABC . Кружница k_1 со центар I ги допира отсечките BD и CD и кружницата k , а кружница k_2 со центар J ги допира отсечките AD и CD и кружницата k . Ако точките A, B, I, J се конциклични, докажи дека D е допирната точка на припишаната кружница на триаголникот ABC наспроти темето C .
19. Нека O е центарот на опишаната кружница на остроаголниот триаголник ABC . Точките P и Q припаѓаат соодветно на страните AB и AC , и се такви што $\angle BOP = \angle ABC$ и $\angle COQ = \angle ACB$. Докажи дека симетричната права на правата BC во однос на правата PQ ја допира опишаната кружница на триаголникот APQ .
20. Дијагоналите AC и BD на тетивниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката L . Правите AD и BC се сечат во точката M , а правите AB и CD се сечат во точката N . Симетралата на $\angle ALD$ ги сече страните AD и BC соодветно во точките P и Q , а симетралата на $\angle ALB$ ги сече страните AB и CD соодветно во точките K и T . Докажи дека опишаните кружници околу $\triangle MPQ$, $\triangle NKT$ и $\triangle BKQ$ се сечат во една точка.

21. Во рамнокрак триаголник ABC точката H е ортоцентар, а G е тежиште. Точките X, Y и Z се одбрани соодветно на страните BC, CA и AB така што $\angle AXB = \angle BYC = \angle CZA$. Опишаните кружници околу триаголниците BXZ и CXY по втор пат се сечат во точката P . Докажи дека $\angle GPH = 90^\circ$.
22. Кружница k која минува низ темињата A и C на триаголникот ABC ја допира правата AB и по втор пат ја сече страната BC во точката P . Нека l е тангентата на кружницата k во точката P . Симетралата на аголот во темето B ги сече правите l и AP во точките K и L , соодветно. Докажи дека $\angle LAK = \angle LCB$.
23. Даден е $\triangle ABC$ со центар I на впишаната кружница. Права l' ја допира впишаната кружница, а права $l \neq l'$ ги сече страните BC, CA и AB или нивните продолженија соодветно во точките A', B' и C' . Тангентата на впишаната кружница повлечена од точката A' , различна од BC , ја сече правата l' во точката A_1 . Аналогно се дефинираат точките B_1 и C_1 . Докажи дека правите AA_1, BB_1 и CC_1 се сечат во една точка.
24. Даден петаголник со искршена линија која поврзува две негови темиња е поделен на два меѓусебно складни петаголници. Докажи дека почетниот петаголник има пар еднакви агли, а петаголниците на кои е поделен имаат по два пара паралелни страни.
25. Точките D, E и F припаѓаат соодветно на страните BA, CA и AB на $\triangle ABC$ и се такви што $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}$. Докажи дека ако $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ имаат заеднички центар на опишаните кружници, тогаш $\triangle ABC$ е рамностран.
26. Нека четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружница со центар O , при што аглите $\angle ABC$ и $\angle BCD$ се остри. Нека $AB \cap CD = E$, P и R се подножјата на нормалите повлечени од E соодветно на правите BC и AD , $Q = EP \cap AD$ и $S = ER \cap BC$. Докажи дека правата EO ја преполовува отсечката QS .
27. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Точката H_1 е ортоцентар на $\triangle ABC$, а точките A_1 и B_1 се симетрични соодветно на точките A и B во однос на правите BH_1 и AH_1 . Точката O_1 е центар на опишаната кружница на $\triangle A_1B_1H_1$. Точката H_2 е ортоцентар на $\triangle ABD$, а точките A_2 и B_2 се

симетрични соодветно на точките A и B во однос на правите BH_2 и AH_2 . Точката O_2 е центар на опишаната кружница на $\triangle A_2B_2H_2$. Правата O_1O_2 да ја означиме со l_{AB} . Аналогно се дефинираат правите l_{BC}, l_{CD} и l_{DA} . Ако $l_{AB} \cap l_{BC} = M, l_{BC} \cap l_{CD} = N, l_{CD} \cap l_{DA} = P$ и $l_{DA} \cap l_{AB} = Q$, докажи дека точките M, N, P и Q лежат на една кружница.

28. Нека r и R се дијаметрите на впишаната и опишаната кружница на триаголникот ABC . Нека r_a е радиусот на кружницата γ_a која одвнатре ја допира опишаната кружница во точката A , а надворешно ја допира впишаната кружница. Аналогно се дефинираат r_b и r_c . Докажи го неравенството

$$\frac{R-r_a}{r+4r_a} + \frac{R-r_b}{r+4r_b} + \frac{R-r_c}{r+4r_c} \geq \frac{3R}{4r}.$$

29. Нека $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$, $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7$ се правилни седумаголници со плоштини S_A, S_B, S_C , за кои важи $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_3} = \overline{C_1C_4}$. Докажи дека

$$\frac{1}{2} < \frac{S_B + S_C}{S_A} < 2 - \sqrt{2}.$$

30. Определи го најмалиот број m таков што со секои пет рамнострани триаголници со збир на плоштините m може да се покрие рамностран триаголник со плоштина 1.
31. Нека $A_0, A_1, \dots, A_{2k}$, во овој редослед, се точки од кружница, кои кружницата ја делат $2k+1$ еднакви лаци. Точката A_0 е поврзана со тетиви со сите останати точки. Овие $2k$ тетиви го делат кругот на $2k+1$ делови, кои наизменично се обоени со црвена и сина боја, така што бројот на црвените делови е за еден поголем од бројот на сините делови. Докажи дека плоштината на сината површина е поголема од плоштината на црвената површина.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

1 ТРИАГОЛНИК

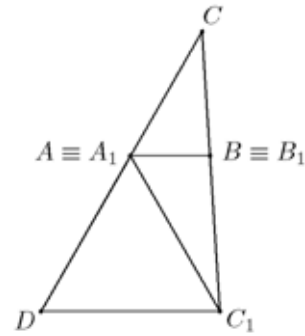
1. Дадени се триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ за кои е исполнето $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = 60^\circ$ и $\angle ABC + \angle A_1B_1C_1 = 180^\circ$. Докажи дека

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{A_1C_1}.$$

Решение. Да ги залепиме двата триаголника по страните AB и A_1B_1 , така што $A = A_1$ и $B = B_1$, а C и C_1 се од различни страни на AB . Од $\angle ABC + \angle A_1B_1C_1 = 180^\circ$ следува дека точките B, C и C_1 се колинеарни. Нека D е точка на правата CA таква што $C_1D \parallel AB$. Оттука добиваме $\frac{DC_1}{AB} = \frac{CD}{CA}$. Бидејќи $\angle DAC_1 = \angle AC_1D = 60^\circ$, триаголникот ADC_1 е рамнострани и горното равенство може да се запише како

$$\frac{AC_1}{AB} = \frac{AC + AC_1}{AC}.$$

Ова равенство е еквивалентно на бараното равенство.



2. Во паралелограмот $ABCD$ со остар агол во темето A , кружницата која минува низ точките A, B и D ги сече правите BC и CD во точките K и L , соодветно. Во оваа кружница точката N е дијаметрално спротивна на точката A . Докажи дека N е центар на опишаната кружница на триаголникот CKL .

Решение. Да означиме $\angle BAC = \alpha$. Бидејќи

$$\angle NKL = \angle NDL = \angle ADC - 90^\circ = 90^\circ - \alpha$$

и аналогно $\angle NLK = 90^\circ - \alpha$ следува $\overline{NK} = \overline{NL}$ и $\angle KNL = 2\alpha = 2\angle KCL$, што значи дека N е центар на опишаната кружница на триаголникот CKL .

3. Во остроаголникот триаголник ABC точките A_1 и B_1 се соодветно подножјата на висините повлечени од A и B , а H е ортоцентарот на триаголникот. Нека k_1 и k_2 се соодветно кружниците со центри B и H кои минуваат низ точката B_1 . Тангентите повлечени од точката C на кружниците k_1 и k_2 ,

различни од правата AC , ги допираат кружниците k_1 и k_2 во точките K и N , соодветно. Докажи дека правата KN минува низ точката A_1 .

Решение. Точките K и N се симетрични на точката B_1 во однос на правите CH и CB (направи цртеж). Затоа $\overline{CK} = \overline{CN}$ и

$$\angle KCN = \angle KCA - \angle NCA = 2\angle BCA - 2\angle HCA = 2\angle HCB$$

и

$$\angle CKN = 90^\circ - \angle HCB = \angle CBA = \angle CB_1A_1 = \angle CKA_1,$$

а оттука следува колинеарноста на точките K, N, A_1 .

4. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Нека D е подножјето на висината повлечена од темето A , а M и N се соодветно подножјата на нормалите повлечени од D на AB и AC . Правата MN ја сече опишаната кружница k на $\triangle ABC$ во точките P и Q , а правата AD по втор пат ја сече k во точката R . Докажи дека D е центар на впишаната кружница на триаголникот PQR .

Решение. Од $\angle OAM + \angle AMN = \angle DAN + \angle ADN = 90^\circ$ следува дека тетивата PM е нормална на OA , па затоа A е средина на лакот PQ (направи цртеж). Според тоа, RA е симетрала на $\angle PRQ$.

Од $\angle ABP = \angle AQP = \angle APM$ следува дека триаголниците ABP и APM се слични, па затоа $\overline{AP}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AM} = \overline{AD}^2$. Значи, $\overline{AD} = \overline{AP} = \overline{AQ}$, па затоа D е центар на впишаната кружница на $\triangle PQR$.

5. На страните на $\triangle ABC$ се дадени точките $A', A'' \in BC$, $B', B'' \in CA$ и $C', C'' \in AB$. Докажи, ако $\triangle A'B'C'$ и $\triangle A''B''C''$ имаат заедничко тежиште, тогаш отсечките $A'B'$ и $A''B''$ имаат заедничка точка.

Решение. Бидејќи $\triangle A'B'C'$ и $\triangle A''B''C''$ имаат заедничко тежиште важи

$$\overline{A'A''} + \overline{B'B''} + \overline{C'C''} = \vec{0}.$$

Од друга страна

$$\overline{A'A''} = \alpha \overline{BC}, \overline{B'B''} = \beta \overline{CA} \text{ и } \overline{C'C''} = \gamma \overline{AB}$$

за некои $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Тогаш

$$\vec{0} = \alpha \overline{BC} + \beta \overline{CA} + \gamma \overline{AB} = (\alpha - \gamma) \overline{BC} + (\beta - \gamma) \overline{CA},$$

па затоа $\alpha - \gamma = \beta - \gamma = 0$, т.е. $\alpha = \beta = \gamma$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека A'' е меѓу A' и C , т.е. $\alpha \geq 0$. Тогаш $\beta \geq 0$, т.е. B'' е меѓу B' и A . Значи, отсечките $A'B'$ и $A''B''$ имаат заедничка точка.

6. Дадени се остроаголен $\triangle ABC$ и точка D во неговата внатрешност таква што $\angle ADB - \angle ACB = 90^\circ$ и $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}$.

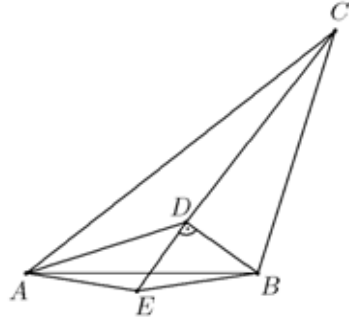
а) Пресметај го збирот $\angle DAC + \angle DBC$.

б) Пресметај $\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}$.

Решение. а) Последователно добиваме:

$$\begin{aligned}\angle DAC + \angle DBC &= 180^\circ - \angle ADC - \angle ACD + 180^\circ - \angle BDC - \angle BCD \\ &= 360^\circ - (\angle ADC + \angle BDC) - \angle ACB \\ &= \angle ADB - \angle ACB = 90^\circ.\end{aligned}$$

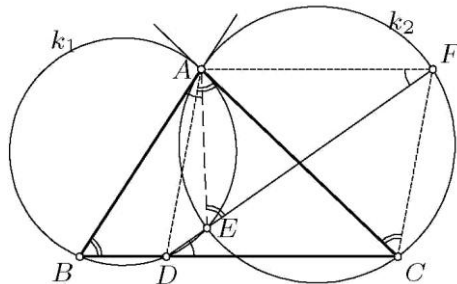
б) Нека E е внатрешна точка за $\angle ADB$ таква што $\angle BDE = 90^\circ$ и $\overline{BD} = \overline{DE}$. Тогаш, $\angle ADE = \angle ACB$. Освен тоа $\overline{BD} = \overline{DE}$ и од условот $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}$ следува дека $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}$, што значи дека $\triangle ACB \sim \triangle ADE$. Значи, $\angle EAD = \angle BAC$ и $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$, од каде добиваме дека $\triangle ABE \sim \triangle ACD$. Конечно,



$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AC} \cdot \overline{BD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}\sqrt{2}}{\overline{BD}} = \sqrt{2}.$$

7. Даден е триаголник ABC . Кружницата k_1 минува низ точките A и B и ја допира правата AC , а кружницата k_2 минува низ точките A и C и ја допира правата AB . Кружницата k_1 ја сече правата BC во точката D ($D \neq B$) и ја сече кружницата k_2 во точката E ($E \neq A$). Докажи дека правата DE ја подели отсечката AC .

Решение. Со F да ја означиме втората пресечна точка на правата DE и кружницата k_2 . Тврдиме дека $ADCF$ е паралелограм, од каде веднаш слеува тврдењето на задачата.



Навистина, од својството меѓу тангентата и тетивата, во ориентирани агли имаме

$$\angle AFE = \angle BAE = \angle CDE,$$

т.е. $AF \parallel CD$, и слично од истото својство

$$\angle ACF = \angle AEF = \angle ABD = \angle CAD,$$

т.е. $CF \parallel AD$.

8. Во остроаголен триаголник ABC точката D е подножје на висината повлечена од темето A , а P и Q се соодветно подножјата на нормалите повлечени од точката D на правите AB и AC . Симетралите на $\angle BDP$ и $\angle CDQ$ ги сечат правите AB и AC во точките K и L , соодветно. Докажи дека центарот на впишаната кружница на триаголникот DPQ припаѓа на правата KL .

Решение. Нека S е центарот на впишаната кружница во $\triangle DPQ$ (направи цртеж). Бидејќи

$$\angle DSP = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle DQP = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BDP = \angle DKB,$$

четриаголникот $DKPS$ е тетивен, па затоа $\angle DSK = \angle DPK = 90^\circ$. Слично, $\angle DSL = 90^\circ$, од што следува тврдењето на задачата.

9. Даден е $\triangle ABC$ со ортоцентар H . Опишаната кружница ω околу $\triangle HAB$ по втор пат ја сече отсечката BC во точката D . Правата DH ја сече отсечката AC во точката P , а Q е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ADP$. Докажи дека центарот на ω лежи на опишаната кружница околу $\triangle BDQ$.

Решение. Со R да го означиме центарот на ω и нека E е пресечната точка на правите BH и AC . Тогаш

$$\angle RBD = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle DRB = 90^\circ - \angle DHB = 90^\circ - \angle PHE = \angle BPH = 180^\circ - \angle APD.$$

Од друга страна

$$\angle MQD = \frac{1}{2}\angle AQD = \frac{1}{2}(360^\circ - 2\angle APD) = 180^\circ - \angle APD = \angle RBD$$

од каде следува дека R лежи на опишаната кружница околу $\triangle BDQ$.

10. Даден е разностран $\triangle ABC$ со опишана кружница ω . Тангентата на ω во точката C ја сече правата AB во точката D . Нека I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Правите AI и BI ја сечат симетралата на $\angle BDC$ во точките Q и P , соодветно. Нека M е средината на отсечката PQ . Докажи дека правата MI го преполовува лакот ACB на ω .

Решение. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека A лежи меѓу B и D . Правите AI и BI по втор пат ја сечат ω во точките A' и B' , соодветно. Нека L е средината на лакот ACB . Тогаш важи

$$\angle LA'A = \angle LBA = \frac{\angle A + \angle B}{2} = \angle B'IA.$$

Според тоа, $LA' \parallel IB'$ и аналогно $LB' \parallel IA'$. Значи, четириаголникот $IA'LB'$ е паралелограм и LI ја преполовува $A'B'$. Ќе докажеме дека $PQ \parallel A'B'$. Имаме,

$$\angle CDB = \angle CAB - \angle ACD = \angle A - \angle B.$$

Од друга страна

$$\angle PQA = \angle QAB - \angle QDB = \frac{\angle A}{2} - \frac{\angle A - \angle B}{2} = \frac{\angle B}{2} = \angle B' A' A$$

па затоа $PQ \parallel A'B'$. Тогаш LI минува низ M .

11. Правата BD симетрала на агол во $\triangle ABC$ ($D \in AC$) и по втор пат ја сече опишаната кружница околу него Ω во точката E . Нека F е втората пресечна точка на Ω и кружницата со дијаметар DE . Докажи дека правата симетрична на BF во однос на BD минува низ средината на страната AC .

Решение. *Прв начин.* Нека M е средина на AC , а F' и B' се вторите пресечни точки на правите BM и FM со Ω (направи цртеж). Бидејќи $AE = CE$, заклучуваме дека правата $l = ME$ е симетрала на отсечката AC . Значи, $\angle EMD = 90^\circ$ и затоа M лежи на кружницата ω со дијаметар BD . Имаме,

$$\frac{1}{2} \angle B'CE = \angle B'FE = \angle MFE = \angle MDE = \angle CDE = \frac{1}{2}(\angle B + \angle A) = \frac{1}{2} \angle BAE,$$

па затоа $B'CE = BAE$, т.е. точките B и B' се симетрични во однос на l .

Последното значи дека $EF = EF'$, од каде добиваме $\angle FBE = \angle F'BE$. Според тоа, правата BF' , која минува низ M , е симетрична на BF во однос на BE , што и требаше да се докаже.

Втор начин. Како и во првиот начин на решавање добиваме дека ME е симетрала на AC и $M \in \omega$. Нека правата DF ја сече Ω по втор пат во точка G . Бидејќи $\angle DFE = 90^\circ$, добиваме дека G е дијаметрално спротивна на E . Во случајов $M \in EG$. Значи, $\angle FBE = \angle FGE$.

Понатаму, EG е дијаметар, па затоа $\angle GBE = 90^\circ$. Од $\angle GDB = \angle GMD = 90^\circ$ следува дека $GBDM$ е тетивен четириаголник (со дијаметар DG), па затоа $\angle MBE = \angle MBD = \angle MGD = \angle EGF$. Конечно, $\angle FBE = \angle FGE = \angle MBE$, со што задачата е решена.

12. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со висини BD и CE . Точките S и T се симетрични на точката E во однос на страните AC и BC , соодветно. Опишаната кружница околу $\triangle CST$ има центар O и по втор пат ја сече правата AC во точката X . Докажи дека правите XO и DE се заемно нормални.

Решение. *Лема.* Даден е $\triangle ABC$ со центар на опишана кружница O . Точките D и E припаѓаат на страните AB и AC и се такви што точките D, E, C, B се конциклични. Тогаш правите AO и DE се заемно нормални.

Доказ. Од $\overline{AO} = \overline{BO}$ следува

$$\angle DAO = \angle BAO = 90^\circ - \frac{\angle AOB}{2} = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - \angle ADE,$$

па затоа $\angle DAO + \angle ADE = 90^\circ$, од каде следува дека правите AO и DE се заемно нормални. ■

Со M и N да ги означиме пресечните точки на правите ET и BC , и на правите ES и AC , соодветно. Тогаш

$$\angle ECN = \angle EMN = \angle KTS = \angle NCS = \angle XTS$$

и

$$\angle EDB = \angle NED = \angle DSE = \angle ECB = \angle ENM = \angle EST,$$

од каде следува дека точките S, D и T лежат на една права. Тогаш

$$\angle ATD = \angle XCS = \angle DCE,$$

па значи точките T, C, D и E лежат на една кружница. Оттука заклучуваме дека правите XO и DE се заемно нормални.

13. Во рамнината се дадени точки A и B , ($A \neq B$). Точката C се движи во рамнината така што $\angle ACB = \alpha$, каде α е даден агол ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). Впишаната кружница во $\triangle ABC$ има центар I и ги допира страните AB, BC и CA соодветно во точките D, E и F . Правите AI и BI ја сечат EF соодветно во точки M и N . Докажи дека:

а) Отсечката MN има константна должина.

б) Опишаната кружница околу $\triangle DMN$ минува низ фиксна точка.

Решение. а) Од $\triangle AFM$ добиваме

$$\begin{aligned} \angle AMF &= 180^\circ - (\angle MFA + \angle FAM) \\ &= 90^\circ - (\angle EFI + \angle FAM) \\ &= 90^\circ - (\angle ECI + \angle FAM) \\ &= 90^\circ - \left(\frac{\angle C}{2} + \frac{\angle A}{2}\right) = \frac{\angle B}{2} = \angle IBA. \end{aligned}$$

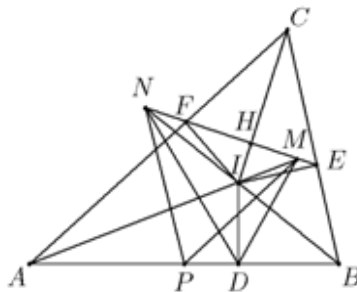
Исто така, важи $\angle NIM = \angle AIB$. Според тоа, $\triangle IMN \sim \triangle IBA$. Оттука, за $H = EF \cap IC$

$$\text{имаме } \frac{MN}{BA} = \frac{IH}{ID} = \frac{IH}{IF} = \sin \angle EFI = \sin \frac{\alpha}{2} \text{ и}$$

$$\text{затоа } \overline{MN} = \overline{BA} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \text{const.}$$

б) Точките F и D се симетрични во однос на правата AM . Од $\triangle IMN \sim \triangle IBA$ следува дека $\angle IMD = \angle IBD$. Според тоа, четириаголникот $IMBD$ е тетивен, од каде добиваме $\angle BMA = 90^\circ$. Ако P е средина на хипотенузата AB , тогаш

$$\angle BPM = 2\angle PAM = 2\angle BAI = \angle BAC.$$



Бидејќи точките E и D се симетрични во однос на правата BN , повторно до $\triangle IMN \sim \triangle IBA$ следува дека

$$\angle MND = 2\angle INM = 2\angle IAB = \angle BAC.$$

Според тоа, $\angle MND = \angle BPM = \angle DPM$, што значи дека точките M, N, D и P лежат на една кружница, т.е. опишаната кружница околу $\triangle DMN$, која минува низ постојана точка, а тоа е средината на отсечката AB .

14. Даден е остроаголен рамнокрак триаголник ABC , $\overline{AB} = \overline{AC}$. Точката M е средина на пократкиот лак BC на кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Правата низ M паралелна со AC ги сече правите BC и AB во точките D и E , соодветно. Правата низ D паралелна со AB ја сече AC во точката F . Докажи дека $\angle MEF = 90^\circ$.

Решение. Четириаголникот $AEDF$ е паралелограм, па затоа $\angle BEM = \angle FAE$ и заради

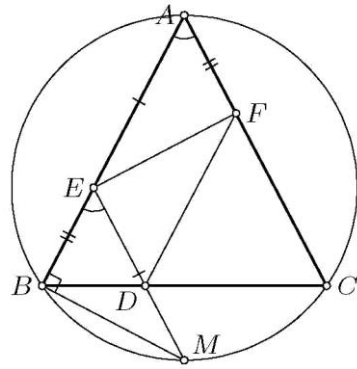
$$\angle EBD = \angle ACB = \angle EDB$$

важи

$$\overline{EB} = \overline{ED} = \overline{AF}.$$

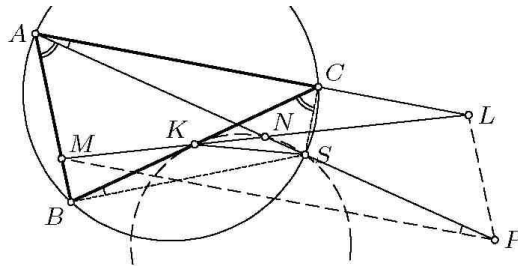
Понатаму, од $\angle EMA = \angle MAC = \angle EAM$ следува $\overline{EM} = \overline{AE}$. Според тоа, триаголниците EBM и AFE се складни, па затоа важи

$$\angle MEF = \angle AFE = \angle EBM = 90^\circ.$$



15. Даден е триаголник ABC . Права која минува низ средината K на страната BC ги сече страната AB и полуправата AC во точките M и L , соодветно. Нека N е средината на отсечката LM . Правата AN пом втор пат ја сече опишаната кружница на триаголникот ABC во точката S . Ако точките K, N, S се различни, докажи дека опишаната кружница околу триаголникот KNS ја допира правата BC .

Решение. Од $\angle KCL > \angle KBM$ следува $\overline{KL} > \overline{KM}$, па точката N припаѓа на отсечката KL .



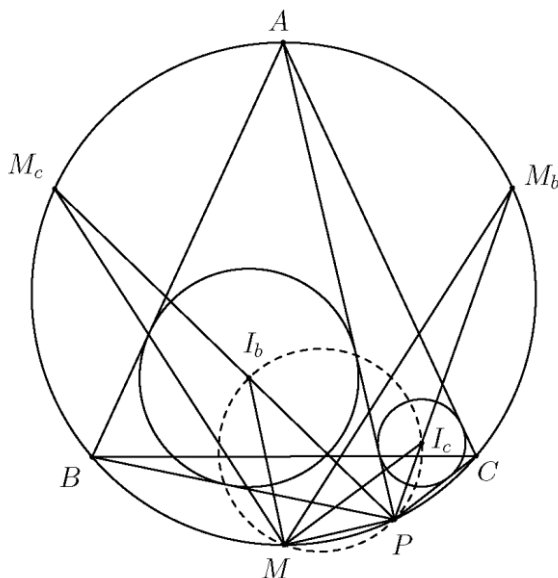
Нека P е точка таква што четириаголникот $ALPM$ е паралелограм. Бидејќи $\angle SBC = \angle SAC = \angle MPA$ и $\angle SCB = \angle SAB = \angle MAP$, триаголниците SBC и MPA се слични. Во оваа сличност точките K и N си соодветствуваат една на друга, па затоа важи $\angle SKC = \angle MNA = \angle KNA$, од што следува дека правата KC ја допира кружницата KNS .

16. Нека точката P припаѓа на внатрешноста на триаголникот ABC и е таква што $\angle PAB = \angle PCA$ и $\angle PAC = \angle PBA$. Ако D е средина на отсечката AB , докажи дека $\angle APD = \angle ACB$.

Решение. Нека Q е симетричната точка на точката P во однос на D . Од $\angle QBA = \angle PAB = \angle PCA$ и $\angle QAB = \angle PBA = \angle PAC$ следува дека триаголниците QAB и PAC се слични, па затоа $\frac{AQ}{AP} = \frac{AB}{AC}$ и како $\angle QAP = \angle BAC$ добиваме дека триаголниците AQP и ABC се слични. Оттука следува $\angle APD = \angle APQ = \angle ACB$.

17. Рамнокрак $\triangle ABC$ ($\overline{AB} = \overline{AC}$) е впишан во кружница ω . Нека P е произволна точка од лакот BC кој не ја содржи A . Точките I_B и I_C се центрите на впишаните кружници во триаголниците ABP и ACP , соодветно. Докажи дека опишаната кружница околу $\triangle PI_B I_C$ минува низ фиксна точка која не зависи од изборот на точката P .

Решение. Нека M е средината на лакот BC кој не ја содржи A . Ќе докажеме дека M го има саканото својство.



Од $\angle MPA = 90^\circ$ и PA е симетрала на $\angle I_B P I_C$ следува дека PM е надворешна симетрала на овој агол, па затоа доволно е да докажеме дека $\overline{MI_B} = \overline{MI_C}$. Со M_B и M_C да ги означиме вторите пресечни точки на правите PI_B и PI_C со кружницата ω , соодветно. Тогаш

$$\overline{M_B I_B} = \overline{M_B B} = \overline{M_C C} = \overline{M_C I_C} \text{ и } \angle I_B M_B M = \frac{PB}{2} = \angle I_C M_C M.$$

Според тоа, $\triangle I_B M_B M \cong \triangle I_C M_C M$, од каде следува $\overline{MI_B} = \overline{MI_C}$.

18. Околу тапоаголен $\triangle ABC$, $\angle ABC > 90^\circ$, е опишана кружница Γ со центар O . Нека B_1 е пресечната точка на правата AB и тангентата на Γ во C , а O_1 е центарот на опишаната кружница околу $\triangle AB_1C$. Нека B_2 е внатрешна точка за отсечката BB_1 и нека права низ B_2 ја допира Γ во точката C_1 (поблиско до C). Нека O_2 е центарот на опишаната кружница околу $\triangle AB_2C_1$ и да претпоставиме дека $OO_2 \perp AO_1$. Докажи дека точките O, O_1, O_2, C_1 и C се конциклични (лежат на иста кружница).

Решение. Од условот $OO_2 \perp AO_1$ и од $OO_2 \perp AC_1$ следува дека O_1 лежи на отсечката AC_1 . Освен тоа, $\overline{OA} = \overline{OC_1}$, $\angle OC_1 A = \angle O A C_1$ и $\angle O C O_1 = \angle O A O_1$, бидејќи $\overline{OA} = \overline{OC}$ и $\overline{O_1 A} = \overline{O_1 C}$. Според тоа, $\angle OC_1 A = \angle O C O_1$, што значи дека точките O, O_1, C_1 и C се конциклични.

Ќе докажеме дека $\angle O O_1 C_1 = \angle O O_2 C_1$. Последователно добиваме

$$\angle C_1 A B_2 = \frac{\pi - \angle A O_1 B_1}{2} = \frac{\pi}{2} - \angle A C B_1 = \frac{\pi}{2} - \angle B C A - \angle B_1 C B = \angle A B C - \frac{\pi}{2},$$

$$\angle B_2 C_1 A = \angle B_2 C_1 B + \angle B C_1 A = \angle C_1 A B_2 + \angle B C A = \frac{\pi}{2} - \angle C A B,$$

и затоа

$$\angle A B_2 C_1 = \pi - \angle B_2 C_1 A - \angle C_1 A B_2 = \pi + \angle C A B - \angle A B C.$$

Освен тоа, $\angle B_1 C B + \angle B C A = \angle B_1 C O_1 + \angle O_1 C A$ и значи

$$\angle C A B + \angle B C A = \frac{\pi}{2} - \angle C A B + \angle C_1 A C,$$

од каде следува $\angle A B C - \angle C A B = \frac{\pi}{2} - \angle C_1 A C < \frac{\pi}{2}$. Според тоа, $\angle A B_2 C$ е тап агол и

$$\angle O O_2 C_1 = \angle A B_2 C_1 = \pi + \angle C A B - \angle A B C.$$

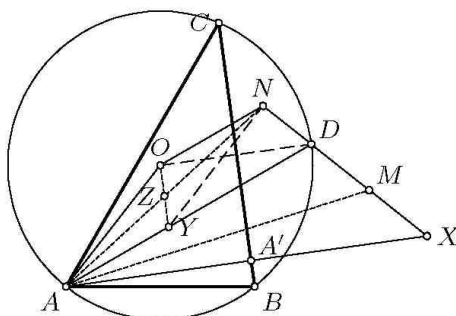
Од друга страна

$$\begin{aligned} \angle O O_1 C_1 &= \angle C_1 O_1 C + \angle C O_1 O = 2\angle C_1 A C + \angle C C_1 O \\ &= 2\angle C_1 A C + \frac{\pi - \angle C O C_1}{2} = \frac{\pi}{2} + \angle C_1 A C \\ &= 2\angle C A B + \angle B C A = \pi + \angle C A B - \angle A B C. \end{aligned}$$

Значи, $\angle OO_1C_1 = \angle OO_2C_1$, од каде следува дека точките O, O_1, O_2 и C_1 се концикличини. Претходно докажавме дека точките O, O_1, C_1 и C , па заклучуваме дека точките O, O_1, O_2, C_1 и C се концикличини.

19. Во триаголникот ABC точката O е центар на опишаната кружница, A' е подножјето на висината повлечена од темето A , а X е произволна точка на полуправата AA' . Симетралата на $\angle BAC$ по втор пат ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката D . Точката M е средина на отсечката DX , а N е точка на правата DX таква што $ON \parallel AD$. Докажи дека $\angle BAM = \angle CAN$.

Решение. Нека Y точка на AD таква што $AONY$ е паралелограм, а Z е средина на отсечката OY (види цртеж).



Триаголниците OND и ADX имаат паралелни страни, па затоа се слични. Според тоа,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{AO}}.$$

Бидејќи уште $\angle OAY = \angle DAX$, триаголниците AOY и AXD се слични. Оттука и триаголниците AZY и AMD се слични, па затоа важи $\angle NAD = \angle DAM$, односно $\angle BAM = \angle CAN$.

20. Даден е $\triangle ABC$, во кој $\angle ABC > \angle BCA$, T е средина на лакот BAC и I е центар на впишаната кружница. Точката E е таква што $\angle AEI = 90^\circ$ и $AE \parallel BC$. Правата TE по втор ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката P . Определи го $\angle BAC$ ако се знае дека $\angle ABC = \angle IPB$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за $\triangle ABC$. Нека AH , $H \in BC$ е висината повлечена од темето A (направи цртеж). Тогаш $AH \parallel IE$ и

$$\angle AIE = \angle AIH = \angle IAB - \angle IAH = \frac{\alpha}{2} - (90^\circ - \beta) = \frac{\beta - \gamma}{2}.$$

Бидејќи $\angle APE$ е еднаков на половина од аголот над лакот AT , добиваме $\angle APE = \frac{\beta - \gamma}{2}$, па затоа $\angle APE = \angle AIE$.

Од претходните разгледувања следува дека четириаголникот $APEI$ е тетивен и од $\angle AEI = 90^\circ$ следува дека $\angle API = 90^\circ$. Според условот $\angle IPB = \beta$, па затоа $\angle APB = 90^\circ + \beta$. Но, важи и $\angle APB = 180^\circ - \gamma$, па затоа $\alpha = 90^\circ$.

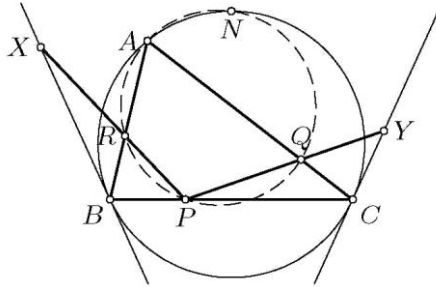
21. На страните BC, CA и AB на триаголникот ABC редоследно се дадени точки P, Q и R така што четириаголникот $AQPR$ е тетивен и $\overline{BR} = \overline{CQ}$. Тангентите на опишаната кружница околу триаголникот ABC во точките B и C ги сечат правите PR и PQ во точките X и Y , соодветно. Докажи дека $\overline{PX} = \overline{PY}$.

Решение. Од

$$\angle BPR < 180^\circ - \angle QPR = \angle BAC,$$

следува дека точката X е на полуправата PR . Слично, точката Y е на полуправата PQ . При тоа важи

$$\angle RBX = \angle ACB = \angle QCP \text{ и } \angle BRX = \angle PRA = \angle PQC,$$



од што заедно со $\overline{BR} = \overline{CQ}$ се добива дека $\triangle BRX \cong \triangle CQP$. Според тоа, $\overline{BX} = \overline{CP}$. Слично $\overline{CY} = \overline{BP}$, па затоа триаголниците XBP и PCY се складни, од каде следува $\overline{PX} = \overline{PY}$.

Забелешка. Средината N на лакот BAC на опишаната кружница припаѓа на кружницата AQR и важи $\overline{NQ} = \overline{NR}$, а точките X и Y се симетрични во однос на правата NP .

22. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ таков што $\angle ABC > \angle ACB$. Нека $AD \perp BC$ и $DE \perp AC$ ($D \in BC, E \in AC$). Точката F припаѓа на отсечката DE . Докажи дека $AF \perp BF$ ако и само ако $\overline{EF} \cdot \overline{DC} = \overline{BD} \cdot \overline{DE}$.

Решение. Нека $AF \perp BF$. Тогаш четириаголникот $ABDF$ е тетивен и затоа $\angle ABF = \angle ADF$, $\angle BAF = \angle DAE$. Значи, $\angle BAD = \angle FAE$ и затоа $\triangle ABD \sim$

$\triangle AFE$, од каде следува $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{FE}}$. Од друга страна $\triangle ADE \sim \triangle DCE$ и затоа $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}}$. Од последните две равенства следува дека $\frac{\overline{BD}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}}$, односно $\overline{EF} \cdot \overline{DC} = \overline{BD} \cdot \overline{DE}$.

Обратно, нека $\overline{EF} \cdot \overline{DC} = \overline{BD} \cdot \overline{DE}$. Тогаш $\frac{\overline{BD}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}}$ и значи $\triangle ADE \sim \triangle DCE$,

па затоа $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}}$. На ист начин добиваме $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{FE}}$ и оттука $\triangle ABD \sim \triangle AFE$.

Според тоа, $\angle ABD = \angle AFE$, па затоа четириаголникот $ABDF$ е тетивен. Последното значи $\angle AFB = \angle BDA$, од каде следува $AF \perp BF$.

23. Кружницата ω ја допира кружницата Ω одвнатре во точката T . Променивата тангента t на кружницата ω ја допира ω во точката S и ја сече кружницата Ω во точката P . Докажи дека центрите на опишаните кружници на сите можни триаголници PST лежат на фиксна кружница.

Решение. Со O, O_1 и U соодветно да ги означиме центрите на кружниците Ω , ω и опишаната кружница околу триаголникот PST , направи цртеж. Знаеме дека $OU \perp PT$ и $O_1U \perp ST$. Според тоа,

$$\angle OUO_1 = \angle PTS = 90^\circ - \angle USP = \angle O_1SU = \angle OTU,$$

што значи дека триаголниците OUO_1 и OTU се слични. Конечно, важи

$$\overline{OU}^2 = \overline{OO_1} \cdot \overline{OT}, \text{ што е константа.}$$

24. Во триаголникот ABC , симетралата на аголот во темето C ја сече страната AB во точката C_1 . Нормалата од C_1 на правата BC ја сече опишаната кружница на триаголникот во точката K (на спротивната страна на правата BC во однос на C_1). Нормалата од C на AK ја сече AB во точката L . Докажи дека средината на лакот AB (кој не ја содржи точката C) припаѓа на правата KL .

Решение. Од

$$\angle CKC_1 = 90^\circ - \angle BCK = 90^\circ - \angle LAK = \angle CLC_1,$$

следува дека точките C, C_1, K, L се конциклични. Сега

$$\angle AKL = 90^\circ - \angle KLC = 90^\circ - \angle KC_1C = \angle C_1CB = \frac{1}{2} \angle C = \frac{1}{2} \angle AKB,$$

па затоа KL е симетрала на $\angle AKB$ и минува низ средината на лакот AB .

25. Кружницата со центар I ги допира страните BC, CA и AB на триаголникот ABC во точките D, E и F , соодветно. Тежишната линија повлечена од темето A ја сече EF во точката K . Докажи дека K припаѓа на правата DI .

Решение. Нека DI ја сече EF во K' и нека правата низ K' паралелна со BC ги сече AB и AC во B' и C' , соодветно (направи цртеж). Точките F, B', I, K' припаѓаат на кружницата со дијаметар IB' , па затоа $\angle B'IK' = \angle AFK'$. Аналогно се добива $\angle C'IK' = \angle AEK' = \angle AFK'$. Значи, триаголниците $B'IK'$ и $C'IK'$ се складни, па затоа $\overline{B'K'} = \overline{C'K'}$. Тоа значи дека K' припаѓа на тежишната линија низ темето A , па затоа $K' \equiv K$.

26. Точката D припаѓа на страната AC на триаголникот ABC и е таква што $\overline{BD} = \overline{AC}$. Точката F е во внатрешноста на триаголникот ABC и е таква што $\angle ACF = \frac{1}{2} \angle ADB$ и $\angle CAF = \frac{1}{2} \angle CDB$. Правата BF ја сече AC во точката E . Докажи дека $\overline{AD} = \overline{CE}$.

Решение. Од

$$\angle ACF + \angle CAF = \frac{1}{2} \angle ADB + \frac{1}{2} \angle CDB = 90^\circ$$

добиваме $\angle AFC = 90^\circ$. Нека G е точка симетрична на точката A во однос на точката F . Тогаш $\angle ACG = 2\angle ACF = \angle ADB$, па затоа $CG \parallel BD$. Понатаму, $\overline{CG} = \overline{AC} = \overline{BD}$, што значи дека $BDCG$ е паралелограм и $\overline{BG} = \overline{CD}$. Сега триаголниците AFE и GFB имаат еднакви агли и $\overline{AF} = \overline{FG}$, па затоа тие се складни. Оттука следува $\overline{AE} = \overline{BG} = \overline{CD}$, па затоа $\overline{AD} = \overline{CE}$.

27. Нека P е произволна точка во внатрешноста на остроаголниот триаголник ABC , а A_1, B_1, C_1 се симетричните точки на точката P во однос на страните BC, CA, AB , соодветно. Докажи дека тежиштето на триаголникот $A_1B_1C_1$ лежи внатре во триаголникот ABC .

Решение. Со A', B', C' да ги означиме соодветно проекциите на точката P на страните BC, CA, AB , а со A_2, B_2, C_2 да ги означиме средините на отсечките B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 , соодветно. Бидејќи $B'A_2 \parallel PC_1 \perp AC'$ и аналогно $C'A_2 \perp AB'$, точката A_2 е ортоцентар на триаголникот $AB'C'$. Притоа

$$\angle AB'C' < \angle AB'P = 90^\circ,$$

што значи дека триаголникот $AB'C'$ е остроаголен, па затоа точката A_2 припаѓа на неговата внатрешност. Значи, A_2 е во внатрешноста на триаголникот ABC . Аналогно точките B_2 и C_2 се во внатрешноста на $\triangle ABC$, а тежиштето на $\triangle A_1B_1C_1$ е во внатрешноста на $\triangle A_2B_2C_2$.

28. Даден е остроаголен триаголник ABC . Внатре во триаголникот е избрана точка M таква што $\angle BMC = 180^\circ - \angle BAC$. Правите BM и CM ги сечат

спротивните страни на триаголникот ABC во точките D и E , соодветно. Докажи дека опишаната кружница на триаголникот ADE минува низ фиксна точка (различна од A), независно од изборот на точката M .

Решение. Од $\angle BMC = \angle BHC$, каде H е ортоцентарот на $\triangle ABC$, следува дека точката M припаѓа на кружницата BCH . Без ограничување на општоста можеме да земеме дека M припаѓа на пократкиот лак BH . Нека кружницата над дијаметар AH по втор пат ја сече кружницата опишаната кружница околу $\triangle BCH$ во точката F (направи цртеж). Од

$$\angle AFM = 90^\circ + \angle HFM = \angle BAC + \angle ACH + \angle HCM = 180^\circ - \angle AEM$$

следува дека точките A, E, M, F лежат на иста кружница. Слично и точката D припаѓа на истата кружница, што значи дека опишаната кружница на триаголникот ADE секогаш минува низ точката F .

29. Нека O е опишаната кружница на остроаголниот триаголник ABC и нека O_1 и O_2 се центрите на опишаните кружници околу триаголниците OAB и OAC , соодветно. Кружниците опишани околу триаголниците OAB и OAC по втор пат ја сечат страната BC во точките D и E , соодветно. Симетралата на страната BC ја сече страната AC во точката F ($F \neq A$). Докажи дека центарот на опишаната кружница околу триаголникот ADE припаѓа на AC ако и само ако точката F припаѓа на правата O_1O_2 .

Решение. Нека M е средина на BC и O' е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ADE . Тогаш

$$\begin{aligned} \angle O'AE &= \frac{1}{2}(180^\circ - (360^\circ - 2\angle ADE)) \\ &= \angle ADE - 90^\circ = 90^\circ - \angle ADB \\ &= 90^\circ - \angle AOB = 90^\circ - 2\angle ACB. \end{aligned}$$

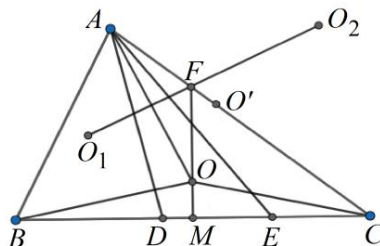
Оттука добиваме

$$\begin{aligned} \angle CAE &= \angle OAC - \angle OAE = (90^\circ - \angle ABC) - \angle OCB \\ &= (90^\circ - \angle ABC) - (90^\circ - \angle BAC) = \angle BAC - \angle ABC. \end{aligned}$$

Значи, $O' \in AC$ ако и само ако $90^\circ - 2\angle ACB = \angle BAC - \angle ABC$. Забележуваме дека

$$\begin{aligned} F \in O_1O_2 &\Leftrightarrow \overline{AF} = \overline{OF} \Leftrightarrow \angle OAF = \angle AOF \Leftrightarrow \\ 90^\circ - \angle ABC &= \angle AOC + \angle COM - 180^\circ \Leftrightarrow \\ 90^\circ - \angle ABC &= 2\angle ABC + \angle BAC - 180^\circ \Leftrightarrow \\ 180^\circ - \angle BAC - 3\angle ABC &= 90^\circ \Leftrightarrow \\ \angle BAC - \angle ABC + 2\angle ACB &= 90^\circ \end{aligned}$$

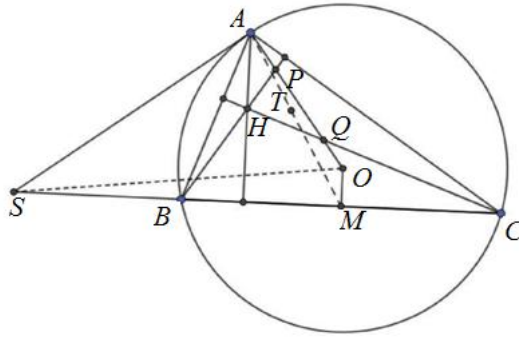
Според тоа, $O' \in AC$ ако и само ако $F \in O_1O_2$.



30. Нека O е центар на опишаната кружница на разностранниот триаголник ABC . Правата OA ги сече висините на триаголникот ABC повлечени од темињата B и C во точките P и Q , соодветно. Ако H е ортоцентарот на триаголникот ABC , докажи дека центарот на опишаната кружница на триаголникот PQH лежи на тежишната линија на триаголникот ABC повлечена од темето A .

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\overline{AB} < \overline{AC}$. Имаме

$$\angle PQH = 90^\circ - \angle QAB = 90^\circ - \angle OAB = \frac{1}{2} \angle AOB = \angle ACB.$$



Слично, $\angle QPH = \angle ABC$. Значи, триаголниците ABC и HPQ се слични. Нека k и k_1 се кружниците опишани околу триаголниците ABC и HPQ , соодветно. Од $\angle AHP = 90^\circ - \angle HAC = \angle ACB = \angle HQP$ следува дека правата AH е тангента на кружницата k_1 . Нека T е центарот на кружницата k_1 и нека правите AT и BC се сечат во точката M . Нека S е точка на правата BC таква што AS е тангента на кружницата k . На точката S за триаголникот ABC и соодветствува точката A за триаголникот HPQ , па затоа важи $\angle OSM = \angle OAT = \angle OAM$. Според тоа, четириаголникот $SAOM$ е тетивен и како $AS \perp AO$ важи $\angle OMS = 180^\circ - \angle OAS = 90^\circ$. Последното значи дека точката M е ортогонална проекција на точката O на страната BC , па значи M е средина на отсечката BC . Значи, AM е тежишна линија и на неа лежи T , што и требаше да се докаже.

31. Во $\triangle ABC$ медијаните AM_A , BM_B и CM_C се сечат во точката M . Кружницата Ω_A минува низ средината на отсечката AM и ја допира отсечката BC во точката M_A . Аналогно се дефинираат кружниците Ω_B и Ω_C . Докажи дека кружниците Ω_A , Ω_B и Ω_C минуваат низ иста точка.

Решение. Лема 1. Надворешно за $\triangle ABC$ се конструирани $\triangle ABC_1$, $\triangle AB_1C$ и

$\triangle A_1BC$. Ако збирот $\angle BA_1C + \angle AB_1C + \angle AC_1B$ е делив со 180° , тогаш опишаните кружници околу $\triangle ABC_1$, $\triangle AB_1C$ и $\triangle A_1BC$ се сечат во една точка.

Доказ. Нека X е втората пресечна точка на кружниците опишани околу $\triangle A_1BC$ и $\triangle ABC_1$. Тогаш

$$\angle(BX, XC) = \angle(BA_1, A_1C) \text{ и } \angle(AX, XB) = \angle(AC_1, C_1B).$$

Затоа

$$\begin{aligned} \angle(AX, XC) &= \angle(AX, XB) + \angle(XB, XC) \\ &= \angle(AC_1, C_1B) + \angle(BA_1, A_1C) \\ &= \angle(AB_1, B_1C), \end{aligned}$$

што значи дека лежи на опишаната кружница околу $\triangle AB_1C$. ■

Да се вратиме на задачата. Нека K_A, K_B и K_C се соодветно средините на AM_A, BM_B и CM_C . Тогаш $M_C K_B \parallel AB$ и $K_B M_A \parallel MC$, како средни линии соодветно во $\triangle ABM$ и $\triangle CBM$, па затоа $\angle M_C K_B M_A = \angle AMC$. Аналогно се докажува дека $\angle M_C K_A M_B = \angle BMC$ и $\angle M_A K_C M_B = \angle BMA$. Тогаш

$$\angle M_C K_A M_B + \angle M_B K_C M_A + \angle M_A K_B M_C = 360^\circ.$$

Согласно Лема 1, опишаните кружници околу триаголниците $M_C K_A M_B$, $M_B K_C M_A$ и $M_A K_B M_C$ имаат заедничка точка X . Од овие кружници имаме:

$$\begin{aligned} \angle(K_B X, X M_B) &= \angle(K_B X, X M_C) + \angle(X M_C, X M_B) \\ &= \angle(K_B M_A, M_A M_C) + \angle(M_C K_A, K_A M_B) \\ &= \angle(MC, CA) + \angle(BM, MC) \\ &= \angle(K_B M_B, AC), \end{aligned}$$

што значи дека X лежи на Ω_B . Аналогно се докажува дека таа лежи и на Ω_A и Ω_C .

32. Нека AA_1 и CC_1 се висините на разностранниот остроаголен $\triangle ABC$, H и O се соодветно неговиот ортоцентар и центарот на опишаната кружница, а B_0 е средината на страната AC . Правата BO ја сече страната AC во точката P , а правите BH и A_1C_1 се сечат во точката Q . Докажи дека правите HB_0 и PQ се паралелни.

Решение. Нека O_1 е средина на отсечката BH . Од $\angle BA_1H = \angle BC_1H = 90^\circ$ следува дека O_1 е центарот на кружницата која минува низ точките A_1, B, C_1 и H . Правоаголните триаголници BAA_1 и BCC_1 се слични, па затоа $\frac{AB}{A_1B} = \frac{CB}{C_1B}$. Последното значи дека триаголниците ABC и A_1BC_1 се слични.

Да забележиме дека, како BQ и BP , така и BQ_1 и BO се парови соодветни отсечки во овие триаголници, па затоа $\frac{BQ_1}{BO} = \frac{BQ}{BP}$ и затоа $OQ_1 \parallel PQ$.

Нека B' е точката од опишаната кружница околу $\triangle ABC$, дијаметрално спротивна на B . Тогаш O е средина на отсечката BB' и $\angle BAB' = \angle CCB' = 90^\circ$. Имаме, $\angle ACB' = \angle BCB' - \angle BCA = 90^\circ - \angle BCA = \angle A_1AC$, па затоа $AA_1 \parallel CB'$. Аналогно се докажува дека $CC_1 \parallel AB'$. Според тоа, четириаголникот $AHCB'$ е паралелограм, B_0 е неговиот центар, па затоа лежи на дијагоналата HB' . Исто така OQ_1 е средна линија во $\triangle BHB'$, па затоа $OQ_1 \parallel HB_0$.

33. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со $\angle ABC = 90^\circ$. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ја допира страната BC во точката D . Точките X и Z се центрите на впишаните кружници во $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$, соодветно. Правата XZ ги сече правата AD во точката K и опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точките U и V . Правата AD по втор пат ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката Y , а точката M е средината на отсечката UV . Докажи дека $\overline{CY} = 2\overline{MK}$.

Решение. Да ги означиме соодветно со T и S допирните точки на BC со впишаните кружници во $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$, чии радиуси соодветно се r_1 и r_2 (направи цртеж). Лесно се докажува дека $\overline{DS} = \overline{DT}$. Бидејќи DX и DZ се симетрала на соседни агли, важи $\angle XDZ = 90^\circ$ и затоа

$$\overline{XZ}^2 = \overline{XD}^2 + \overline{DZ}^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2\overline{DT}^2.$$

Од друга страна, од правоаголниот трапез $XTSZ$ имаме

$$\overline{XZ}^2 = (r_1 - r_2)^2 + \overline{TS}^2.$$

Сега лесно добиваме дека $\overline{XZ} = r_1 + r_2$, што значи дека впишаните кружници во $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$ се допираат меѓусебно и до AD во точката K , и во случајов $XZ \perp AD$. Според тоа, $UV \parallel CY$.

Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, т.е. O е средина на AC . Тогаш $OM \perp UV$, бидејќи M е средина на UV и оттука $OM \perp CY$. Ако N е пресечната точка на OM и CY , тогаш $KYNM$ е правоаголник, N е средина на CY и $\overline{CY} = 2\overline{NY} = 2\overline{MK}$.

34. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со висини CK и AL , $K \in AB$ и $L \in BC$. Опишаната кружница околу $\triangle ABC$ по втор пат ги сече правите CK и AL соодветно во точките F и D . Точката E припаѓа на помалиот лак AC , а

правите BE и AC се сечат во точката N . Докажи дека, ако

$$\overline{AF}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{BF}^2,$$

тогаш $\angle KNB = \angle BNL$.

Решение. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ABC$. Тогаш $BH \perp AC$ и точките F и D се симетрични на H во однос на AB и BC , соодветно. Според тоа, $\overline{AF} = \overline{AH}$, $\overline{CD} = \overline{CH}$, $\overline{BD} = \overline{BH} = \overline{BE}$. Оттука и од условот следува дека $\overline{AH}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{AE}^2$. Лесно се докажува дека од последното равенство следува $HE \perp AC$, што значи дека точката E лежи на висината BH . Тогаш $BN \perp AC$ и равенството $\angle KNB = \angle BNL$ се симетрали на аглите чии темиња се подножните точки на висините во триаголникот.

35. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со висина AD , $D \in BC$ и центар I_a на припишаната кружница која ја допира страната BC . Точката K од продолжението на AB (B е меѓу A и K) е таква што $\angle AKI_a = 90^\circ + \frac{3}{4}\angle ACB$. Правата I_aK го сече продолжението на AD во точка L . Докажи дека правата DI_a е симетрала на $\angle AI_aB$ ако и само ако должината на отсечката AL е еднаква на дијаметарот на кружницата опишана околу $\triangle ABC$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за $\triangle ABC$. Нека точката $Q \in AD$ е таква што $\overline{AQ} = 2R$, D е меѓу A и Q . Нека I_aQ го сече продолжението на AB во точката P (направи цртеж). Не е тешко да се види дека равенството $\overline{AK} = 2R$ е еквивалентно на $L \equiv Q$, кое пак е еквивалентно на $P \equiv K$, т.е. $\angle API_a = 90^\circ + \frac{3\gamma}{4}$.

Основен момент во решението е доказот на равенството $\angle QI_aA = \angle QAI_a$. Последното следува од сличноста $\triangle QI_aD \sim \triangle QAI_a$, за што е доволно да докажеме дека $\overline{QI_a}^2 = \overline{QD} \cdot \overline{QA} = 2R(2R - h_a)$.

Нека $I_aH \perp AC$, $H \in AC$. Тогаш $\overline{AH} = b + (p - b) = p$ и $\overline{AI_a}^2 = p^2 + r_a^2$. Нека точката $U \in AQ$ е таква што $I_aU \perp AU$. Тогаш $\overline{AU} = r_a + h_a$ и

$$\overline{UI_a}^2 = \overline{AI_a}^2 - \overline{AU}^2 = p^2 + r_a^2 - (r_a + h_a)^2.$$

Освен тоа, $\overline{UQ} = \overline{AU} - \overline{AQ} = r_a + h_a - 2R$ и затоа

$$\begin{aligned} \overline{QI_a}^2 &= \overline{UI_a}^2 + \overline{UQ}^2 = p^2 + r_a^2 - (r_a + h_a)^2 + (r_a + h_a - 2R)^2 \\ &= p^2 + r_a^2 + 4R^2 - 4R(r_a + h_a). \end{aligned}$$

Сега бараното равенство е еквивалентно на равенството

$$p^2 + r_a^2 = 4Rr_a + 2Rh_a.$$

Последното равенство лесно следува од формулите $S = (p-a)r_a$, $4RS = abc$, $2S = ah$ и Хероновата формула.

Имаме

$$\angle I_a AD = \angle I_a AB - \angle DAB = \frac{\alpha}{2} - (90^\circ - \beta) = \frac{\beta - \gamma}{2}.$$

Според тоа, $\angle QI_a D = \frac{\beta - \gamma}{2}$. Да означиме $\angle DI_a A = \varphi$. Тогаш $\angle QI_a A = \frac{\beta - \gamma}{2} + \varphi$

и од $\triangle PAI_a$ имаме $\angle I_a PA = 90^\circ + \gamma - \varphi$. Од

$$\angle BAI_a + \angle BI_a A = \angle PBI_a = \frac{180^\circ - \beta}{2} = \frac{\alpha + \gamma}{2},$$

добиваме $\angle BI_a A = \frac{\gamma}{2}$. Според тоа, условот DI_a е симетрала на $\angle AI_a B$ е еквивалентен на $\varphi = \frac{\gamma}{4}$, што е еквивалентно на $\angle API_a = 90^\circ + \frac{3\gamma}{4}$.

36. Даден е остроаголен триаголник ABC . Нека M е произволна точка од страната AB , а N е средината на AC . Нека P и Q се подножјата на нормалите повлечени од темето A на правите MC и MN , соодветно. Докажи дека центарот на опишаната кружница на триаголникот PQN припаѓа на фиксна права додека M се менува на страната AB .

Решение. Нека $\angle BAC = \alpha$ и $\angle ACM = x$. Нека O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот PQN .

Нека точката D лежи на спротивната страна од точката B во однос на правата AC и е таква што $\angle AND = 2\alpha$ и $\overline{ND} = \frac{\overline{AC}}{2}$. Триаголникот APC е пра-

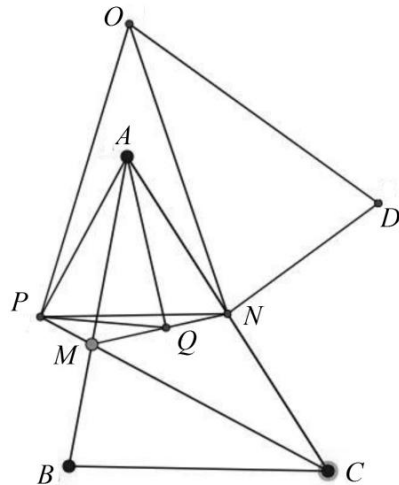
воаголен, па затоа $\overline{NP} = \overline{NC}$, од што следува $\angle ANP = 2x$. Понатаму, важи

$$\begin{aligned}\angle PQN &= 180^\circ - \angle PQM = 180^\circ - \angle PAM \\ &= 90^\circ + \angle PMA = 90^\circ + \angle BMC \\ &= 90^\circ + \alpha + x.\end{aligned}$$

Според тоа, $\angle PON = 180^\circ - 2\alpha - 2x$, па затоа добиваме

$$\begin{aligned}\angle ONP &= \alpha + x, \\ \angle ONA &= \angle ONP - \angle ANP = \alpha - x, \\ \angle OND &= \alpha + x.\end{aligned}$$

Понатаму, од



$$\overline{NP} = \overline{ND}, \overline{NO} = \overline{NO} \text{ и } \angle ONP = \angle OND$$

следува $\triangle OND \cong \triangle ONP$. Од ова следува

$\overline{OP} = \overline{OD} = \overline{ON}$, што значи дека O припаѓа на симетралата на отсечката ND , додека M се менува на страната AB .

37. Нека H и M се соодветно ортоцентарот и тежиштето на разностран $\triangle ABC$. Низ темињата A, B и C се повлечени прави нормални на AM, BM и CM , соодветно. Докажи, дека тежиштето на триаголникот формиран од овие прави лежи на правата MH .

Решение. Нека $A'B'C'$ е формиранит триаголник, а G е неговото тежиште. Ќе докажеме дека M е средина на отсечката GH .

Да го дополниме $\triangle BMC$ до паралелограм BMC_1A_1 . Бидејќи отсечката MA_1 ја преполовува страната BC , добиваме дека A_1 лежи на правата AM при што $\overline{AM} = \overline{A_1M}$ (M ја дели тежишната линија во однос 2:1). Освен тоа, $BA_1 \parallel MC \perp A'B'$ и $CA_1 \parallel MB \perp A'C'$. Значи, BA_1 и CA_1 се висини во $\triangle BA'C'$. Според тоа, A_1 е ортоцентар на $\triangle BA'C'$, па затоа $A'A_1 \perp BC$.

Страните на $\triangle BA_1M$ се нормални на соодветните страни на $\triangle A'B'C'$, па затоа овие триаголници се слични и правите BC и AG , кои ги содржат соодветните тежишни линии, се заемно нормални. Значи, правата $A'G$ се совпаѓа со правата $A'A_1$. Нека G' е симетричната точка на H во однос на M . Бидејќи триаголниците AHM и $A_1G'M$ се симетрични во однос на M , добиваме $A_1G' \parallel AH \perp BC$. Според тоа, G' лежи на правата $A'G$. Аналогно добиваме дека G' лежи на правата $B'G$, т.е. G' се совпаѓа со G .

38. Паралелограмот $ABCD$ е таков што $\angle ABC < 90^\circ$ и $\overline{AB} < \overline{BC}$. Точките E и F лежат на опишаната кружница ω околу $\triangle ABC$ и се такви што тангентите на ω во овие точки минуваат низ темето D . Притоа важи $\angle EDA = \angle FDC$. Определи го $\angle ABC$.

Решение. Нека l е симетралата на $\angle EDF$. Бидејќи DE и DF се тангенти на ω , правата l минува низ центарот O на ω (направи цртеж).

Да разгледаме симетрија во однос на l . Бидејќи $\angle EDA = \angle FDC$, полуправата DC се пресликува во полуправата DA . Бидејќи l минува низ O , кружницата ω се пресликува во самата себе. Според тоа сликата C' на C лежи на DA и на ω . Понатаму, од $\overline{AD} \neq \overline{DC}$ следува дека точките C' и A се различни.

Добиваме $\angle DC'C = \angle DCC'$. Бидејќи точките A, B, C, C' лежат на ω , имаме $\angle DC'C = \angle ABC = \angle ADC$. Според тоа, $\triangle DCC'$ е рамностран, па затоа

$$\angle ABC = \angle CDC' = 60^\circ.$$

39. Даден е $\triangle ABC$ со центар на впишаната кружница I . Точката I_1 е симетрична I во однос на правата BC . Опишаната кружница околу $\triangle BCI_1$ ја сече правата I_1I во точка P . Познато е дека P е надворешна точка за кружницата впишана во $\triangle ABC$. Нека X и Y се допирните точки на тангентите повлечени од P кон впишаната кружница во $\triangle ABC$. Докажи дека отсечката XY се содржи во средната линија на $\triangle ABC$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за $\triangle ABC$. Нека A_1 и A_2 се соодветно допирните точки на страната BC со впишаната и припишаната кружница, а I_a е центарот на припишаната кружница кон страната BC . Бидејќи $\overline{BA_2} = \overline{CA_1}$, правите A_2I_a и A_1I се симетрични во однос на средината на BC (направи цртеж).

Од $\angle IBI_1 = \angle ICI_a = 90^\circ$ и од условот следува дека

$$\angle BI_aC = 180^\circ - \angle BIC = 180^\circ - \angle BI_1C = \angle BPC.$$

Тогаш споменатата симетрија ја пресликува точката I_a во точка P' која лежи на полуправата A_1I , за која важи $\angle BP'C = \angle BI_aC$. Според тоа, $P' \equiv P$ и точките I_a и P се симетрични во однос на средината на BC , па затоа $\overline{PA_2} = \overline{I_aA_2} = r_a$.

Очигледно $XY \perp PA_1$ и нека $Z = XY \cap PA_1$. Бидејќи $\triangle IXP \sim \triangle IZX$ имаме $\overline{IZ} \cdot \overline{IP} = \overline{IX}^2$, па затоа $\overline{IZ} = \frac{r^2}{r_a - r}$. Тогаш

$$\overline{A_1Z} = r + \frac{r^2}{r_a - r} = \frac{1}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a}} = \frac{1}{\frac{p}{s} - \frac{p-a}{s}} = \frac{s}{a} = \frac{h_a}{2},$$

од каде следува тврдењето на задачата.

40. Во $\triangle ABC$ страните AB и BC се еднакви. Точката D припаѓа на внатрешноста на триаголникот и е таква што $\angle ADC = 2\angle ABC$. Докажи дека удвоеното растојание од B до симетралата на суплементните агли на $\angle ADC$ е еднакво на $\overline{AD} + \overline{DC}$.

Решение. Нека l е разгледуваната симетрала, K е проекцијата на B врз l , а B' и C' се симетричните точки соодветно на B и C во однос на l (направи цртеж). Тогаш $\overline{BB'} = 2\overline{BK}$, како удвоено растојание од B до l . Освен тоа, D лежи на отсечката AC' (бидејќи правите DA и DC се симетрични во однос на l) и $\overline{AC'} = \overline{AD} + \overline{DC'} = \overline{AD} + \overline{DC}$. Понатаму, од истата симетрија добиваме $\angle AC'B' = \angle DC'B'$ и $\angle BB'C' = \angle B'BC$.

Нека отсечките BB' и AC' се сечат во точката O . Од правоаголникот триаголник OKD добиваме

$$\angle BOC' = \angle KOD = 90^\circ - \angle KDO = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CDC') = \frac{1}{2} \angle ADC = \angle ABC.$$

Значи,

$$\angle ABB' = \angle ABC - \angle B'BC = \angle BOC' - \angle OB'C' = \angle OC'B'.$$

Аналогно,

$$\angle BOA = \angle BOC' - \angle ABO = \angle ABC - \angle ABO = \angle B'BC = \angle BB'C'.$$

Бидејќи отсечките BC и $B'C'$ се симетрични, имаме $\overline{B'C'} = \overline{BC} = \overline{AB}$. Значи, триаголниците ABO и $B'C'O$ се складни. Затоа,

$$\overline{BB'} = \overline{BO} + \overline{OB'} = \overline{C'O} + \overline{OA} = \overline{AC'} = \overline{AD} + \overline{DC},$$

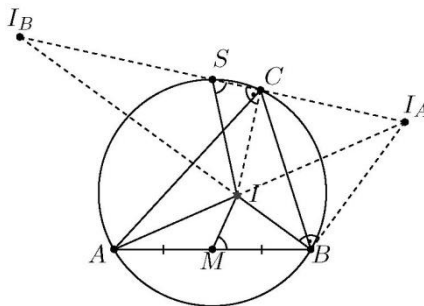
што и требаше да се докаже.

41. Даден е $\triangle ABC$. Нека k е опишаната кружница околу $\triangle ABC$, I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$, M е средината на страната AB , а S е средината на лакот ACB . Определи го $\angle ACB$, ако $\overline{IS} = 2\overline{IM}$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за агли во триаголник. Бидејќи S е средина на лакот ACB , важи

$$\begin{aligned} \angle ICS &= \angle ICA + \angle ACS \\ &= \frac{\gamma}{2} + (90^\circ - \frac{\gamma}{2}) = 90^\circ, \end{aligned}$$

па затоа правата CS е надворешна симетрала за $\angle ACB$ (симетрала на надворешниот агол за триаголникот во темето C). Според тоа, пресечните точки I_A и I_B на правите AI и BI со правата CS се центрите на припишаните кружници за $\triangle ABC$ кон страните BC и AC , соодветно.



Од $\angle I_A I_B I = \frac{\alpha}{2} = \angle IAB$ и $\angle I_B I_A I = \frac{\beta}{2} = \angle IBA$ следува дека $\triangle I_B I_A \sim \triangle IAB$. Освен тоа, $\angle BSC = \alpha = 2\angle SI_B B$, т.е. S е средина на хипотенузата во правоаголникот триаголник $I_A I_B B$.

Според тоа, IS и IM се соодветно медијани во слични триаголници. Но, според условот $\overline{IS} = 2\overline{IM}$, па затоа $\overline{I_A I_B} = 2\overline{IB}$, од каде следува $\angle I_A I_B = \frac{\gamma}{2} = 30^\circ$ и следствено $\angle ACB = 30^\circ$.

42. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Кружницата Ω минува низ точката A и нејзиниот центар е на висината AH , $H \in BC$ на $\triangle ABC$. Пресечните точки на Ω со отсечките AB и AC се соодветно точките P и Q при што важи

$\overline{AP}^2 = \overline{AQ} \cdot \overline{CQ}$. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Точката K од опишаната кружница околу $\triangle OBC$ е во иста полурамнина со A во однос на правата BC и е таква што $\angle BKA = \angle CKA$. Докажи дека точката K припаѓа на кружницата Ω .

Решение. Ако S е центарот на Ω , тогаш $\angle SAB = 90^\circ - \beta$, од што следува $\angle AQP = \beta$. Според тоа, $\triangle ABC \sim \triangle AQP$ и $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}$. Од $\overline{AP}^2 = \overline{AQ} \cdot \overline{CQ}$ наоѓаме $\frac{\overline{AP}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}$, па затоа

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{CQ}}. \quad (1)$$

Бидејќи $\angle BKC = \angle BOC = 2\alpha$, добиваме $\angle AKB = \angle AKC = 180^\circ - \alpha$. Значи, $\angle BAK + \angle ABK = \alpha$, па затоа $\angle ABK = \angle CAK$. Според тоа, $\triangle ABK \sim \triangle CAK$ и добиваме $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{CK}}$. Од последното равенство и од (1) следува $\frac{\overline{AK}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{CQ}}$, па затоа $\triangle APK \sim \triangle CQK$. Оттука $\angle APK = \angle CQK$, т.е. точките A, P, K, Q лежат на една кружница.

43. Нека CD е висина во $\triangle ABC$, при што $D \in AB$. Кружницата со центар C и радиус CD ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точките E и F . Ако правата EF ја преполовува отсечката CD , определи го $\angle ACB$.

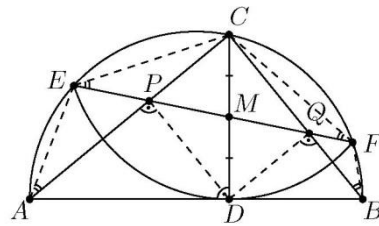
Решение. Нека правата EF ги сече CA, CB и CD во точките P, Q и M , соодветно. Нека O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Од

$$\angle CAE = \frac{1}{2} \angle COE = \frac{1}{2} \angle COF = \angle CEF = \angle CEP$$

следува дека $\triangle CAE \sim \triangle CEP$. Затоа

$$\overline{CP} \cdot \overline{CA} = \overline{CE}^2 = \overline{CD}^2,$$

од што следува $DP \perp CA$. Аналогно $DQ \perp CB$, па затоа точките D, Q, C и P лежат на кружница со дијаметар CD . Но, според условот на задачата M е средина на CD , т.е. M е центарот на оваа кружница, што значи дека PQ е нејзин дијаметар, односно $\angle ACB = \angle PCQ = 90^\circ$.



44. Впишаната кружница k во $\triangle ABC$ ги допира страните AC, BC, CA соодветно во точките M, N, P . Точките X и Y се соодветно на отсечките AM и BN при што $XY \parallel AB$ и ги сече MP и NP соодветно во точките K и L . Правата MK по втор пат ја сече k во точката D , а правата YD по втор пат ја сече

k во точката Q . Докажи дека точките K, L, P и Q лежат на една кружница.

Решение. Од $YL \parallel PB$ следува дека $\triangle LYN \sim \triangle PBN$, од каде добиваме $\overline{YL} = \overline{YN}$. Освен тоа, $\overline{YN}^2 = \overline{YD} \cdot \overline{YQ}$, т.е. $\overline{YL}^2 = \overline{YD} \cdot \overline{YQ}$. Ова равенство заедно со $\angle DYL = \angle LYQ$ означува дека $\triangle YDL \sim \triangle YLQ$. Според тоа

$$\angle QLK = \angle QDL = \angle QDM = \angle QPK,$$

што значи дека точките K, L, P и Q лежат на една кружница.

45. Даден е $\triangle ABC$ во кој медијаните AA_1 и BB_1 се сечат во точката G . Ако впишаната кружница во $\triangle ABC$ и впишаната кружница во $\triangle AGB$ ја допираат страната AB во иста точка, докажи дека $\triangle ABC$ е рамнокрак.

Решение. Нека D е допирната точка на AB со двете кружници. Од тоа што D е допирната точка на AB и впишаната кружница во $\triangle AGB$ имаме $\overline{AD} = \frac{\overline{AB} + \overline{AG} - \overline{BG}}{2}$, а од тоа што D е допирната точка на AB и впишаната кружница во $\triangle ABC$ имаме $\overline{AD} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC}}{2}$. Од овие равенства добиваме $\overline{AG} - \overline{BG} = \overline{AC} - \overline{BC}$ и следствено $\overline{A_1G} - \overline{B_1G} = \overline{CB_1} - \overline{CA_1}$, па значи еднакви се и периметрите на $\triangle B_1GC$ и $\triangle A_1GC$. Понатаму, $P_{B_1GC} = \frac{1}{6}P_{ABC} = P_{A_1GC}$. Тогаш или $\triangle B_1GC \cong \triangle A_1GC$ или $\triangle B_1CG \cong \triangle A_1GC$ (еднакви периметри и плоштини и една заедничка страна). Втората складност не е можна, бидејќи од неа $\overline{B_1G} = \overline{CA_1}$ и $\overline{A_1G} = \overline{CB_1}$ и за поголемата од двете страни, да кажеме $\overline{CA_1} \geq \overline{CB_1}$ добиваме $\overline{BB_1} = 3\overline{B_1G} = 3\overline{CA_1} = \overline{CB} + \overline{CA_1} \geq \overline{CB} + \overline{CB_1}$, што противречи на неравенството на триаголник за $\triangle CBB_1$. Според тоа, $\triangle B_1GC \cong \triangle A_1GC$ и $\overline{AC} = 2\overline{B_1C} = 2\overline{A_1C} = \overline{BC}$.

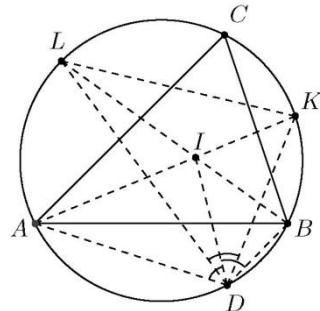
46. Даден е $\triangle ABC$ со центар на впишаната кружница I . Нека D е точка од опишаната кружница околу $\triangle ABC$, различна од C таква што DI е симетрала на $\angle ADB$. Ако $\overline{AD} + \overline{BD} = 2\overline{DI}$, докажи дека $\overline{AC} = \overline{BC}$

Решение. Нека k е опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и правите AI и BI по втор пат ја сечат k во точките K и L , соодветно. Од условот на задачата следува дека

$$\angle ADI = \angle BDI = \frac{1}{2} \angle ADB = \angle LDK.$$

Но, $\angle DAI = \angle DLK$ и $\angle DBI = \angle DKL$ и затоа $\triangle ADI \sim \triangle LDK \sim \triangle IDB$. Затоа

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DI}} = \frac{\overline{DI}}{\overline{BD}}, \text{ т.е. } \overline{AD} \cdot \overline{BD} = \overline{DI}^2.$$



Конечно, $\overline{AD} + \overline{BD} = 2\overline{DI}$ и $\overline{AD} \cdot \overline{BD} = \overline{DI}^2$, па затоа $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{DI}$. Последното значи дека точките C, I и D се колинеарни и како $\angle ADI = \angle BDI$ заклучуваме дека $\overline{AC} = \overline{BC}$.

47. Висините AH_1, BH_2 и CH_3 на остроаголниот $\triangle ABC$ се сечат во точката H . Над HH_1, HH_2 и HH_3 како над дијаметри соодветно се конструирани кружниците ω_1, ω_2 и ω_3 и притоа $\omega_2 \cap \omega_3 = \{A_1, H\}$, $\omega_1 \cap \omega_3 = \{B_1, H\}$ и $\omega_1 \cap \omega_2 = \{C_1, H\}$. Докажи дека $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Решение. Ако опишеме кружница околу четириаголникот BCH_2H_3 добиваме дека $\angle H_2H_3C = \angle H_2BC = 90^\circ - \angle ACB$. Од опишаната кружница околу четириаголникот BH_1HH_2 добиваме дека $\angle H_1H_3C = \angle H_1AC = 90^\circ - \angle ACB$ т.е. H_3C е симетрала на $\angle H_1H_3H_2$. Точката B_1 лежи на отсечката H_1H_3 бидејќи $\angle HB_1H_3 = 90^\circ$ и $\angle HB_1H_1 = 90^\circ$. Аналогно, точката A_1 лежи на отсечката H_2H_3 . Тетивите HA_1 и HB_1 се еднакви, бидејќи соодветствуваат на еднакви лаци. Сега $\triangle A_1HH_3 \cong \triangle B_1HH_3$ и отсечката A_1B_1 е паралелна на страната AB . Аналогно, отсечката B_1C_1 е паралелна на страната BC и отсечката C_1A_1 е паралелна на страната CA . Оттука лесно следува дека $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

48. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со ортоцентар H . Надворешната симетрала на $\angle BHC$ ги сече AB и AC во точките D и E , соодветно. Симетарлата на $\angle BAC$ ја сече опишаната кружница околу $\triangle ADE$ во точка $K, K \neq A$. Докажи дека правата HK ја преполовува отсечката BC .

Решение. Нека P и Q се подножјата на висините во $\triangle ABC$ повлечени од темињата B и C , соодветно. Од $\angle QHD = \angle CHE = \angle PHE$ следува дека $\angle ADH = \angle AEH$ и $\triangle ADE$ е рамнокрак. Според тоа, AK е дијаметар на опишаната кружница околу $\triangle ADE$. Така $\angle KDA = \angle KEA = 90^\circ$, од каде следува $KD \parallel HQ$ и $KE \parallel HP$.

Повлекуваме права низ B паралелна на HQ и со L да ја означиме точката во која оваа права ја сече HK . Од Талесовата теорема имаме

$$\frac{KL}{KH} = \frac{DB}{DQ}.$$

Од друга страна од $\triangle HBQ \sim \triangle HCP$ следува

$$\frac{DB}{DQ} = \frac{EC}{EP},$$

па затоа $\frac{\overline{KL}}{\overline{KH}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{EP}}$. Според тоа, $CL \parallel EK \parallel PH$, па затоа четириаголникот $NBLC$ е паралелограм, од каде следува дека HL ја полови BC .

49. Нека F е точка од страната BC на $\triangle ABC$ таква што $\overline{AC} = \overline{BF}$. Докажи дека правата која минува низ средината на отсечката CF и е паралелна на симетралата на $\angle ACB$ ја преполовува страната AB .

Решение. Нека M е средина на CF , E е средина на AF и N е средина на AB . Ќе докажеме дека NM е паралелна на симетралата на $\angle ACB$. Бидејќи EM е средна линија во $\triangle AFC$ и EN е средна линија во $\triangle ABF$, од $\overline{AC} = \overline{BF}$ следува $\overline{EM} = \overline{EN}$. Полуправите EN и CB се еднакво насочени, а полуправите EM и CA се спротивно насочени, па затоа $\angle MEN = 180^\circ - \angle ACB$. Сега, од рамнокракиот $\triangle MNE$ добиваме $\angle EMN = \frac{1}{2} \angle ACB$. Но, $\angle EMB = \angle ACB$, па така $\angle NMB = \frac{1}{2} \angle ACB$ и MN е паралелна на симетралата на $\angle ACB$.

50. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$. На продолжението на AC преку темето C е избрана точка D таква што $\overline{AC} > \overline{CD}$. Симетралата на $\angle BCD$ ја сече BD во точката N , а M е средина на BD . Тангентата во точката M на опишаната кружница околу $\triangle AMD$ ја сече страната BC во точката P . Докажи дека точките A, P, M и N лежат на една кружница.

Решение. Од условот следува дека $\angle MAD = \angle PMB = \varphi$. Во точката D повлекуваме права l паралелна на AB . Нека $l \cap BC = Q$, T е средината на AQ и BT ја сече l во точката K . Од причини на симетрија следува дека $\angle KBQ = \varphi$. Освен тоа $\frac{\overline{KQ}}{\overline{QD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{QD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{BN}}$, па затоа $BK \parallel QN$, што значи $\angle CQN = \varphi$.

Бидејќи $\angle QAD = \angle QBD = \psi$ од причини на симетрија добиваме $\angle QAM = \angle QND = \varphi + \psi$. Значи, Q, A, M и N лежат на една кружница. Бидејќи $\angle PMB = \varphi = \angle NQB$, точките Q, M, N и P лежат на една кружница. Според тоа, точките A, P, M и N лежат на една кружница.

51. Нека D е допирната точка на впишаната кружница во $\triangle ABC$ со страната AB . Нека I_1 и I_2 се центрите на впишаните кружници во $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$, соодветно. Докажи дека опишаната кружница околу $\triangle I_1 I_2 D$ ја допира AB .

Решение. Со P и Q да ги означиме допирните точки на впишаните кружници во $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$ со страните AD и BD , соодветно. Тогаш

$$\overline{DP} = \frac{1}{2}(\overline{DC} + \overline{DA} - \overline{AC}) = \frac{1}{2}(\overline{DC} + \overline{DB} - \overline{BC}) = \overline{DQ}$$

и затоа впишаните кружници во $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$ се допираат до CD во една иста точка. Останува да забележиме дека $\angle I_2 I_1 D = \angle D I_1 P = \angle I_2 D Q$, со што доказот е завршен.

Забелешка. Точно е поопштото тврдење, дека ако D е произволна точка од страната AB , тогаш кружницата опишана околу $\triangle I_1 I_2 D$ минува низ постојана точка, а тоа е допирната точка на впишаната кружница во $\triangle ABC$ со страната AB . На читателот за вежба му препорачуваме да го докаже ова тврдење.

52. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Нека H и G се соодветно ортоцентарот и тежиштето на $\triangle ABC$. Точката P е пресекот на медијаната низ B и висината низ A , а точката Q е пресек на медијаната низ C и висината низ B . Ако точките H, G, P и Q лежат на една кружница, докажи дека триаголникот формиран од медијаните на $\triangle ABC$ е сличен на $\triangle ABC$.

Решение. Бидејќи H, G, P и Q лежат на една кружница, важи $\angle BPH = \angle CQH$. Според тоа, $\angle GBC = \angle GCA$, па затоа $\triangle BB_1C \sim \triangle CGB_1$, каде B_1 е средината на AC . Оттука следува $\overline{B_1G} \cdot \overline{B_1B} = \overline{B_1C}^2$ или $\frac{1}{3}m_b^2 = (\frac{b}{2})^2$. Ако искористиме дека $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$, од последното равенство следува дека $a^2 + c^2 = 2b^2$. Сега, од формулите за медијаните пресметуваме

$$m_a = \frac{c\sqrt{3}}{2}, m_b = \frac{b\sqrt{3}}{2}, m_c = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

од каде следува тврдењето на задачата.

53. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ ($\angle ACB = 90^\circ$). Точката O од средната линија MN (M е средина на AC , N е средина на BC) е таква што $\angle AOC = 90^\circ$, а точката P од отсечката AO е таква што $\angle ACP = \angle BCO$. Докажи дека $\angle ABP = \angle CBO$.

Решение. Бидејќи OM е медијана на правоаголникот $\triangle AOC$, имаме $\angle OAC = \angle AOM$. Оттука и од $MN \parallel AB$ следува $2\angle OAM = \angle OMC = \angle BAC = \alpha$. Според тоа, $\angle OAC = \angle AOM = \frac{\alpha}{2}$. Значи, $\angle BCO = 90^\circ - \angle ACO = \angle OAC = \frac{\alpha}{2}$ и од условот следува $\angle ACP = \frac{\alpha}{2}$.

Од $\angle ACP = \angle PAC = \frac{\alpha}{2}$ следува дека $\triangle APC$ е рамнокрак. Значи, PM е медијана и висина, т.е. $PM \perp AC$, па затоа $PM \parallel BC$.

Нека правата MP ја сече AB во точката K . Тогаш MK е средна линија во $\triangle ABC$. Освен тоа $\triangle AKP \sim \triangle CNO$. Следствено $\triangle ABP \sim \triangle CBO$, бидејќи $\angle BAP$

$=\angle BCO = \frac{\alpha}{2}$ и од $\frac{\overline{AP}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{CN}}$ следува $\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{CB}}$. Од последната сличност добиваме $\angle ABP = \angle CBO$.

54. Даден е $\triangle ABC$, впишан во кружница k_1 . Кружницата k_2 ја допира k_1 во точката C и страната AB во точката T . Правата CT ја сече k_1 по вторпат во точката Q . Правата QN , $N \in k_2$, е тангента на k_2 . Докажи дека кружницата опишана околу $\triangle ABN$ минува низ центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$.

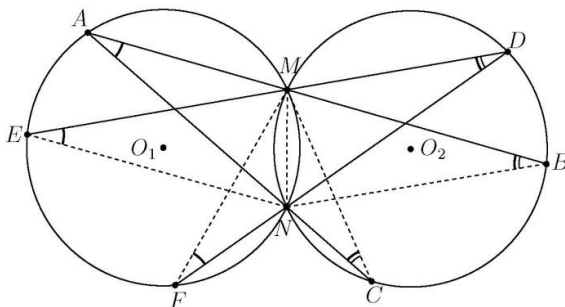
Решение. Со пресметување на $\angle ACB$ преку лаци во k_2 , се добива дека лациите во таа кружница кои соодветствуваат на $\angle ACT$ и на $\angle BCT$ се еднакви, т.е. CT е симетрала на $\angle ACB$. Тогаш Q е средина на лакот AB од k_1 и $\overline{QA} = \overline{QB} = \overline{QI}$, каде I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Ќе докажеме дека $\overline{QN} = \overline{QI}$, од каде ќе следува тврдењето на задачата.

Имаме, $\overline{QN}^2 = \overline{QT} \cdot \overline{QC}$ и останува да ги изразиме $\overline{QT}$ и $\overline{QC}$. Бидејќи $\triangle ATC \sim \triangle QCB$ важи $\overline{QC} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{QB}}{\overline{AT}}$ и од $\triangle BTQ \sim \triangle CTA$ имаме $\overline{QT} = \frac{\overline{AT} \cdot \overline{QB}}{\overline{AC}}$.

Ако ги помножиме последните две равенства добиваме $\overline{QN} = \overline{QI}$.

55. Кружниците k_1 и k_2 се сечат во точките M и N . Низ точка $A \in k_1$, надворешна за k_2 , се повлечени правите AM и AN , кои k_2 по втор пат ја сечат во точките B и C , соодветно. Низ точка D од лакот BM на k_2 , кој не ја содржи N , се повлечени правите DM и DN , кои k_1 по втор пат ја сечат во точките E и F , соодветно. Ако $\overline{AB} = \overline{ED}$ и $\overline{AC} = \overline{FD}$ докажи дека MN е симетрала на отсечката AD .

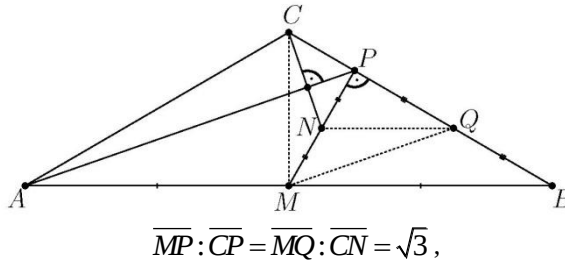
Решение. Имаме $\angle MAN = \angle MEN = \angle MFN$ како периферни агли над лакот MN во k_1 . Аналогно $\angle MBN = \angle MDN = \angle MCN$ и од $\overline{AB} = \overline{ED}$ и $\overline{AC} = \overline{FD}$ добиваме дека $\triangle ABN \cong \triangle EDN$ и $\triangle ACM \cong \triangle FDM$



Според тоа, $\overline{AN} = \overline{EN}$ и $\overline{AM} = \overline{FM}$. Од $\overline{AN} = \overline{EN}$ следува $\angle NAE = \angle NEA$. Имаме $\angle NAE = \angle EMN$ како периферни агли над ист лак EN и аналогно $\angle NEA = \angle NMB$, т.е. $\angle EMN = \angle NMB$. Од $\overline{AM} = \overline{FM}$ следува $\angle MAF = \angle MFA$. Понатаму, $\angle MFA = \angle MNA$ и $\angle MAF = \angle MND$, т.е. $\angle MNA = \angle MND$. Според тоа, $\triangle ANM \cong \triangle DNM$, т.е. $\overline{AN} = \overline{DN}$ и $\overline{AM} = \overline{DM}$, па затоа MN е симетрала на отсечката AD .

56. Даден е $\triangle ABC$. Нека M е средина на страната AB . Со P да ја означиме проекцијата на M врз страната BC ($P \in BC$), а со N средината на MP . Определи ги аглиите на $\triangle ABC$, ако $AP \perp CN$ и $\overline{AP} : \overline{CN} = 2\sqrt{3}$.

Решение. Со Q да ја означиме средината на отсечката BP . Тогаш MQ е средна линија во $\triangle ABP$, т.е. $MQ \parallel AP$, $\overline{MQ} = \frac{1}{2} \overline{AP}$ и од условот следува дека $MQ \perp CN$ и $\overline{MQ} : \overline{CN} = \sqrt{3}$. Според тоа, N е ортоцентар на $\triangle MQC$ и $NQ \perp CM$. Но, NQ е средна линија во $\triangle MBP$, т.е. $AB \parallel NQ \perp CM$, па затоа $\triangle ABC$ е рамнокрак. Останува да забележиме дека $\triangle MQP \sim \triangle CNP$, т.е.



$$\overline{MP} : \overline{CP} = \overline{MQ} : \overline{CN} = \sqrt{3},$$

па затоа $\angle MCP = 60^\circ$, што значи $\angle ACB = 120^\circ$ и $\angle ABC = \angle BAC = 30^\circ$.

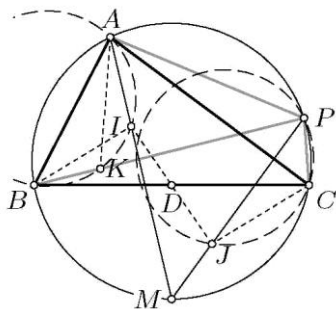
57. Точката I е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Правата AI ја сече опишаната кружница Ω на $\triangle ABC$ во точката $M \neq A$. Точката J е симетрична на точката I во однос на средината D на страната BC . Правата MJ ја сече кружницата Ω во точката $P \neq M$. Докажи дека една од отсечките PA, PB, PC е еднаква на збирот на другите две.

Решение. Ќе работиме со ориентирани агли по модул 180° . Бидејќи $\overline{JC} = \overline{BI}$ и

$$\angle JPC = \angle MAC = \angle BAI,$$

опишаните кружници околу триаголниците JPC и ABI се складни. Нека K е точка на полуправата PB таква што $\overline{PK} = \overline{PA}$. Бидејќи

$$\begin{aligned} \angle AKB &= 180^\circ - \angle PKA = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle APK \\ &= 90^\circ + \frac{1}{2} \angle ACB = \angle AIB, \end{aligned}$$



точката K лежи на кружницата ABI . Оттука

$$\angle IKP = \angle IAB = \angle MAB = \angle MPK,$$

т.е. $BI \parallel CJ$, па затоа $\angle BIK = \angle CJP$. Според тоа, тетивите BK и PC во кружниците BAI и JPC се еднакви, т.е.

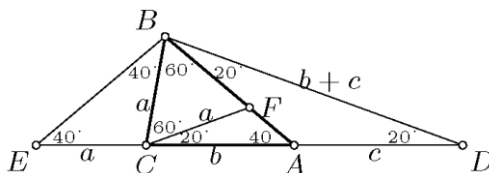
$$\overline{PB} = \overline{PK} \pm \overline{KB} = \overline{PA} \pm \overline{PC}.$$

58. Нека a, b, c се должини на страни на триаголник чии соодветни агли $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 80^\circ$. Докажи дека

$$a(a+b+c) = b(b+c).$$

Решение. Нека A, B, C се соодветните темиња на триаголникот, D и E се точки на правата AC такви што $D-A-C-E$, $\overline{AD} = c$ и $\overline{CE} = a$, и F е точка на отсечката AB таква да $\triangle BCF$ е рамностран. Тогаш

$$\angle BDA = 20^\circ, \angle BEC = 40^\circ, \angle ACF = 20^\circ,$$



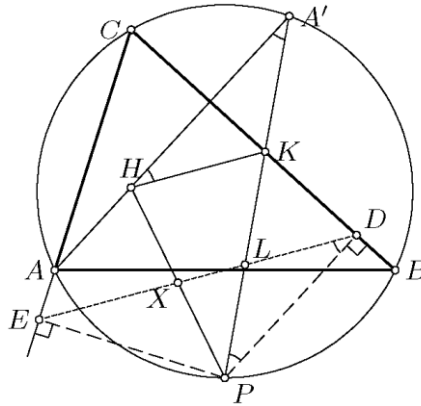
па затоа триаголниците BDE и FCA се слични. Бидејќи $\overline{BD} = \overline{CD} = b+c$ и $\overline{DE} = a+b+c$ добиваме $\frac{b+c}{a+b+c} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{CA}} = \frac{a}{b}$, од каде следува тврдењето на задачата.

59. Даден е $\triangle ABC$ и точки D и E соодветно на полуправите CB и CA такви што $\overline{CD} = \overline{CE} = \frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{2}$. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ и P е средината на лакот AB на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ кој не ја содржи точката C . Докажи дека правата DE ја преполовува отсечката HP .

Решение. Нека Z е точка на полуправата CB таква што $\overline{CZ} = \overline{CA}$. Од складноста на триаголниците PCZ и PCA следува $\overline{PZ} = \overline{PA} = \overline{PB}$, а исто

така важи $\overline{BD} = \overline{DZ} = \frac{|\overline{CB} - \overline{CA}|}{2}$ и

$$\angle PBD = 180^\circ - \angle PAC = 180^\circ - \angle PZC = \angle PZD.$$



Оттука следува дека триаголниците PZD и PBD се складни, па затоа $PD \perp BC$, а оттука и $PE \perp AC$.

Нека A' е симетричната точка на H во однос на правата BC и нека правата PA' ги сече BC и DE соодветно во точките K и L , а правата PH ја сече DE во точката X . Од $AA' \parallel DP$ следува

$$\angle DPL = \angle DPA' = \angle PA'A = \angle PCE = \angle PDL,$$

па затоа $\overline{LP} = \overline{LD}$, што значи дека L е средина на хипотенузата PK на правоаголникот PDK . Освен тоа, од $\angle PDL = \angle PA'A = \angle KHA'$ и $AA' \parallel DP$ следува $DE \parallel KH$. Според тоа, LX е средна линија во триаголникот PKH , па е X средина на отсечката PH .

Забелешка. Познато е и поопшто тврдење, со практично ист доказ: ако P е точка на опишаната кружница на $\triangle ABC$ и H е ортоцентар на $\triangle ABC$, тогаш Симсоновата права на точката P ја преполовува отсечката PH .

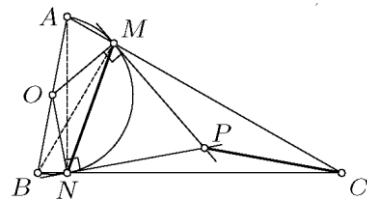
60. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Кружницата k над дијаметар AB ги сече страните AC и BC соодветно во точките M и N . Тангентите на кружницата k во точките M и N се сечат во точката P . Ако $\overline{CP} = \overline{MN}$, определи го $\angle ACB$.

Решение. Со O да ја означиме средната на страната AB . Имаме $\overline{MP} = \overline{NP}$, а освен тоа важи

$$\angle MON = 2\angle MAN = 2(90^\circ - \angle ACB),$$

па затоа $\angle MPN = 2\angle ACB$, што значи дека P е центар на опишаната кружница

околу триаголникот MCN . Според тоа, $\overline{MN} = \overline{CP} = \overline{MP} = \overline{CP}$, т.е. триагол-



никот MNP е рамностран и затоа $\angle MPN = 60^\circ$. Значи, $\angle ACB = 30^\circ$.

61. Даден е $\triangle ABC$ во кој $\angle ACB = 60^\circ$. Низата точки $A_0, A_1, \dots, A_{2006}$ е определена со: $A_0 = A$, A_1 е подножјето на нормалата од A_0 на правата BC , A_2 е подножјето на нормалата од A_1 на правата AC итн. A_{2006} е подножјето на нормалата од A_{2005} на правата AC . Аналогно се дефинира низата $B_0, B_1, \dots, B_{2006}$: $B_0 = B$, B_1 е подножјето на нормалата од B_0 на правата AC итн. Докажи дека правата $A_{2006}B_{2006}$ ја допира впишаната кружница во $\triangle ABC$ ако и само ако

$$\frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{2^{2006} + 1}{2^{2006} - 1}.$$

Решение. Последователно имаме $\overline{CA_1} = \frac{1}{2}\overline{CA_0}$, $\overline{CA_2} = \frac{1}{4}\overline{CA_0}$ итн. Јасно е дека $\overline{CA_{2006}} = \frac{1}{2^{2006}}\overline{CA_0} = \frac{1}{2^{2006}}\overline{CA}$ и аналогно $\overline{CB_{2006}} = \frac{1}{2^{2006}}\overline{CB}$. Од обратната теорема на Талес следува $A_{2006}B_{2006} \parallel AB$, при што $\overline{A_{2006}B_{2006}} = \frac{1}{2^{2006}}\overline{AB}$. Правата $A_{2006}B_{2006}$ ја допира впишаната кружница во $\triangle ABC$ ако и само ако четириаголникот $ABB_{2006}A_{2006}$ е тетивен. Последното редоследно е еквивалентно со

$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{A_{2006}B_{2006}} &= \overline{AA_{2006}} + \overline{BB_{2006}} \\ \overline{AB} + \frac{1}{2^{2006}}\overline{AB} &= \frac{2^{2006}-1}{2^{2006}}(\overline{AC} + \overline{BC}) \\ \frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{\overline{AB}} &= \frac{2^{2006}+1}{2^{2006}-1}.\end{aligned}$$

62. Во $\triangle ABC$, $\overline{AB} > \overline{BC}$, за точката K од страната AB важи $\overline{AK} = \overline{BC} + \overline{BK}$. Правата l минува низ K и е нормална на AB . Докажи дека l , симетралата на AC и симетралата на надворешниот агол во темето B се сечат во една точка.

Решение. Нека C' е точка од полуправата AB таква што $\overline{BC} = \overline{BC'}$. Тогаш симетралата на надворешниот агол во темето B е симетрала на CC' . Бидејќи $\overline{AK} = \overline{BC} + \overline{BK} = \overline{BC'} + \overline{BK} = \overline{KC'}$, заклучуваме дека l е симетрала на AC' . Добивме дека l , симетралата на AC и симетралата на надворешниот агол во темето B се симетри на страните на $\triangle AC'C$, па затоа тие се сечат во центарот на опишаната кружница околу овој триаголник.

63. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ во кој се повлечени висините BB_1 и CC_1 кон страните AC и AB ($B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$). Нека M и N се соодветно сре-

дините на BB_1 и CC_1 , $P = AM \cap CC_1$ и $Q = AN \cap BB_1$. Докажи дека

а) точките M, N, P и Q се конциклични,

б) ако точките B, C, P и Q се конциклични, тогаш $\triangle ABC$ е рамнокрак.

Решение. а) Имаме $\triangle ACC_1 \cong \triangle ABB_1$, па затоа AN и AM се соодветни медијани во складни триаголници. Оттука

$$\angle ANC_1 = \angle AMB_1 \Rightarrow \angle QNB = \angle PMQ,$$

т.е. точките M, N, P и Q се конциклични.

б) Ако точките B, C, P и Q се конциклични, тогаш $\angle QCP = \angle QBP$. Но, $\angle ACC_1 = \angle ABB_1$, па затоа

$$\angle QCA = \angle PBA. \quad (1)$$

Од друга страна, од $\triangle ACC_1 \cong \triangle ABB_1$ имаме

$$\angle CAQ = \angle CAN = \angle BAM = \angle BAP. \quad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека $\triangle ACQ \cong \triangle ABP$, па затоа

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}},$$

од каде добиваме $\overline{AC} = \overline{AB}$.

64. Во $\triangle ABC$, $\angle ACB = 60^\circ$ се повлечени симетралите на аглите AA_1 и BB_1 ($A_1 \in BC, B_1 \in AC$). Правата A_1B_1 ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точките A_2 и B_2 .

а) Докажи дека правата OI е паралелна на A_1B_1 , каде O и I се центрите соодветно на опишаната и впишаната кружница во $\triangle ABC$.

б) Ако R е средината на лакот AB кој не ја содржи точката C , а P и Q се соодветно средините на A_1B_1 и A_2B_2 , докажи дека $\overline{RP} = \overline{RQ}$.

Решение. а) Од $\angle AOB = 2\gamma = 120^\circ$ и

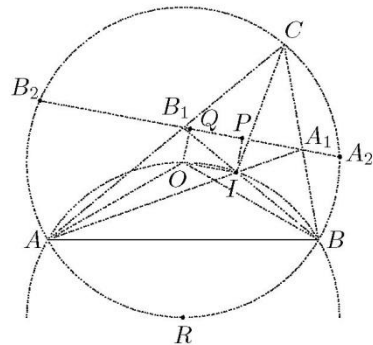
$$\angle AIB = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

следува дека точките A, O, I и B се кон-

циклични. Од $\angle RIA = \angle RAI = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ имаме

$\overline{RI} = \overline{RA}$ и аналогно $\overline{RI} = \overline{RB}$, па затоа центарот на кружницата низ точките A, O, I и B е точката R . Од рамнокракиот $\triangle AOB$ добиваме $\angle BAO = 30^\circ$ и затоа

$\angle OIB_1 = 30^\circ$. Бидејќи $\angle AIB = 120^\circ$, заклучуваме дека околу IA_1CB_1 може да



се опише кружница, па затоа $\angle IB_1A_1 = \angle ICA_1 = 30^\circ$ и $\angle IA_1B_1 = \angle ICB_1 = 30^\circ$. Сега, од $\angle OIB_1 = \angle IB_1A_1$ следува $OI \parallel A_1B_1$.

б) Бидејќи $OQ \perp A_2B_2$, $IP \perp A_2B_2$ и $OI \parallel A_2B_2$, заклучуваме дека $OIPQ$ е правоаголник и симетралата на OI се совпаѓа со симетралата на PQ . Бидејќи симетралата на OI минува низ R , заклучуваме дека R лежи на симетралата на PQ , т.е. $\overline{RP} = \overline{RQ}$.

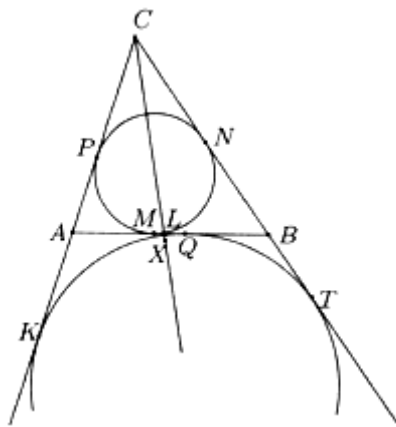
65. Даден е $\triangle ABC$ ($\overline{CA} \neq \overline{CB}$). Нека CL ($L \in AB$) е симетралата на $\angle ACB$. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните AB, BC и CA соодветно во точките M, N и P , а припишаната кружница на $\triangle ABC$ кон страната AB ги допира AB и продолженијата на страните CA и CB соодветно во точките Q, K и T . Нека k_1, k_2 и k_3 се опишаните кружници соодветно околу $\triangle PKL, \triangle NTL$ и $\triangle CMQ$.

а) Докажи дека втората пресечна точка на k_1 и k_2 припаѓа на правата CL .

б) Докажи дека кружниците k_1, k_2 и k_3 се сечат во една точка.

Решение. а) При осна симетрија со оска на симетрија правата CL точките P и N се симетрични, а исто така и точките K и T . Според тоа, кружниците k_1 и k_2 се симетрични, од каде што следува тврдењето.

б) Нека X е втората пресечна точка на k_3 и правата CL . Согласно а) доволно е да докажеме дека k_1 минува низ X , што е еквивалентно на $\overline{CL} \cdot \overline{CX} = \overline{CP} \cdot \overline{CK}$. При стандардните ознаки за елементи на триаголник,



ако го искористиме равенството $\overline{CL} \cdot \overline{LX} = \overline{ML} \cdot \overline{LQ}$ и формулата за должина

на симетрала на агол $\overline{CL}^2 = ab - \overline{AL} \cdot \overline{BL}$, последователно добиваме

$$\overline{CL} \cdot \overline{CX} = \overline{CP} \cdot \overline{CK} \quad \Leftrightarrow$$

$$\overline{CL} \cdot (\overline{CL} + \overline{LX}) = (s-c)s \quad \Leftrightarrow$$

$$\overline{CL}^2 + \overline{ML} \cdot \overline{LQ} = (s-c)s \quad \Leftrightarrow$$

$$\overline{CL}^2 + (\overline{LA} - (s-a))(\overline{LB} - (s-a)) = (s-c)s \quad \Leftrightarrow$$

$$\overline{CL}^2 + \overline{LA} \cdot \overline{LB} - c(s-a) + (s-a)^2 = (s-c)s \quad \Leftrightarrow$$

кое очигледно є точно.

- Решение.** Нека G е точка од полуправата AC таква што $\overline{AG} = \overline{AF}$. Тогаш

Решение. Нека S е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ACQ$, а M и N се средини соодветно на CQ и CR . Точките S, M, N и C лежат на една кружница. Имаме

Оттука следува дека $\Delta ORS \sim_{\Delta} BCQ$, па затоа

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{SR}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{SO}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{SO}}{\overline{PC}}.$$

Од горните равенства следува дека $\triangle AOS \sim \triangle QPC$ и бидејќи $OS \perp PC$ и $AS \perp QC$, добиваме дека $AO \perp QP$.

68. Во разностран остроаголен $\triangle ABC$ е повлечена симетралата CL на $\angle ACB$. Точките M, N и P се средини соодветно на страните AB, BC и CA , а точката T допирната точка на впишаната кружница во $\triangle ABC$ и страната AB . Опишаната кружница околу $\triangle NPL$ по втор пат ја сече CL во точката D . Ако L е средина на MT , определи го односот $\overline{CD} : \overline{DL}$.

Решение. *Прв начин.* Нека K е средината на лакот AB кој не ја содржи точката C и I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Тогаш $MK \perp AM$ и $\triangle MKL \cong \triangle TIL$ ($\angle KML = \angle ITK = 90^\circ$, според условот $\overline{ML} = \overline{MT}$ и $\angle KLM = \angle ILT$ како накрсни агли). Според тоа, $\overline{KM} = \overline{IT} = \overline{IF}$, каде F е допирната точка на впишаната кружница со страната AC .

Бидејќи $\angle KAM = \angle KCB = \angle ICP$, важи $\triangle MKA \cong \triangle FIC$, па затоа $\overline{CI} = \overline{AK}$. Познато е дека $\overline{KA} = \overline{KB} = \overline{KI}$, па затоа $\overline{CI} = \overline{KA} = \overline{KB} = \overline{KI}$, т.е. I е средина на CK .

Бидејќи IP е средна линија во $\triangle AKC$, важи $\overline{IP} = \frac{1}{2} \overline{AK} = \frac{1}{2} \overline{IK} = \overline{IL}$ и аналогно $\overline{IN} = \overline{IL}$. Според тоа, $\overline{IP} = \overline{IN} = \overline{IL}$, т.е. I е центар на опишаната кружница околу $\triangle NPL$. Тогаш DI е дијаметар во таа кружница и $\overline{DI} = \overline{IL} = \overline{LK}$. Оттука и од $\overline{CI} = \overline{IK}$ следува $\overline{CD} = \overline{DI}$, па затоа $\overline{CD} : \overline{DL} = 1 : 2$.

Втор начин. Од својството на симетралата на агол следува $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{BL}}$, па затоа $\overline{AL} = \frac{bc}{a+b}$ и $\overline{BL} = \frac{ac}{a+b}$. Бидејќи $\overline{AM} = \frac{c}{2}$, $\overline{BT} = \frac{a+c-b}{2}$, добиваме дека условот $\overline{ML} = \overline{LT}$ е еквивалентен на $\overline{AL} - \overline{AM} = \overline{BL} - \overline{BT}$. Со замена со соодветните изрази добиваме

$$(b-a)(b+a-2c) = 0,$$

па како $\triangle ABC$ е разностран имаме $c = \frac{a+b}{2}$. Тогаш $\overline{AL} = \frac{b}{2}$ и $\overline{BL} = \frac{a}{2}$. Тоа значи дека $\triangle ALP$ и $\triangle BLN$ се рамнокраки и симетралите на аглиите AI и BI се симетрали на отсечките PL и LN . Според тоа, I е центар на опишаната кружница околу $\triangle PLN$, т.е. $\overline{ID} = \overline{IL}$.

Од својството на симетралата AI на $\angle CAL$ во $\triangle ALC$ следува $\overline{CI} : \overline{IL} = \overline{AC} : \overline{AL} = 2 : 1$. Сега од $\overline{ID} = \overline{IL}$ и $\overline{CI} : \overline{IL} = 2 : 1$ следува $\overline{CD} = \overline{DI} = \overline{IL}$, па затоа $\overline{CD} : \overline{DL} = 1 : 2$.

69. Во $\triangle ABC$ отсечката CL ($L \in AB$) е симетрала на $\angle BCA$. Кругница која минува низ C и L ги сече правата AB и опишаната кругница k околу $\triangle ABC$ по втор пат соодветно во точките M и N , при што A е меѓу M и B , а N е на лакот AB кој не ја содржи C . Аналогно, втора кругница низ C и L ги сече правата AB и опишаната кругница k по втор пат во точки P и Q , при што B е меѓу P и A , а Q е на лакот AB кој не ја содржи C . Докажи дека точките M, N, P и Q лежат на една кругница.

Решение. Нека K е средината на лакот AB кој не ја содржи точката C . Тогаш K припаѓа на правата CL , $\angle MNC = \angle MLC$ и $\angle KNC = \angle BLC$, па затоа

$$\angle MNC + \angle KNC = \angle MLC + \angle BLC = 180^\circ,$$

т.е. точките M, N и K се колинеарни. Аналогно се докажува дека точките Q, P и K се колинеарни. Сега, од

$$\overline{KN} \cdot \overline{KM} = \overline{KL} \cdot \overline{KC} = \overline{KP} \cdot \overline{KQ}$$

следува дека точките M, N, P и Q лежат на една кругница.

70. Нека AM е медијана на нерамноостраниот $\triangle ABC$, точката O е центар на опишаната околу него кругница и точката G е тежиште на $\triangle AMC$. Докажи дека $OG \perp AM$ ако и само ако $\overline{CA} = \overline{CB}$.

Решение. Нека N и K се средините на страните AC и AB , соодветно, а T е пресечната точка на KO и AM . Јасно, $G \in NM$ и $\overline{NG} : \overline{GM} = 1:2$ и точката O е ортоцентар на $\triangle MNK$. Нека S е пресечната точка на AM и KN . Тогаш S е средина на отсечката KN , т.е. MS е медијана за $\triangle MNK$ ($AKMN$ е паралелограм).

Имаме, $OG \perp AM$ ако и само ако точката T е ортоцентар на $\triangle GOM$. Последното е еквивалентно со $GT \perp OM$ или со $GT \parallel NK$. Тоа е точно тогаш и само тогаш, кога $\overline{MT} : \overline{TS} = 2:1$ или кога T е тежиште на $\triangle MNK$. Така $OG \perp AM$ важи само ако тежиштето T на $\triangle MNK$ лежи на неговата висина KO или ако $\overline{KM} = \overline{KN}$, што е еквивалентно на $\overline{CA} = \overline{CB}$.

71. Во остроаголен $\triangle ABC$ медијаната CM го дели $\angle ACB$ во однос $2:1$, т.е. $\angle ACM = 2\angle MCB$. Опишаната кругница околу $\triangle ABC$ со центар O по втор пат ја сече опишаната кругница околу $\triangle MOC$ во точката D . Докажи дека CD е симетрала на $\angle ACM$.

Решение. Прво, да забележиме дека

$$\angle COM = \angle COA + \angle AOM = 2\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha + \beta > 180^\circ - \alpha.$$

Следствено, точките D и O се во различни полурамнини во однос на CM , бидејќи во спротивен случај $\angle COM = \angle CDM < \angle CDB = 180^\circ - \alpha < \angle COM$, што не е можно. Имаме

$$\angle MDO = \angle MCO = \angle ACO - \angle ACM = 90^\circ - \beta - \frac{2\gamma}{3}$$

и

$$\angle CDM = 180^\circ - \angle COM = 180^\circ - 2\beta - \gamma.$$

Според тоа, $\angle ODC = \angle CDM - \angle MDO = 90^\circ - \beta - \frac{\gamma}{3}$. Но, $\overline{OD} = \overline{OC}$, како радиуси во кружница и затоа $\angle OCD = \angle ODC$, а оттука

$$\angle DCA = \angle OCA - \angle OCD = 90^\circ - \beta - (90^\circ - \beta - \frac{\gamma}{3}) = \frac{\gamma}{3} = \frac{1}{2} \angle MCA.$$

Следствено, CD е симетрала на $\angle ACM$.

2 ЧЕТИРИАГОЛНИК

1. Нека $ABCD$ е правоаголник со центар O и не е квадрат. Правата низ O , нормална на BD , ги сече правите AB и BC во точките E и F , соодветно. Нека M и N се средините на страните CD и AD , соодветно. Докажи дека $FM \perp EN$.

Решение. Нека P е средината на BC , а Q е пресечната точка на правите CD и EF . Тогаш $MP \parallel BD$ (средна линија во $\triangle BCD$), па затоа $MP \perp FQ$. Бидејќи $EP \perp MC$, заклучуваме дека Q е ортоцентар во $\triangle MPF$ и затоа $FM \perp PQ$. Од друга страна $\triangle NOE \cong \triangle POQ$, па затоа $NE \parallel PQ$. Следствено $FM \perp EN$.

2. Кружница минува низ темињата A и B на тетивниот четириаголник $ABCD$ и ги сече неговите дијагонали AC и BD соодветно во точките E и F . Правите AF и BC се сечат во точката P , а правите BE и AD се сечат во точката Q . Докажи дека правите PQ и CD се паралелни.

Решение. Со $\sphericalangle(a, b)$ ќе го означуваме аголот меѓу правите a и b . Од условот на задачата следува дека

$$\sphericalangle(FA, AE) = \sphericalangle(FB, BE) \text{ и } \sphericalangle(DA, AC) = \sphericalangle(DB, BC).$$

Ако ги одземеме овие две равенства добиваме $\sphericalangle(DA, AF) = \sphericalangle(EB, BC)$, од каде следува $\sphericalangle(QA, AP) = \sphericalangle(QB, BP)$, т.е. точките A, Q, P и D се конциклични. Тогаш, $\sphericalangle(AB, BP) = \sphericalangle(AQ, QP)$.

Од друга страна, повторно од условот имаме $\sphericalangle(AB, BP) = \sphericalangle(AQ, CD)$ и затоа $\sphericalangle(AQ, CD) = \sphericalangle(AQ, QP)$, што значи дека $CD \parallel PQ$.

3. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$ таков што $\overline{AB} = \overline{AD}$ и $\overline{CD} > \overline{AB} + \overline{BC}$. Докажи дека $\sphericalangle ABC > 120^\circ$.

Решение. Нека претпоставиме дека $\sphericalangle ABC \leq 120^\circ$. Нека точката X од отсечката CD е таква што $\overline{DX} = \overline{AB} = \overline{AD}$. Очигледно $\sphericalangle ADX \geq 60^\circ$. Сега $\triangle ADX$ е рамнокрак, па затоа $\sphericalangle AXD \leq 60^\circ$.

Бидејќи $\overline{CX} = \overline{CD} - \overline{DX} = \overline{CD} - \overline{AB} > \overline{BC}$, во $\triangle BCX$ имаме $\sphericalangle CBX > \sphericalangle CXB$. Понатаму, во рамнокракиот $\triangle ADX$ најголема страна е AX , па затоа $\overline{AX} > \overline{AB}$ и во $\triangle ABX$ имаме $\sphericalangle ABX \geq \sphericalangle AXB$. Сега добиваме

$$120^\circ \geq \angle ABC = \angle CBX + \angle ABX > \angle CXB + \angle AXB = \angle AXC,$$

па затоа $\angle AXD \leq 60^\circ$, што е противречност.

4. Дијагоналите AC и BD на тетивниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката P . Точката Q од отсечката BC е таква што $PQ \perp AC$. Докажи дека правата која минува низ центрите на опишаните кружници околу триаголниците APD и BQD е паралелна со правата AD .

Решение. Нека точката $T \in QP$ е таква што $DT \perp DA$. Од $\angle APT = 90^\circ = \angle ADT$ следува дека точките A, P, D и T се конциклични. Според тоа, центарот на кружницата ω_1 , опишана околу $\triangle APD$ лежи на симетралата l на отсечката DT .

Четириаголникот $ABCD$ е тетивен, па затоа $\angle QBD = \angle PAD$. Четириаголникот $APDT$ исто така е тетивен, па затоа $\angle PAD = \angle QTD$. Значи, $\angle QBD = \angle PAD = \angle QTD$, што значи дека точките B, Q, D и T се конциклични. Според тоа, центарот на кружницата ω_2 , опишана околу $\triangle BQD$ исто така лежи на симетралата l на отсечката DT . Според тоа, l минува низ центрите на ω_1 и ω_2 . Бидејќи $l \perp DT$ и $AD \perp DT$, добиваме $l \parallel AD$, што и требаше да се докаже.

5. Даден е ромб $ABCD$ и точки M и N соодветно на отсечките AB и BC такви што $\overline{DM} = \overline{MN}$. Правата DN ја сече AC во P , а правата DM ја сече AB во R . Докажи дека $\overline{DP} = \overline{PR}$.

Решение. Точката M е пресек на симетралата на $\angle DCN$ и страната DN , па затоа таа лежи на опишаната кружница на $\triangle CDN$, т.е. четириаголникот $CDMN$ е тетивен (направи цртеж). Сега $\angle RMN = \angle DCN = 180^\circ - \angle RBN$, па затоа точките B, R, M, N се конциклични. Освен тоа

$$\begin{aligned} 180^\circ - \angle MPN &= \angle CMN + \angle DNM = \angle CDN + \angle DCM \\ &= \angle CDN + \angle MCN = \angle CDM = \angle MBC, \end{aligned}$$

па затоа точката P припаѓа на кружницата $BRMN$. Сега од

$$\angle APR = \angle MBR = \angle ADM$$

заклучуваме дека P е на опишаната кружница околу $\triangle ADR$, и тоа бидејќи $\angle DAP = \angle PAR$ таа е средина на лакот DR , од каде што следува $\overline{DP} = \overline{PR}$.

6. За конвексниот четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AB} = \overline{BD}$ и $\angle ABD = \angle DBC$. Точката K на дијагоналата BD е таква што $\overline{BK} = \overline{BC}$. Докажи дека важи $\angle KAD = \angle KCD$.

Решение. Нека точката E на страната AB е таква што $\overline{BE} = \overline{BC}$, направи цртеж. Тогаш рамнокраките триаголници EBK и KBC се складни (по две еднави страни и агол меѓу нив). Според тоа, $\overline{EK} = \overline{KC}$ и

$$\angle AEK = 180^\circ - \angle BEK = 180^\circ - \angle BKC = \angle CKD.$$

Освен тоа, $\overline{KD} = \overline{BD} - \overline{BK} = \overline{BA} - \overline{BE} = \overline{EA}$. Значи, триаголниците AEK и DKC се складни, па затоа $\angle KCD = \angle EKA$. Понатаму, бидејќи триаголниците BEK и BAD се рамнокраки, важи $\angle BEK = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle EBD = \angle BAD$. Според тоа, $AD \parallel EK$, па затоа $\angle KAD = \angle EKA = \angle KCD$.

7. За тетивниот четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \overline{AD} \cdot \overline{CD}$. Правите AD и BC се сечат во точката X , а правите AB и CD се сечат во точката Y . Точките E, F, G и H се средините на отсечките AB, BC, CD и DA , соодветно. Симетралата на $\angle AXB$ ја сече отсечката EG во точката S , а симетралата на $\angle AYD$ ја сече отсечката FH во точката T . Докажи дека правите ST и BD се паралелни.

Решение. Од $\triangle XBA \sim \triangle XDC$ следува $\angle CXG = \angle AXE$, па бидејќи XS го полови $\angle AXB$, заклучуваме дека XS е симетрала на $\angle GXE$. Според тоа

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{XG}}{\overline{XE}} = \frac{\overline{GC}}{\overline{SE}}.$$

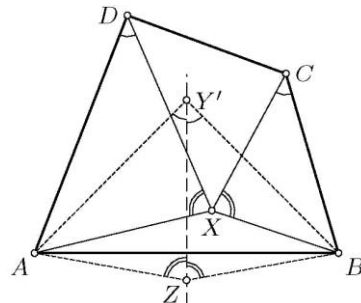
Аналогно YT е симетрала на $\angle FYH$ и

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{YF}}{\overline{YH}} = \frac{\overline{FT}}{\overline{TH}}.$$

Сега од $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}$ следува дека $\frac{\overline{GC}}{\overline{SE}} = \frac{\overline{FT}}{\overline{TH}}$, што заедно со $FG \parallel EH$ дава $TS \parallel FG \parallel EH$. Конечно, од $FG \parallel BD$ заклучуваме дека $ST \parallel BD$, што и требаше да се докаже.

8. Во внатрешноста на конвексен четириаголник $ABCD$ кој не е трапез е дадена точка X таква што $\angle ADX = \angle BCX < 90^\circ$ и $\angle DAX = \angle CBX < 90^\circ$. Ако симетралите на страните AB и CD се сечат во точката Y , докажи дека $\angle AYB = 2\angle ADX$

Решение. Според условот на задачата триаголниците ADX и BCX се слични и спротивно ориентирани. Нека Y' и Z се точки на симетралата на отсечката AB такви што триаголниците $AY'Z$ и ADX се слични и исто ориентирани. Тогаш триаголниците $BY'Z$ и BCX се слични и исто ориентирани. Исто така,



од $\frac{\overline{AD}}{\overline{AY'}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{AZ}}$ и $\angle DAY' = \angle XAZ$ следува $\triangle ADY' \sim \triangle AXZ$, па затоа $\frac{\overline{AD}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{DY'}}{\overline{XZ}}$.

Аналогно важи $\frac{\overline{BC}}{\overline{BX}} = \frac{\overline{CY'}}{\overline{XZ}}$. Сега од $\frac{\overline{AD}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BX}}$ следува $\overline{CY'} = \overline{DY'}$, што значи

дека Y' припаѓа на симетралата на отсечката CD , па затоа $Y' \equiv Y$.

Значи, $\angle AYB = 2\angle AYZ = 2\angle ADX$, што и требаше да се докаже.

9. Даден е паралелограм $ABCD$. Произволна права p низ темето A ги сече полуправите BC и DC во точките X и Y соодветно. Нека K е центарот на припишаната кружница на триаголникот ABX наспроти темето A , а L е центарот на припишаната кружница на триаголникот ADY наспроти темето A . Докажи дека големината на $\angle KCL$ не зависи од изборот на правата p .

Решение. Да означиме

$$\angle BAK = \angle KAX = x \text{ и}$$

$$\angle XAL = \angle LAD = y.$$

Од $\angle KBC = \angle CDL = \frac{1}{2} \angle BAD = x + y$

следува $\angle AKB = x + y - \angle BAK = y$ и

аналогно $\angle DLA = x$. Според тоа,

$\triangle ABK \sim \triangle LDA$. Од оваа сличност

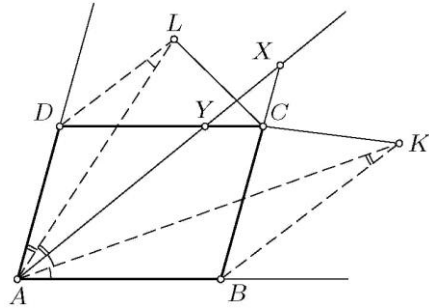
следува $\frac{\overline{KB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{DL}}$, т.е. $\frac{\overline{KB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DL}}$, што

заедно со условот $\angle KBC = \angle CDL$ дава $\triangle KBC \sim \triangle CDL$. Оттука следува

$$\angle LCD + \angle BCK = \angle CKB + \angle BCK = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle BAD,$$

па затоа

$$\angle KCL = 360^\circ - (180^\circ - \frac{1}{2} \angle BAD) - \angle DCB = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle BAD.$$



10. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез со $AD \parallel BC$. Дијагоналите AC и BD се сечат во точката M . Точките X и Y лежат на страната AB и се такви што $\overline{AX} = \overline{AM}$ и $\overline{BY} = \overline{BM}$. Нека Z е средината на XY и N е пресечната точка на CY и DX . Докажи дека правата ZN е паралелна на основите на трапезот.

Решение. Нека точката $Z' \in AB$ е таква што $NZ' \parallel AD$. Ќе докажеме дека

$Z' \equiv Z$. Од сличноста $\triangle YCB \sim \triangle YNZ'$ следува дека $\frac{\overline{YZ'}}{\overline{Z'N}} = \frac{\overline{YB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{BC}}$ и ана-

логно $\frac{\overline{XZ'}}{\overline{Z'N}} = \frac{\overline{XA}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{AD}}$. Освен тоа, бидејќи $\triangle MBC \sim \triangle MAD$ имаме $\frac{\overline{MB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{AD}}$.

Според тоа, $\frac{\overline{YZ'}}{\overline{Z'N}} = \frac{\overline{XZ'}}{\overline{Z'N}}$, па затоа $\overline{XZ'} = \overline{YZ'}$, т.е. $Z' \equiv Z$.

11. Даден е остроаголен триаголник ABC во кој $\angle BAC = \alpha$. Точката O е центар на опишаната кружница на $\triangle ABC$, H е негов ортоцентар и F е средина на страната AB . Точката P е во внатрешноста на $\triangle ABC$ и е таква што $\angle APF = \alpha$ и $\angle APB = 180^\circ - \alpha$. Докажи дека $\angle HPO = 180^\circ - \alpha$.

Решение. Со E да го означиме подножјето на висината на триаголникот повлечена од темето B . Бидејќи

$$\angle AEH = \angle BFO = 90^\circ \text{ и}$$

$$\angle AHE = \angle BCA = \angle BOF,$$

важи $\triangle AEH \sim \triangle BFO$. Понатаму, бидејќи $\overline{FA} = \overline{FB} = \overline{FE}$, добиваме

$$\angle AEF = \angle FAE = \angle APF,$$

што значи дека четириаголникот $AEFF$ е тетивен и оттука

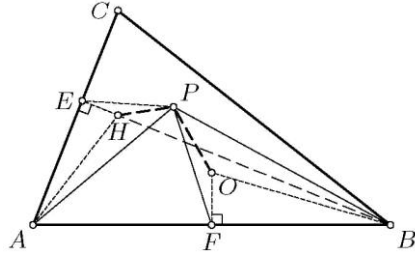
$$\angle AEP = 180^\circ - \angle PFA = \angle BFP.$$

Освен тоа,

$$\angle EPF = 180^\circ - \angle FAE = 180^\circ - \alpha = \angle APB,$$

па затоа $\angle EPA = \angle EPB$. Според тоа, $\triangle AEP \sim \triangle BFP$.

Значи, четириаголниците $AENP$ и $BFOP$ се слични, па затоа $\angle FPO = \angle EPH$. Оттука следува $\angle HPO = \angle EPF = 180^\circ - \alpha$.



12. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$ таков што $\overline{AB} = \overline{AD}$. Точките M и N припаѓаат на страните CD и BC , соодветно и важи $\overline{DM} + \overline{BN} = \overline{MN}$. Докажи дека центарот на кружницата опишана околу триаголникот AMN припаѓа на отсечката AC .

Решение. На продолжението на отсечката CD преку точката D земаме точка K така што $\overline{DK} = \overline{BN}$. Од $\overline{KD} = \overline{BN}$, $\overline{AB} = \overline{AD}$ и $\angle KDA = \angle NBA$ следува дека триаголниците KDA и NBA се складни. Според тоа,

$$\overline{KA} = \overline{NA}, \overline{KM} = \overline{DK} + \overline{DM} = \overline{BN} + \overline{DM} = \overline{NM},$$

па затоа триаголниците KMA и NMA се складни. Оттука $\angle MAN = \frac{1}{2} \angle DAB$.

Нека O и C се пресечните точки на отсечката AC со кружницата опишана околу триаголникот MNC . Од

$$\angle MCO = \angle DCA = \angle BCA = \angle NCO,$$

следува $\overline{MO} = \overline{NO}$. Освен тоа,

$$\angle MON = 180^\circ - \angle MCN = 180^\circ - \angle DCB = \angle DAB = 2\angle MAN.$$

Од ова равенство и $\overline{MO} = \overline{NO}$ следува дека O е центар на опишаната кружница околу триаголникот AMN .

13. Точките A_1 и C_1 припаѓаат соодветно на страните AB и BC на паралелограмот $ABCD$. Отсечките AC_1 и CA_1 се сечат во точката P , а опишаните кружници околу триаголниците AA_1P и CC_1P по втор пат се сечат во точка Q , внатрешна за триаголникот ACD . Докажи дека $\angle PDA = \angle QBA$.

Решение. Со ω_A и ω_C да ги означиме соодветно опишаните кружници околу $\triangle AA_1P$ и $\triangle CC_1P$. Нека полуправите AQ и CQ ги сечат страните CD и AD соодветно во точките C_2 и A_2 .

Бидејќи $AB \parallel CD$ и AA_1PQ е тетивен четириаголник, добиваме дека

$$\angle PCC_2 = 180^\circ - \angle AA_1P = \angle AQP = 180^\circ - \angle PQC_2.$$

Значи, четириаголникот $CPQC_2$ е тетивен, што значи дека C_2 лежи на ω_C .

Аналогно A_2 лежи на ω_A .

Понатаму, бидејќи $AB \parallel CD$ и AA_1PA_2 е тетивен четириаголник, добиваме

$$\angle A_2PC = 180^\circ - \angle A_1PA_2 = \angle A_1AA_2 = 180^\circ - \angle A_2DC.$$

Значи, четириаголникот A_2PCD е тетивен, од каде следува

$$\angle PDA = \angle PDA_2 = \angle PCA_2 = \angle PCQ.$$

Аналогно добиваме дека четириаголникот BA_1QC е тетивен, па затоа

$$\angle QBA = \angle QCA_1 = \angle PCQ.$$

Оттука

$$\angle PDA = \angle PCQ = \angle QBA.$$

14. Даден е триаголник ABC и во рамнината на овој триаголник паралелограм $ASCR$ со дијагонала AC . Нека правата која минува низ точката B и е паралелна со CS ги сече правите AS и CR соодветно во точките M и P , а правата која минува низ точката B и е паралелна со AS ги сече правите AR и CS соодветно во точките N и Q . Докажи дека правите RS , MN и PQ се сечат во една точка.

Решение. Да означиме $\overline{AM} = x$, $\overline{AN} = y$, $\overline{AR} = b$ и $\overline{AS} = a$, (направи цртеж). Нека $MN \cap RS = T$. Ќе докажеме дека точката P припаѓа на правата TQ . Доволно е да докажеме дека правата TQ ја сече правата CP во точка V таква што $\overline{CV} = a - x$, од каде ќе следува $\overline{RV} = x$ и како $\overline{RP} = x$, добиваме $V \equiv P$.

Нека $MN \cap RC = U$. Триаголникот AMN е сличен со триаголникот URN , па затоа $x : y = \overline{UR} : (b - y)$, т.е. $\overline{UR} = \frac{x(b-y)}{y}$. Нека $RS \cap BN = X$ и $\overline{NX} = z$.

Од Талесовата теорема следува $z : \overline{UR} = (a - z) : \overline{RV}$, па затоа

$$\overline{RV} = \frac{\overline{UR}(a-z)}{z} = \frac{x(b-y)(a-z)}{zy}. \quad (1)$$

Сега од повторно од Талесовата теорема добиваме $\frac{\overline{AS}}{\overline{NX}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{NR}}$, односно $\frac{a}{z} = \frac{b}{b-y}$, па затоа $a(b-y) = bz$, т.е. $(a-z)(b-y) = zy$. Конечно, од (1) и последното равенство следува $\overline{RV} = x$.

15. Во четириаголникот $ABCD$ е впишана кружница со центар O , при што $\overline{OA}=5$, $\overline{OB}=6$, $\overline{OC}=7$ и $\overline{OD}=8$. Ако M и N се соодветно средините на дијагоналите AC и BD , определи го односот $\frac{\overline{OM}}{\overline{ON}}$.

Решение. Нека впишаната кружница ги допира AB, BC, CD, DA соодветно во точките E, F, G, H и нека P, Q, R, S се соодветно средините на отсечките HE, EF, FG, GH (направи цртеж). Четириаголникот $PQRS$ е паралелограм, па затоа PR и QS имаат заедничка средина K . Точката P припаѓа на OA и $\triangle OAE \sim \triangle OEP$, па затоа $\frac{\overline{OA}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OP}}$, т.е. $\overline{OP} = \frac{r^2}{\overline{OA}}$, каде r е радиусот на впишаната кружница. Аналогно $\overline{OR} = \frac{r^2}{\overline{OC}}$, па затоа $\frac{\overline{OR}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OC}}{r^2}$, т.е. $\triangle ORP \sim \triangle OAC$ со коефициент на сличност $\frac{\overline{OA} \cdot \overline{OC}}{r^2}$. Затоа, $\overline{OM} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OC}}{r^2} \overline{OK}$. Аналогно, $\overline{ON} = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{OD}}{r^2} \overline{OK}$, па затоа $\frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OC}}{\overline{OB} \cdot \overline{OD}} = \frac{48}{35}$.

16. Точките M и N се соодветно на непаралелните страни AD и BC на трапезот $ABCD$ и се такви што дијагоналите на трапезот ја делат отсечката MN на три еднакви дела, но MN не е паралелна со AB . Определи го односот на основите на трапезот.

Решение. Нека дијагоналите AB и CD соодветно ја сечат отсечката MN во точките P и Q , со распоред $M-P-Q-N$ (направи цртеж). Ако означиме $\overline{AM} = \lambda \overline{AD}$ и $\overline{BN} = \mu \overline{BC}$, добиваме

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{P_{ABC}}{P_{BCD}} = \frac{P_{ABC}}{P_{ANC}} \cdot \frac{P_{ANC}}{P_{AMC}} \cdot \frac{P_{AMC}}{P_{BCD}} = \frac{2\lambda}{1-\mu}.$$

Аналогно, $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{2\mu}{1-\lambda}$, од каде добиваме $\frac{2\lambda}{1-\mu} = \frac{2\mu}{1-\lambda}$, т.е. $\lambda(1-\lambda) = \mu(1-\mu)$, па како $\lambda \neq \mu$, мора да е $\lambda = 1-\mu$, односно $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = 2$.

17. Даден е четириаголник $ABCD$ со $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. Точката M на страната AB е таква што $\overline{AD} = \overline{AM}$. Полуправите DM и CB се сечат во точката

N . Точките H и K се подножјата на нормалите соодветно повлечени од точките D и C на правите AC и AN . Докажи дека $\angle MHN = \angle MCK$.

Решение. Да означиме $\angle BAD = 2\alpha$. Тогаш од рамнокракиот $\triangle AMD$ следува $\angle ADM = 90^\circ - \alpha$ и затоа $\angle CDN = \alpha$. Освен тоа, $\angle BMN = 90^\circ - \alpha$ и од правоаголниот $\triangle MNB$ добиваме $\angle ANC = \alpha$. Значи, $\triangle DNC$ е рамнокрак и $\overline{CN} = \overline{CD}$. Од Евклидовите теореми следува

$$\overline{AM}^2 = \overline{AD}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AC},$$

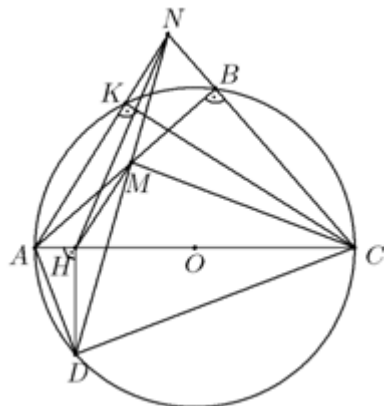
па затоа $\frac{\overline{AM}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AM}}$, т.е. $\triangle AHM \sim \triangle AMC$,

од каде добиваме $\angle CHM = \angle CMB$.

Аналогно од $\overline{CN}^2 = \overline{CD}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{CA}$ следува $\angle CHN = \angle CNA$.

Ако T е пресечната точка на AB и CK , тогаш $\angle CTB = \angle CNA$, како агли со заемно нормални краци. Според тоа, $\angle CHN = \angle CTB$ и

$$\angle MHN = \angle CHN - \angle CHM = \angle CTB - \angle CMN = \angle MCK.$$



18. Во конвексен четириаголник $ABCD$ дијагоналите AC и BD се сечат во точката E , точката M е средина на AE и точката N е средина на CD . Познато е дека дијагоналата BD е симетрала на $\angle ABC$. Докажи дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен ако и само ако четириаголникот $MBCN$ е тетивен.

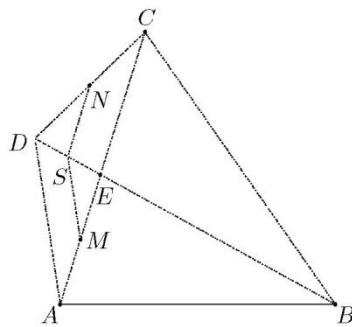
Решение. Нека четириаголникот $ABCD$ е тетивен. Од $\angle ABD = \angle CBD$ следува дека $\overline{AD} = \overline{CD}$. Нека S е средината на DE . Бидејќи SM и SN се средни линии соодветно во $\triangle DEA$ и $\triangle DEC$ имаме

$$\overline{SM} = \frac{\overline{AD}}{2} = \frac{\overline{CD}}{2} = \overline{CN}$$

и $SN \parallel AC$. Според тоа, четириаголникот

$MCNS$ е рамнокрак трапез, па затоа е тетивен. Од друга страна, имаме $\angle MSB = \angle ADB = \angle ACB$, што значи дека четириаголникот $MBCS$ е тетивен. Според тоа, точките M, B, C, N и S лежат на една кружница, т.е. четириаголникот $MBCN$ е тетивен.

Нека четириаголникот $MBCN$ е тетивен и втората пресечна точка на правата BD и кружницата опишана околу $\triangle ABC$ да ја означиме со D_1 . Ќе докажеме дека $D \equiv D_1$. Нека точката D_1 е меѓу B и D (случајот кога D е меѓу B и

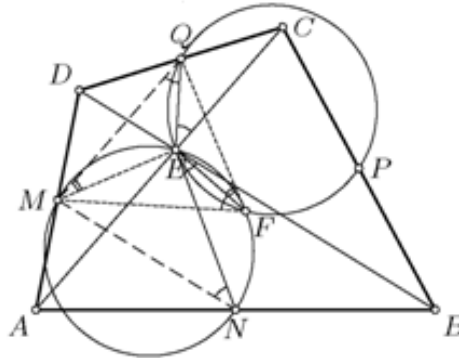


D_1 се разгледува аналогно). Ако N_1 е средината на CD_1 , како погоре се докажува дека четириаголникот $MBCN_1$ е тетивен. Според тоа, точките M, B, C, N и N_1 лежат на една кружница. Но, ако $D \neq D_1$ последното не е можно, бидејќи тогаш N_1 лежи на средната отсечка низ N во $\triangle CDE$, што значи дека N_1 е внатрешна за $\triangle MCN$.

19. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Точките M, N, P, Q се средини на страните DA, AB, BC, CD , соодветно, а точката E е пресекот на дијагоналите AC и BD . Кружниците опишани околу $\triangle EMN$ и $\triangle EPQ$ се сечат во точката $F \neq E$. Докажи дека $EF \perp AC$.

Решение. *Прв начин.* Триаголниците EAB и EDC се слични, па затоа се слични и триаголниците EBN и ECQ . Затоа за ориентирани агли важи

$$\angle MFE = \angle MNE = \angle BEN = \angle QEC = \angle EQM.$$



Аналогно важи $\angle QFE = \angle EMQ$, од каде што следува дека F е ортоцентар на $\triangle EMQ$. Значи, $EF \perp QM \parallel AC$.

Втор начин. Разгледуваме трансформација τ за вектор $\frac{1}{2}\overline{AC}$. Важи $\tau(M) = Q$ и $\tau(N) = P$. Да означиме $\tau(E) = E'$. Од сличноста на триаголниците AED и BEC следува $\triangle AEM \sim \triangle BEP$, па затоа

$$\angle QE'E = \angle EMQ = \angle MEA = \angle BEP = \angle QPE,$$

па точката E' лежи на кружницата PEQ . Според тоа, трансформацијата τ ја пресликува кружницата MEN во кружницата PEQ . Затоа правата која ги поврзува нивните центри е паралелна со AC , од каде следува тврдењето на задачата.

20. Нека H е ортоцентарот, а O е центарот на опишаната кружница околу остроаголниот $\triangle ABC$. Точките D и E се подножјата на висините повлечени од темињата A и B , соодветно. Со K да ја означиме пресечната точка

на правите OD и BE , а со L пресечната точка на правите OE и AD . Нека X е втората пресечна точка на кружниците опишани околу триаголниците HKD и HLE , а M е средината на страната AB . Докажи дека точките K, L и M се колинеарни ако и само ако X е центар на кружницата опишана околу триаголникот EOD .

Решение. Ако X е центар на опишаната кружница околу $\triangle ODE$, тогаш

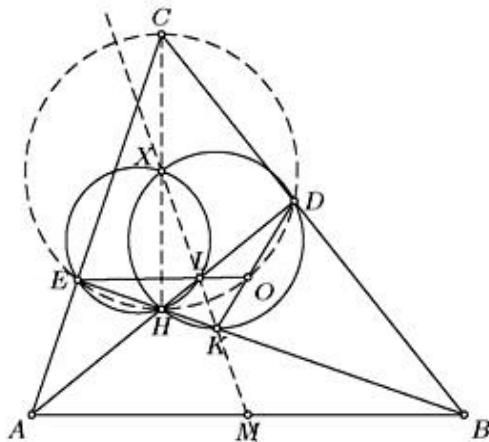
$$\begin{aligned} 90^\circ - \angle KDE &= 90^\circ - \angle ODE = \angle XEO \\ &= \angle XEL = \angle XHD = \angle XKD \end{aligned}$$

(сите агли се ориентирани), па затоа $XK \perp DE$. Аналогно $XL \perp DE$, т.е. K и L лежат на симетралата на отсечката DE , па затоа $DEHO$ е рамнокрак трапез, што значи дека D, E, O, H лежат на една кружница.

Од друга страна, ако O лежи на кружницата HDE , значи на кружницата над дијаметар CH , периферните агли над EH и OD се еднакви ($\angle ECH = \angle OCD$), па $DEHO$ е рамнокрак трапез и оттука $\overline{DL} = \overline{EL}$. Сега, имаме

$$\angle EXH = \angle ELH = 2\angle EDH$$

и аналогно $\angle DXH = 2\angle DEH$, па затоа X е центар на кружницата $DEHO$. Според тоа, X е центар на кружницата ODE ако и само ако D, E, O, H лежат на една кружница.



Ако точките D, E, O, H лежат на една кружница, тогаш точките K, L и M лежат на симетралата на отсечката DE , со што едната импликација на задачата е докажана.

Сега да претпоставиме дека O лежи надвор од кружницата $CDHE$ (случајот кога O е внатре во кружницата се разгледува на ист начин). Бидејќи $CO \perp DE$ важи $\overline{DL} > \overline{LE}$ и $\overline{EK} > \overline{KD}$, т.е. K и L лежат на различни страни на симетралата на отсечката DE , а M припаѓа на оваа симетрала. Според тоа, ако K, L и M се колинеарни, M мора да се наоѓа меѓу K и L . Следува дека една од точките K и L е надвор од $\triangle ABC$, а другата внатре во три-

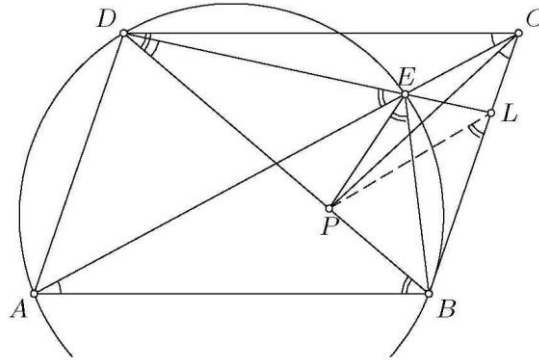
аголникот. Меѓутоа, кога O е надвор од четириаголникот $ABDE$, двете точки K и L се надвор од триаголникот, а во спротивно двете се внатре во триаголникот. Ова е противречност со претпоставката дека M лежи на правата KL , со што е докажана другата импликација.

21. Нека P е точка на дијагоналата BD на паралелограмот $ABCD$ таква што $\angle PCB = \angle ACD$. Кругницата опишана околу триаголникот ABD ја сече правата AC во точките E и A . Докажи дека $\angle AED = \angle PEB$.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме кога $\angle BAC \leq 90^\circ$. Другиот случај се докажува аналогно. Нека правите DE и BC се сечат во точката L . Четириаголникот $CDPL$ е тетивен бидејќи $\angle PDL = \angle PCL$, од каде добиваме

$$\angle PLE = \angle PCD = \angle BCA = \angle DAC = \angle DBE = \angle PBE,$$

па затоа и четириаголникот $BPEL$ е тетивен.



Од тетивноста на овие четириаголници конечно добиваме

$$\angle PEB = \angle PLB = \angle PDC = \angle DBA = \angle DEA.$$

22. Во $\triangle ABC$ ($\overline{AB} \neq \overline{AC}$) впишаната кружница, со центар во точката I , ја допира страната BC во точката D . Нека M е средината на отсечката BC . Докажи дека нормалите повлечени од точките M и D соодветно на правите AI и MI се сечат на правата која ја содржи висината на $\triangle ABC$ повлечена од темето A .

Решение. Нека нормалите од M и D повлечени соодветно на AI и MI се сечат во точката S и нека J е точката во која правата MI ја сече висината повлечена од темето A во $\triangle ABC$. Доволно е да се докаже дека $\overline{AJ} = \overline{ID}$. Навистина, тогаш ќе следува дека четириаголникот $AJDI$ е паралелограм, па затоа ќе важи $MS \perp DJ$. Така D е ортоцентар на $\triangle MSJ$ и оттука $JS \perp MD$, т.е. $AS \perp BC$.

Нека H е подножјето на висината повлечена од темето A , а F е пресекот на симетралата на $\angle BAC$ со страната BC . Ако $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ и $\overline{AB} = c$, тогаш

$$\overline{BF} = \frac{ac}{b+c}, \quad \overline{BD} = \frac{a-b+c}{2} \quad \text{и} \quad \overline{BH} = \frac{a^2-b^2+c^2}{2a},$$

па затоа

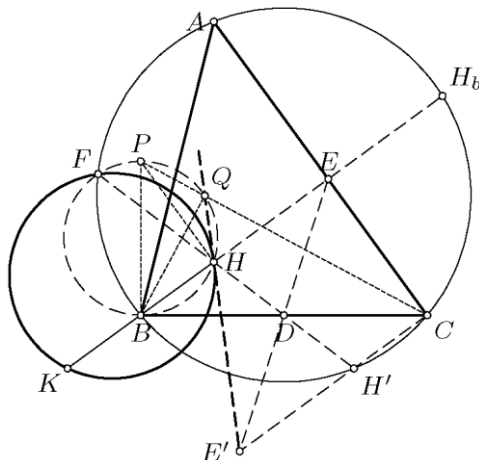
$$\overline{FH} = \overline{BF} - \overline{BH} = \frac{|b-c|((b+c)^2-a^2)}{2a(b+c)} \quad \text{и} \quad \overline{FD} = \overline{BF} - \overline{BD} = \frac{|b-c|(b+c-a)}{2(b+c)}.$$

Според тоа, $\frac{\overline{AF}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{FH}} = \frac{a}{a+b+c} = \frac{\overline{ID}}{\overline{AH}}$, од каде следува $\overline{AF} = \overline{ID}$.

23. Нека H е ортоцентарот на остроаголниот $\triangle ABC$ ($\overline{AB} \neq \overline{AC}$) и нека F ($F \neq A$) е точка на опишаната кружница околу овој триаголник за која важи $\angle AFH = 90^\circ$. Точката K е централно симетрична слика на точката H во однос на точката B , точката P е таква што важи $\angle PHB = \angle PBC = 90^\circ$, а точката Q е подножје на нормалата повлечена од точката B на правата CP . Докажи дека правата HQ ја допира опишаната кружница околу $\triangle FHK$.

Решение. *Прв начин.* Нека E е подножјето на висината повлечена од темето B , а H' и E' се соодветно точките симетрични на точките H и E во однос на средината D на страната BC . Бидејќи $\angle AFH = 90^\circ$, точките H' , D, H и F се колинеарни. Со H_b да ја означиме точката симетрична на H во однос на AC . Точките H' и H_b припаѓаат на опишаната кружница Ω на триаголникот ABC бидејќи важи

$$\angle AH_bC = \angle ANC = 180^\circ - \angle ABC \quad \text{и} \quad \angle BH'C = \angle BHC = 180^\circ - \angle BAC.$$



Од $\overline{FH} \cdot \overline{HH'} = \overline{BH} \cdot \overline{HH_b}$ следува дека $\triangle FHB \sim \triangle H_bHH'$. Оттука триаголниците FHB и EHD се слични, а при оваа сличност на точката K и соодветствува точката H' . Според тоа, $\triangle FHK \sim \triangle EHH'$, па како $EHE'H'$ е паралелограм важи $\angle KFH = \angle HEH' = \angle KHE'$, што значи дека правата HE' ја допира кружницата FHK .

Конечно, четириаголниците $BE'CQ$ и $BPQH$ се тетивни, па затоа важи

$$\angle BQE' = \angle BCE' = \angle CBH = \angle BPH = \angle BQH,$$

па затоа точките Q, H и E' се колинеарни, со што доказот е завршен.

Втор начин. Точките H и Q лежат на кружницата γ со дијаметар BP .

Исто така,

$$\angle BFH = \angle BFA - 90^\circ = 90^\circ - \angle ACB = \angle CBE = \angle BPH,$$

па затоа и точката F припаѓа на γ . Според тоа,

$$\angle FBK = 180^\circ - \angle HBF = \angle FQH.$$

Нека D е средина на страната BC , а H' е симетричната точка на точката H во однос на D . Бидејќи D е центар на опишаната кружница на $\triangle BQC$, важи

$$\overline{DQ}^2 = \overline{DB}^2 = \overline{DB} \cdot \overline{DC} = \overline{DH'} \cdot \overline{DF} = \overline{DH} \cdot \overline{DF},$$

па затоа $\triangle DHF \sim \triangle DQF$ и $\triangle DHB \sim \triangle DBF$. Според тоа,

$$\frac{\overline{FQ}}{\overline{QH}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{QD}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{BK}}.$$

Значи, триаголниците FQH и FBK се слични, па затоа

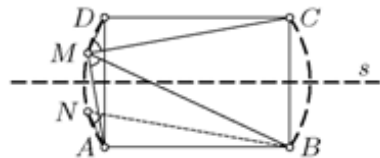
$$\angle FKH = \angle FKB = \angle FHQ,$$

што значи дека HQ ја допира кружницата FHK .

24. Нека $ABCD$ е правоаголник. Во појасот меѓу правите AB и CD определи множество точки од кои отсечките AB и CD се гледаат под ист агол.

Решение. Сите точки на симетралата s на отсечката BC го задоволуваат условот на задачата. Нека претпоставиме дека за точката $M \notin s$ важи $\angle AMB = \angle CMD$.

Нека N е симетричната точка на M во однос на s . Тогаш $\angle AMB = \angle ANB$, па точките A, B, M, N лежат на иста кружница. Оваа кружница ги содржи и точките C и D , па тоа е опишаната кружница k околу правоаголникот $ABCD$. Јасно, сите точки на лаците BC и DA на кружницата k го задоволуваат условот на задачата. Според тоа, бараното геометриско место е унијата на овие два лаца и правата s .

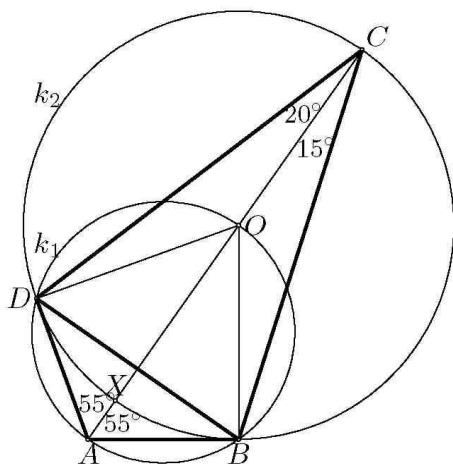


25. Во конвексен четириаголник $ABCD$ важи

$$\angle BAC = \angle DAC = 55^\circ, \angle DCA = 20^\circ, \angle BCA = 15^\circ.$$

Опреди ја големината на $\angle DBA$.

Решение. Нека O е пресечната точка на опишаната кружница на $\triangle ABD$ (k_1) и правата AC . Тогаш $\overline{BO} = \overline{DO}$ (тетиви над исти агли во k_1) и



$$\angle BOD = 180^\circ - \angle BAD = 70^\circ.$$

Значи, кружницата со центар O и радиус OD (k_2) минува низ точката B и како $\angle BCD = \frac{1}{2} \angle BOD$ таа минува и низ точката C (според теоремата за централен и периферен агол).

Нека X е пресечната точка на правата AC и k_2 . Тогаш $\angle DBA = \angle DOA$ (агли на AD во k_1), т.е.

$$\angle DBA = \angle DOX = 2\angle DCX = 2\angle DCA = 40^\circ,$$

($\angle DOX$ е два пати поголем од $\angle DCX$ како централен и периферен агол во k_2).

26. Даден е $\triangle ABC$. Нека BL , $L \in AC$ е симетралата на $\angle ABC$, а AH , $H \in BC$ е висината на триаголникот повлечена од темето A . Докажи дека $\angle AHL = \angle ALB$ ако и само ако $\angle BAC = \angle ACB + 90^\circ$.

Решение. $\Rightarrow$: Нека $\angle AHL = \angle ALB = \varphi$ и I е центар на впишаната кружница во $\triangle ABH$. Тогаш $\angle AHI = \frac{1}{2} \angle AHB = 45^\circ$ и $\angle AIL = 180^\circ - \angle AIB = 45^\circ$. Оттука

$$\begin{aligned} \angle LAI + \angle LHI &= (180^\circ - \angle ALI - \angle AIL) + (\angle AHL + \angle AHI) \\ &= (180^\circ - \varphi - 45^\circ) + (\varphi + 45^\circ) = 180^\circ. \end{aligned}$$

Според тоа, четириаголникот $AHLI$ е тетивен, па затоа $\varphi = 45^\circ$. Сега имаме

$$\angle BAC = 90^\circ + \angle BAI = 90^\circ + \frac{1}{2}(90^\circ - \angle ABC).$$

Ако во последното равенство замениме $\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB$, добиваме $\angle BAC = \angle ACB + 90^\circ$.

$\Leftarrow$: Ќе ги користиме стандардните ознаки за агли во $\triangle ABC$. Нека

$\alpha = 90^\circ + \gamma$. Тогаш лесно се покажува дека AL е надворешна симетрала на агол за $\triangle ABH$. Според тоа, L е центар на припишаната кружница за $\triangle ABH$ кон страната AH . Сега имаме $\angle AHL = \frac{1}{2} \angle CHA = 45^\circ$. Од друга страна

$$\begin{aligned} \angle ALB &= 180^\circ - \angle BAL - \angle ABL = 180^\circ - \alpha - \frac{\beta}{2} \\ &= 180^\circ - \alpha - \frac{180^\circ - \alpha - \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha - \gamma}{2} = 45^\circ. \end{aligned}$$

Според тоа, $\angle AHL = \angle ALB$.

27. На страните AB и BC на паралелограмот $ABCD$ се конструирани точки E и F такви што DE е симетрала на $\angle ADF$ и $\overline{AE} + \overline{CF} = \overline{DF}$. Правата низ C нормална на DE ги сече страната AD во точката L и дијагоналата BD во точката H . Нека DE ја сече AC во точката N .

а) Докажи дека $\overline{AE} = \overline{DL}$.

б) Ако $HN \parallel AD$, докажи дека $\overline{BC} = \overline{CD}$.

в) Ако $HN \parallel AD$, докажи дека $ABCD$ е квадрат.

Решение. а) Нека $M \in DE \cap CL$, $K \in DF \cap CL$. Тогаш DM е висина и симетрала на агол во $\triangle LKD$, па затоа $\overline{DK} = \overline{DL}$. Понатаму, $\triangle LKD \sim \triangle CKF$, па затоа $\overline{KF} = \overline{CF}$. Конечно, $\overline{AE} = \overline{DF} - \overline{CF} = \overline{DF} - \overline{KF} = \overline{DK} = \overline{DL}$.

б) Од сличностите $\triangle ANE \sim \triangle CND$, $\triangle HNC \sim \triangle LAC$ и $\triangle LHD \sim \triangle CHB$ следува

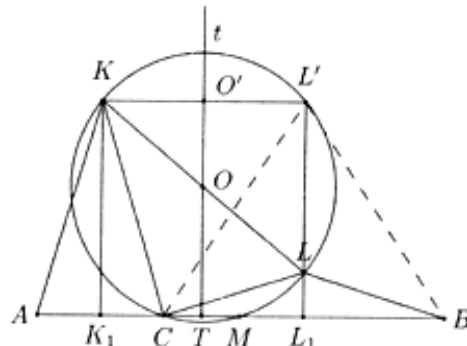
$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{LH}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{DL}}{\overline{BC}}.$$

Бидејќи $\overline{AE} = \overline{DL}$, добиваме $\overline{BC} = \overline{CD}$.

в) Од б) следува дека $ABCD$ е ромб, па затоа $DB \perp AC$, што значи дека H е ортоцентар во $\triangle DNC$. Оттука $HN \perp DC$, па затоа $AD \perp DC$ и $ABCD$ е квадрат.

28. Точката M е средина на отсечката AB , а точката C е внатрешна за AB и $C \neq M$. Во едната полурамнина во однос на правата AB е конструирани рамнокраки триаголници ACK ($\overline{AK} = \overline{CK}$) и BCL ($\overline{BL} = \overline{CL}$), такви што K , C , L и M лежат на една кружница k . Докажи дека $KL \parallel AB$ или $KA \perp LB$.

Решение. Нека K_1 и L_1 се средините на AC и BC . Тогаш $KK_1 \parallel LL_1$, т.е. KK_1L_1L е трапез. Нека T е средината на CM и $\overline{AC} < \overline{BC}$. Тогаш



$$\begin{aligned}\overline{CM} &= \frac{\overline{BC} - \overline{AC}}{2}, \quad \overline{CT} = \frac{\overline{BC} - \overline{AC}}{4}, \\ \overline{K_1T} &= \frac{\overline{AC}}{2} + \frac{\overline{BC} - \overline{AC}}{4} = \frac{\overline{BC} + \overline{AC}}{4}, \\ \overline{L_1T} &= \frac{\overline{BC}}{2} - \frac{\overline{BC} - \overline{AC}}{4} = \frac{\overline{BC} + \overline{AC}}{4}.\end{aligned}$$

Според тоа, T е средина на K_1L_1 . Нека t е средната линија на KK_1L_1L ($T \in t, t \perp K_1L_1$). Од T е средина на тетивата CM и $t \in CM$, следува дека t е дијаметар на k .

Ако $t \cap KL = O$, тогаш O е средина на тетивата KL . Според тоа, имаме две можности:

- 1) $t \perp KL$ и тогаш $KL \parallel AB$,
- 2) KL е дијаметар на k . Тогаш $\angle KCL = 90^\circ$ и $\angle KCA + \angle LCB = 90^\circ$. Но, $\angle KAC = \angle KCA$ и $\angle LBC = \angle LCB$, па затоа $\angle KAC + \angle LBC = 90^\circ$, т.е. $KA \perp LB$.

29. Даден е правоаголен рамнокрак $\triangle ABC$ со хипотенуза AB . Точките P и Q од отсечката AB се такви што $\angle PCQ = 45^\circ$ и P е меѓу A и Q . Опишаните кружници околу триаголниците ACQ и BCP по втор пат се сечат во точката R . Докажи дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle CPQ$ лежи на правата CR .

Решение. Четириаголникот $ARQC$ е тетивен, па затоа $\angle QRC = 45^\circ$ и аналогно $\angle PRC = 45^\circ$. Нека S е втората пресечна точка на опишаната кружница околу $\triangle PQR$ и правата CR . Од $\angle QRC = \angle PRC = 45^\circ$ следува дека $\overline{SP} = \overline{SQ}$ и $\angle PSQ = 90^\circ$. Според тоа, S лежи на симетралата на отсечката PQ и $\angle PSQ = 90^\circ$. Ако O е центар на опишаната кружница околу $\triangle CPQ$, тогаш O лежи на симетралата на отсечката PQ и $\angle POQ = 90^\circ$, како централен агол. Според тоа, точките S и O се совпаѓаат.

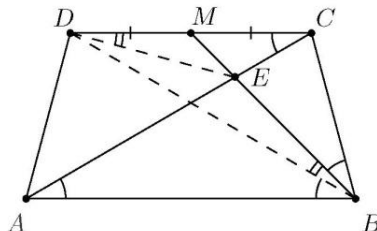
30. Даден е рамнокрак траpez $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Нека M е средината на CD и E е пресечната точка на AC и BM . Ако $\angle MBC = \angle ABD$, докажи дека $\overline{AD} = \overline{DE}$.

Решение. Од условот следува дека $\angle MBC = \angle ABD = \angle BAC = \angle ACD$

и затоа $\triangle MBC \sim \triangle MCE$. Според тоа,

$$\overline{MD}^2 = \overline{MC}^2 = \overline{ME} \cdot \overline{MB}$$

и затоа $\triangle MBD \sim \triangle MDE$. Добивме дека



$\angle MBD = \angle MDE$. Конечно,

$$\angle AED = \angle ACD + \angle MDE = \angle MBC + \angle MBD = \angle CBD = \angle CAD,$$

па затоа $\triangle AED$ е рамнокрак, со што доказот е завршен.

31. Нека $ABCD$ е четириаголник таков што $\angle ACB = 90^\circ$, H е подножјето на висината во $\triangle ABC$ повлечена од темето C и O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABD$. Докажи дека, ако правите AO и DH се заемно нормални, тогаш $\overline{AC} = \overline{AD}$.

Решение. Имаме

$$90^\circ = \angle OAH + \angle AHD = 90^\circ - \angle ADB + \angle AHD.$$

Според тоа, $\angle ADB = \angle AHD$ и $\triangle ADB \sim \triangle AHD$. Оттука следува $\frac{\overline{AD}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$, па

затоа $\overline{AD}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AB} = \overline{AC}^2$, т.е. $\overline{AC} = \overline{AD}$.

32. Точките A_1, B_1 и N се внатрешни соодветно за страните BC, CA и AB на остроаголниот $\triangle ABC$, при што четириаголникот A_1CB_1N е паралелограм, а четириаголникот ABA_1B_1 е тетивен. Опишаната кружница околу $\triangle A_1B_1C$ по втор пат ја сече CN во точката M . Докажи дека правата A_1B_1 е заедничка тангента на кружниците опишани околу триаголниците AMN и BMN .

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за аглиите на $\triangle ABC$. Означуваме $\angle ACN = \varphi$ и $\angle BCN = \psi$. Тогаш од условот на задачата следува $\angle MA_1B_1 = \varphi$ и $\angle MB_1A_1 = \psi$, како и $\angle MNA_1 = \varphi$ и $\angle MNB_1 = \psi$.

Имаме $\angle ANC = \beta + \psi$ како надворешен за $\triangle BCN$. Освен тоа, бидејќи четириаголникот ABA_1B_1 е тетивен важи $\angle B_1A_1C = \alpha$, па затоа

$$\angle MA_1B = 180^\circ - (\angle MA_1B_1 + \angle B_1A_1C) = 180^\circ - (\alpha + \varphi) = \beta + \gamma - \varphi = \beta + \psi = \angle ANC$$

Според тоа, четириаголникот NBA_1M е тетивен. Оттука и од $\angle MNA_1 = \angle MA_1B_1 = \varphi$ следува дека правата A_1B_1 е тангента на опишаната кружница околу $\triangle BMN$.

Аналогно се докажува дека четириаголникот NMB_1A е тетивен и дека правата A_1B_1 е тангента на опишаната кружница околу $\triangle AMN$.

33. Впишаната кружница во остроаголниот $\triangle ABC$ ги допира страните AB и AC соодветно во точките P и Q . Медијаната CM ја сече отсечката PQ во точката F . Докажи, дека $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ ако и само ако BF е симетрала на $\angle ABC$.

Решение. Нека $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ и впишаната кружница во $\triangle ABC$ е со центар I и ја допира страната BC во точката K . Тогаш $\triangle CMB$ и $\triangle KPB$ се рамнокраки

и нивните основи CM и KP се паралелни. Точките C, Q и K лежат на кружницата со дијаметар CI и бидејќи

$$\begin{aligned}\angle QFC &= \angle QPK = 180^\circ - (\angle APQ + \angle BPK) \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC) - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC) \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB\end{aligned}$$

и $\angle QKC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB$ следува дека точката F лежи на истата кружница.

Тогаш $IF \perp CM$ и од $BI \perp CM$ следува дека B, I и F се колинеарни, т.е. BF е симетрала на $\angle ABC$.

Нека BF е симетрала на $\angle ABC$, т.е. точките B, I и F се колинеарни.

Имаме $\angle KQP = \angle KPB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC = \angle BIK$, што значи дека четириагол-

никот $FIKQ$ е впишан во кружницата со дијаметар CI . Тогаш $\angle IFC = 90^\circ$ и BF истовремено е нормална на KP и CM , т.е. $KP \parallel CM$. Според тоа, $\overline{CM} = \overline{CB}$ и $\overline{AB} = 2\overline{BC}$.

34. Во конвексен четириаголник $ABCD$ со I и J се означени центрите на впишаните кружници во $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$, соодветно. Правата BI ги сече страната AD и опишаната кружница околу $\triangle ABD$ соодветно во точките M и P , а правата BJ ги сече страната CD и опишаната кружница околу $\triangle CBD$ соодветно во точките N и Q . Докажи дека $MN \parallel PQ$ ако и само ако $IJ \parallel PQ$.

Решение. Имаме: $\overline{BM}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{DB} - \overline{AM} \cdot \overline{DM}$, $\overline{BM} \cdot \overline{PM} = \overline{AM} \cdot \overline{DM}$, па затоа

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{DB}}{\overline{AM} \cdot \overline{DM}} - 1 = \left(\frac{\overline{DB}}{\overline{DM}}\right)^2 - 1.$$

Аналогно, $\frac{\overline{BN}}{\overline{QN}} = \left(\frac{\overline{DB}}{\overline{DN}}\right)^2 - 1$ и затоа $MN \parallel PQ$ ако и само ако $\frac{\overline{BM}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{QN}}$ ако и

само ако $\overline{DM} = \overline{DN}$. Понатаму, да забележиме дека $\overline{IP} = \overline{DP}$ и $\overline{JQ} = \overline{DQ}$.

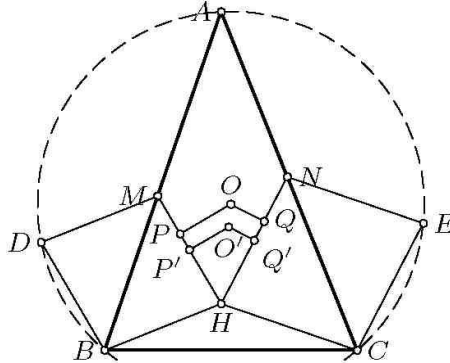
Освен тоа, $\triangle DPM \sim \triangle BPD$ и $\triangle DQN \sim \triangle BQD$. Затоа $IJ \parallel PQ$ ако и само ако

$$\frac{\overline{IP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{JQ}}{\overline{BQ}} \text{ ако и само ако } \frac{\overline{DP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{DQ}}{\overline{BQ}} \text{ ако и само ако } \frac{\overline{DM}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{BD}} \text{ ако и само ако}$$

$$\overline{DM} = \overline{DN}.$$

35. Во остроаголен триаголник ABC со строго најмала страна BC , H и O се ортоцентарот и центарот на опишаната кружница, соодветно. Опишаната кружница околу триаголникот AHC ја сече правата AB во точката $M \neq A$, а опишаната кружница околу триаголникот AHB ја сече правата AC во точка $N \neq A$. Докажи дека центарот на опишаната кружница на триаголникот MNH лежи на правата OH .

Решение. Нека O' е центар на кружницата MNH , P и P' се соодветно подножјата на нормалите повлечени од O и O' на HM , а Q и Q' се соодветно подножјата на нормалите повлечени од O и O' на HN (цртеж десно). Доволно е да се докаже дека $\frac{HP'}{HP} = \frac{HQ'}{HQ}$.



Нека D и E се симетричните точки на точката H во однос на AB и AC , соодветно.

Точките D и E припаѓаат на опишаната кружница на триаголникот ABC . Бидејќи $\angle HMB = \angle HCA = \angle HBM$, важи $\overline{HM} = \overline{HB}$, па затоа $HBDM$ е ромб. Аналогно $HCEN$ е ромб и притоа $HDBM \sim HCEN$, бидејќи важи $\angle BHM = \angle CHN = 2\angle A$. Понатаму, бидејќи $OP \perp BD$ и $OQ \perp CE$, точките P и Q припаѓаат на симетралите на отсечките BD и CE , соодветно. Точките P' и Q' се средини на отсечките HM и HN , соодветно. Според тоа, на точките P, P' во ромбот $HBDM$ соодветствуваат точките Q, Q' во ромбот $HCEN$, па затоа важи $\frac{HP'}{HP} = \frac{HQ'}{HQ}$.

36. Нека P е точка во внатрешноста на остроаголниот триаголник ABC таква што $\angle BAP = \angle ACP$ и $\angle CAP = \angle ABP$. Нека M и N се центрите на впишаните кружници во триаголниците ABP и ACP , соодветно. Ако R е радиусот на опишаната кружница околу триаголникот AMN , докажи дека важи

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{AP}.$$

Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот AMN . Тогаш $\angle MON = 2\angle MAN = \angle BAC$. Бидејќи PM и PN се соодветно симетри на $\angle APB$ и $\angle APC$, важи

$$\angle MPN = \angle APB = 180^\circ - \angle ABP - \angle BPA = 180^\circ - \angle BAC,$$

што значи дека четириаголникот $OPMN$ е тетивен. Од $\overline{OM} = \overline{ON}$ следува

дека PO е симетрала на $\angle MPN$, па оттука следува дека точката O лежи на отсечката PA . Исто така, бидејќи M и N се центри на впишаните кружници на сличните триаголници APB и CPA , важи $\overline{MP} : \overline{NP} = \overline{AP} : \overline{BP}$. Бидејќи $\angle MPN = \angle APB$, заклучуваме дека триаголниците NPM, APB и CPA се слични, од каде што следува $\angle BAP = \angle MNP = \angle MOP$, па затоа важи $MO \parallel AB$ и $NO \parallel CA$. Со E да ја означиме пресечната точка на правите PM и AB , а со r радиусот на впишаната кружница во триаголникот ABP . Сега

$$\frac{\overline{AP}}{R} = \frac{\overline{AP}}{AO} = \frac{\overline{EP}}{EM} = \frac{P_{\triangle APB}}{P_{\triangle AMB}} = \frac{r(\overline{AP} + \overline{PB} + \overline{AB})}{r\overline{AB}} = 1 + \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} = 1 + \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}},$$

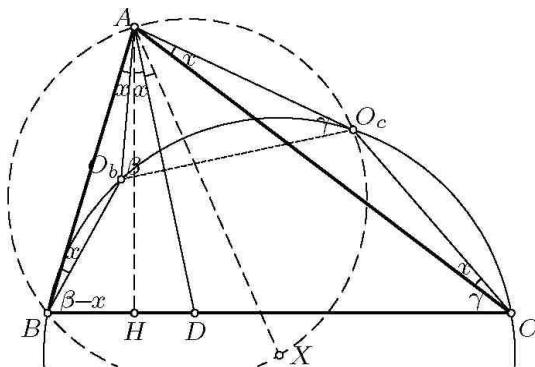
од каде добиваме $\frac{1}{R} = \frac{1}{\overline{AB}} + \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AP}}$.

37. За точката D на страната BC на триаголникот ABC , со O_b и O_c да ги означиме центрите на опишаните кружници околу триаголниците ABD и ACD , соодветно. Нека претпоставиме дека точките B, C, O_b, O_c припаѓаат на кружница со центар X . Ако H е ортоцентар на триаголникот ABC , докажи дека $\angle DAX = \angle DAH$.

Решение. Аглите на триаголникот ги означуваме вообичаено α, β, γ . Без ограничување на општоста можеме да земеме дека точката D е меѓу точките H и C . Бидејќи $x = \angle O_b AB = \angle O_c AC = 90^\circ - \angle ADB$, триаголниците $AO_b B$ и $AO_c C$ се слични и еднакво ориентирани. Оттука следува $\angle O_b AO_c = \alpha$ и $\frac{\overline{AO_b}}{\overline{AO_c}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, па затоа $\triangle AO_b O_c \sim \triangle ABC$. Бидејќи четириаголникот $BCO_c O_b$ е тетивен, добиваме

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \angle O_b BC + \angle CO_c O_b \\ &= (\beta - x) + \angle CO_c A - \angle O_b O_c A \\ &= (\beta - x) + (180^\circ - 2x) - \gamma. \end{aligned}$$

Според тоа, $\angle HAD = x = \frac{\beta - \gamma}{3}$.



Понатаму,

$$\angle BXO_c = 2\angle BCO_c = 2(\gamma + x)$$

и $\angle O_c AB = \alpha + x$, од каде добиваме

$$\angle BXO_c + \angle O_c AB = 2\gamma + \alpha + 3x = 180^\circ,$$

т.е. четириаголникот $ABXO_c$ е тетивен. Сега,

$$\angle BAX = \angle BO_c X = 90^\circ - \angle BCO_c = 90^\circ - \gamma - x$$

и

$$\angle DAX = \angle BAX - \angle BAD = (90^\circ - \gamma - x) - (90^\circ - \beta + x) = x = \angle HAD.$$

38. Даден е паралелограм $ABCD$ таков што $\overline{AB} < \overline{AC} < \overline{BC}$. Точките E и F припаѓаат на опишаната кружница ω околу $\triangle ABC$ и се такви што тангентите на ω во овие точки минуваат низ точката D и отсечките AD и CE се сечат. Ако $\angle ABF = \angle DCE$, определи го $\angle ABC$.

Решение. Бидејќи точката D е надворешна за ω , заклучуваме дека $\angle ABC$ е остар. Нека A' е втората пресечна точка на DC и ω . Бидејќи $\overline{AC} < \overline{BC}$, имаме $\angle DCA = \angle CAB > \angle CBA = \angle DA'A$ и затоа C е меѓу D и A' . Сега од $180^\circ - \angle ECA' = \angle ECD = \angle ABF$ следува дека лациите ACF и ECA' се еднакви.

Нека l е симетралата на $\angle EDF$. Бидејќи DE и DF се тангенти на ω , правата l минува низ центарот O на ω .

Да разгледаме симетрија во однос на l . Бидејќи l минува низ O , кружницата ω се пресликува во самата себе. Од $ACF = ECA'$ следува дека A се пресликува во A' . Оттука $\angle DAA' = \angle DA'A$. Од друга страна, A' припаѓа на ω , па затоа $\angle AA'C = \angle ABC = \angle ADA'$. Според тоа, $\triangle DAA'$ е рамнострани и затоа $\angle ABC = 60^\circ$.

39. Даден е $\triangle ABC$ ($\overline{AC} > \overline{BC}$) со средна отсечка MN ($M \in AC, N \in BC$). Симетралата на $\angle B$ ја сече правата MN во точката P . Впишаната кружница во $\triangle ABC$ има центар I и ја допира страната BC во точката Q . Нормалите во точките P и Q соодветно на MN и BC се сечат во точката R . Нека S е пресечната точка на правите AB и RN .

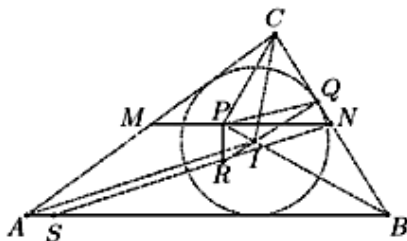
а) Докажи дека четириаголникот $PCQI$ е тетивен.

б) Изрази ја должината на отсечката BS преку должините a, b, c на страните на $\triangle ABC$.

Решение. а) Очигледно

$$\angle ABP = \angle BPN = \angle PBN = \frac{\beta}{2}.$$

Според тоа, $\overline{BN} = \overline{CN} = \overline{PN}$, па затоа $\angle BPC = 90^\circ$. Но, $\angle CQI = 90^\circ$, па затоа четириаголникот $PCQI$ е тетивен.



б) Имаме,

$$\angle PCI = \angle PCB - \angle ICB = (90^\circ - \frac{\beta}{2}) - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Бидејќи $\angle RPN = \angle IQN = 90^\circ$, четириаголникот $RPQN$ е тетивен. Оттука и од а) добиваме

$$\angle NSB = \angle PNR = \angle PQR = \angle PCI = \frac{\alpha}{2}.$$

Според тоа, AI и SN се паралелни, па затоа $\frac{\overline{BS}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{BL}}$, каде L е пресечната точка на симетралата на $\angle BAC$ со BC . Заменувајќи во горното равенство добиваме $\frac{\overline{BS}}{c} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{ac}{b+c}}$, т.е. $\overline{BS} = \frac{b+c}{2}$.

40. На страната AB на $\triangle ABC$ зедемени се точки D и E , а на страната AC земена е точка F така што $\overline{AD} = \overline{AC}$, $\overline{BE} = \overline{BC}$ и $\overline{AF} = \overline{AE}$. Ако $\angle ACB = 3\angle EFD$ определи го $\angle ACB$.

Решение. Од $\overline{AD} = \overline{AC}$, $\overline{BE} = \overline{BC}$ и $\overline{AF} = \overline{AE}$ следува дека четириаголникот $EDCF$ е рамнокрак трапез, па затоа е тетивен. Значи,

$$\begin{aligned} \angle EFD &= \angle ECD = 180^\circ - \angle ADC - \angle BEC \\ &= 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A - 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB. \end{aligned}$$

Добиваме, $\angle ACB = 3\angle EFD = 270^\circ - \frac{3}{2}\angle ACB$, па така $\frac{5}{2}\angle ACB = 270^\circ$, т.е. $\angle ACB = 108^\circ$

41. Нека P е внатрешна точка за страната AB на остроаголниот $\triangle ABC$. Околу $\triangle APC$ и $\triangle BPC$ соодветно се опишани кружници k_1 и k_2 , при што k_1 по втор пат ја сече BC во точката M , а k_2 по втор пат ја сече AC во точката

N . Тангентата на k_1 во P по втор пат ја сече k_2 во точката S , а тангентата на k_2 во точката P по втор пат ја сече k_1 во точката T . Познато е дека правите AT, BS и CP се сечат во една точка. Докажи дека точките S, M, N и T се колинеарни.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за агли во $\triangle ABC$. Нека AT, BS и CP се сечат во точката Q . Имаме $\angle CPS = \angle CBS = \alpha$ и $\angle CPT = \angle CAT = \beta$. Затоа $\angle BAQ = \angle ABQ = \gamma$ и значи $\angle AQB = 180^\circ - 2\gamma$.

Бидејќи $\frac{PBS}{2} = \angle PCS = \angle ABQ = \gamma$ и аналогно $\angle PCT = \gamma$, добиваме $\angle TCP = 2\gamma$, што значи дека четириаголникот $TQSC$ е тетивен. Оттука следува $\angle QST = \angle QTS = \gamma$. Освен тоа, од $B, C, S, N \in k_2$ следува $\angle NSB = \angle NCB = \gamma$ и затоа N припаѓа на правата ST . Аналогно се докажува дека M припаѓа на правата ST .

42. Точката M е средина на страната AB на $\triangle ABC$. Кружницата низ точките C и M , која ја допира страната AB ги сече страните AC и BC во точките P и Q . Ако K и L се средините на отсечките CP и CQ докажи дека $\angle CKM = \angle CLM$.

Решение. Нека D е точка на полуправата CM таква што $\overline{CM} = \overline{MD}$. Тогаш MK е средна линија во $\triangle CPD$ и ML е средна линија во $\triangle CQD$. Според тоа, $\angle CKM = \angle CPD$ и $\angle CLM = \angle CQD$ и доволно е да докажеме дека $\triangle APD \sim \triangle BQD$. Да забележиме дека $\angle PAD = \angle QBD$ како спротивни агли во паралелограмот $ADBC$. Освен тоа, $\overline{AM}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{AC}$ и $\overline{BM}^2 = \overline{BQ} \cdot \overline{BC}$, па затоа

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AM}^2}{\overline{AC} \cdot \overline{AD}} = \frac{\overline{BM}^2}{\overline{BC} \cdot \overline{BD}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{BD}}.$$

Според тоа, $\triangle APD \sim \triangle BQD$, од каде што следува тврдењето на задачата.

43. Определи ги сите точки E во внатрешноста на квадрат $ABCD$ со следново својство: за секои две заемно нормални прави низ E , кои четирите страни на квадратот ги сечат во внатрешни точки, три од тие точки се темиња на рамностран триаголник.

Решение. Нека E е точка со саканото својство. Да разгледаме две заемно нормални прави MN и KL низ E , така што $MN \parallel BC$. Тогаш две соседни страни на четириаголникот $KMLN$ се еднакви, што значи дека E ја преполовува или MN или KL . Ако тоа е KL , тогаш очигледно E не може да ја преполовува MN и нека $\overline{EN} < \overline{EM}$. Во овој случај $\angle KNL$ е тап и рамностраниот триаголник е $\triangle KML$. Бидејќи $\overline{AB} = \overline{KL} = \overline{MN}$, триаголниците MLN

и MKN се рамнокраки со агол при основата 75° , па затоа $\angle KLN = \angle LKN = 15^\circ$. Лесно се докажува дека $\triangle KLN \cong \triangle CDE$, од каде следува дека E е теме на рамнокрак триаголник со основа CD и агол при основата 15° .

Од претходните разгледувања следува дека само E и трите темиња на аналогните триаголници при другите три страни на квадратот може да го имаат саканото својство.

Нека сега E е една од овие четири точки, на пример врвот на рамнокракиот триаголник со основа CD и агол при основата 15° . Нека $PQ \perp RS$, при што точките P, Q, R и S се внатрешни соодветно за страните AB, BC, CD и DA на квадратот $ABCD$. Бидејќи четириаголникот $PBRE$ е тетивен, имаме $\angle PRQ = \angle PBE = 60^\circ$. Аналогно $\angle PSR = 60^\circ$, што значи дека $\triangle PRS$ е рамностран.

44. Даден е $\triangle ABC$ и нека M е средина на страната AB . Ако со P и R ги означиме соодветно центрите на припишаните кружници на $\triangle AMC$ соодветно кон страните AM и CM , а со Q и T центрите на припишаните кружници на $\triangle BMC$ соодветно кон страните BM и CM , докажи дека точките P, Q, R и T лежат на една кружница.

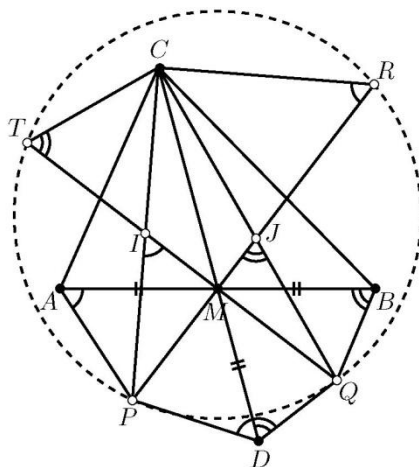
Решение. Нека I и J се центрите на впишаните кружници соодветно на $\triangle AMC$ и $\triangle BMC$, а D е точка на полуправата CM таква што $\overline{MD} = \overline{MA} = \overline{MB}$. Бидејќи четириаголниците $APMI$ и $CRMI$ се тетивни (во кружници со дијаметри PI и RI соодветно) и освен тоа $\triangle AMP \cong \triangle DMP$, добиваме

$$\angle MDP = \angle MAP = \angle MIP = \angle MRC.$$

Значи, четириаголникот $CPDR$ е тетивен. Аналогно, и четириаголникот $CQDT$ е тетивен. Затоа

$$\overline{MP} \cdot \overline{MR} = \overline{MD} \cdot \overline{MC} = \overline{MQ} \cdot \overline{MT},$$

т.е. точките P, Q, R и T лежат на една кружница, со што задачата е решена.



45. Даден е паралелограм $ABCD$ таков што $BD \perp AD$. Точките A_1 и A_2 се подножјата на нормалите повлечени од темето A кон правите CD и BC . Отсечката A_1A_2 ја сече AB во точка P , а $AC \cap BD = O$. Ако правите OP и

AD се сечат во точката M , докажи дека точките A_1, O, A_2 и M лежат на една кружница.

Решение. Бидејќи AA_2BD е правоагоник, важи $\overline{A_2B} = \overline{AD} = \overline{BC}$ и затоа B е средина на A_2C . Но, $BP \parallel CA_1$, па затоа BP е средна линија во $\triangle CA_1A_2$. Четириаголникот AA_2CA_1 е тетивен со центар O (средина на хипотенузата AC во $\triangle ACA_1$ и $\triangle ACA_2$), па затоа OP е симетрала на A_1A_2 , $\triangle MA_2O \cong \triangle MA_1O$ и

$$\angle MA_1O = \angle MA_2O.$$

Останува да докажеме дека овие агли се прави, за што е доволно да докажеме дека четириаголникот MA_2OD е тетивен и затоа $\angle MA_2O = 180^\circ - \angle MDO = 90^\circ$. Нека $\angle DCB = \alpha$. Ако искористиме дека четириаголникот PA_2BO е тетивен (спротивни прави агли), добиваме $\angle MOA_2 = \angle ABA_2 = \angle DCB = \alpha$. Од друга страна, DB е висина и медијана во $\triangle A_2CD$, па затоа овој триаголник е рамнокрак и како $AD \parallel BC$ добиваме $\angle MDA_2 = \angle DA_2C = \angle DCA_2 = \alpha$. Од равенството $\angle MOA_2 = \alpha = \angle MDA_2$ следува дека четириаголникот MA_2OD е тетивен и задачата е решена.

46. Нека M и N се средини соодветно на страните BC и AC на $\triangle ABC$. Точката P припаѓа на опишаната кружница k околу $\triangle CMN$, при што P и C се во различни полурамнии во однос на правата AB . Отсечката PA по втор пат ја сече k во точката M_1 , а отсечката PB по втор пат ја сече k во точката N_1 . Ако отсечките MM_1 и NN_1 се сечат во точката X , докажи дека $\angle ACX = \angle BCP$.

Решение. Нека $NN_1 \cap AB = X_1$. Од $\angle N_1X_1B = \angle N_1CM$ следува дека четириаголникот N_1X_1CB е тетивен. Оттука добиваме $\angle BN_1C = \angle BX_1C$, па затоа $\angle AM_1C = \angle AX_1C$, т.е. четириаголникот AM_1X_1C е тетивен. Значи,

$$\angle X_1M_1C = \angle X_1AC = \angle MNC = \angle MM_1C,$$

т.е. M_1, X_1 и M лежат на една права и значи $X \equiv X_1$.

Нека BP по втор пат ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката K . Сега имаме $\angle ACK = \angle ABK = \angle XCN_1$ (бидејќи четириаголникот N_1XCB е тетивен) и $\angle KCP = \angle BCN_1$. Од последните две равенства следува бараното равенство $\angle ACX = \angle BCP$.

47. Во трапез $ABCD$, $AB \parallel CD$, впишаната кружница во $\triangle ABD$ ги допира страните AB и BD соодветно во точките M и N , а впишаната кружница во

$\triangle ACD$ ги допира страните AC и DC соодветно во точките P и Q . Докажи дека пресечната точка на правите MN и PQ лежи на средната линија на трапезот.

Решение. Нека O е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABD$ и симетралата на $\angle BAC$ нека ја сече правата MN во точка S . Бидејќи

$$\angle ASM = \angle BMN - \angle BAO,$$

добиваме $\angle ASM = \frac{1}{2} \angle ADB$. Според тоа, точките O, S, N и D лежат на една кружница. Тогаш $\angle DSA = \angle DNO = 90^\circ$. Бидејќи $ABCD$ е трапез, следува дека DS е симетрала на $\angle ADC$.

На ист начин докажуваме дека симетралите на $\angle ADC$ и $\angle BAC$ се сечат на PQ . Според тоа, S е пресечната точка на правите MN и PQ . Ако T е средина на AD , тогаш $\angle TSA = \angle TAS = \angle SAB$, што значи дека $ST \parallel AB$. Бидејќи T е средина на AD и $ST \parallel AB$, заклучуваме дека точката S лежи на средната линија на трапезот.

48. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со висини AA_1, BB_1, CC_1 и ортоцентар H . Правата низ H паралелна на AB ги сече отсечките C_1B_1 и C_1A_1 соодветно во точките P и Q . Нека M е подножјето на нормалата повлечена од P на BB_1 , а N е подножјето на нормалата повлечена од Q на AA_1 . Со C_0 да ја означиме средината на MN . Аналогно ги дефинираме точките A_0 и B_0 . Докажи дека правите AA_0, BB_0 и CC_0 се сечат во една точка.

Решение. Со T да го означиме подножјето на нормалата повлечена од H на A_1B_1 . Бидејќи

$$\angle HPB_1 = \angle BC_1B_1 = \pi - \gamma = \angle A_1HB_1$$

и

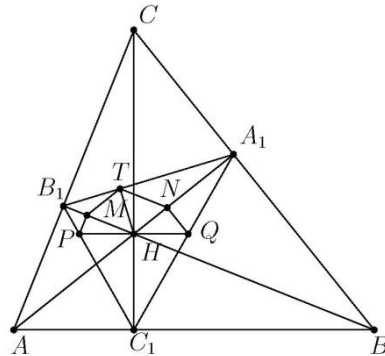
$$\angle HB_1P = \frac{\pi}{2} - \beta = \angle HA_1B_1,$$

добиваме дека $\triangle HPB_1 \sim \triangle A_1HB_1$. Тогаш

PM и HT се соодветни елементи во овие два слични триаголника, па затоа

$$\frac{HM}{MB_1} = \frac{AT}{TB_1}. \text{ Тоа значи дека } MT \parallel HA_1.$$

На иста начин добиваме дека $\triangle HQA_1 \sim \triangle B_1HA_1$ и дека $NT \parallel HB_1$. Според тоа, $MTNH$ е паралелограм, т.е. C_0 е средина на отсечката HT . Аналогно докажуваме дека A_0 и B_0 се средини на соодветните нормали HR на B_1C_1 и HS на A_1C_1 .



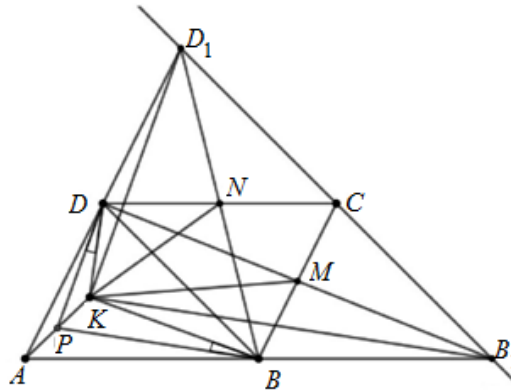
Бидејќи B_1RHT е тетивен, имаме

$$\angle B_1RT = \angle B_1HT = \frac{\pi}{2} - \angle HB_1T = \beta = \angle AB_1C_1,$$

па затоа $TR \parallel AC$. Аналогно се докажува дека $TS \parallel BC$ и $RS \parallel AB$. Според тоа, страните на $\triangle A_0B_0C_0$ се паралелни со страните на $\triangle ABC$. Оттука следува дека правите AA_0 , BB_0 и CC_0 се сечат во една точка.

49. Точката K е внатрешна за паралелограмот $ABCD$ и е таква што средината M на страната BC е еднакво оддалечена од точките K и D , а средината N на страната CD е еднакво оддалечена од точките K и B . Точката P е средина на отсечката AK . Докажи дека $\angle PBK = \angle PDK$.

Решение. Низ темето C на паралелограмот повлекуваме права паралелна на дијагоналата BD која ги сече правите AB и AD во точките B_1 и D_1 , соодветно. Според тоа, четириаголниците BB_1CD и BCD_1D се паралелограми и DB е средна отсечка во $\triangle AB_1D_1$. Значи, точките B_1 , M и D се колинеарни, во $\triangle KB_1D$ медијаната е $\overline{KM} = \overline{MD} = \overline{MB_1}$ и затоа $\angle B_1KD = 90^\circ$.



Слично, $\angle D_1KB = 90^\circ$ и затоа $\angle D_1KB = \angle B_1KD$. Понатаму, PB е средна линија во $\triangle AB_1K$ и PD е средна линија во $\triangle AKD_1$, па тие соодветно се паралелни на KB_1 и KD_1 . Според тоа, $\angle D_1KD = \angle PDK$ и $\angle B_1KB = \angle PBK$, па затоа $\angle PBK = \angle PDK$.

50. Даден е $\triangle ABC$ и произволна точка L , внатрешна за страната AB . Кружница низ точките A и L ја допира правата CL и по втор пат ја сече страната AC во точката M . Аналогно, кружница низ точките B и L ја допира правата CL и по втор пат ја сече страната BC во точката N . Симетралата на $\angle ALM$ ја сече AC во точката P , а симетралата на $\angle BLN$ ја сече BC во точката Q . Докажи дека центарот на впишаната кружница во $\triangle MNL$ лежи

на отсечката PQ .

Решение. Од условот на задачата следува дека $\angle MLC = \angle BAC$ и $\angle NLC = \angle ABC$. Затоа $\angle ACB + \angle MLN = 180^\circ$, што значи дека четириаголникот $MLNC$ е тетивен. Понатаму, $\angle CPL = \angle BAC + \frac{1}{2}\angle ALM$ како надворешен за $\triangle ALP$ и $\angle CLP = \angle CLM + \frac{1}{2}\angle ALM$, па затоа $\angle CPL = \angle CLP$ и следствено $\overline{CP} = \overline{CL}$. Аналогно $\overline{CQ} = \overline{CL}$, т.е. P, Q и L лежат на кружница со центар C . Од $\angle PML + \angle QNL = 180^\circ$ следува дека кружниците опишани околу триаголниците PML и QNL по втор пат се сечат во точка од отсечката PQ . Ако таа точка е I , имаме $\angle LPI = \angle LMI$. Од друга страна, $\angle LNM = \angle LCN = 2\angle LPQ$. Според тоа, $\angle LMI = \frac{1}{2}\angle LMN$, т.е. MI е симетрала во $\triangle MNL$. Аналогно се гледа дека NI е симетрала во $\triangle MNL$ и затоа I е центар на впишаната кружница во $\triangle MNL$.

51. Точките M, N, P, Q се соодветно средини на страните AB, BC, CD, DA на четириаголникот $ABCD$. Точките F и G се тежишта соодветно на триаголниците BNP и PND . Отсечката MG ја сече FQ во точката K и $\overline{FK} = 6\text{ cm}$. Докажи дека $\overline{KQ} = 9\text{ cm}$.

Решение. На отсечката FQ да избереме точка L таква што $\overline{QL} = \frac{3}{5}\overline{QF}$. Доволно е да докажеме дека L припаѓа на MG , бидејќи ќе следува $L \equiv K$. Навистина

$$\begin{aligned}\overline{ML} &= \overline{MQ} + \frac{3}{5}\overline{QF} = \overline{MQ} + \frac{3}{5}\overline{QM} + \frac{3}{5}\overline{MF} = \frac{2}{5}\overline{MQ} + \frac{3}{5}\overline{MF} \\ &= \frac{1}{5}\overline{MA} + \frac{1}{5}\overline{MD} + \frac{1}{5}\overline{MB} + \frac{1}{5}\overline{MN} + \frac{1}{5}\overline{MP} = \frac{3}{5}\overline{MG}.\end{aligned}$$

Во последното равенство искористивме дека

$$\overline{MA} + \overline{MB} = \vec{0}, \overline{MC} = \frac{1}{3}(\overline{MD} + \overline{MN} + \overline{MP})$$

52. Даден е остроаголен $\triangle ABC$, $\overline{AC} \neq \overline{BC}$, со центар на опишаната кружница O . Права паралелна на AB ја допира опишаната кружница околу $\triangle AOB$ во точката T и ги сече продолженијата на страните CA и CB соодветно во точките X и Y . Нека F е пресечната точка на правите BX и AY . Докажи дека центарот на впишаната кружница во $\triangle FCT$ лежи на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\overline{AC} > \overline{BC}$. Ќе ги користиме стандардните ознаки за аглите на $\triangle ABC$. Бидејќи четириаголникот $ATBO$ е тетивен и точките O и T се во различни полурамнини

во однос на AB , добиваме дека

$$\angle XTA = \angle TAB = \angle BTY = \frac{180^\circ - (180^\circ - 2\gamma)}{2} = \gamma.$$

Но, $\angle ABT = \angle BTY = \angle TAB$ (накрсни агли за паралелни прави), па затоа OT е симетрала на AB . Од претпоставката дека $\overline{AC} > \overline{BC}$, следува дека X и F се во едната полурамнина во однос на OT , а C и Y се во другата полурамнина во однос на OT . Ќе докажеме дека OT е симетрала на $\angle FTC$. Навистина, $\angle BTY = \gamma = \angle XCB$, па затоа четириаголникот $XTBC$ е тетивен и $\angle BCT = \angle BXT$, а $\angle CXB = \angle CTB$. Аналогно, четириаголникот $AFTX$ е тетивен и $\angle BCT = \angle YAT$. Според тоа, четириаголникот $AFTX$ е тетивен и $\angle ATF = \angle AXF = \angle CTB$, т.е. $\angle FTO = \angle OTC = \frac{\angle FTC}{2}$.

Сега ќе докажеме дека $\angle ACF = \angle BCT$, што ќе значи дека симетралата на $\angle TCF$ се совпаѓа со симетралата на $\angle BCA$. Тогаш центарот на впишаната кружница во $\triangle TCF$ е пресечната точка на симетралата на $\angle ACB$ и симетралата на AB , која точка е средина на лакот AB од опишаната кружница околу $\triangle ABC$, кој не ја содржи точката C . Со тоа задачата ќе биде решена. За последниот чекор да искористиме дека, бидејќи четириаголникот $AFTX$ е тетивен имаме $\angle AFX = \angle ATX = \gamma$, па затоа четириаголникот $AFBC$ исто така е тетивен. Според тоа,

$$\begin{aligned}\angle ACF &= 180^\circ - \angle AXF - \angle AFX - \angle CFA \\ &= 180^\circ - \angle CTB - \angle ABT - \angle CBA = \angle BCT,\end{aligned}$$

со што задачата е решена.

53. Четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружница k со центар O , при што точката O е внатрешна за четириаголникот $ABCD$. Познато е дека производот на растојанијата од O до страните AB и CD е еднаков на производот на растојанијата од O до страните AD и BC . Тангентите на k во точките B и D се сечат во точката P . Докажи дека растојанието од P до правата AC е двапати поголемо од растојанието од O до правата AC .

Решение. Нека A_1 и C_1 се дијаметрално спротивните точки на A и C , соодветно. Тогаш

$$\overline{BA_1} \cdot \overline{DC_1} = \overline{BC_1} \cdot \overline{DA_1} \quad (1)$$

(BA_1 е двапати поголема од растојанието од O до AB и аналогно за преостанатите точки).

Нека P_1 е пресечната точка на тангентата на k во точката D и правата A_1C_1 .

Од $\triangle A_1P_1D \sim \triangle DP_1C_1$ добиваме

$$\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{A_1D}}{\overline{C_1D}}.$$

По квадрирање и замена $\overline{P_1D}^2 = \overline{P_1A} = \overline{P_1C_1}$, добиваме

$$\frac{\overline{P_1A}}{\overline{P_1C_1}} = \left(\frac{\overline{A_1D}}{\overline{C_1D}}\right)^2. \quad (2)$$

Аналогно, ако P_2 е пресечната точка на тангентата на k во точката B и правата A_1C_1 добиваме

$$\frac{\overline{P_2A_1}}{\overline{P_2C_1}} = \left(\frac{\overline{A_1B}}{\overline{C_1B}}\right)^2. \quad (3)$$

Сега, од (1), (2) и (3) следува $P_1 \equiv P_2 \equiv P$. Конечно, тврдењето следува од правоаголникот AC_1A_1C .

54. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ впишан во кружница k . Точката P од малиот лак AC на k е таква што $\angle BAC = 2\angle PBC$, а точката Q од малиот лак BC на k е таква што $\angle ABC = 2\angle QAC$. Правата низ средината на малиот лак BC и средината на тетивата PC ја сече правата BP во точката K . Правата низ средината на малиот лак AC и средината на тетивата QC ја сече правата AQ во точката T . Докажи дека $\overline{KT} = \overline{AC} + \overline{BC}$.

Решение. Нека N е средина на лакот BC . Тогаш од условот на задачата следува дека лаците PC, CN и NB се еднакви, од каде лесно следува дека четириаголникот $PCNB$ е рамнокрак траpez, па затоа неговите дијагонали PN и BC се еднакви. Сега од $KP \parallel CN$ и од тоа што KN ја преполовува CP следува дека четириаголникот $CKPN$ е паралелограм. Од досега изнесеното следува $\overline{CK} = \overline{PN} = \overline{BC}$. Аналогно се докажува дека $\overline{CT} = \overline{AC}$. Од паралелограмот $CKPN$ и условот имаме $\angle KCP = \angle CPN = \angle CPB$, што значи дека CK е тангента на k . Аналогно се докажува дека CT е тангента на k . Според тоа, точките C, K, T во овој редослед лежат на една права и затоа $\overline{KT} = \overline{KC} + \overline{CT} = \overline{AC} + \overline{BC}$.

55. Даден е траpez $ABCD$ со основи $AB \parallel CD$ и пресечна точка O на неговите дијагонали. Нека N, M, P, Q се соодветно средините на страните AB, BC, CD, DA на траpezот. Определи ја плоштината на траpezот ако

$$\overline{ON} = 14, \overline{OP} = \frac{13}{2}, \overline{OM} = 7, \overline{OQ} = \frac{15}{2}.$$

Решение. Нека $NQ \cap CD = E$ и $NP \cap CD = F$. Од $\triangle ANQ \cong \triangle DEQ$ следува дека точката Q е средина на EN и дека плоштините на двата триаголника се еднакви. Аналогно, точката P е средина на NF и плоштините на $\triangle NBP$ и $\triangle FCP$ се еднакви. Оттука следува

$$P_{ABCD} = P_{ANQ} + P_{NBP} + P_{QNPCD} = P_{DEQ} + P_{FCP} + P_{QNPCD} = P_{EFN}.$$

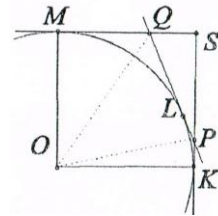
Според тоа, задачата ја сведовме на определување на плоштината на $\triangle EFN$. Сега NM е медијана во $\triangle EFN$, точката O лежи на неа (Зошто?) и ја дели во однос $2:1$, сметајќи од темето на триаголникот. Според тоа, точката O е тежиште за $\triangle EFN$. Значи, точката O лежи и на медијаните EP и FQ и важи $\overline{EO} = 2\overline{OP} = 13$ и $\overline{FO} = 2\overline{OQ} = 15$. Нека O' е точка на правата MN таква што $\overline{OM} = \overline{O'M}$ и M е меѓу O и O' . Четириаголникот $FO'EO$ е паралелограм и $\overline{FO'} = \overline{EO} = 13$. Исто така $P_{EFN} = 6P_{FMO} = 3P_{FO'O}$, од каде користејќи ја Хероновата формула добиваме

$$P_{ABCD} = P_{EFN} = 3P_{FO'O} = 3\sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 252.$$

56. Околу кружница се опишани квадрат и триаголник. Докажи дека барем половина на периметарот на квадратот лежи во триаголникот.

Решение. Сметаме дека радиусот на кружницата е еднаков на 1.

Да разгледаме теме на квадратот кое е надворешно за триаголникот. На цртежот тоа е темето S , а правата PQ содржи страна на триаголникот. Ќе го оцениме збирот $\overline{SQ} + \overline{SP}$. Периметарот на $\triangle PSQ$ е еднаков на



$\overline{SK} + \overline{SM} = 2$. Тогаш збирот $\overline{SQ} + \overline{SP}$ е најголем кога $\overline{PQ}$ е најмала. Освен тоа, плоштината на $OKPQM$ е еднаква на $\frac{1}{2}(\overline{MQ} + \overline{QL} + \overline{LP} + \overline{PK}) \cdot 1 = \overline{PQ}$. Оваа плоштина е еднаква на разликата на плоштините на $OKSM$ и $\triangle PSQ$. Според тоа, таа е минимална кога $\triangle PSQ$ има максимална плоштина. Но, периметарот на $\triangle PSQ$ е константен, па затоа неговата плоштина е најголема кога впишаната во него кружница има најголем можен радиус. Последното е исполнето само кога впишаната кружница во $\triangle PSQ$ се допира до дадената кружница (со центар O), т.е. кога L лежи на SO . Но, тогаш $\triangle PSQ$ е рамнокрак правоаголен триаголник со висина кон хипотенузата $\overline{SO} - \overline{OL} = \sqrt{2} - 1$. Тоа значи дека $\overline{PQ} = 2(\sqrt{2} - 1)$ е најмалата вредност на $\overline{PQ}$, а

$$2 - 2(\sqrt{2} - 1) = 2(2 - \sqrt{2})$$

е наголемата вредност на $\overline{SQ} + \overline{SP}$.

Јасно, најмногу три од темињата на квадратот може да се надворешни за триаголникот. Според тоа, делот од периметарот на квадратот кој е надворешен за триаголникот нема да надминува

$$3 \cdot 2(2 - \sqrt{2}) = 6(2 - \sqrt{2}) < 6 \cdot 0,6 < 4.$$

Со тоа задачата е решена бидејжи периметарот на квадратот е 8.

57. На страните BC, CA, AB на $\triangle ABC$ се избрани соодветно точките A_1, B_1, C_1 така што правите AA_1, BB_1, CC_1 се сечат во една точка M . Докажи дека ако M е тежиште на $\triangle A_1B_1C_1$, тогаш M е тежиште и на $\triangle ABC$.

Решение. Нека M е тежиште на $\triangle A_1B_1C_1$. На полуправата MA конструираме точка A_2 така што $B_1A_1C_1A_2$ е паралелограм. Аналогно ги конструираме точките B_2 и C_2 . Бидејжи $A_1C_1 \parallel A_1B_1 \parallel C_1B_3$, добиваме дека точките A_2, C_1, B_2 лежат на една права и C_1 е средина на A_2B_2 . Истото важи и за точките A_2, B_1, C_2 и C_2, A_1, B_2 . Ќе докажеме дека $A_2 = A, B_2 = B, C_2 = C$, со што задачата е решена.

Да претпоставиме дека $A_2 \neq A$ и нека A е меѓу A_2 и M . Тогаш C_2 е меѓу C и M , B лежи меѓу B_2 и M , па затоа A_2 е меѓу A и M , што е противречност.

58. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Нека F е пресечната точка на дијагоналите AC и BD на четириаголникот, а E е пресечната точка на правите AD и BC . Ако M и N се средините на отсечките AB и CD , докажи дека

$$\frac{MN}{EF} = \frac{1}{2} \left| \frac{AB}{CD} - \frac{CD}{AB} \right|.$$

Решение. Нека $\angle AEB = \gamma$, $\overline{EC} = c$, $\overline{ED} = d$, $\vec{i} = \frac{1}{c} \overline{EC}$ и $\vec{j} = \frac{1}{d} \overline{ED}$. Бидејќи четириаголникот $ABCD$ е тетивен, важи $\frac{\overline{AB}}{CD} = \frac{\overline{AE}}{CE} = \frac{\overline{BE}}{DE} = k$. Значи, $\overline{EA} = kc\vec{j}$ и $\overline{EB} = kd\vec{i}$. Бидејќи $F \in AC$ и $F \in BD$, постојат реални броеви x и y такви што

$$\overline{EF} = x\overline{EA} + (1-x)\overline{EC} = xkc\vec{j} + (1-x)c\vec{i}$$

и

$$\overline{EF} = y\overline{EB} + (1-y)\overline{ED} = ykd\vec{i} + (1-y)d\vec{j}.$$

Ако во последните две равенства ги изедначиме коефициентите пред $\vec{i}$ и $\vec{j}$ добиваме $xkc = (1-y)d$ и $ykd = (1-x)c$, од каде наоѓаме $x = \frac{kd-c}{(k^2-1)c}$. Според тоа,

$$\overline{EF} = \frac{k}{k^2-1} ((kd-c)\vec{j} + (kc-d)\vec{i})$$

и тогаш

$$\overline{EF}^2 = \left(\frac{k}{k^2-1}\right)^2 ((kd-c)^2 + (kc-d)^2 + 2(kd-c)(kc-d)\cos\gamma).$$

Од друга страна

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EB}) = \frac{1}{2}((d - kc)\vec{j} + (c - kd)\vec{i})$$

и затоа

$$\overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{4}((kd - c)^2 + (kc - d)^2 + 2(kd - c)(kc - d)\cos\gamma).$$

Според тоа,

$$\frac{\overrightarrow{MN}^2}{\overrightarrow{EF}^2} = \frac{1}{4}\left(k^2 - \frac{1}{k}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(k - \frac{1}{k}\right)^2,$$

односно

$$\frac{\overrightarrow{MN}}{\overrightarrow{EF}} = \frac{1}{2} \left| \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} - \frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{AB}} \right|.$$

59. Во четириаголникот $ABCD$ таков што $\angle BAD + \angle ADC > 180^\circ$ и впишана кружница со центар I . Низ I е повлечена права која ги сече страните AB и CD соодветно во точките X и Y така што $\overline{IX} = \overline{IY}$. Докажи дека

$$\overline{AX} \cdot \overline{DY} = \overline{BX} \cdot \overline{CY}.$$

Решение. Нека M и N се допирните точки на впишаната кружница соодветно со страните AB и CD . Од условот

$$\angle BAD + \angle ADC > 180^\circ$$

следва дека $AB \parallel CD$ и $\angle MIN < 180^\circ$.

Освен тоа, од $\overline{IM} = \overline{IN}$, $\angle IMX = \angle INY$ и

$\overline{IX} = \overline{IY}$ следува дека $\triangle IMX \cong \triangle INY$, па

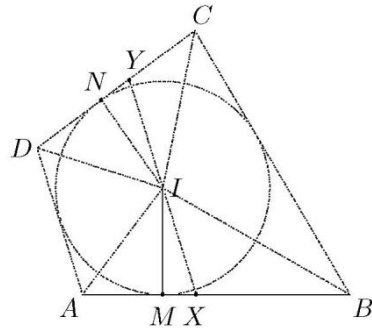
затоа $\angle IXM = \angle IYN$. Ако $X \in BM$ и $Y \in DN$ (или $X \in AM$ и $Y \in CN$), тогаш

од $\angle IXM = \angle IYN$ следува $AB \parallel CD$, што не е точно. Значи, положбата на точките X и Y е како на цртежот. Од четириаголникот $AXYD$ имаме

$$\angle AXI = \angle DYI = 180^\circ - \frac{\angle A}{2} - \frac{\angle D}{2},$$

од каде наоѓаме $\angle AIX = \frac{\angle D}{2}$ и $\angle DIY = \frac{\angle A}{2}$. Според тоа, $\triangle AIX \sim \triangle IYD$, т.е.

$$\overline{AX} \cdot \overline{DY} = \overline{IY} \cdot \overline{IX}. \text{ Аналогно } \overline{BX} \cdot \overline{CY} = \overline{IY} \cdot \overline{IX}. \text{ Конечно, } \overline{AX} \cdot \overline{DY} = \overline{BX} \cdot \overline{CY}.$$



60. Во конвексен четириаголник $ABCD$ дијагоналите AC и BD се сечат во точката O . Точките A_1, B_1, C_1, D_1 припаѓаат соодветно на отсечките AO, BO, CO, DO и се такви што $\overline{AA_1} = \overline{CC_1}$ и $\overline{BB_1} = \overline{DD_1}$. Нека M и N се вторите пресечни точки на кружниците опишани соодветно околу $\triangle AOB$ и $\triangle COD$ и околу $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$, а P и Q се вторите пресечни точки на кружниците опишани соодветно околу $\triangle A_1OB_1$ и $\triangle C_1OD_1$ и околу $\triangle A_1OD_1$ и

$\triangle B_1OC_1$. Докажи дека точките M, N, P и Q лежат на една кружница.

Решение. *Прв начин.* Од условот имаме $\angle MAC = \angle MBD$ и $\angle MCA = \angle MDB$. Според тоа, $\triangle MAC \sim \triangle MBD$. Нека X и Y се соодветно средините на AC и BD . Тогаш од горната сличност следува дека $\angle MXC = \angle MYD$. Последното означува дека M лежи на опишаната кружница околу $\triangle OXY$. Аналогно се докажува дека и N лежи на истата кружница.

Бидејќи X и Y се соодветно средини и на A_1C_1 и B_1D_1 , горните размислувања за четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$ докажуваат дека P и Q лежат на кружницата опишана околу $\triangle OXY$.

Втор начин. Низ темињата A и C повлекуваме прави нормални на AC , а низ темињата B и D повлекуваме прави нормални на BD . Овие четири прави определуваат паралелограм во кој точките M и N се подножја на нормалите повлечени од O на неговите дијагонали. Според тоа, точките M и N припаѓаат на кружницата со дијаметар OT , каде T е пресечната точка на дијагоналите на паралелограмот. Аналогно се гледа дека и точките P и Q припаѓаат на истата кружница (точките O и T се исти за четириаголниците $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$).

61. Даден е остроаголен разностран $\triangle ABC$ со висини CD, AE и BF . Точките E' и F' се симетрични на E и F во однос на точките A и B , соодветно. Точката C_1 припаѓа на полуправата CD и е таква што $\overline{DC_1} = 3\overline{CD}$. Докажи дека $\angle E'C_1F' = \angle ACB$.

Решение. Нека точките M, N, P и Q се избрани така што четириаголниците $CEAM, CFBN, CEE'P$ и $FFF'Q$ се правоаголници. Со C' да ја означиме средината на CC_1 , $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ и $\angle ACB = \gamma$. Јасно, $\triangle ABC \cong \triangle AC'B$ и $\triangle AMC \sim \triangle BNC$. Исто така

$$\begin{aligned}\angle MAC' &= 360^\circ - \angle MAC - \angle BAC - \angle BAC' \\ &= 360^\circ - \gamma - 2\alpha = \gamma + 2\beta = \angle NBC + \angle ABC + \angle ABC' \\ &= \angle NBC'.\end{aligned}$$

Но, $\frac{\overline{MA}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}}$, па од горното равенство следува $\triangle MAC' \sim \triangle NBC'$. Според тоа, $\angle AC'M = \angle BC'N$ и затоа $\angle MC'N = \gamma$. Ги разгледуваме средните линии во $\triangle CPC_1$ и $\triangle CQC_1$ и добиваме дека $MC' \parallel PC_1$ и $NC' \parallel QC_1$. Оттука следува дека $\angle PC_1Q = \gamma$.

Забележуваме дека $BN \parallel F'Q$, $\overline{BN} = \overline{F'Q}$, $NC' \parallel QC_1$, $2\overline{NC'} = \overline{QC_1}$, $AM \parallel E'P$, $\overline{AM} = \overline{E'P}$, $MC' \parallel PC_1$ и $2\overline{MC'} = \overline{PC_1}$. Оттука и од $\triangle MAC' \sim \triangle NBC'$ следува

дека $\triangle PE'C_1 \sim \triangle QF'C_1$. Според тоа, $\angle PC_1E' = \angle QC_1F'$. Оттука и од веќе докажаното равенство $\angle PC_1Q = \gamma$ добиваме $\angle E'C_1F' = \gamma$.

62. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Точката M лежи на страната AB на опишаната кружница околу четириаголникот $ABCD$. Точките I_1, I_2 и I_3 се центри на впишаните кружници околу $\triangle MBC, \triangle MCD$ и $\triangle MDA$, соодветно. Докажи дека точките M, I_1, I_2 и I_3 се конциклични.

Решение. Лема. Нека I е центар на впишаната кружница на $\triangle ABC$ и нека точките P и Q лежат на правите AB и AC , соодветно. Тогаш точките A, I, P и Q се конциклични ако и само ако

$$\overline{BP}^* + \overline{CQ}^* = \overline{BC},$$

каде $\overline{BP}^* = \overline{BP}$ ако P припаѓа на полуправата BA и на $-\overline{BP}$ во спротивен случај, и аналогно за $\overline{CQ}^*$.

Доказ. Ќе го разгледаме случајот кога P и Q лежат на отсечките AB и AC , соодветно. Сите останати случаи се разгледуваат аналогно.

Да претпоставиме дека точките A, I, P и Q се конциклични. Нека D и E се допирните точки на впишаната кружница во $\triangle ABC$ соодветно со AB и AC . Имаме $\angle PIQ = 180^\circ - \alpha$, па затоа $\angle DIP = \angle EIQ$, и следствено $\triangle DIP \cong \triangle EIQ$. Оттука $\overline{DP} = \overline{EQ}$ и $\overline{BP} + \overline{CQ} = \overline{BD} + \overline{CE} = \overline{BC}$, што и требаше да се докаже.

Обратната насока на тврдењето се докажува со истите расудувања, но во обратен редослед. ■

Нека опишаната кружница околу $\triangle MI_1I_3$ по втор пат ги сече правите AB , CM и DM во точките P, Q и R . Согласно лемата $\overline{BP}^* + \overline{CQ}^* = \overline{BC}$ и $\overline{DR}^* + \overline{AP}^* = \overline{DA}$. Според тоа,

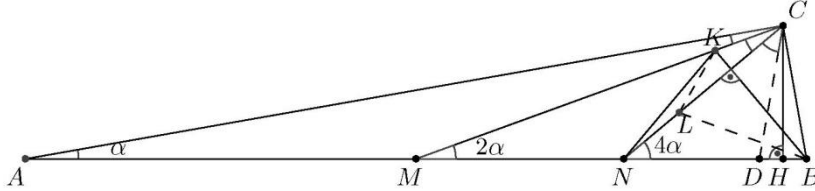
$$\overline{CQ}^* + \overline{DR}^* = \overline{BC} + \overline{DA} - \overline{BP}^* - \overline{AP}^* = \overline{BC} + \overline{DA} - \overline{AB}.$$

Бидејќи четириаголникот $ABCD$ е тетивен, последниот израз е еднаков на $\overline{CD}$ и сега тврдењето на задачата следува од лемата.

63. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со $\angle ACB = 90^\circ$, висина CH и медијана CM . Точката N од отсечката MH е таква што $\overline{MN} = \overline{NC}$ и $\overline{NH} = \overline{HB} + \overline{BC}$.
- определи го $\angle BAC$,
 - ако точката K од отсечката MC е таква што $KB \perp NC$, определи го $\angle KNC$.

Решение. а) Нека D е точка од отсечката NH таква што $\overline{ND} = \overline{BC}$. Тогаш

$\overline{DH} = \overline{HB}$ и $\triangle DHC \cong \triangle BHC$. Тогаш $\overline{DC} = \overline{BC} = \overline{ND}$ и од својствата на медијаната имаме $\overline{CM} = \overline{AM} = \overline{BM}$. Ако $\angle BAC = \angle ACM = \alpha$, тогаш $\angle CMB = 2\alpha$, како надворешен агол. Затоа $\angle MCN = 2\alpha$ и $\angle CNB = 4\alpha$ како надворешен агол, $\angle NCD = 4\alpha$ и $\angle CDB = 8\alpha$ како надворешен агол. Според тоа, $\angle ABC = 8\alpha$ и $9\alpha = 90^\circ$, т.е. $\alpha = 10^\circ$.



б) Нека L е точка од отсечката CN таква што $\angle CBL = 60^\circ$. Тогаш $\triangle BCL$ е рамностран и $K \in s_{CL}$. Така $\angle KLC = \angle KCL = \angle NMC$, па затоа четириаголникот $LKMN$ е тетивен. Имаме, $\triangle BLM \cong \triangle CLM$, па затоа

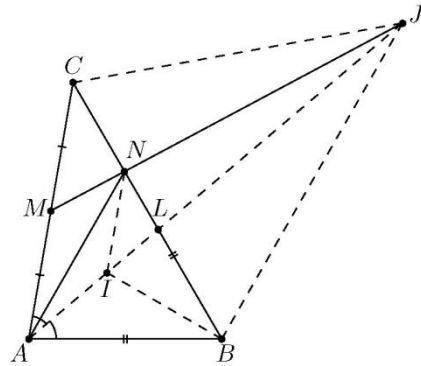
$$\angle KNC = \frac{1}{2} \angle LK = \angle LMN = \frac{1}{2} \angle BMC = 10^\circ.$$

64. Даден е $\triangle ABC$ со центар J на припишаната кружница кон страната BC . Нека M е средина на страната AC и MJ ја сече страната BC во точката N . Ако $\overline{AB} = \overline{BN}$, тогаш $\angle BAC = 2\angle ACB$. Докажи!

Решение. Нека I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Од $\overline{AM} = \overline{CM}$ следува $P_{ANJ} = P_{CNJ}$. Тогаш

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CN}}{\overline{NL}} &= \frac{P_{CNJ}}{P_{LNJ}} = \frac{P_{ANJ}}{P_{LNJ}} = \frac{\overline{AJ}}{\overline{LJ}} \\ &= \frac{P_{ABJ}}{P_{LBJ}} = \frac{\overline{AB} \cdot r_a}{\overline{BL} \cdot r_a} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BL}}, \end{aligned}$$

каде r_a е радиусот на припишаната кружница кон страната BC . Значи, $\frac{\overline{CN}}{\overline{NL}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BL}}$, од што следува $AC \parallel IN$.



Од друга страна, BI е симетрала на агол на рамнокракиот $\triangle ANB$ и затоа I лежи на симетралата на AN , но CI е симетрала на $\angle ACB$, т.е. I лежи на опишаната кружница околу $\triangle ANC$. Според тоа, $ACNI$ е трапез кој е впишан во кружница, па затоа тој е рамнокрак и $\angle BAC = 2\angle IAC = 2\angle ACB$.

65. Даден е остроаголен $\triangle ABC$, во кој впишаната кружница ги допира страните AB и BC соодветно во точките M и N . Симетралите на $\angle ACB$ и $\angle BAC$ ја сечат правата MN соодветно во точките K и P . Ако $\overline{AC} = 2\overline{KP}$, определи

го $\angle ABC$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за аглиите на $\triangle ABC$. Нека I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Бидејќи

$$\angle APM = \angle BMN - \angle MAP = (90^\circ - \frac{\beta}{2}) - \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2} = \angle ICB,$$

четириаголникот $IPNC$ е тетивен. Тогаш $\angle IPC = \angle INC = 90^\circ$. Од $\angle APM = \frac{\gamma}{2} = \angle ICA$ следува дека и четириаголникот $AKPC$ е тетивен, па затоа важи

$$\angle AKC = \angle APC = 90^\circ.$$

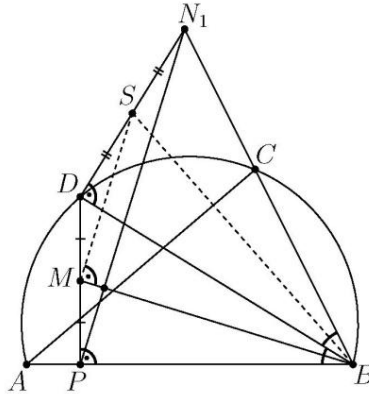
Нека S е средината на страната AC . Тогаш PS и KS се медијани соодветно во правоаголните триаголници APC и AKC и затоа $\overline{KS} = \overline{PS} = \frac{\overline{AC}}{2}$.

Оттука и од условот $\overline{AC} = 2\overline{KP}$ следува дека $\triangle KPS$ е рамностран.

Бидејќи $\angle CSP = \alpha$ како надворешен за размнокракиот $\triangle APS$ и аналогно $\angle ASK = \gamma$, добиваме $60^\circ = \angle KSP = 180^\circ - (\angle ASK + \angle CSP) = \beta$.

66. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Точката D е средината на лакот AC од опишаната кружница околу $\triangle ABC$, кој не ја содржи точката B . Нека точката P е проекцијата на D на правата AB , а точката M е средина на отсечката DP . Правата низ P , нормална на BM , ја сече правата BC во точката N . Докажи дека $\angle NDB = 90^\circ$.

Решение. Нека правата низ D , нормална на BD ја сече правата BC во точката N_1 . Ќе докажеме дека $PN_1 \perp BM$ од каде ќе следува дека $N \equiv N_1$.



Со S да ја означиме средината на отсечката DN_1 . Од $\angle DBP = \angle N_1BD$ и $\angle DPB = \angle BN_1D = 90^\circ$ следува $\triangle BDP \sim \triangle BN_1D$. Тогаш $\angle BMP = \angle BSD$, т.е. четириаголникот $SDMB$ е тетивен и $\angle BMS = \angle BDS = 90^\circ$. Останува да забележиме дека MS е средна линија во $\triangle PN_1D$, т.е. $MS \parallel PN_1$ и затоа $PN_1 \perp BM$.

3 ПРИМЕНА НА ТРИГОНОМЕТРИЈАТА

- Во кружница со центар O и радиус R е впишан остроаголен $\triangle ABC$. На страната BC е земена точка X таква што $\overline{AX} = \overline{BX}$ и $\overline{OX} = \overline{CX}$. Определи ги аглиите на $\triangle ABC$, ако радиусот на опишаната кружница околу $\triangle AOC$ е еднаков на R .

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за елементите на $\triangle ABC$. Бидејќи $\triangle ABC$ е остроаголен, добиваме $\angle AOC = 2\beta$ и од условот дека радиусот на опишаната кружница околу $\triangle AOC$ е еднаков на R добиваме $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{b}{\sin 2\beta}$, т.е. $\sin \beta = \sin 2\beta$, од каде наоѓаме $\beta = 60^\circ$.

Бидејќи $\angle AOC = 2\beta$ и $\angle AXC = \angle ABX + \angle BAX = 2\beta$, следува дека четириаголникот $AOXC$ е тетивен. Сега од $\overline{OX} = \overline{CX}$ следува дека AX е симетрала на $\angle OAC$. Според тоа, $\angle OAC = 2\angle XAC = 2(\alpha - \beta)$ и бидејќи важи $\angle OAC = 90^\circ - \beta$, наоѓаме $2\alpha - 120^\circ = 30^\circ$, т.е. $\alpha = 75^\circ$. Конечно, $\gamma = 45^\circ$.

- Нека k е опишаната кружница околу остроаголникот $\triangle ABC$. Точката M е средина на страната AB , Тангентата на k во A ја сече правата низ M нормална на AC во точката D . Тангентата на k во точката B ја сече правата низ M нормална на BC во точката E . Ако правата DE го дели $\triangle ABC$ на два дела со плоштини 1 и 3, определи го $\angle ACB$.

Решение. За аглиите во $\triangle ABC$ ќе ги користиме стандардните ознаки. Нека AA' и BB' се висини во триаголникот. Точките A, B, A', B' лежат на кружница со центар M . Имаме $\overline{AM} = \overline{A'M}$, па така

$$\angle MA'A = \angle MAA' = 90^\circ - \beta = \angle ADM,$$

бидејќи $\angle DAC = \beta$ како периферен агол. Значи, точката A' лежи на опишаната кружница околу $\triangle AMD$. Имаме

$$\angle MA'D = 180^\circ - \angle BAD = \gamma$$

и

$$\angle MA'B' = 180^\circ - \angle MA'B - \angle B'A'C = 180^\circ - \alpha - \beta = \gamma,$$

па така D припаѓа на правата $A'B'$. Аналогно и E припаѓа на правата $A'B'$. Според тоа, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$, па затоа

$$\sin \gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \sqrt{\frac{P_{A'B'C}}{P_{ABC}}} = \frac{1}{2} \text{ или } \frac{\sqrt{3}}{2},$$

во зависност кој дел има поголема плоштина. Значи, $\gamma = 30^\circ$ или $\gamma = 60^\circ$.

3. Со O и I да ги означиме центрите на опишаната и впишаната кружница на триаголникот ABC , соодветно. Надворешно припишаната кружница ω_a ги допира продолженијата на страните AB и AC соодветно во точките K и M , а страната BC ја допира во точката N . Нека претпоставиме дека средината P на отсечката KM лежи на опишаната кружница на триаголникот ABC . Докажи дека точките O, I и N се колинеарни.

Решение. Ако $\overline{AB} = \overline{AC}$, тогаш тврдењето е тривијално, па затоа да претпоставиме дека $\overline{AB} \neq \overline{AC}$, т.е. KM не е паралелна со BC . Со R да го означиме радиусот на опишаната кружница, а со I_a и r_a центарот и радиусот на ω_a . Од $\overline{AK} = \overline{AM}$ следува дека правата AP е симетрала на $\angle BAC$, па затоа P е средина на лакот BC на опишаната кружница. Тогаш $\overline{PI} = \overline{PI_a}$, па затоа P е центар на кружницата $BIC I_a$ над дијаметарот II_a . Оттука следува $\overline{PI_a} = \overline{PB} = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$. Од друга страна $\angle I_a KP = \frac{\alpha}{2}$ и $\angle I_a PK = 90^\circ$, па затоа $\overline{PI_a} = r_a \sin \frac{\alpha}{2}$. Оттука следува $r_a = 2R$, т.е. $\overline{NI_a} = 2\overline{PO}$. Бидејќи $I_a N \parallel PO$, добиваме дека отсечката PO е средна линија на триаголникот $II_a N$, што значи дека O е средина на отсечката IN .

4. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните AB и AC соодветно во точките X и Y . Точката K е средина на лакот AB од опишаната кружница околу триаголникот (не ја содржи точката C). Познато е дека правата XY ја преполовува отсечката AK . Определи го $\angle BAC$.

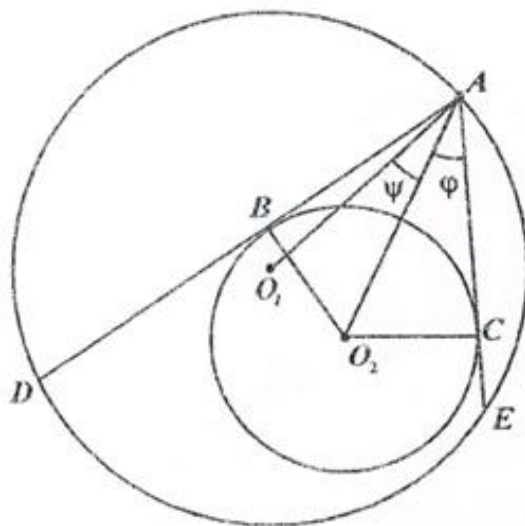
Решение. Нека I е центарот на впишаната кружница и отсечките XY и AI се сечат во точката S . Познато е дека $\overline{KI} = \overline{KA}$, т.е. висината KT на $\triangle AKI$ е и негова тежишна линија. Бидејќи $XY \perp AI$, добиваме $XY \parallel KT$, а бидејќи XY ја преполовува страната AK , добиваме дека XY е средна линија во $\triangle AKT$. Значи, $\frac{\overline{AS}}{\overline{ST}} = \frac{1}{3}$. Притоа XS е висина во правоаголникот $\triangle AXI$, па затоа $\frac{\overline{AS}}{\overline{ST}} = \left(\frac{\overline{AX}}{\overline{XI}}\right)^2$. Од последните две равенства добиваме $\operatorname{tg} \angle XAI = \frac{\overline{XI}}{\overline{AX}} = \sqrt{3}$, па затоа $\angle XAI = 60^\circ$ и $\angle BAC = 2\angle XAI = 120^\circ$.

5. Дадени се кружници $k_1(O_1, R)$ и $k_2(O_2, r)$ такви што $R \geq r\sqrt{2}$ и

$$\overline{O_1 O_2} = \sqrt{R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2}}.$$

Од произволна точка $A \in k_1$ се повлечени тангенти AB, AC ($B, C \in k_2$) на k_2 , кои k_1 ја сечат соодветно во точките D и E . Докажи дека $\overline{BD} \cdot \overline{CE} = r^2$.

Решение. Нека $\overline{O_1O_2} = d$. Лесно се гледа дека $r + d < R$, т.е. дека k_2 лежи во k_1 . Нека $\overline{AO_2} = t$, $\angle O_2AC = \varphi$ и $\angle O_1AO_2 = \psi$. Тогаш од рамнокракиот $\triangle AO_1E$ имаме $\overline{AE} = 2R \cos(\varphi + \psi)$. Следствено



$$\overline{EC} = \overline{AE} - \overline{AC} = 2R \cos(\varphi + \psi) - \sqrt{t^2 - r^2}. \quad (1)$$

Од друга страна $\angle BAO_1 = |\varphi - \psi|$ и аналогно добиваме

$$\overline{BD} = 2R \cos(\varphi - \psi) - \sqrt{t^2 - r^2}. \quad (2)$$

Од $\triangle O_1O_2A$ и $\triangle ACO_2$ имаме

$$\cos \psi = \frac{R^2 + t^2 - d^2}{2Rt} \quad (3)$$

и

$$\sin \varphi = \frac{r}{t}, \cos \varphi = \frac{\sqrt{t^2 - r^2}}{t}. \quad (4)$$

Ако ги искористиме формулите

$$\cos(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi) = \cos^2 \psi - \sin^2 \varphi$$

и

$$\cos(\varphi + \psi) + \cos(\varphi - \psi) = 2 \cos \psi \cos \varphi,$$

од (1), (2), (3) и (4) добиваме

$$\overline{BD} \cdot \overline{CE} = \frac{(R^2 + t^2 - d^2)^2}{t^2} - \frac{4R^2 r^2}{t^2} - \frac{2(R^2 + t^2 - d^2)(t^2 - r^2)}{t^2} + t^2 - r^2,$$

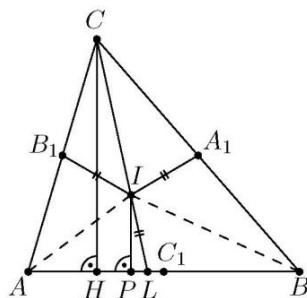
од каде добиваме

и ако искористиме дека $d = \sqrt{R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2}}$ добиваме дека десната страна во горното равенство е еднаква на 0, па затоа $\overline{BD} \cdot \overline{CE} = r^2$.

- Решение.** Нека N и M се соодветно средините на CH и AC . За $\triangle CYO$ и $\triangle CNM$ имаме $\angle OCY = \angle MCB$ и $\frac{\overline{CY}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{CM}}$ (следева од сличноста на $\triangle CYN$ и $\triangle COM$), па затоа $\triangle CYO \sim \triangle CNM$. Според тоа, $\angle CYO = \angle CNM$. Бидејќи MN е средна линија во $\triangle AHC$, важи $\angle CHA = 180^\circ - \beta$, т.е. $\angle BYQ = \beta$, од каде следева $\overline{YQ} = \overline{BQ}$. Аналогно $\overline{XP} = \overline{AP}$.

Од условот $\overline{XP} + \overline{YQ} = \overline{AB} + \overline{XY}$ следува $\overline{XY} = \overline{QP}$ и како $XY \parallel PQ$, заклучуваме дека $QPYX$ е паралелограм. Бидејќи O е пресечна точка на дијагоналите на овој паралелограм, добиваме дека растојанието од O до XY е еднакво на растојанието од O до AB , кое е $R \cos \gamma$. Бидејќи $HN \perp XY$ и $\overline{XN} = R \cos \gamma$, заклучуваме дека $\angle ONC = 90^\circ$.

- Решение.** Допирната точка на k со страната AB да ја означиме со P . При стандардните ознаки за триаголник имаме



$$\overline{AC_1} = \frac{c}{2}, \overline{AH} = b \cos \alpha \text{ и } \overline{AP} = \frac{b+c-a}{2}.$$

Бидејќи P е средина на HC_1 добиваме

$$\overline{AC_1} - \overline{AP} = \overline{AP} - \overline{AH}, \text{ па затоа}$$

$$a - b = \frac{c}{2} - b \cos \alpha.$$

Но, $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, па затоа $a + b = 2c$. Ос последното равенство наоѓаме

$$\overline{AL} = \frac{cb}{a+b} = \frac{b}{2} \text{ и } \triangle ALI \cong \triangle AB_1I. \text{ Аналогно, } \triangle BLI \cong \triangle BA_1I. \text{ Според тоа,}$$

$$\overline{AI} = \overline{IB_1} = \overline{IA_1}.$$

8. Во $\triangle ABC$ е впишана кружница со центар O_1 , која ги допира страните AB, BC и AC соодветно во точките C_1, A_1 и B_1 . Припишаната кружница кон страната AB има центар O_2 и ги допира AB и продолженијата на страните AC и BC соодветно во точките C_2, B_2 и A_2 . Нека O_1C_1 ја сече A_1B_1 во точката M , а O_2C_2 ја сече A_2B_2 во точката N . Докажи дека $\overline{C_1N} = \overline{C_2N}$.

Решение. Ако $\overline{AC} = \overline{BC}$, тогаш од $\overline{AB_1} = \overline{AB_2} = \overline{BA_1} = \overline{BA_2}$ следува дека отсечката AB е средна линија во трапезот $B_2A_2A_1B_1$. Тогаш точките C_1 и C_2 се совпаѓаат и C_1 е средина на MN .

Нека $\overline{AC} > \overline{BC}$ и да ги означиме пресечните точки на AB со A_1B_1 и A_2B_2 соодветно со P и Q . Од $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ следува дека $\angle APB_1 = \angle BQA_2$ и $\angle AB_1P + \angle BA_2Q = 180^\circ$. Сега, од $\overline{AB_1} = \overline{AC_1} = \overline{BC_1} = \overline{BA_2}$ следува дека

$$\overline{AP} = \frac{\overline{AB_1} \sin \psi}{\sin \varphi} = \frac{\overline{BA_2} \sin(180^\circ - \psi)}{\sin \varphi} = \overline{BQ},$$

па затоа $\overline{PC_1} = \overline{QC_2}$. Според тоа, $\triangle PC_1N = \triangle QC_2N$, т.е. $\overline{C_1N} = \overline{C_2N}$.

9. Нека I и M се центарот на впишаната кружница и тежиштето на $\triangle ABC$, во кој $\overline{AC} \neq \overline{BC}$. Докажи дека $IM \perp AB$ ако и само ако $\overline{AC} + \overline{BC} = 3\overline{AB}$.

Решение. Нека D и E се проекциите на C и I на правата AB , а F е средината на страната AB . Тогаш

$$IM \perp AB \Leftrightarrow ME \parallel CD \Leftrightarrow \overline{FD} = 3\overline{FE}. \quad (1)$$

Ќе ги користиме стандардните ознаки за елементите на $\triangle ABC$. Можеме да сметаме дека $a < b$. Тогаш

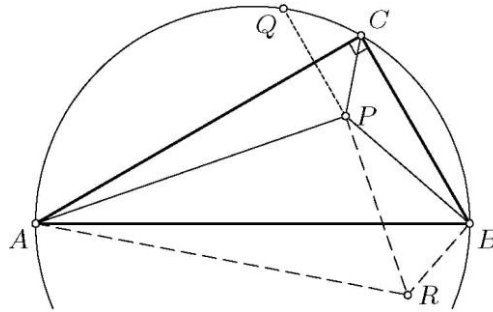
$$\overline{FE} = \overline{AE} - \overline{AF} = \frac{b+c-a}{2} - \frac{c}{2} = \frac{b-a}{2}. \quad (2)$$

$$\overline{FD} = \overline{AD} - \overline{AF} = b \cos \alpha - \frac{c}{2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} - \frac{c}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2c}. \quad (3)$$

Од (1), (2) и (3) следува дека $IM \perp AB$ ако и само ако $a + b = 3c$.

10. Во внатрешноста на правоаголен триаголник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) земена е точка P таква што $\overline{AP} = 4$, $\overline{BP} = 2$ и $\overline{CP} = 1$. Точката Q која е симетрична на точката P во однос на AC припаѓа на кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.

Решение. Да означиме $\alpha = \angle BAC$. Нека R е точка таква што триаголниците ARB и APC се слични и еднакво ориентирани (види цртеж). Од $\frac{\overline{AR}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ и $\angle RAP = \angle BAC$ следува $\triangle ARP \sim \triangle ABC$. Според тоа,



$$\overline{BR} = \overline{CP} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \overline{RP} = \overline{AP} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 4 \operatorname{tg} \alpha \text{ и}$$

$$\angle BRP = \angle ARB - \angle ARP = \angle AQC - \angle ABC = 2\alpha.$$

Сега од косинусната теорема за $\triangle BPR$ следува

$$4 = \overline{BP}^2 = \overline{BR}^2 + \overline{RP}^2 - 2\overline{BR} \cdot \overline{RP} \cos 2\alpha = \frac{1 + 16 \sin^2 \alpha - 8 \sin \alpha \cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha},$$

па затоа

$$16x^3 + 20x^2 - 8x - 3 = 0,$$

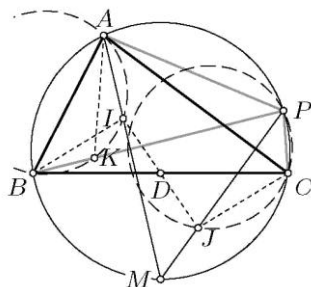
каде $x = \sin \alpha$. Решенијата на последната равенка се $x \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\}$, при што само $x = \frac{1}{2}$ има смисла. Значи, $\alpha = 30^\circ$ и аглите на триаголникот се $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

11. Точката I е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Правата AI ја сече опишаната кружница Ω на $\triangle ABC$ во точката $M \neq A$. Точката J е симетрична на точката I во однос на средината D на страната BC . Правата MJ ја сече кружницата Ω во точката $P \neq M$. Докажи дека една од отсечките PA, PB, PC е еднаква на збирот на другите две.

Решение. При распоред како на цртежот, тврдењето $\overline{PB} - \overline{PC} = \overline{PA}$ е ек-

вивалентно на

$$\sin \angle BMP - \sin \angle CMP = \sin \angle IMP.$$



Бидејќи $\overline{MB} = \overline{MC} = \overline{MI}$ доволно е да се докаже дека $S_{BMP} - S_{CMP} = S_{IMP}$.

Но,

$$\begin{aligned} S_{BMP} &= S_{BMDP} + S_{DMP} \\ &= S_{CMDP} + S_{DMP}, \\ &= S_{CMP} + 2S_{DMP} \end{aligned}$$

па затоа

$$S_{BMP} - S_{CMP} = 2S_{DMP} = S_{IMP},$$

со што доказот е завршен.

12. Во $\triangle ABC$ со плошина S точката H е ортоцентар, точките D, E, F се соодветно подножјата на висините повлечени од темињата A, B, C , а точките P, Q, R се редоследно симетрични на темињата A, B, C во однос на правите BC, CA, AB , соодветно. Познато е дека триаголниците DEF и PQR имаат еднакви плоштини T и дека $T > \frac{3}{5}S$. Докажи дека $T = S$.

Решение. Нека α, β, γ се аглиите на $\triangle ABC$, а R е радиусот на неговата опишана кружница. Триаголниците CDE и CAB се слични со коефициент на сличност $\cos \gamma$, па затоа $P_{CDE} = S \cos^2 \gamma$. Аналогно $P_{AEF} = S \cos^2 \alpha$ и $P_{BFD} = S \cos^2 \beta$. Затоа

$$P_{DEF} = |S - S \cos^2 \alpha - S \cos^2 \beta - S \cos^2 \gamma| = S |\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2|.$$

Од друга страна важи

$$\begin{aligned} P_{PQR} &= P_{ABC} + P_{ABR} + P_{BCP} + P_{CAQ} - P_{PBR} - P_{RAQ} - P_{QCP} \\ &= 4S - P_{PBR} - P_{RAQ} - P_{QCP}. \end{aligned}$$

Понатаму,

$$P_{RAQ} = \frac{1}{2} \overline{AQ} \cdot \overline{AR} \sin 3\alpha = \frac{1}{2} bc \sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha) = (3 - 4 \sin^2 \alpha)S.$$

Аналогно имаме

$$P_{PBR} = (3 - 4\sin^2 \beta)S \text{ и } P_{QCP} = (3 - 4\sin^2 \gamma)S,$$

па затоа

$$P_{PQR} = S |4(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) - 5|.$$

Да означиме $x = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma$. Од $P_{PQR} = P_{DEF} = T$ следува дека $|x - 2| = |4x - 5|$, па затоа $x \in \{1, \frac{7}{5}\}$. За $x = \frac{7}{5}$ добиваме $T = |\frac{7}{5} - 2|S = \frac{3}{5}S$, што противречи на условот на задачата. Според тоа, $x = 1$ и $T = S$.

13. Нека O е центарот на опишаната кружница околу рамнокракиот $\triangle ABC$ со основа AB . Правата AO го сече кракот BC во точката D . Познато е дека $\overline{BD}$ и $\overline{CD}$ се цели броеви, а $\overline{AO} - \overline{CD}$ е прост број. Определи ги овие броеви.

Решение. Да означиме $\overline{AO} = R$, $\overline{BD} = b$, $\overline{CD} = c$ и $\overline{OD} = d$. Бидејќи CO е симетрала на агол во $\triangle ACD$, добиваме

$$\frac{d}{R} = \frac{c}{b+c}.$$

Од друга страна, ако правата AO ја сече опишаната кружница во точката E , тогаш од својствата на секантите AE и BC следува дека

$$(R+d)(R-d) = bc.$$

Ако во последното равенство замениме $d = \frac{cR}{b+c}$, добиваме

$$R^2 = \frac{(b+c)^2 c}{b+2c}.$$

Нека

$$k = \text{NZD}(b, c, R), m = \text{NZD}\left(\frac{b}{k}, \frac{c}{k}\right), R_1 = \frac{R}{k}, b_1 = \frac{b}{km}, c_1 = \frac{c}{km}.$$

Тогаш

$$R_1^2 = \frac{m^2(b_1+c_1)^2 c_1}{b_1+2c_1}.$$

Бидејќи

$\text{NZD}(m, R_1) = 1$ и $\text{NZD}(b_1+2c_1, b_1+c_1) = \text{NZD}(b_1+2c_1, c_1) = \text{NZD}(b_1, c_1) = 1$, добиваме $R_1^2 = (b_1+c_1)^2 c_1$ и $m^2 = b_1+2c_1$. Според тоа, c_1 е точен квадрат, на пример $c_1 = n^2$. Тогаш

$$c = kmc_1 = kmn^2, b = kmb_1 = km(m^2 - 2n^2) \text{ и } R = kR_1 = kn(m - n^2).$$

Бидејќи $1 > \sin \angle BAC = \frac{b+c}{2R} = \frac{m}{2n}$, добиваме $n\sqrt{2} < m < 2n$ (обратно, при овој услов триаголникот постои и е остроаголен, т.е. правата AO го сече кракот BC). Во случајов $n \geq 2$. Бидејќи $R - c = kn(m^2 - n^2 - mn)$ е прост број следува дека n е прост број, $k = 1$ и $m^2 - n^2 - mn = 1$, т.е.

$$(m-1)(m+1)=n(m+n).$$

Имаме две можности.

- 1) $m-1=nl$ и тогаш $l(nl+2)=nl+1+n$, т.е. $n=\frac{1-2l}{l^2-l-1}$. Последниот број е негативен за $l \geq 2$. Значи, $l=1$ и оттука $n=1$, што е противречност.
- 2) $m+1=nl$ и тогаш $l(nl-2)=nl-1+n$, т.е. $n=\frac{2l-1}{l^2-l-1}$. Последниот број не надминува 1 за $l \geq 3$, а за $l=1$ е еднаков на -1 . Значи, $l=2$ и оттука $n=R-c=3, m=5, b=35, c=45$.

14. Во $\triangle ABC$ точките M и N лежат соодветно на страните BC и AC . Отсечките AM и BN се сечат во точката P . Опишаните кружници околу $\triangle ANP$ и $\triangle BMP$ по втор пат се сечат во центарот I на впишаната кружница на $\triangle ABC$. Определи ја должината на отсечката IP ако $\angle ACB=45^\circ$ и $R_{ABC}=1$.

Решение. Имаме

$$\angle ANI = \angle API = 180^\circ - \angle MPI = \angle MBI = \frac{1}{2}\beta,$$

па затоа $\triangle AIN \cong \triangle AIB$. Според тоа, $\overline{AN} = \overline{AB}$ и $AI \perp BN$. Аналогно се докажува дека $BI \perp AM$, што значи дека I е ортоцентар на $\triangle ABP$.

Бидејќи

$$\angle APB = \angle API + \angle BPI = \frac{1}{2}(\beta + \alpha),$$

добиваме

$$\overline{PI} = 2R_{ABP} \cos \angle APB = 2R_{ABP} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 2R_{ABP} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Од друга страна $R_{ABP} = R_{ABI} = 2R_{ABC} \sin \frac{\gamma}{2}$. Според тоа,

$$\overline{PI} = 4R_{ABC} \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 2 - \sqrt{2}.$$

15. Во кружница k со радиус 1 е впишан $\triangle ABC$. Точките I и I_a се соодветно центарот на впишаната кружница и центарот на припишаната кружница кон страната BC на $\triangle ABC$. Правата BI ја сече AC во точка B_1 , а правата AI ја сече BC во точка A_1 . Правата B_1A_1 ја сече k во точки P и Q .

а) Докажи дека точките I, I_a, P и Q лежат на една кружница.

б) Определи го радиусот на опишаната кружница околу $\triangle IPQ$.

Решение. а) Од $\angle IBI_a = \angle ICI_a = 90^\circ$ следува дека четириаголникот IBI_aC е тетивен. Според тоа,

$$\overline{A_1I} \cdot \overline{A_1I_a} = \overline{A_1B} \cdot \overline{A_1C}. \quad (1)$$

Точките P, B, Q и C припаѓаат на k , па затоа

$$\overline{A_1P} \cdot \overline{A_1Q} = \overline{A_1B} \cdot \overline{A_1C}. \quad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека

$$\overline{A_1P} \cdot \overline{A_1Q} = \overline{A_1I} \cdot \overline{A_1I_a},$$

што значи дека точките I, I_a, P и Q лежат на една кружница.

б) Од а) имаме дека точките I, I_a, P и Q лежат на една кружница. Аналогно се докажува дека точките I, I_b, P и Q лежат на една кружница (I_b е центар на припишаната кружница кон страната AC на $\triangle ABC$). Според тоа, го бараме радиусот на опишаната кружница околу $\triangle I_a I_b$.

Ќе користиме, дека ако S е средината на лакот BC , тогаш $\overline{SI} = \overline{SI_a} = \overline{SB}$. За радиусот на опишаната кружница околу $\triangle IPQ$ имаме

$$2r = \frac{\overline{I_a I_b}}{\sin \angle I_b I_a} = \frac{\overline{I_a I_b}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\overline{SB}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 4R_{ABC} = 4.$$

Според тоа, бараниот радиус е $r = 2$.

16. Нека D е средината на оној лак BC на опишаната кружница на $\triangle ABC$ на кој е точката A и нека $\overline{AB} < \overline{AC}$. Докажи дека подножјето E на нормалата повлечена од точката D на правата AC ја преполовува искршената линија составена од отсечките BA и AC .

Решение. Треба да докажеме $\overline{EC} = \overline{AB} + \overline{AE}$. Нека $\gamma = \angle BCD$. Од правоаголниот триаголник EAD и синусната теорема за триаголникот ADB следува

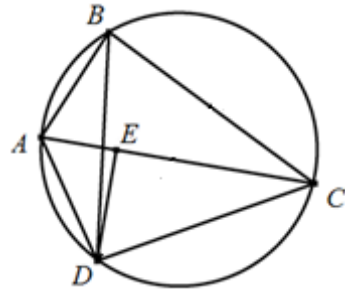
$$\overline{AE} = \overline{AD} \cos \gamma = 2R \sin \angle ACD \cos \gamma. \quad (1)$$

Од правоаголниот триаголник EDC и синусната теорема за триаголникот BDC следува

$$\overline{EC} = \overline{CD} \cos \angle ACD = 2R \sin \gamma \cos \angle ACD. \quad (2)$$

Од (1) и (2) следува

$$\begin{aligned} \overline{EC} - \overline{AE} &= 2R(\sin \gamma \cos \angle ACD - \sin \angle ACD \cos \gamma) \\ &= 2R \sin(\gamma - \angle ACD) \\ &= 2R \sin \angle ACB = \overline{AB}. \end{aligned}$$



17. Даден е рамностран $\triangle ABC$. Над страната AB како над дијаметар е конструирана кружница k . Кружница внатрешно ги допира кружницата k во точката T и страните AN и AC . Тангентата на k во точката T ја сече страната BC во точката Q . Ако $\overline{AB} = 6$, определи ја должината на отсеч-

ката CQ .

Решение. Средината на AB да ја означиме со O , допирните точки на кружницата $k'(I, r)$ со AB и AC да ги означиме со M и P , соодветно и нека $TQ \cap AC = R$.

Имаме

$$\overline{AM} = r\sqrt{3}, \overline{OM} = 3 - r\sqrt{3}, \overline{OI} = 3 - r$$

и од правоаголниот $\triangle OMI$ наоѓаме

$$r^2 + (3 - r\sqrt{3})^2 = (3 - r)^2,$$

т.е.

$$r = 2\sqrt{3} - 2.$$

Ако $\overline{RC} = x$, тогаш

$$\overline{RT} = \overline{RP} = 6 - x - r\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - x$$

и степенот на точката R во однос на кружницата k' е

$$(3 - x)(6 - x) = (2\sqrt{3} - x)^2,$$

па затоа $x = \frac{18 + 8\sqrt{3}}{11}$. Ако $\angle OIM = \varphi$, тогаш

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{3} - 2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{4} \text{ и } \angle ORC = 60^\circ - \varphi.$$

Од синусната теорема за $\triangle RQC$ добиваме

$$\overline{CQ} = x \frac{\sin(60^\circ - \varphi)}{\sin(60^\circ + \varphi)} = x \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{3} + \operatorname{tg} \varphi} = \frac{18 + 8\sqrt{3}}{11} \cdot \frac{4\sqrt{3} - (3 - \sqrt{3})}{4\sqrt{3} + (3 - \sqrt{3})} = 2.$$

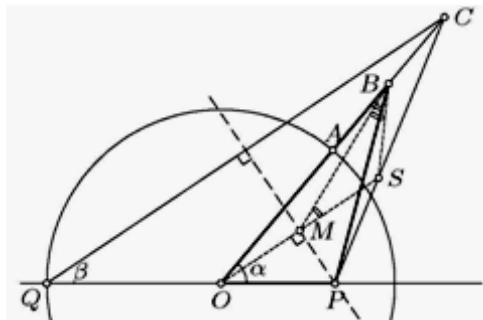
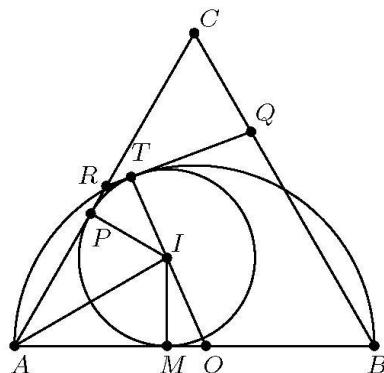
18. Дадени се кружница k со центар во точката O и точка $A \in k$. На правата OA е земена точка C таква што важи распоредот $O - A - C$ и $\overline{OA} = \overline{AC}$, а точката B е средина на отсечката AC . Нека точката $Q \in k$ е таква што $\angle AOQ$ е тап. Нека правата QO и симетралата на отсечката CQ се сечат во точката P . Докажи дека $\angle POB = 2\angle PBO$.

Решение. *Прв начин.* Нека S е точка на отсечката CP таква што $\overline{PS} = \overline{PO}$, а M е средина на отсечката OS . Тогаш

$$\overline{CS} = \overline{QO} = \overline{CA} \text{ и } \frac{\overline{CB}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{CQ}} = \frac{1}{2}$$

следува $\triangle CBS \sim \triangle CSO$ и оттука

$$\overline{SB} = \frac{1}{2} \overline{OS} = \overline{SM}$$



и

$$\angle SOP = \angle OSP = 180^\circ - \angle CSO = 180^\circ - \angle CBS = \angle OBS.$$

Според тоа, PS и PO се тангенти на опишаната кружница на $\triangle BSO$, а BP е негова симедијана. Сега важи

$$\angle OBP = \angle MBS = \frac{180^\circ - \angle BSM}{2} = \frac{\angle CSB + \angle OSP}{2} = \frac{\angle COS + \angle SOP}{2} = \frac{\angle BOP}{2}.$$

Втор начин. Да означиме $\angle POC = \alpha$, $\angle OQC = \beta$ и $\overline{OA} = 1$. Доволно е да докажеме дека

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} = \frac{\sin \frac{3}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha} = 1 + 2 \cos \alpha.$$

Според синусната теорема имаме

$$\frac{1}{2} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OC}} = \frac{\sin \angle OCQ}{\sin \angle OQC} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \beta} = \sin \alpha \operatorname{ctg} \beta - \cos \alpha,$$

т.е. $\operatorname{ctg} \beta = \frac{1 + 2 \cos \alpha}{2 \sin \alpha}$ и оттука

$$\sin \beta \cos \beta = \frac{\operatorname{ctg} \beta}{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta} = \frac{2 \sin \alpha (1 + 2 \cos \alpha)}{5 + 4 \cos \alpha}.$$

Понатаму, бидејќи

$$\overline{QC} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} \text{ и } \overline{QP} = \frac{\overline{QC}}{2 \cos \beta} = \frac{\sin \alpha}{2 \cos \beta \sin(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta \sin \beta} = \frac{5 + 4 \cos \alpha}{2 + 4 \cos \alpha}$$

имаме

$$\overline{OP} = 1 - \overline{QP} = 1 - \frac{5 + 4 \cos \alpha}{2 + 4 \cos \alpha} = \frac{3}{2 + 4 \cos \alpha}.$$

Конечно, од $\overline{OB} = \frac{3}{2}$ следува $\frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} = 1 + 2 \cos \alpha$.

19. Во триаголник ABC впишаната кружница со центар I ги допира страните AB и AC во точките P и Q , соодветно. Правите BI и CI ја сечат правата PQ во точките K и L , соодветно. Докажи дека опишаната кружница околу триаголникот ILK ја допира впишаната кружница во триаголникот ABC ако и само ако $\overline{AB} + \overline{AC} = 3\overline{BC}$.

Решение. *Прв начин.* Означуваме:

$$\overline{BC} = a, \overline{AC} = b, \overline{AB} = c, \angle BAC = \alpha, \angle CBA = \beta, \angle ACB = \gamma \text{ и } \overline{IP} = \overline{IQ} = r.$$

Нека $CK \cap BL = \{D\}$, направи цртеж. Од

$$\angle BKL = \angle BKP = 180^\circ - \angle BPK - \angle KBP = \angle APK - \angle KBP = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2},$$

т.е. $\angle IKL = \frac{\gamma}{2}$ и $\angle IKQ + \angle QCI = 180^\circ - \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ$, следува дека четириаголникот $IKQC$ е тетивен, при што $\angle IKC = \angle IQC = 90^\circ$. Аналогно се добива дека $\angle ILB = 90^\circ$. Сега, $\angle BKC = \angle BLC = 90^\circ$, што значи дека четири-

аголникот $CBLK$ е тетивен, а како $\angle ILD = \angle DKI = 90^\circ$ заклучуваме дека и четириаголникот $ILDK$ е тетивен (дијаметрите на кружниците опишани околу четириаголниците $CBLK$ и $ILDK$ се отсечките BC и ID , соодветно). Од синусната теорема за $\triangle LDK$ следува

$$\overline{KL} = \overline{ID} \sin \angle LDK = \overline{ID} \cos \angle LCK.$$

Слично, од $\triangle CLK$ следува $\overline{LK} = a \sin \angle LCK$, па затоа $\overline{ID} = a \operatorname{tg} \angle LCK$. Од $\triangle CBK$ добиваме $\angle ICK = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2}$, т.е. $\angle LCK = \frac{\alpha}{2}$, што значи дека $\overline{ID} = a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Исто така, имаме дека

$$r = \overline{AQ} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{b+c-a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Кружницата KIL ја допира кружницата ABC ако и само ако $\overline{ID} = r$, што значи ако и само ако $a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{b+c-a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, т.е. ако и само ако $b+c=3a$, што и требаше да се докаже.

Втор начин. Ќе ги користиме истите ознаки како и при првиот начин на решавање, при што се s ќе го означиме полупериметарот на $\triangle ABC$. Слично како во првиот начин на решавање докажуваме $\angle IKC = \angle ILB = 90^\circ$, како и тоа дека четириаголникот $DKIL$ е тетивен. Нека впишаната кружница во $\triangle ABC$ ја допира страната BC во точката R . Да забележиме дека I е орто-центар на $\triangle CBD$, па затоа $DI \perp BC$, т.е. точките D, I, R се колинеарни. Кружницата KIL ја допира кружницата ABC ако и само ако $\overline{ID} = r$, т.е. $\overline{RD} = 2r$. Од

$$\angle KDI = \angle KLI = \angle KBC = \angle IBR$$

следува дека правоаголните триаголници CRD и IRB се слични, па затоа

$$\frac{\overline{CR}}{\overline{RD}} = \frac{\overline{IR}}{\overline{BR}},$$

т.е.

$$\overline{DR} \cdot r = \overline{DR} \cdot \overline{IR} = \overline{BR} \cdot \overline{CR} = (s-b)(s-c),$$

па затоа $\overline{RD} = 2r$ ако и само ако

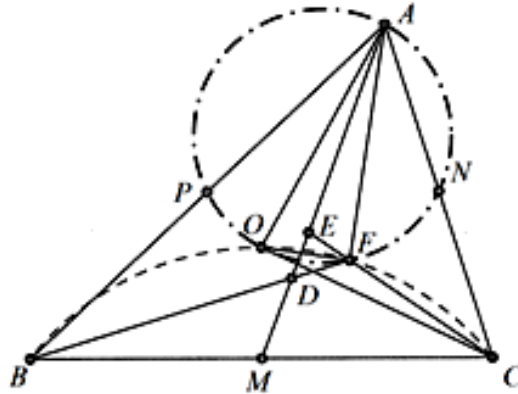
$$(s-b)(s-c) = 2r^2 = \frac{2P^2}{s^2} = \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{s},$$

односно ако и само ако $b+c=3a$, што и требаше да се докаже.

20. Даден е остроаголен разностран $\triangle ABC$ со средини на страните BC, CA и AB соодветно M, N и P . Нека симетралите на AB и AC ја сечат полуправата AM соодветно во точките D и E , а правите BD и CE се сечат во точката F , која е внатрешна за $\triangle ABC$. Докажи дека точките A, N, F и P се конциклични.

Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Ќе докажеме дека $\angle AFO = 90^\circ$, од каде заради $\angle APO = \angle ANO = 90^\circ$ следува дека точките A, O, N, F и P лежат на кружница со дијаметар AO . Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $\overline{AB} > \overline{AC}$, при што ја добиваме конфигурацијата прикажана на цртежот подолу. Триаголниците ADB и AEC се рамнокраки со $\overline{AD} = \overline{BD}$ и $\overline{AE} = \overline{CE}$, соодветно. Да означиме

$$\angle ABD = \angle BAD = x \text{ и } \angle CAE = \angle ACE = y, \text{ т.е. } x + y = \angle BAC.$$



Од синусната теорема за $\triangle ABF$ и $\triangle ACM$ добиваме соодветно

$$\frac{\overline{BM}}{\sin x} = \frac{\overline{AB}}{\sin \angle BMA} \text{ и } \frac{\overline{CM}}{\sin y} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle CMA}.$$

Ако ги поделиме овие равенства и искористиме дека $\sin \angle BMA = \sin \angle CMA$,

$$\text{добиваме } \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

Од синусната теорема за $\triangle ABF$ и $\triangle ACF$ добиваме соодветно

$$\frac{\overline{AF}}{\sin x} = \frac{\overline{AB}}{\sin \angle AFB} \text{ и } \frac{\overline{AF}}{\sin y} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle AFC}.$$

Оттука $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\overline{AC} \sin \angle AFB}{\overline{AB} \sin \angle AFC}$ и затоа $\sin \angle AFB = \sin \angle AFC$.

Бидејќи $\angle ADF$ е надворешен за $\triangle ADB$ имаме $\angle EDF = 2x$ и аналогно $\angle DEF = 2y$. Според тоа,

$$\angle EDF = 180^\circ - 2x - 2y = 180^\circ - 2\angle BAC.$$

Тогаш $\angle BFC = 2\angle BAC = \angle BOC$ и четириаголникот $BOFC$ е тетивен. Освен тоа,

$$\angle AFB + \angle AFC = 360^\circ - 2\angle BAC > 180^\circ$$

и значи

$$\angle AFB = \angle AFC = 180^\circ - \angle BAC.$$

Тогаш од тетивниот четириаголник $BOFC$ и рамнокракиот $\triangle BOC$ имаме

$$\angle OFB = \angle OCB = 90^\circ - \angle BAC.$$

Според тоа,

$$\angle AFO = \angle AFB - \angle OFB = (180^\circ - \angle BAC) - (90^\circ - \angle BAC) = 90^\circ.$$

21. Во $\triangle ABC$ е повлечена симетралата CC_1 на $\angle ACB$, $C_1 \in AB$. Точките $P \in C_1B$, $Q \in BC$, $R \in AC$ и $S \in AC_1$ се такви што

$$\overline{C_1P} = \overline{PQ} = \overline{QC} \text{ и } \overline{CR} = \overline{RS} = \overline{SC_1}.$$

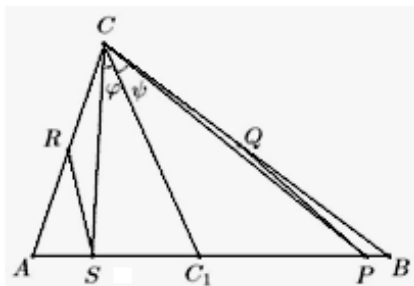
Докажи дека CC_1 е симетрала на $\angle SCP$.

Решение. Да означиме

$$\angle SCC_1 = \varphi, \angle PCC_1 = \psi \text{ и } \angle PC_1C = \delta.$$

Од $\triangle PQC$ имаме $\cos(\frac{\gamma}{2} - \psi) = \frac{\overline{CP}}{2CQ}$, а од синусната теорема за $\triangle PC_1C$ доби-

ваме $\frac{\overline{CP}}{\overline{PC_1}} = \frac{\sin \delta}{\sin \psi}$.



Бидејќи $\overline{C_1P} = \overline{PQ} = \overline{QC}$, од горните равенства добиваме

$$\cos(\frac{\gamma}{2} - \psi) \sin \psi = \frac{\sin \delta}{2}.$$

Аналогно, од $\triangle SCR$ и $\triangle SC_1C$ добиваме дека важи

$$\cos(\frac{\gamma}{2} - \varphi) \sin \varphi = \frac{\sin \delta}{2}.$$

Според тоа,

$$\cos(\frac{\gamma}{2} - \varphi) \sin \varphi = \cos(\frac{\gamma}{2} - \psi) \sin \psi,$$

па затоа $\sin \frac{\gamma}{2} + \sin(2\varphi - \frac{\gamma}{2}) = \sin \frac{\gamma}{2} + \sin(2\psi - \frac{\gamma}{2})$, т.е. $2\varphi + 2\psi - \gamma = 180^\circ$ или

$\varphi = \psi$. Бидејќи $\gamma > \varphi + \psi$, добиваме $2\varphi + 2\psi - \gamma < \gamma < 180^\circ$, т.е. првото равенство не е можно. Значи, $\varphi = \psi$, што значи дека CC_1 е симетрала на $\angle SCP$.

22. Во $\triangle ABC$ е впишан петаголник $AMNPQ$ со еднакви должини на страни, при што $M \in AB$, $Q \in AC$ и $N, P \in BC$. Правите MN и PQ се сечат во точката

S , а со l ја означуваме симетралата на $\angle MSQ$. Докажи дека $OI \parallel l$, каде O и I се соодветно центрите на опишаната и впишаната кружница во $\triangle ABC$.

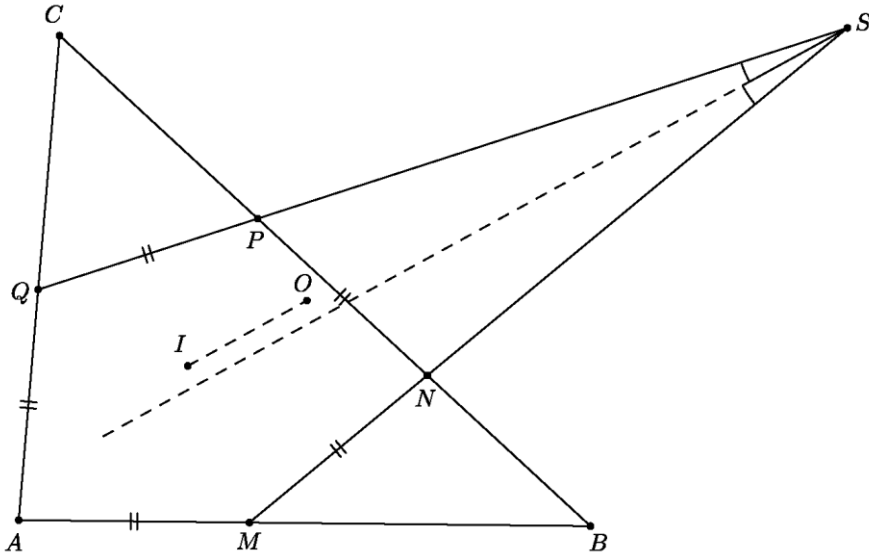
Решение. Со $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ да ги означиме соодветно $\angle BAC, \angle ABC, \angle ACB, \angle MNB$ и $\angle CPQ$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека должината на страната на $AMNPQ$ е еднаква на 1. Го разгледуваме случајот во кој $\overline{AB} < \overline{BC}$.

Тогаш

$$\overline{BN} = (c-1)\cos\beta + \cos\delta \quad \text{и} \quad \overline{CP} = (b-1)\cos\gamma + \cos\varepsilon.$$

Но, $a = 1 + \overline{BN} + \overline{CP}$, што е еквивалентно $\cos\delta + \cos\varepsilon = \cos\beta + \cos\gamma - 1$. Од синусната теорема за $\triangle BNM$ следува $\frac{c-1}{\sin\delta} = \frac{1}{\sin\beta}$, а од истата теорема за $\triangle CPQ$ добиваме $\frac{b-1}{\sin\varepsilon} = \frac{1}{\sin\gamma}$. Од последните две равенства го добиваме равенството $\sin\varepsilon - \sin\delta = \sin\beta - \sin\gamma$. Според тоа,

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon - \delta}{2} = \frac{\sin\varepsilon - \sin\delta}{\cos\varepsilon + \cos\delta} = \frac{\sin\beta - \sin\gamma}{\cos\beta + \cos\gamma - 1}.$$



Понатаму, l зафаќа агол од $90^\circ - \frac{\varepsilon - \delta}{2}$ со правата BC . Нека φ е остриот агол меѓу правите IO и BC . Тогаш $\operatorname{tg} \varphi = \frac{r - R \cos \alpha}{\frac{1}{2}(b - c)}$.

Ќе докажеме дека $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon - \delta}{2}$, од каде ќе следува дека $OI \parallel l$. Последното равенство е еквивалентно со равенството

$$\frac{r - R \cos \alpha}{\frac{1}{2}(b - c)} = \frac{\cos\beta + \cos\gamma - 1}{\sin\beta - \sin\gamma}.$$

Имаме, $b = 2R\sin\beta$ и $c = 2R\sin\gamma$ и последното равенство се сведува на $\frac{r}{R} + 1 = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$. Конечно, ако ја искористиме добро познатата формула $r = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ со соодветни трансформации добиваме дека е точно претходното равенство.

23. Даден е $\triangle ABC$. Нека $\angle ACB = 45^\circ$, $\overline{AB} = \sqrt{2}$ и $\overline{BM} = m$, каде M е средината на AC .

а) Ако $\alpha = \angle BAC$, изрази го m како функција од $\text{ctg}\alpha$.

б) Определи ги сите вредности на m , за кои $\angle BAC$ е еднозначно определен.

Решение. Ќе ги бараме оние вредности на m за кои $\alpha \in (0, 135^\circ)$ е еднозначно определен.

а) Од синусната теорема следува $\overline{BC} = 2\sin\alpha$, а $\overline{AC} = 2\sin(45^\circ + \alpha)$. Сега, од формулата за должината на медијаната наоѓаме

$$m^2 = \overline{BM}^2 = \frac{2\overline{AB}^2 + 2\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{4} = 1 + 2\sin^2\alpha - \sin^2(45^\circ + \alpha).$$

Ако ставиме $\text{ctg}\alpha = t$, тогаш $t \in (-1, +\infty)$ и од идентитетите

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+t^2} \text{ и } \sin(45^\circ + \alpha) = \frac{1+\sin 2\alpha}{2} = \frac{(t+1)^2}{2(t^2+1)},$$

по замената и средувањето на изразот добиваме

$$m = \sqrt{\frac{t^2 - 2t + 5}{2(t^2 + 1)}}.$$

б) Изразот по а) е еквивалентен на изразот

$$(1 - 2m^2)t^2 - 2t + 5 - 2m^2 = 0.$$

Нека $f(t) = (1 - 2m^2)t^2 - 2t + 5 - 2m^2$. Бројот на различните агли $\angle BAC$ соодветствува на бројот на решенијата на равенката $f(t) = 0$ во интервалот $t \in (-1, +\infty)$. Така, задачата се сведува на наоѓање на вредностите на параметарот m за кои равенката $f(t) = 0$ има единствено решение $t \in (-1, +\infty)$. Ако функцијата е линеарна, тогаш $1 - 2m^2 = 0$, па $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и единствено решение е $t = 2 > -1$. Ако

$$D = 1 - (5 - 2m^2)(1 - 2m^2) = 0,$$

тогаш $m^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, па $m = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$, при што и во двата случаи двојниот корен на равенката е во саканиот интервал. Ако пак $D > 0$, тогаш потребно и доволно е да биде исполнето

$$(1 - 2m^2)f(-1) \leq 0, \text{ т.е. } (8 - 2m^2)(1 - 2m^2) \leq 0,$$

од каде добиваме $m \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 2]$. Конечно, аголот $\angle BAC$ е еднозначно определен ако и само ако $m \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 2] \cup \{\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\}$.

24. Нека O е центарот на опишаната кружница околу остроаголниот $\triangle ABC$, а M и N се средините на страните AB и BC . Правата CO ја преполовува отсечката MN . Определи ја најмалата можна вредност на $\angle BAC$.

Решение. Ако $K = CO \cap MN$, тогаш

$$\frac{\overline{MK}}{\sin \angle MOK} = \frac{\overline{MO}}{\sin \angle MKO} = \frac{\overline{NK}}{\sin \angle NOK} = \frac{\overline{NO}}{\sin \angle NKO}$$

и затоа

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\overline{MK}}{\overline{NK}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{NO}} \cdot \frac{\sin \angle MOK}{\sin \angle NOK} = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha} \\ &= \frac{\sin(\alpha - \beta + \gamma) + \sin(\alpha - \beta - \gamma)}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha}. \end{aligned}$$

Бидејќи $\alpha > \beta$ и $\gamma < 90^\circ$, добиваме $\alpha > 45^\circ$. Ако $\alpha < 75^\circ$, следува дека $\sin 2\beta = 2 \sin 2\alpha > 1$, што е противречност. Значи, $\alpha \geq 75^\circ$. За $\alpha = 75^\circ$ добиваме $\beta = 45^\circ$ и $\gamma = 60^\circ$. Лесно се проверува дека триаголникот со овие агли ги задоволува условите на задачата.

25. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ во кој $\angle ABC + \angle BCD < 180^\circ$. Правите AB и CD се сечат во точката E . Докажи дека $\angle ABC = \angle ADC$ ако и само ако е исполнето равенството

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CE} - \overline{AB} \cdot \overline{AE}.$$

Решение. Ставаме $\angle ABC = \beta$, $\angle ADC = \delta$, $\angle BAC = \varphi$ и $\angle CAD = \psi$ (види цртеж). Од условот на задачата следува дека точката A е меѓу точките E и B и точката D е меѓу точките E и C . Освен тоа,

$$\angle AEC = 180^\circ - (\beta + \angle ECB) = 180^\circ - \beta - (360^\circ - \beta - \varphi - \psi - \delta) = \varphi + \psi + \delta - 180^\circ.$$

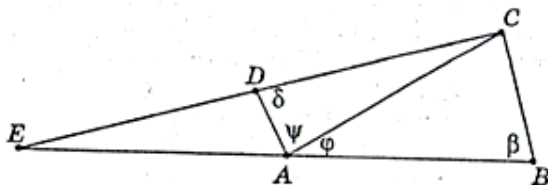
Ако последователно ја примениме синусната теорема на триаголниците ACD , ACE , ABC и повторно на ACE добиваме

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} &= \frac{\sin \psi}{\sin \delta}, \\ \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} &= \frac{\sin \angle EAC}{\sin \angle AEC} = \frac{\sin(180^\circ - \varphi)}{\sin(\varphi + \psi + \delta - 180^\circ)} = -\frac{\sin \varphi}{\sin(\varphi + \psi + \delta)}, \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} &= \frac{\sin \angle ACB}{\sin \beta} = \frac{\sin(\beta + \varphi)}{\sin \beta}, \\ \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} &= \frac{\sin \angle ACE}{\sin \angle AEC} = -\frac{\sin(\psi + \delta)}{\sin(\varphi + \psi + \delta)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Оттука, ако ги искористиме (1) добиваме дека равенството

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CE} - \overline{AB} \cdot \overline{AE}$$

последователно е еквивалентно на равенствата



$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} - \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} - 1 = 0$$

$$-\frac{\sin \psi}{\sin \delta} \cdot \frac{\sin \phi}{\sin(\phi + \psi + \delta)} + \frac{\sin(\beta + \phi)}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin(\psi + \delta)}{\sin(\phi + \psi + \delta)} - 1 = 0,$$

$$\sin(\beta + \phi) \sin(\psi + \delta) \sin \delta - \sin \psi \sin \phi \sin \beta - \sin \delta \sin \beta \sin(\phi + \psi + \delta) = 0.$$

Ако прво ги искористиме тригонометриските формули за производ на синуси, потоа тригонометриските формули за разлика на косинуси, па за разлика на синуси и на крајот за разлика на косинуси, добиваме дека последното равенство е еквивалентно со равенството

$$\sin(\beta - \delta) \sin(\psi + \delta) \sin \phi = 0.$$

Јасно, $\sin \phi \neq 0$ и $\sin(\psi + \delta) \neq 0$, па затоа последното равенство е еквивалентно со равенството $\sin(\beta - \delta) = 0$, т.е. со равенството $\beta = \delta$.

26. Даден е $\triangle ABC$ со симетрали на агли BM и CN ($M \in AC$, $N \in AB$). Полу-правата MN ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката D . Докажи дека

$$\frac{1}{BD} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{CD}.$$

Решение. Нека A_1, B_1 и C_1 се соодветно ортогоналните проекции на D врз правите BC, CA и AB (направи цртеж). Од $\triangle DAB_1$ и синусната теорема следува

$$\overline{DB_1} = \overline{DA} \sin \angle DAB_1 = \overline{DA} \sin \angle DAC = \frac{\overline{DA} \cdot \overline{DC}}{2R},$$

(R е радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$). Аналогно,

$$\overline{DA_1} = \frac{\overline{DB} \cdot \overline{DC}}{2R} \text{ и } \overline{DC_1} = \frac{\overline{DA} \cdot \overline{DB}}{2R}.$$

Равенството кое треба да го докажеме е еквивалентно на равенството

$$\overline{AD} \cdot \overline{CD} = \overline{BD} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BD},$$

т.е. треба да докажеме дека

$$\overline{DB_1} = \overline{DA_1} + \overline{DC_1}. \quad (1)$$

Со m да го означиме растојанието од M до AB и BC , а со n растојанието од N до AC и BC . Нека $\frac{\overline{DM}}{\overline{MN}} = x$ ($x > 1$). Тогаш

$$\frac{\overline{DB_1}}{n} = x, \frac{\overline{DC_1}}{m} = x-1 \text{ и } \frac{\overline{DA_1}-m}{n-m} = x.$$

Оттука

$$\overline{DB_1} = nx, \overline{DC_1} = m(x-1) \text{ и } \overline{DA_1} = nx - m(x-1) = \overline{DB_1} - \overline{DC_1},$$

со е докажано равенството (1).

27. Кружница низ темето C на $\triangle ABC$ ја допира страната AB во точката R и ги сече страните AC и BC соодветно во точките P и Q така што

$$\overline{AR} \cdot \overline{BR} = \overline{CR}^2 \text{ и } \overline{AP} \cdot \overline{BQ} = \overline{CP} \cdot \overline{CQ}.$$

Докажи дека CR е висина или симетрала на агол во $\triangle ABC$.

Решение. Ставаме $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACR = \varphi$ и $\angle BCR = \psi$. Тогаш

$\angle ARP = \varphi$ и $\angle BRD = \psi$. Од синусната теорема следува дека $\frac{\overline{AP}}{\overline{RP}} = \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha}$ и

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{RP}} = \frac{\sin(\alpha+2\varphi)}{\sin \varphi}, \text{ па затоа } \frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = \frac{\sin^2 \varphi}{\sin \alpha \sin(\alpha+2\varphi)}. \text{ Аналогно, } \frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}} = \frac{\sin^2 \psi}{\sin \beta \sin(\beta+2\psi)}.$$

Затоа

$$\overline{AP} \cdot \overline{BQ} = \overline{CP} \cdot \overline{CQ} \Leftrightarrow \sin^2 \varphi \sin^2 \psi = \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha+2\varphi) \sin(\beta+2\psi).$$

На сличен начин следува дека

$$\overline{AR} \cdot \overline{BR} = \overline{CR}^2 \Leftrightarrow \sin \varphi \sin \psi = \sin \alpha \sin \beta.$$

Значи,

$$\sin \alpha \sin \beta = \sin(\alpha+2\varphi) \sin(\beta+2\psi),$$

т.е.

$$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-\beta+2\varphi-2\psi) - \cos(\alpha+\beta+2\varphi+2\psi).$$

Бидејќи $(\alpha+\beta) + (\alpha+\beta+2\varphi+2\psi) = 360^\circ$, важи

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha-\beta+2\varphi-2\psi),$$

т.е.

$$\sin(\alpha-\beta+\varphi-\psi) \sin(\varphi-\psi) = 0.$$

Според тоа, $\alpha+\varphi = \beta+\psi = 90^\circ$ или $\varphi = \psi$, т.е. CR е висина или симетрала на агол во $\triangle ABC$.

28. Во остроаголен разностран $\triangle ABC$ се повлечени тежишната линија AM и висината AH . На правите AB и AC се избрани точките Q и P соодветно при што $QM \perp AC$ и $PM \perp AB$. Опишаната кружница околу $\triangle PMQ$ по втор патата ја сече правата BC во точката X . Докажи дека $\overline{BH} = \overline{CX}$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за $\triangle ABC$. Нека $PM \cap AB = \{Z\}$, $QM \cap AC = \{Y\}$ и опишаната кружница ω околу $\triangle PMQ$ по втор пат

ја сече правата AB во точката T (направи цртеж).

Имаме, $\angle PMQ = 180^\circ - \alpha$ и како четириаголникот $MQTP$ е тетивен добиваме $\angle ATP = \alpha = \angle PAT$. Оттука $\overline{PT} = \overline{PA}$ и $\overline{AT} = 2\overline{AZ}$. Според тоа,

$$\overline{BT} = \overline{AT} - \overline{AB} = 2\overline{AZ} - \overline{AB} = \overline{AB} - 2\overline{BZ} = c - a \cos \beta.$$

Од друга страна, од синусната теорема за $\triangle BQM$, во кој $\angle BQM = 90^\circ - \alpha$ и

$$\angle BMQ = 90^\circ - \gamma, \text{ добиваме } \overline{BQ} = \frac{\overline{BM} \cos \gamma}{\cos \alpha}.$$

Понааму, од степенот на точката B во однос на кружницата ω добиваме

$$\overline{BX} \cdot \overline{BM} = \overline{BQ} \cdot \overline{BT}, \text{ па затоа } \overline{BX} = \frac{\cos \gamma (c - a \cos \beta)}{\cos \alpha}.$$

Бидејќи $\overline{CH} = b \cos \gamma$ и $\overline{BH} = \overline{CX}$ ако и само ако $\overline{BX} = \overline{CH}$, бараното равенство е еквивалентно со равенството $b \cos \alpha + a \cos \beta = c$. Последното равенство следува од косинусната теорема, т.е. од равенствата

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ и } \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

29. Во внатрешноста на правоаголен триаголник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) земена е точка P таква што $\overline{AP} = 4$, $\overline{BP} = 2$ и $\overline{CP} = 1$. Точката Q која е симетрична на точката P во однос на AC припаѓа на кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Определи ги аглиите на $\triangle ABC$.

Решение. Да означиме $\alpha = \angle BAC$.

Нека R е точка таква што триаголниците ARB и APC се слични и еднакво ориентираны (цртеж десно).

Од $\frac{\overline{AR}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ и $\angle RAP = \angle BAC$ следува $\triangle ARP \sim \triangle ABC$. Според тоа,

$$\overline{BR} = \overline{CP} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{1}{\cos \alpha},$$

$$\overline{RP} = \overline{AP} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 4 \tan \alpha \text{ и}$$

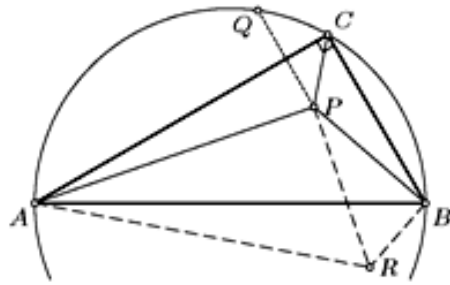
$$\angle BRP = \angle ARB - \angle ARP = \angle AQC - \angle ABC = 2\alpha.$$

Сега од косинусната теорема за $\triangle BPR$ следува

$$4 = \overline{BP}^2 = \overline{BR}^2 + \overline{RP}^2 - 2\overline{BR} \cdot \overline{RP} \cos 2\alpha = \frac{1 + 16 \sin^2 \alpha - 8 \sin \alpha \cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha},$$

па затоа $16x^3 + 20x^2 - 8x - 3 = 0$, каде $x = \sin \alpha$. Решенијата на последната равенка се $x \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\}$, при што само $x = \frac{1}{2}$ има смисла. Значи, $\alpha = 30^\circ$ и

аглиите на триаголникот се $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.



30. Даден е остроаголен $\triangle PBC$, $\overline{PB} \neq \overline{PC}$. Точките A и D припаѓаат соодветно на страните PB и PC , а точките M и N се соодветно средините на отсечките BC и AD . Правите AC и BD се сечат во точката O , и од точката O се повлечени нормали $OE \perp AB, E \in AB$ и $OF \perp CD, F \in CD$.

а) Докажи дека, ако точките A, B, C, D се конциклични, тогаш

$$\overline{EM} \cdot \overline{FN} = \overline{EN} \cdot \overline{FM}.$$

б) Дали од

$$\overline{EM} \cdot \overline{FN} = \overline{EN} \cdot \overline{FM},$$

следува дека точките A, B, C, D се конциклични?

Решение. а) Со Q и R да ги означиме средините на OB и OC (направи цртеж). Лесно се гледа дека $\overline{EQ} = \frac{\overline{OB}}{2} = \overline{RM}$ и аналогно $\overline{MQ} = \overline{RF}$. Освен тоа,

$$\angle EQM = \angle EQO + \angle OQM = 2\angle EBO + \angle OQM$$

и аналогно

$$\angle MRF = 2\angle FCO + \angle ORM.$$

Од условот следува

$$\angle EBO = \angle FCO = \frac{\angle A}{2} \text{ и } \angle OQM = \angle ORM$$

(четириаголникот $MROQ$ е паралелограм). Затоа $\angle EQM = \angle MRF$, па како

$\overline{EQ} = \overline{RM}$ и $\overline{MQ} = \overline{RF}$ добиваме $\triangle EQM \cong \triangle MRF$. Според тоа, $\overline{EM} = \overline{FM}$.

Аналогно се докажува дека $\overline{EN} = \overline{FN}$ и затоа важи

$$\overline{EM} \cdot \overline{FN} = \overline{EN} \cdot \overline{FM}.$$

б) Да означиме $\overline{OA} = 2a, \overline{OB} = 2b, \overline{OC} = 2c, \overline{OD} = 2d$, $\angle OAB = \alpha$, $\angle OBA = \beta$, $\angle ODC = \gamma$ и $\angle OCD = \delta$. Имаме

$$\cos \angle EQM = \cos(\angle EQO + \angle OQM) = \cos(2\beta + \angle AOB) = -\cos(\alpha - \beta).$$

Тогаш од косинусната теорема за $\triangle EQM$ добиваме

$$\overline{EM}^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos(\alpha - \beta).$$

Оттука и од аналогните изрази за $\overline{EN}^2$, $\overline{FN}^2$ и $\overline{FM}^2$, добиваме дека равенството $\overline{EM} \cdot \overline{FN} = \overline{EN} \cdot \overline{FM}$ е еквивалентно со равенството

$$(a^2 + d^2 + 2ad \cos(\gamma - \delta))(b^2 + c^2 + 2bc \cos(\alpha - \beta)) = (a^2 + d^2 + 2ad \cos(\alpha - \beta))(b^2 + c^2 + 2bc \cos(\gamma - \delta))$$

т.е. со равенството

$$(ab - cd)(ac - bd)(\cos(\gamma - \delta) - \cos(\alpha - \beta)) = 0.$$

Бидејќи $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, од равенството $\cos(\gamma - \delta) - \cos(\alpha - \beta) = 0$ следува дека се можни два случаја: кога $\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta$ (тоа значи дека точките A, B, C, D

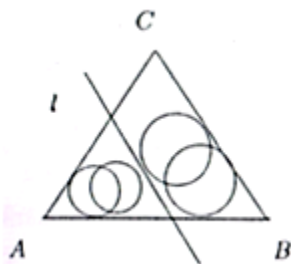
се конциклични) и кога $\alpha = \delta$ и $\beta = \gamma$ (тоа значи $AB \parallel CD$, што не е можно). Равенството $ac - bd = 0$ значи дека точките A, B, C, D се конциклични, а од равенството $ab - cd = 0$ следува $AD \parallel BC$.

Од претходните разгледувања следува, дека кога $AD \parallel BC$ добиваме

$$\overline{EM} \cdot \overline{FN} = \overline{EN} \cdot \overline{FM},$$

но притоа не е можно точките A, B, C, D да се конциклични, бидејќи тогаш $\overline{PB} = \overline{PC}$. Според тоа, од равенството $\overline{EM} \cdot \overline{FN} = \overline{EN} \cdot \overline{FM}$ не следува дека точките A, B, C, D се конциклични.

31. Определи ја должината на страната на најмалиот рамностран триаголник во кој може да се постават три кружници со радиуси 2, 3 и 4 кои немаат заеднички внатрешни точки.



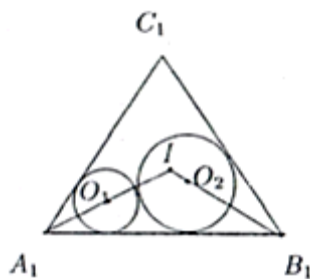
Решение. Нека во рамностран $\triangle ABC$ се поставени две кружници со радиуси 3 и 4, кои немаат заеднички внатрешни точки. Јасно, постои права l која ги разделува, т.е. кружниците лежат во различни полурамнини во однос на l (цртеж лево). Оваа права го дели триаголникот на триаголник и четириаголник или на два триаголника. И во двата случаја секоја од кружниците може да се премести во фигурата која ја содржи така што кружницата ќе се допре до две страни на $\triangle ABC$. Јасно, новите две кружници немаат заеднички внатрешни точки. Нека овие кружници се впишани соодветно во $\angle A$ и $\angle B$.

Ја преместуваме страната BC паралелно на самата себе кон темето A , додека кружницата впишана во $\angle B$ не се допре до кружницата впишана во $\angle A$ (цртеж десно). Добиваме рамностран $\triangle A_1B_1C_1$ со помала страна, во кој се поставени две кружници со радиуси 3 и 4 кои немаат заеднички внатрешни точки. Нека $\overline{A_1B_1} = x$, I е центар на впишаната кружница во $\triangle A_1B_1C_1$, а O_1 и O_2 се центрите на двете кружници. Тогаш

$$\overline{A_1I} = \overline{B_1I} = \frac{x}{\sqrt{3}}, \overline{A_1O_1} = 6, \overline{B_1O_2} = 8.$$

Бидејќи кружницата со радиус 4 се содржи во $\triangle A_1B_1C_1$, добиваме $O_2 \in \overline{IB_1}$. Затоа $\overline{B_1O_2} < \overline{IB_1}$, т.е. $x \geq 8\sqrt{3}$. Од друга страна

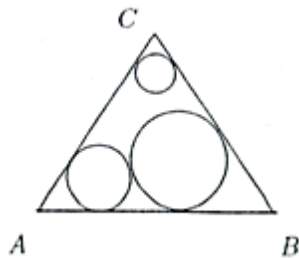
$$\overline{O_1I} = \frac{x}{\sqrt{3}} - 6, \overline{O_2I} = \frac{x}{\sqrt{3}} - 8, \overline{O_1O_2} = 7$$



и од косинусната теорема за $\triangle O_1O_2I$ следува

$$\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-6\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{3}}-8\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{3}}-6\right)\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-8\right) = 49.$$

Бидејќи $x \geq 8\sqrt{3}$, од последната равенка добиваме $x = 11\sqrt{3}$. Според тоа, $\overline{AB} \geq 11\sqrt{3}$. Од друга страна во рамностран $\triangle ABC$ со страна $11\sqrt{3}$ може да се постават три кружници со радиуси 2, 3 и 4 (без заеднички внатрешни точки) ако кружниците ги впишеме во трите агли на триаголникот (цртеж десно).



4 НЕРАВЕНСТВА

1. Докажи дека во правоаголен триаголник важи $a+b < c+h$, каде a и b се должините на катетите, c е должината на хипотенузата и h е должината на висината повлечена кон хипотенузата.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ch \\ &< c^2 + 2ch + h^2 = (c+h)^2,\end{aligned}$$

па затоа $a+b < c+h$.

2. Нека a, b и c се страни на триаголник и

$$\begin{aligned}A &= \frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ca}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b} \text{ и} \\ B &= \frac{1}{\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}} + \frac{1}{\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}} + \frac{1}{\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}}.\end{aligned}$$

Докажи дека $AB \geq 9$.

Решение. Од

$$(a+b-c)(b+c-a) = b^2 - (c-a)^2 \leq b^2$$

и аналогните неравенства добиваме

$$B \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Освен тоа,

$$A - (a+b+c) = \frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0,$$

па затоа од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина следува:

$$AB \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

3. Докажи го неравенството

$$(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \geq 27P^2,$$

каде h_a, h_b, h_c се должините на висините, t_a, t_b, t_c се должините на тежишните линии и P е плоштината на триаголникот ABC .

Решение. Ако ги искористиме равенствата

$$t_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, \quad t_b^2 = \frac{c^2+a^2}{2} - \frac{b^2}{4}, \quad t_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4},$$

тогаш од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned}
(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) &= \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \\
&\geq \frac{3}{4}(ah_a + bh_b + ch_c)^2 \\
&= \frac{3}{4}(3 \cdot 2P)^2 = 27P^2.
\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако a^2, b^2, c^2 и h_a^2, h_b^2, h_c^2 се пропорционални, што значи ако и само ако триаголникот е рамнострани.

4. Нека t_a, t_b, t_c се должините на тежишните линии повлечени соодветно од темињата A, B, C во $\triangle ABC$. Докажи дека

$$t_a t_b + t_b t_c + t_c t_a < \frac{5}{4}(ab + bc + ca).$$

Решение. Лема. Ако a, b, c се должини на страни на триаголник, тогаш важи

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca). \quad (1)$$

Доказ. Од неравенството на триаголник следува

$$a(b+c-a) > 0, b(c+a-b) > 0, c(a+b-c) > 0.$$

Сега, ако ги собереме горните неравенства го добиваме неравенството (1). ■

Прв начин. Ако тежишната линија t_a ја продолжиме два пати, тогаш од соодветниот паралелограм добиваме $2t_a < b+c$, т.е. $t_a < \frac{b+c}{2}$. Аналогно се добива $t_b < \frac{c+a}{2}$ и $t_c < \frac{a+b}{2}$. Сега, од последните три неравенства и од лемата следува

$$\begin{aligned}
t_a t_b + t_b t_c + t_c t_a &< \frac{ab+ac+bc+b^2}{4} + \frac{ab+ac+bc+a^2}{4} + \frac{ab+ac+bc+b^2}{4} \\
&= \frac{3}{4}(ab+bc+ca) + \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2) \leq \frac{5}{4}(ab+bc+ca).
\end{aligned}$$

Втор начин. Ќе користиме

$$t_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, \quad t_b^2 = \frac{c^2+a^2}{2} - \frac{b^2}{4}, \quad t_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}. \quad (2)$$

Како и во првиот начин на решавање имаме $t_a < \frac{b+c}{2}$, $t_b < \frac{c+a}{2}$ и $t_c < \frac{a+b}{2}$, од каде следува $t_a + t_b + t_c < a+b+c$. Последното неравенство го квадрираме и ако ги искористиме равенствата (2), по средувањето на десната страна добиваме

$$\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4} + 2(t_a t_b + t_b t_c + t_c t_a) < a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca),$$

па ако ја искористиме лемата добиваме

$$t_a t_b + t_b t_c + t_c t_a < \frac{a^2+b^2+c^2}{8} + ab + bc + ca < \frac{5}{4}(ab + bc + ca).$$

5. На страната BC на триаголникот ABC се дадени точки D и E , при што D е меѓу B и E . Ако p_1 и p_2 се соодветно периметрите на триаголниците ABC и ADE , докажи дека $p_1 > p_2 + 2\min\{\overline{BD}, \overline{CE}\}$.

Решение. Со p_{XYZ} ќе го означуваме периметарот на $\triangle XYZ$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\overline{BD} < \overline{CE}$. Нека A' и D' се симетричните точки соодветно на точките A и D во однос на средината на страната BC (направи цртеж). Бидејќи $p_{ADD'} \geq p_{ADE}$, доволно е да докажеме дека важи $p_{ABC} > p_{ADD'} + 2\overline{BD}$, што е еквивалентно со

$$\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{AD} + \overline{AD'}, \text{ т.е. } \overline{AB} + \overline{BA'} > \overline{AD} + \overline{DA'}.$$

Последното неравенство следува од неравенствата

$$\overline{AB} + \overline{BA'} > \overline{AK} + \overline{KA'} > \overline{AD} + \overline{DA'},$$

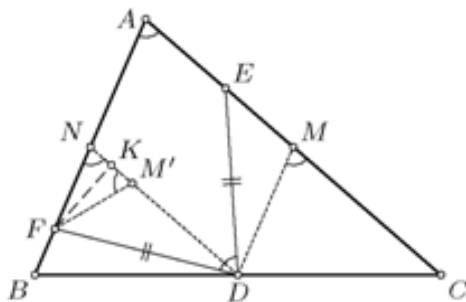
каде K е пресекот на правите $A'D$ и AB .

6. Даден е $\triangle ABC$. Точката D е средина на страната BC , а на страните AC и AB соодветно се земени точки E и F такви што $\overline{DE} = \overline{DF}$ и $\angle EDF = \angle BAC$. Докажи го неравенството

$$\overline{DE} \geq \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{4}.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\overline{AB} \leq \overline{AC}$. Нека M и N се средините на страните AC и AB , соодветно, а M' е точка на отсечката DN таква што $\overline{DM'} = \overline{DM}$. Бидејќи $\angle M'DF = \angle MDE$, триаголниците DME и $M'DF$ се складни, па затоа важи

$$\angle FM'N = 180^\circ - \angle DM'F = 180^\circ - \angle DME = \angle BAC = \angle FNM',$$



што значи дека триаголникот $FM'N$ е рамнокрак. Средината K на отсечката $M'N$ истовремено е подножје на нормалата повлечена од точката F на $M'N$, па затоа

$$\overline{DF} \geq \overline{DK} = \frac{\overline{DM'} + \overline{DN}}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{4}.$$

7. Нека O е внатрешна точка на $\triangle ABC$ и нека AO, BO, CO ги сечат страните BC, CA, AB соодветно во точките A_1, B_1, C_1 . Ако AA_1 е најдолга од отсечките AA_1, BB_1 и CC_1 докажи дека

$$\overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1} \leq \overline{AA_1}.$$

Решение. Односот на плоштините на триаголниците OBC и ABC е еднаков на односот на нивните висини повлечени од O и A , а тој е еднаков на $x = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{AA_1}}$. Слично, $y = \frac{\overline{OB_1}}{\overline{BB_1}} = \frac{P_{AOC}}{P_{ABC}}$ и $z = \frac{\overline{OC_1}}{\overline{CC_1}} = \frac{P_{AOB}}{P_{ABC}}$. Јасно, $x + y + z = 1$, па затоа

$$\overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1} = x\overline{AA_1} + y\overline{BB_1} + z\overline{CC_1} \leq (x + y + z)\overline{AA_1} = \overline{AA_1}.$$

8. Нека AM и BN ($M \in BC, N \in AC$) се симетрали соодветно на $\angle BAC$ и $\angle ABC$ во $\triangle ABC$. Ако $AM \cap BN = I$, а опишаните кружници соодветно околу $\triangle ANI$ и $\triangle BMI$ по втор пат се сечат во точката L која припаѓа на страната AB , докажи дека плоштината на $\triangle MNL$ е помала или еднаква на четвртина од плоштината на $\triangle ABC$.

Решение. Од $\angle CNI = \angle ALI$, $\angle CMI = \angle BLI$ и $\angle ALI + \angle BLI = 180^\circ$ следува дека четириаголникот $NICM$ е тетивен. Затоа

$$180^\circ = \gamma + \angle NIM = \gamma + 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma = \frac{3}{2}\gamma + 90^\circ, \text{ т.е. } \gamma = 60^\circ.$$

Сега,

$$\angle CNM = \angle CNB - \angle MNB = \alpha + \frac{1}{2}\beta - 30^\circ = \frac{1}{2}\alpha + 30^\circ$$

и $\angle LNM = \angle LNI + \angle MNI = \frac{1}{2}\alpha + 30^\circ$. Според тоа, $\angle CNM = \angle LNM$ и аналогно $\angle CNM = \angle LNM$, т.е. $\triangle LNM \cong \triangle CMN$. Добиваме

$$\frac{P_{LMN}}{P_{ABC}} = \frac{P_{CMN}}{P_{ABC}} = \frac{\overline{CM} \cdot \overline{CN}}{\overline{CB} \cdot \overline{CA}} = \frac{\frac{ab}{b+c} \cdot \frac{ab}{a+c}}{ab} = \frac{ab}{(a+c)(b+c)}.$$

Треба да докажеме дека

$$\frac{ab}{(a+c)(b+c)} \leq \frac{1}{4}, \text{ т.е. } (a+c)(b+c) \geq 4ab.$$

Бидејќи $a+c \geq 2\sqrt{ac}$ и $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ доволно е да докажеме дека $c^2 \geq ab$. Од косинусната теорема и неравенството $a^2 + b^2 \geq 2ab$ имаме

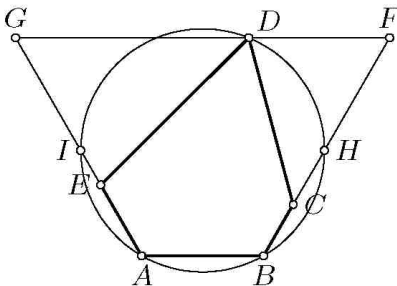
$$c^2 = a^2 + b^2 - ab \geq ab,$$

со што задачата е решена.

9. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник таков што $\overline{AB} = 1$, $\angle BAE = \angle ABC = 120^\circ$, $\angle CDE = 60^\circ$ и $\angle ADB = 30^\circ$. Докажи дека плоштината на петаголникот $ABCDE$ е помала од $\sqrt{3}$.

Решение. Нека k е кружницата опишана околу $\triangle ABD$ и l е правата низ D паралелна со AB . Радиусот на кружницата k е 1. Полуправите BC и AE ја сечат k во точките H и I , а правата l во точките F и G , соодветно. Триаголниците FCD и CDE се слични бидејќи важи

$$\angle CFD = \angle DGE = 60^\circ \text{ и } \angle FCD = 120^\circ - \angle CDF = \angle GDE.$$



Да го означиме со $k = \frac{\overline{FC}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{GE}}$ коефициентот на сличност, со h растоја-
нието од точката D до HI и $x = \overline{FD}, y = \overline{GD}$. Лесно се пресметува дека
 $x + y = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}h$ и $xy = \frac{4}{3}h^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}h$ (производот xy е степенот на точката F
во однос на k и е еднаков на $\overline{OF}^2 - 1$, каде O е центарот на кружницата k).
Така добиваме

$$P_{ABFG} = \frac{1}{2}(1+x+y)(\frac{\sqrt{3}}{2}+h) = \frac{1}{\sqrt{3}}h^2 + 2h + \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$P_{FCD} + P_{CDE} = \frac{1}{2}(x \cdot \overline{FC} + y \cdot \overline{GE}) \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} xy(k + \frac{1}{k}) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} xy = \frac{2}{\sqrt{3}} h^2 + h,$$

па затоа

$$P_{ABCDE} = P_{ABFG} - (P_{FCD} + P_{CDE}) \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}h^2 + h + \frac{3\sqrt{3}}{4} = f(h).$$

Квадратната функција $f(h)$ достигнува максимум $f_{\max} = \sqrt{3}$ за $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$, со што е докажано дека $P_{ABCDE} \leq \sqrt{3}$. Знак за равенство важи ако и само ако $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $k=1$. Тогаш, бидејќи без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\overline{DA} \geq \overline{DB}$, точката D ќе биде симетрична на точката B во однос на HI , па затоа триаголникот ADG ќе биде рамнострани и ќе важи $\overline{FC} = \overline{GD} = \overline{GA} = \overline{FB}$, што не е можно бидејќи во таков случај точките B и C би се совпаѓале. Затоа важи $P_{ABCDE} < \sqrt{3}$.

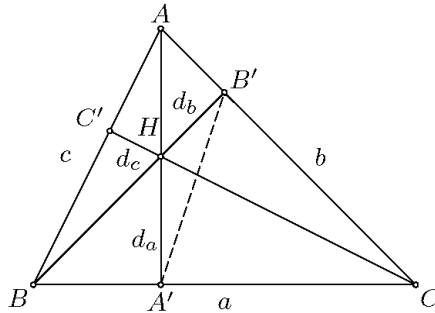
10. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со радиус на впишаната кружница r . Нека H е ортоцентарот, а A', B', C' се подножјата на висините h_a, h_b, h_c повлечени соодветно од темињата A, B, C . Да означиме $a = \overline{BC}, b = \overline{CA}, c = \overline{AB}$. Нека d_a, d_b, d_c се растојанијата на ортоцентарот до страните BC, CA, AB , соодветно. Ако $a \geq b \geq c$ докажи дека:

- а) $h_a \leq h_b \leq h_c$, б) $d_a \geq d_b \geq d_c$,
 в) $\overline{AH} \leq \overline{BH} \leq \overline{CH}$, и г) $d_a + d_b + d_c \leq 3r$.

Решение. а) Од $a \geq b \geq c$ следува $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$. Според тоа, $\frac{2P}{a} \leq \frac{2P}{b} \leq \frac{2P}{c}$, т.е. $h_a \leq h_b \leq h_c$. Равенства важат ако и само ако важат во почетните неравенства $a \geq b \geq c$.

в) Од Питагоровата теорема следува

$$\overline{BC'}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CC'}^2 = a^2 - h_c^2 \geq b^2 - h_c^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CC'}^2 = \overline{AC'}^2.$$



Според тоа,

$$\overline{AH}^2 = \overline{AC'}^2 + \overline{C'H}^2 \leq \overline{BC'}^2 + \overline{C'H}^2 = \overline{BH}^2,$$

па затоа $\overline{AH} \leq \overline{BH}$. Аналогно се докажува дека $\overline{BH} \leq \overline{CH}$.

б) Имаме, $\angle A'HC = 90^\circ - \angle HCA' = \angle CBC' = \beta$. Понатаму, четириаголникот $A'SB'H$ е тетивен, па затоа $\angle A'B'C = \beta$. Аналогно се докажува дека $\angle B'A'C = \alpha$. Според тоа, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$, па како $a \geq b$ добиваме дека $\overline{B'C} \geq \overline{A'C}$. Сега, од Питагоровата теорема применета на $\triangle A'HC$ и $\triangle B'HC$ следува

$$d_a^2 = \overline{A'H}^2 = \overline{HC}^2 - \overline{A'C}^2 \geq \overline{HC}^2 - \overline{B'C}^2 = \overline{B'H}^2 = d_b^2,$$

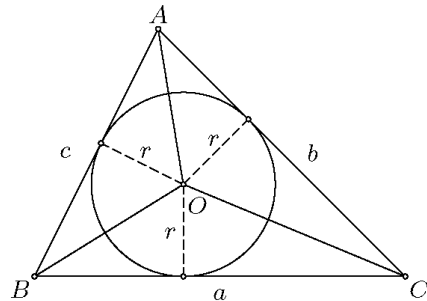
од каде добиваме $d_a \geq d_b$. Аналогно се докажува дека $d_b \geq d_c$. Знак за равенство важи ако и само ако во почетните неравенства важи знак за равенство.

г) Имаме, $2P = (a+b+c)r$ и бидејќи

$$2P = ad_a + bd_b + cd_c,$$

заради $a \geq b \geq c$ и $d_a \geq d_b \geq d_c$ од неравенството на Чебишев следува

$$\begin{aligned} (a+b+c)r &= ad_a + bd_b + cd_c \\ &\geq \frac{(a+b+c)(d_a+d_b+d_c)}{3}, \end{aligned}$$



па затоа $d_a + d_b + d_c \leq 3r$. Равенство во неравенството на Чебишев важи ако и само ако $a = b = c$ или $d_a = d_b = d_c$ што е само во случај на рамностран триаголник.

11. Даден е триаголник ABC со страни a, b, c и плоштина S .

а) Докажи дека постои триаголник $A_1B_1C_1$ со страни $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$.

б) Ако S_1 е плоштината на триаголникот $A_1B_1C_1$ докажи дека $S_1^2 \geq \frac{S\sqrt{3}}{4}$.

Решение. а) Од $\sqrt{a} < \sqrt{b+c} < \sqrt{b} + \sqrt{c}$ и аналогните две неравенства следува дека постои триаголник $A_1B_1C_1$ со страни $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$.

б) Според Хероновата формула плоштината на триаголникот со страни $a = y+z, b = z+x, c = x+y$ е

$$S = \sqrt{xyz(x+y+z)} = \frac{1}{4} \sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}.$$

Така

$$S_1 = \frac{1}{4} \sqrt{2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2} = \frac{1}{2} \sqrt{xy + yz + zx},$$

па неравенството се сведува на

$$xy + yz + zx \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)},$$

т.е. на неравенството

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x+y+z).$$

Последното неравенство следува од очигледното неравенство

$$(xy - yz)^2 + (yz - zx)^2 + (zx - xy)^2 \geq 0.$$

12. Точката X припаѓа на страната AB на тетивниот четириаголник $ABCD$ и е таква што дијагоналата BD ја преполовува отсечката CX , а дијагоналата AC ја преполовува отсечката DX . Определи ја најмалата можна вредност на количникот $\frac{AB}{CD}$.

Решение. Бараната најмала вредност е 2.

Прво ќе докажеме дека $\frac{AB}{CD} \geq 2$. Нека дијагоналите се сечат во точката O ,

$C_1 = DX \cap AC$ и $D_1 = CX \cap BD$. Тоа значи дека CC_1 и DD_1 се тежишни линии во $\triangle CDX$, а точката O е тежиште на овој триаголник. Според тоа, X, O и средината X_1 на CD лежат на една права и важи $\overline{OX} = 2\overline{OX_1}$.

Нека Y е средината на AB . Бидејќи $\triangle ABO \sim \triangle CDO$ и OY и OX_1 се соодветни тежишни линии во овие триаголници следува

$$\frac{AB}{CD} = \frac{OY}{OX_1} = \frac{2OY}{OX},$$

па затоа доволно е да докажеме дека $\overline{OY} \geq \overline{OX}$.

Од горната сличност следува дека $\angle AOY = \angle DOX_1 = \angle BOX$, т.е. полуправите OY и OX се симетрични во однос на симетралата на $\angle AOB$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $\overline{AO} \geq \overline{BO}$. Тогаш важи $\angle AOY \leq \frac{1}{2} \angle AOB$ и важи $\overline{AX} > \overline{AY}$. Според тоа,

$$\angle OXY = \angle BOX + \angle ABO \leq \angle AOY + \angle BAO = \angle OYX,$$

од каде следува $\overline{OY} \geq \overline{OX}$.

Конфигурација при која се достигнува равенството $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = 2$ се добива од рамностранот $\triangle ABE$, во кој C, D, X се средините на страните BE, AE, AB , соодветно.

13. Во триаголникот ABC симетралите на внатрешните агли во темињата A и B ги сечат спротивните страни во точките D и E , соодветно. Докажи дека $\overline{DE} \leq (3 - \sqrt{8})(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA})$. Определи ги аглиите на триаголникот за кој важи знак за равенство.

Решение. Нека права која минува низ средината M на отсечката DE ги сече страните CB и CA во точките P и Q соодветно (направи цртеж). Ќе докажеме дека $\overline{DE} < \overline{PQ}$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\overline{CA} \leq \overline{CB}$. Лесно се докажува дека $\angle CDE > \angle CPQ$, па затоа на отсечката MP постои точка P' таква што $\angle MP'D = \angle MEQ$. Точките D, E, P', Q припаѓаат на некоја кружница со центар O и радиус r , при што $OM \perp DE$. Ако N е подножјето на нормалата повлечена од O на $P'Q$, тогаш важи $\angle ONM = 90^\circ$, па затоа $\overline{ON} \leq \overline{OM}$ и оттука

$$\overline{DE}^2 = 4(r^2 - \overline{OM}^2) \leq 4(r^2 - \overline{ON}^2) = \overline{P'Q}^2 \leq \overline{PQ}^2.$$

Сега да ја пресметаме $\overline{PQ}$. Ако означиме $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{CA} = b$, тогаш $\frac{\overline{CE}}{\overline{CA}} = \frac{a}{a+c}, \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}} = \frac{b}{b+c}$ и $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}(\frac{\overline{CE}}{\overline{CA}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}})$, па затоа $\overline{PQ} = \frac{1}{2}(\frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{b+c})$. Бидејќи

$$(a+c)(2a+c) = 2a^2 + 3ac + c^2 \geq (3 + \sqrt{8})ac$$

и аналогно

$$(b+c)(2b+c) \geq (3 + \sqrt{8})bc,$$

добиваме

$$\overline{DE} \leq \overline{PQ} \leq \frac{1}{2}(\frac{2b+c}{3+\sqrt{8}} + \frac{2a+c}{3+\sqrt{8}}) = (3 - \sqrt{8})(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}).$$

Знак за равенство важи ако и само ако $c = a\sqrt{2} = b\sqrt{2}$, т.е. ако аглиите се $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

14. Нека A, B и C се центрите на три кружници со радиуси r_a, r_b и r_c , соодветно, кои две по две се допираат однадвор. Ако r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот ABC , докажи дека

$$r^2 \leq \frac{1}{9}(r_a^2 + r_b^2 + r_c^2).$$

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за страните на $\triangle ABC$. Јасно,

$$s = \frac{a+b+c}{2} = r_a + r_b + r_c.$$

Имаме $P = sr$, $s-a = r_a$, $s-b = r_b$, $s-c = r_c$, па од Хероновата формула следува

$$r^2 = \frac{P^2}{s^2} = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2} = \frac{r_a r_b r_c}{r_a + r_b + r_c}.$$

Конечно, од неравенствата меѓу средините следува

$$r^2 = \frac{r_a r_b r_c}{r_a + r_b + r_c} \leq \frac{r_a^2 + r_b^2 + r_c^2}{9}.$$

15. Даден е трапез $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Ако R_1 и R_2 се радиусите на опишаните кружници околу триаголниците ACD и BCD , докажи дека $4R_1 R_2 \geq \overline{AB}^2$.

Решение. Радиусот на опишаната кружница околу $\triangle XYZ$ ќе го означуваме со R_{XYZ} . Имаме $2R_{ACD} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle ADC}$ и $2R_{BCD} = \frac{\overline{BD}}{\sin \angle BCD}$, па затоа

$$4R_{ACD} R_{BCD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\sin \angle ADC \sin \angle BCD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\sin \angle ABC \sin \angle BAD} = 4R_{ABC} R_{ABD} \geq \overline{AB}^2,$$

бидејќи $2R_{ABC}, 2R_{ABD} \geq \overline{AB}$.

16. Низ пресекот на дијагоналите на конвексен четириаголник е повлечена произволна права. Докажи дека должината на делот на правата внатре во четириаголникот не е поголема од должината на барем една негова дијагонала.

Решение. Нека O е пресечната точка на дијагоналите AC и BD на четириаголникот $ABCD$ и нека права низ O ги сече AB и CD во точките X и Y , соодветно (направи цртеж). Да означиме $\angle AOX = \angle COY = \alpha$ и $\angle BOX = \angle DOY = \beta$. Имаме $P_{AOX} = \frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{OX} \sin \alpha$, $P_{BOX} = \frac{1}{2} \overline{OB} \cdot \overline{OX} \sin \beta$ и $P_{AOB} = P_{AOX} + P_{BOX} = \frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{OB} \sin(\alpha + \beta)$. Оттука добиваме

$$\overline{OX} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB} \sin(\alpha + \beta)}{\overline{OA} \sin \alpha + \overline{OB} \sin \beta} \leq \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB} (\sin \alpha + \sin \beta)}{\overline{OA} \sin \alpha + \overline{OB} \sin \beta} \leq \frac{\overline{OA} \sin \beta + \overline{OB} \sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta}.$$

Слично важи $\overline{OY} \leq \frac{\overline{OC} \sin \beta + \overline{OD} \sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta}$, па затоа

$$\overline{XY} \leq \frac{\overline{AC} \sin \beta + \overline{BD} \sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta} \leq \max\{\overline{AC}, \overline{BD}\}.$$

17. Нека $ABCDEF$ е конвексен шестаголник со плоштина S . Докажи дека

$$\overline{AC}(\overline{BD} + \overline{BF} - \overline{DF}) + \overline{CE}(\overline{BD} + \overline{DF} - \overline{BF}) + \overline{AE}(\overline{BF} + \overline{DF} - \overline{BD}) \geq 2\sqrt{3}S. (*)$$

Решение. Лема. Нека впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC, CA и AB соодветно во точките X, Y и Z . Тогаш постои точка O за која се исполнети неравенствата

$$\overline{OA} \leq \frac{2\overline{AY}}{\sqrt{3}}, \overline{OB} \leq \frac{2\overline{BZ}}{\sqrt{3}}, \overline{OC} \leq \frac{2\overline{CX}}{\sqrt{3}}.$$

Доказ. Да означиме $\overline{CX} = x, \overline{AY} = y, \overline{BZ} = z$. Јасно, постои реален број r таков што трите кружници со центри во точките A, B, C и радиуси соодветно ry, rz, rx имаат заедничка точка, која е внатрешна за $\triangle ABC$. Нека O е една таква заедничка точка, т.е. $\overline{OA} = ry, \overline{OB} = rz$ и $\overline{OC} = rx$. Доволно е да докажеме дека $r \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Барем еден од аглиите $\angle AOB, \angle BOC, \angle COA$ е поголем или еднаков на 120° .

Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\angle BOC \geq 120^\circ$. Тогаш

$$-\frac{1}{2} = \cos 120^\circ \geq \cos \angle BOC = \frac{r^2(x^2 + z^2) - (x+z)^2}{2xrz^2}.$$

Ако допуштиме дека $r > \frac{2}{\sqrt{3}}$ го добиваме неравенството

$$2xz > x^2 + z^2,$$

кое не е точно. Според тоа, $r \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ и точката O го има саканото својство. ■

Сега од лемата применета за $\triangle BDF$ добиваме

$$\overline{AC}(\overline{BD} + \overline{BF} - \overline{DF}) = 2\overline{AC} \cdot \overline{BZ} \geq \sqrt{3}\overline{AC} \cdot \overline{BO} \geq 2\sqrt{3}S_{ABCD}$$

и аналогно

$$\overline{CE}(\overline{BD} + \overline{DF} - \overline{BF}) \geq 2\sqrt{3}S_{CDEO} \text{ и } \overline{AE}(\overline{BF} + \overline{DF} - \overline{BD}) \geq 2\sqrt{3}S_{DEAO}.$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства го добиваме неравенството (*).

18. Нека m_c и l_c се должините на медијаната и симетралата на аголот при темето C во $\triangle ABC$ со плоштина S . Ако $\gamma = \angle BCA$, докажи дека

$$m_c l_c \geq S \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}.$$

Решение. Имаме

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4},$$

$$l_c^2 = \frac{ab}{(a+b)^2} ((a+b)^2 - c^2),$$

$$S \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{4}$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} m_c^2 l_c^2 - S^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\gamma}{2} &= \frac{((a+b)^2 - c^2)(4ab((a+b)^2 + (a-b)^2 - c^2) - (a+b)^2((a+b)^2 - c^2))}{16(a+b)^2} \\ &= \frac{((a+b)^2 - c^2)(a-b)^2(c^2 - (a-b)^2)}{16(a+b)^2} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 S^2 \geq 0. \end{aligned}$$

19. Нека M е тежиште на $\triangle ABC$. Докажи го неравенството

$$\sin \angle CAM + \sin \angle CBM \leq \frac{2}{\sqrt{3}},$$

а) ако опишаната кружница околу $\triangle AMC$ ја допира правата AB ,

б) за произволен $\triangle ABC$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за елементите на $\triangle ABC$.

Нека G е средината на страната AB .

а) Од условот следува дека

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \overline{GA}^2 = \overline{GM} \cdot \overline{GC} = \frac{1}{3} m_c^2 = \frac{1}{12} (2a^2 + 2b^2 - c^2),$$

т.е. $a^2 + b^2 = 2c^2$. Сега, од формулите за медијаните добиваме $m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} b$ и

$$m_b = \frac{\sqrt{3}}{2} a. \text{ Затоа}$$

$$A = \sin \angle CAM + \sin \angle CBM = \frac{P}{bm_a} + \frac{P}{am_b} = \frac{(a^2 + b^2) \sin \gamma}{\sqrt{3} ab}.$$

Од косинусната теорема добиваме

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}, \text{ т.е. } a^2 + b^2 = 4ab \cos \gamma.$$

$$\text{Затоа, } A = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin 2\gamma \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

б) Постојат две кружници низ C и M кои се допираат до правата AB . Допирните точки да ги означиме со A_1 и B_1 , при што A_1 лежи на полуправата GA , а B_1 на полуправата GB . Бидејќи G е средина на A_1B_1 и $\overline{CM} : \overline{MG} = 2:1$ точката M е тежиште на $\triangle A_1B_1C$. Освен тоа, јасно е дека

$$\angle CAM \leq \angle CA_1M \text{ и } \angle CBM \leq \angle CB_1M.$$

Да претпоставиме дека $\angle CA_1M \leq 90^\circ$ и $\angle CB_1M \leq 90^\circ$. Тогаш од а) следува дека

$$\sin \angle CAM + \sin \angle CBM \leq \sin \angle CA_1M + \sin \angle CB_1M \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Останува да го разгледаме случајот кога $\angle CA_1M > 90^\circ$ и $\angle CB_1M \leq 90^\circ$ (двата агли не може да се истовремено тапи). Од $\triangle CA_1M$ следува дека

$$\overline{CM}^2 > \overline{CA_1}^2 + \overline{A_1M}^2, \text{ т.е.}$$

$$\frac{1}{9}(2b_1^2 + 2a_1^2 - c_1^2) > b_1^2 + \frac{1}{9}(2b_1^2 + 2c_1^2 - a_1^2),$$

(a_1, b_1, c_1 се страните на $\triangle A_1B_1C$). Од а) имаме $a_1^2 + b_1^2 = 2c_1^2$, па горното неравенство е еквивалентно на неравенството $a_1^2 > 7b_1^2$. Сега, од а) имаме

$$\sin \angle CB_1M = \frac{b_1 \sin \gamma_1}{a_1 \sqrt{3}} = \frac{b_1}{a_1 \sqrt{3}} \sqrt{1 - \left(\frac{a_1^2 + b_1^2}{4a_1b_1}\right)^2}.$$

Ако ставиме $\frac{b_1^2}{a_1^2} = x$, бидејќи $x < \frac{1}{7}$, добиваме дека

$$\sin \angle CB_1M = \frac{1}{4\sqrt{3}} \sqrt{14x - x^2 - 1} < \frac{1}{4\sqrt{3}} \sqrt{2 - \frac{1}{49} - 1} = \frac{1}{7}.$$

Според тоа,

$$\sin \angle CAM + \sin \angle CBM < 1 + \sin \angle CB_1M < 1 + \frac{1}{7} < \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

20. Симетралите на внатрешните агли при темињата A и B на $\triangle ABC$ ги сечат спротивните страни соодветно во точките D и E . Во четириаголникот $ABDE$ е впишан ромб така што на секоја страна на четириаголникот се наоѓа точно по едно теме на ромбот. Ако $\angle BAC = \alpha$ и $\angle ABC = \beta$, докажи дека барем еден агол на ромбот не е поголем од $\max\{\alpha, \beta\}$.

Решение. Нека $KLMN$ е ромб со $K \in AB$, $L \in BD$ и $N \in EA$. Да го разгледаме трапезот $PQRS$, $P, Q \in AB$, $PQ \parallel RS$ и

$$\angle PQR = \angle QPS = \angle KNM = \varphi$$

таков што K, L, M, N се на PQ, QR, RS, SP , соодветно. Нека $\varphi > \alpha, \beta$. Тогаш R и S лежат надвор од $\triangle ABC$.

Бидејќи

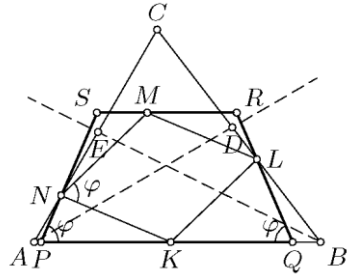
$$\angle SNM = \angle 180^\circ - \varphi - \angle NMS = \angle RML \quad \text{и} \quad \angle LRM = \angle MSN \quad \text{триаголниците}$$

LRM и MSN се складни, па затоа $\overline{LR} = \overline{MS}$. Слично, ако Q' е точка на AB

таква што $\angle LQ'B = \varphi$, тогаш $\triangle LRM \cong \triangle KQ'L$, па затоа $\overline{MR} = \overline{LQ'} = \overline{LQ}$.

Според тоа, $\overline{RQ} = \overline{RL} + \overline{LQ} = \overline{SM} + \overline{MR} = \overline{RS}$.

Сега, $d(R, AB) = \overline{RQ} \sin \varphi > \overline{RS} \sin \alpha > d(R, AC)$ и слично $d(S, AB) > d(S, BC)$, што значи дека точките R и S лежат соодветно над правите AD и BE , т.е. во полурамнините во кои е C . Оттука следува дека двете точки лежат над правата DE . Последното не е можно, бидејќи RS и DE се сечат во M .



21. Нека M, N, P се произволни точки редоследно на страните BC, CA, AB на

остроаголниот $\triangle ABC$. Докажи дека е точно барем едно од неравенствата

$$\overline{NP} \geq \frac{1}{2} \overline{BC}, \quad \overline{PM} \geq \frac{1}{2} \overline{CA}, \quad \overline{MN} \geq \frac{1}{2} \overline{AB}.$$

Решение. Да претпоставиме дека тврдењето не е точно за некои M, N, P .

Нека A_1, B_1, C_1 се соодветно средините на страните BC, CA, AB . Нека

$$x = \overline{BM} - \overline{BA_1}, y = \overline{CN} - \overline{CB_1}, z = \overline{AP} - \overline{AC_1}.$$

Должината на проекцијата NP на B_1C_1

е еднаква на

$$p_a = \overline{B_1C_1} + z \cos B - y \cos C,$$

па од

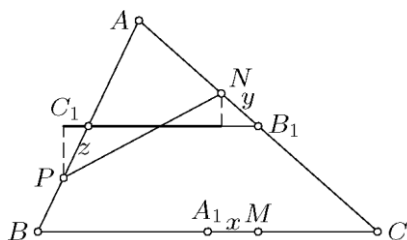
$$p_a \leq \overline{NP} < \overline{B_1C_1}$$

следува $\frac{z}{\cos C} < \frac{y}{\cos B}$.

Аналогно се докажува

$$\frac{y}{\cos B} < \frac{x}{\cos A} \text{ и } \frac{x}{\cos A} < \frac{z}{\cos C},$$

што не е можно.



5 ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Впишаната кружница на тангентниот петаголник $ABCDE$ ја допира страната BC во точката K . Ако $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$, докажи дека $\angle EKB = 90^\circ$.

Решение. Нека O е центар на кружницата, а J, L, M, N се соодветно допирните точки со страните AB, CD, DE, EA (направи цртеж). Од условот на задачата следува $\overline{AN} = \overline{AJ} = \overline{CK} = \overline{CL}$ и $\overline{BJ} = \overline{BK} = \overline{DL} = \overline{DM}$, па затоа $\triangle ANO \cong \triangle CKO$ и $\triangle BJO \cong \triangle DLO$. Понатаму, бидејќи $\triangle EOM \cong \triangle EON$ имаме $\angle EOK = \angle EON + \angle NOJ + \angle JOK = \angle EOM + \angle LOK + \angle MOL$, па затоа $\angle EOK = 180^\circ$, т.е. $EO \perp BC$.

2. Во тетивен петаголник $ABCDE$ важи $\overline{AB} = \overline{BC}$ и $\overline{CD} = \overline{DE}$. Отсечките AD и BE се сечат во точката P , а отсечката BD ги сече CA и CE во Q и T , соодветно. Докажи дека триаголникот PQT е рамнокрак.

Решение. Од $\angle PET = \angle BEC = \angle ADB = \angle PTC$ следува дека точките P, E, D и T се конциклични (направи цртеж). Затоа важи $\angle PTQ = \angle PED = \angle BED$. Аналогно $\angle PQT = \angle BAD = \angle BED$, па затоа $\overline{PQ} = \overline{PT}$.

3. Во кружница е впишан конвексен петаголник $ABCDE$. Точките M и N се внатрешни соодветно за страните ED и CD . Отсечката MN ја сече AD во точката K и BD во точката L . Докажи дека, ако четириаголникот $ABLK$ е тетивен, тогаш и четириаголникот $ECNM$ е тетивен.

Решение. Имаме $\angle MNC = \angle DLN + \angle LDN = \angle MLB + \angle BDC$ како надворешен агол за $\triangle LND$. Ако искористиме дека четириаголниците $ABLK$ и $ABCD$ се тетивни добиваме

$$180^\circ - \angle KAB + \angle BAC = 180^\circ - \angle KAC = 180^\circ - \angle DEC.$$

Според тоа, четириаголникот $ECNM$ е тетивен.

4. Даден е конвексен шестаголник. Нека s е збирот на должините на трите отсечки кои ги поврзуваат средините на спротивните страни на шестаголникот. Докажи дека постои точка, внатрешна за шестаголникот, таква што збирот на растојанијата од неа до страните на шестаголникот е помал или еднаков на s .

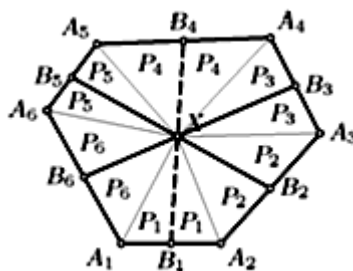
Решение. Нека дијагоналите AD, BE, CF при нивното пресекување формираат триаголник KMN . Ќе докажеме дека центарот I на впишаната круж-

нища во $\triangle KMN$ го има саканото својство.

Средините на AB и DE да ги означиме со X и Y , соодветно. Нека правата определена од симетралата на $\angle MKN$ ги сече страните AB и DE во точките X_1 и Y_1 , соодветно. Тогаш аглиите $\angle XX_1K$ и $\angle YY_1K$ не се остри (тоа следува од познатиот факт дека во триаголник симетралата на аголот лежи меѓу медијаната и висината повлечени од истото теме како и симетралата на аголот). Според тоа, проекцијата на отсечката XY на правата X_1Y_1 ја покрива отсечката X_1Y_1 , што значи $\overline{XY} \geq \overline{X_1Y_1}$. Од друга страна, збирот на растојанијата од I до страните AB и CD е помал или еднаков на $\overline{X_1Y_1}$. Оттука и од аналогните факти за другите два пара спротивни страни следува тврдењето на задачата.

5. Даден е конвексен шестаголник. Секоја од трите прави, кои ги поврзуваат средините на спротивните страни, го дели шестаголникот на два дела со еднакви плоштини. Докажи дека овие три прави се сечат во една точка.

Решение. Со $A_1, A_2, \dots, A_6$ да ги означиме темињата на шестаголникот, а со B_i средината на страната $A_i A_{i+1}$, $i=1, 2, \dots, 6$, $A_7 = A_1$. Нека X е пресечната точка на правите B_2B_5 и B_3B_6 . Од условот дека правите B_2B_5 и B_3B_6 ја поделат плоштината на шестаголникот соодветно добиваме $P_6 + P_1 = P_3 + P_4$ и $P_1 + P_2 = P_4 + P_5$.



Ако ги собереме овие равенства добиваме

$$P_2 + P_3 = P_5 + P_6,$$

што значи дека линијата B_1XB_4 ја преполовува плоштината на шестаголникот, но како и правата B_1B_4 ја преполовува плоштината на шестаголникот, заклучуваме дека $X \in B_1B_4$.

6. Нека шестаголникот $ABCDEF$ е впишан во кружница, $AC \cap BE = H$, $AD \cap CE = I$, $BD \perp CF$ и $\overline{AI} = \overline{CI}$. Докажи дека $\overline{CH} = \overline{AH} + \overline{DE}$ ако и само ако $\overline{GH} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{DE}$.

Решение. Од $\overline{AI} = \overline{CI}$, следува $\angle ACI = \angle CAI$, т.е. $\angle ACE = \angle CAD$. Четири-

аголникот $ACDE$ е тетивен, па затоа $\angle CAD = \angle CED$. Според тоа, $\angle ACE = \angle CED$, т.е. $AC \parallel DE$.

Нека $\overline{CH} = \overline{AH} + \overline{DE}$. Нека A' е точка на полуправата CA таква што $\overline{CA'} = \overline{DE}$. Од $AC \parallel DE$ следува дека $A'CDE$ е паралелограм и затоа $\angle AA'E = \angle ACD$. Тогаш $\angle AA'E = \angle A'AE$ (бидејќи $\angle ACD = \angle CAE$). Сега од $\overline{AH} = \overline{CH} - \overline{DE} = \overline{CH} - \overline{CA'} = \overline{HA'}$ следува дека H е средина на основата AA' на рамнокракиот $\triangle EAA'$. Според тоа, $EH \perp AA'$, па затоа $\angle BHC = 90^\circ = \angle BGC$. Последното значи дека точките B, C, H и G се конциклични.

Нека $BG \cap CH = K$. Од $\triangle BKC \sim \triangle HKG$ следува $\frac{\overline{BC}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{HK}}$. Од друга страна, од $DE \parallel KH$ имаме $\triangle BDE \sim \triangle BKH$. Според тоа, $\frac{\overline{BD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{HK}}$. Сега од последните две равенства следува $\frac{\overline{BC}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DE}}$, т.е. $\overline{GH} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{DE}$.

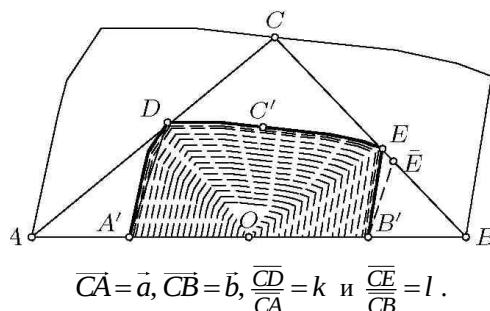
Нека $\overline{GH} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{DE}$. Оттука и од $\frac{\overline{BD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{HK}}$ следува дека $\frac{\overline{BC}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{HK}}$. Нека полуправата KD ја сече опишаната кружница околу $\triangle BHC$ во точката G' . Тогаш $\triangle BKC \sim \triangle HKG'$, па затоа $\frac{\overline{BC}}{\overline{G'H}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{HK}}$. Бидејќи $\angle HKD > 90^\circ$ и G лежи на отсечката KD , следува дека $G = G'$. Според тоа, точките B, C, H, G се конциклични и затоа $\angle BHC = \angle BGC = 90^\circ$. Од $AC \parallel DE$ следува дека $\angle DEH = 90^\circ$. Нека D' е подножјето на нормалата од D на правата AC . Бидејќи H е подножјето на нормалата од E на AC , добиваме дека

$$\overline{CH} = \overline{CD'} + \overline{D'H} = \overline{CD'} + \overline{DE} = \overline{AH} + \overline{DE}.$$

7. Езеро има форма на конвексен стоаголник $A_1A_2 \dots A_{100}$ со центар на симетрија во точката O . На езерото се наоѓа остров $B_1B_2 \dots B_{100}$, каде B_i е средина на отсечката OA_i . Островот е заграден со висок ѕид и преку ѕидот ништо не се гледа. Во две дијаметрално спротивни точки на брегот се наоѓаат двајца стражари. Докажи дека секоја точка на брегот ја гледа барем еден стражар.

Решение. Нека стражарите се во точките A и B . Да претпоставиме дека ниту еден од нив не ја гледа точката C на брегот, бидејќи истата за стражарите A и B соодветно е скриена со точките на островот D и E . Со A', B', C' да ги означиме средините на отсечките OA, OB, OC , соодветно.

Исто така нека E е точка на отсечката BC таква што $B'E \parallel A'D$. Од $\angle B'A'D + \angle A'B'E \leq 180^\circ$, следува дека E припаѓа на отсечката BE . Точката C' лежи внатре или на границата на $\triangle CDE$, па затоа таа е внатре или на границата на $\triangle CDE$. Да означиме



Тогаш

$$\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{4k}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{4l}\overrightarrow{CE},$$

па затоа C' е во внатрешноста или на границата на $\triangle CDE$ ако и само ако $k, l \geq 0$ и $\frac{1}{4k} + \frac{1}{4l} \leq 1$, т.е. $k + l \leq 4kl$. Од друга страна

$$\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{DC} = (\frac{3}{4} - k)\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$$

е паралелен со $\overrightarrow{EB'} = \frac{1}{4}\vec{a} + (\frac{3}{4} - l)\vec{b}$, па затоа

$$(\frac{3}{4} - k)(\frac{3}{4} - l) = \frac{1}{16}, \text{ т.е. } 2 - 3(k + l) + 4kl = 0,$$

од каде што следува

$$k + l \leq 1 \text{ и } 4kl - (k + l) = 2(k + l) - 2 \leq 0.$$

Затоа единствена можност е горните неравенства да се равенства, па затоа $k = l = \frac{1}{2}$, но тогаш делот од островот над правата AB е четириаголникот $A'DEB'$, што противречи на претпоставката дека многуаголникот е стоаголник.

8. На страната AB на $\triangle ABC$ со $\angle ACB = 50^\circ$ е земена произволна точка O . Опишаната кружница k_1 околу $\triangle AOC$ ја сече отсечката BC во точката N . Опишаната кружница k_2 околу $\triangle BOC$ ја сече отсечката AC во точката M . Правата ON ја сече k_2 во точката D , а правата OM ја сече k_1 во точка P . Правите PA и DB се сечат во точката Q . Определи ја големината на $\angle AQB$

Решение. Од впишаниот во k_1 петаголник $AONCP$ имаме

$$\angle DNC = \angle OAC = \angle OPC = \alpha \text{ и } \angle APO = \angle ACO.$$

Од впишаниот во k_2 петаголник $MOBDC$ имаме

$$\angle PMC = \angle OBC = \angle ODC = \beta \text{ и } \angle BDO = \angle BCO.$$

Сега, од $\triangle MCP$ и $\triangle NCD$ следува дека

$$\angle MCP = \angle NCD = \gamma = 50^\circ.$$

Во четириаголникот $PQDC$ имаме

$$\begin{aligned}
 \angle QPC + \angle PCD + \angle QDC &= \alpha + \angle APO + 3\gamma + \beta + \angle BDO \\
 &= 280^\circ + \angle ACO + \angle BCO \\
 &= 280^\circ + \gamma = 330^\circ,
 \end{aligned}$$

па затоа $\angle AQB = 360^\circ - 330^\circ = 30^\circ$.

9. Нека AM е медијана на нерамноостраниот $\triangle ABC$, точката O е центар на опишаната околу него кружница и точката G е тежиште на $\triangle AMC$. Докажи дека $OG \perp AM$ ако и само ако $\overline{CA} = \overline{CB}$.

Решение. Нека во правоаголен координатен систем со единечни вектори $\vec{i}$ и $\vec{k}$ темињата на $\triangle ABC$ се $A(0,0)$, $B(a,0)$ и $C(b,c)$. Тогаш

$$\overrightarrow{AG} = \frac{a+3b}{6}\vec{i} + \frac{c}{2}\vec{k} \text{ и } \overrightarrow{AO} = \frac{a}{2}\vec{i} + \frac{b^2+c^2-ab}{2c}\vec{k},$$

па затоа

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AO} = \frac{3b-2a}{6}\vec{i} + \frac{ab-b^2}{2c}\vec{k}.$$

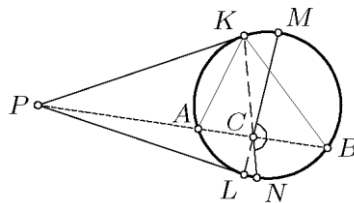
Освен тоа, $\overrightarrow{AM} = \frac{a+b}{2}\vec{i} + \frac{c}{2}\vec{k}$, па затоа

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{OG} = \frac{(3b-2a)(a+b)+3(ab-b^2)}{12} = \frac{2ab-b^2}{6}.$$

Според тоа, $OG \perp AM$ ако и само ако $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{OG} = 0$, ако и само ако $a = 2b$ ако и само ако $\overline{CA} = \overline{CB}$.

10. Дадена е кружница k и точка P надвор од неа. Променлива права s која минува низ точката P ја сече кружницата k во точките A и B . Нека M и N се средините на лаците определени со точките A и B и точката C на отсечката AB е таква што $\overline{PC}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$. Докажи дека $\angle MCN$ не зависи од изборот на правата s .

Решение. Нека PK и PL се тангенти на кружницата k , при што K и L се на иста страна од правата s (види цртеж).



Триаголниците PAK и PKB се слични и $\overline{PC} = \overline{PK}$, па затоа

$$\begin{aligned}
 \angle PKN &= \frac{1}{2}(\angle PKA + \angle PKB) = \frac{1}{2}(\angle PKA + \angle PAK) \\
 &= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle APK) = \angle PKC,
 \end{aligned}$$

т.е. точките K, C, N се колинеарни. Аналогно точките L, C, M се колинеарни, па затоа

$$\angle MCN = \angle KCL = \angle KCP + \angle PCL = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle KPC - \angle CPL) = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle KPL,$$

што не зависи од изборот на правата s .

11. На дијаметар на кружница со радиус $\sqrt{5}$ се земени точки M и N кои се еднакво оддалечени од нејзиниот центар. Низ M е повлечена тетива AB , а низ N е повлечена тетива AN така што важи

$$\frac{1}{MB^2} + \frac{1}{NC^2} = \frac{3}{MN^2},$$

Опреди го растојанието од центарот на кружницата до точките M и N .

Решение. Нека O е центарот на кружницата и нека PQ е дијаметарот на кој лежат точките M и N ($M \in PO, N \in QO$). Да означиме $x = \overline{MO} = \overline{NO}$, $0 \leq x \leq \sqrt{5}$. Тогаш

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MP} \cdot \overline{MQ} = (\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x) = 5 - x^2.$$

Аналогно $\overline{NA} \cdot \overline{NB} = 5 - x^2$. Оттука добиваме

$$\frac{1}{MB^2} + \frac{1}{NC^2} = \frac{\overline{MA}^2 + \overline{NA}^2}{(5 - x^2)^2}.$$

Од формулите за медијаната AO во $\triangle MNA$ имаме

$$5 = \overline{AO}^2 = \frac{1}{2}(2(\overline{MA}^2 + \overline{NA}^2) - 4x^2),$$

т.е. $\overline{MA}^2 + \overline{NA}^2 = 2(5 + x^2)$. Затоа, бидејќи $\overline{MN}^2 = 4x^2$ добиваме

$$\frac{3}{4x^2} = \frac{3}{\overline{MN}^2} = \frac{1}{\overline{MB}^2} + \frac{1}{\overline{NC}^2} = \frac{2(5 + x^2)}{(5 - x^2)^2},$$

т.е. $x^4 + 14x^2 - 15 = 0$, од каде наоѓаме $(x^2 + 15)(x^2 - 1) = 0$, односно $x^2 = 1$. Конечно, $x = 1$ е бараното растојание.

12. Нека ABC е правоаголен триаголник со катети $\overline{AC} = 1$ и $\overline{BC} = 2$. Низ точка A_1 од катетата BC , за која $\overline{A_1C} \neq \frac{1}{3}$, е повлечена права, паралелна на AB , која AC ја сече во точка B_1 . Нека C_1 е подножјето на нормалата спуштена од B_1 на AB . Низ C_1 е повлечена права, паралелна на AC , која BC ја сече во точка A_2 . Правата низ A_2 паралелна на AB , ја сече AC во точка B_2 итн. Пресметај

а) $\frac{3\overline{A_{n+1}C} - 1}{3\overline{A_nC} - 1},$

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{A_n B_n C_n}.$

Решение. а) Нека $\overline{A_nC} = x_n$. Тогаш од $\triangle A_n B_n C \sim \triangle BAC$ следува дека

$\overline{B_n C} = \frac{x_n}{2}$. Бидејќи $\triangle AB_n C_n \sim \triangle ABC$, добиваме дека $\overline{AC_n} = \frac{2-x_n}{2\sqrt{5}}$. Оттука

$\overline{A_{n+1} C} = x_{n+1} = \frac{2-x_n}{5}$. Според тоа, $3x_{n+1} - 1 = \frac{1-3x_n}{5}$, т.е. $\frac{3x_{n+1}-1}{3x_n-1} = -\frac{1}{5}$.

б) Бидејќи $\overline{A_n B_n} = \frac{\sqrt{5}}{2} x_n$, $\overline{B_n C_n} = \frac{2-x_n}{\sqrt{5}}$ и $A_n B_n \perp B_n C_n$, добиваме

$$P_{A_n B_n C_n} = \frac{x_n(2-x_n)}{4}.$$

Според а) $x_n - \frac{1}{3}$ е геометриска прогресија со количник $-\frac{1}{5}$, па затоа важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}. \text{ Конечно, } \lim_{n \rightarrow \infty} P_{A_n B_n C_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n(2-x_n)}{4} = \frac{5}{36}.$$

13. Допирните точки на впишаната кружница во даден триаголник и неговите темиња го делат периметарот на триаголникот на шест отсечки. Избираме три од нив, кои формираат триаголник и за нив ја повторуваме постапката. Докажи дека, по низа вакви операции се добива триаголник кој има агол 60° или агол помал од 1° .

Решение. Нека претпоставиме дека никогаш не се добива триаголник со две еднакви страни. Нека страните на триаголникот Δ_n пред n -тата операција се $a_n < b_n < c_n$, $2s_n = a_n + b_n + c_n$ и $d_n = \frac{c_n - a_n}{s_n}$. Тогаш Δ_{n+1} има страни

$s_n - c_n < s_n - b_n < s_n - a_n$ и $d_{n+1} = 2d_n$. Според тоа, $0 < d_1 = \frac{d_n}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}$, за

секој n , што е противречност.

Значи, пред некоја операција, за која ќе земеме дека е прва се добива триаголник со две еднакви страни. Да претпоставиме дека никогаш не се добива рамностран триаголник. Тогаш Δ_n има страни a_n, a_n, c_n , а страните на Δ_{n+1} се $s_n - a_n, s_n - a_n, s_n - c_n$ или $s_n - a_n, s_n - c_n, s_n - c_n$. Тогаш $d_{n+1} > d_n$, па во првиот случај имаме $d_{n+1} = 2d_n$. Ако овој случај се среќава бесконечно многу пати, тогаш како погоре доаѓаме до противречност.

Затоа може да сметаме дека од самиот почеток го имаме вториот случај, т.е. страните на триаголникот Δ_{n+1} се $s_n - a_n, s_n - c_n, s_n - c_n$. Тогаш за $q_n = \frac{a_n}{c_n}$

имаме $q_{n+1} = 2q_n - 1$, па затоа $q_{n-1} = 2^{n-1}(q_1 - 1)$. Значи, $q_1 > 1$ и $q_n \rightarrow \infty$.

Последното значи дека за аголот γ_n меѓу краците на Δ_n важи $\gamma_n \rightarrow 0$, што значи дека по низа вакви операции се добива триаголник кој има агол помал од 1° .

14. Темињата на два квадрати со плоштини S и T лежат на страните на правоаголен $\triangle ABC$, при што три од нив лежат на хипотенузата AB со должина

природен број c . Дали е можно $\frac{S}{2}$ и $\frac{T}{2}$ да се заемно прости броеви:

а) за некој $c < 70$, б) за некој $c > 70$.

Решение. Можно е и во двата случаја.

Нека $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ и $DEGF$ е квадрат со страна $m = \sqrt{S}$, каде $D, E \in AB$, $F \in BC$, $G \in AC$. Од $\triangle AGD \sim \triangle GFC \sim \triangle ABC$ следува $\overline{AG} = \frac{mc}{a}$, $\overline{CG} = \frac{mb}{c}$, па затоа $b = \frac{mc}{a} + \frac{mb}{c}$, т.е. $m = \frac{abc}{ab+c^2}$.

Можеме да сметаме дека другиот квадрат со страна $n = \sqrt{T}$ е $OMCN$, каде $O \in AB$, $M \in BC$, $N \in AC$. Од $\triangle AON \sim \triangle OBM \sim \triangle ABC$ следува $\overline{AO} = \frac{nc}{a}$, $\overline{BO} = \frac{nc}{b}$, па затоа $c = \frac{nc}{a} + \frac{nc}{b}$, т.е. $n = \frac{ab}{a+b}$. Тогаш

$$\frac{1}{S} - \frac{1}{T} = \frac{(ab+c^2)^2 - (ac+bc)^2}{(abc)^2} = \frac{1}{c^2}.$$

Ако $S = 2s$ и $T = 2t$, тогаш $c^2 = \frac{2st}{t-s}$. Бидејќи $NZD(s, t) = 1$, лесно се гледа дека $t-s=2$ или $t-s=1$. Во првиот случај добиваме дека $c=0$, што не е можно, а во вториот случај ја добиваме равенката $(2s+1)^2 - 2c^2 = 1$. Ова е равенка на Пел и како што е познато, таа во множеството природни броеви има бесконечно многу решенија, при што првите четири се $(1, 2)$, $(8, 12)$, $(49, 70)$ и $(288, 408)$.

Останува да видиме за кои решенија можеме да конструираме $\triangle ABC$. Од $m = \frac{abc}{ab+c^2}$ и $n = \frac{ab}{a+b}$ следува

$$ab = \frac{mc^2}{c-m}, \quad a+b = \frac{mc^2}{(c-m)n}.$$

Овој систем има решение во множеството позитивни броеви ако $\frac{mc^2}{c-m} \geq 4n^2$.

Бидејќи $n^2 = \frac{c^2 m^2}{c^2 - m^2}$, лесно се добива дека $a^2 + b^2 = c^2$. Освен тоа, $c > m$ и условот $\frac{mc^2}{c-m} \geq 4n^2$ го добива обликот $c \geq 3m$, т.е. $2s(s+1) = c^2 \geq 18s$ и значи $s \geq 8$.

15. Даден е трапез $ABCD$, $BC \parallel AD$. Точката M е средина на основата BC , а точката P припаѓа на основата AD . Правата PM ја сече правата CD во точката Q така што C лежи меѓу Q и D . Нормалата на основите низ точката P ја сече правата BQ во точката K . Докажи дека $\angle QBC = \angle KDA$.

Решение. Со X да ја означиме пресечната точка на правите AD и BQ . Тогаш од теоремата на Штајнер за трапезот $XBCD$ следува дека P е средина на XD . Според тоа, K лежи на симетралата на XD и $\angle KDA = \angle KXD$.

Останува да забележиме дека од $BC \parallel XD$ следува $\angle QBC = \angle KXD$.

16. Дадени се кружница k со центар во точката O и точка $A \in k$. На правата OA е земена точка C таква што важи распоредот $O-A-C$ и $\overline{OA} = \overline{AC}$, а точката B е средина на отсечката AC . Нека точката $Q \in k$ е таква што $\angle AOQ$ е тап. Нека правата QO и симетралата на отсечката CQ се сечат во точката P . Докажи дека $\angle POB = 2\angle PBO$.

Решение. *Прв начин.* Нека S е точка на отсечката CP таква што $\overline{PS} = \overline{PO}$, а M е средина на отсечката OS . Тогаш

$$\overline{CS} = \overline{QO} = \overline{CA} \text{ и } \frac{\overline{CB}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{CS}} = \frac{1}{2}$$

следува $\triangle CBS \sim \triangle CSO$ и оттука

$$\overline{SB} = \frac{1}{2}\overline{OS} = \overline{SM}$$

и

$$\angle SOP = \angle OSP = 180^\circ - \angle CSO = 180^\circ - \angle CBS = \angle OBS.$$

Според тоа, PS и PO се тангенти на опишаната кружница на $\triangle BSO$, а BP е негова симедијана. Сега важи

$$\angle OBP = \angle MBS = \frac{180^\circ - \angle BSM}{2} = \frac{\angle CSB + \angle OSP}{2} = \frac{\angle COS + \angle SOP}{2} = \frac{\angle BOP}{2}.$$

Втор начин. Ќе го користиме познатото тврдење дека во $\triangle ABC$ важи $\alpha = 2\beta$

ако и само ако $a^2 = b^2 + bc$. Ако означиме $\overline{OA} = r$ и $\overline{PC} = x$, тогаш доволно е да докажеме дека

$$\overline{PB}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{PO} \cdot \overline{OB} = (x-r)^2 + \frac{3r}{2}(x-r) = x^2 - \frac{1}{2}rx - \frac{1}{2}r^2.$$

Последното непосредно следува од теоремата на Стјуарт за $\triangle OPC$ бидејќи

$$\overline{PB}^2 = \frac{1}{4}(x-r)^2 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{r}{2} \cdot \frac{3r}{2} = x^2 - \frac{1}{2}rx - \frac{1}{2}r^2.$$

17. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник таков што $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{BD} = 2\overline{AD}$ и $\overline{AB} = \overline{AE}$, каде $E = AB \cap CD$. Пресметај $\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}$.

Решение. Нека $\overline{BE} = 2\overline{AB} = 2a$, $\overline{AC} = \overline{BC} = b$, $\overline{CD} = d$, $\overline{BD} = 2\overline{AD} = 2c$ и $\overline{DE} = x$. Од теоремата на Стјуарт за $\triangle BCE$ и отсечката BD и за $\triangle EAC$ и отсечката AD имаме

$$(x+d)(2c)^2 = d(2a)^2 + xb^2 - xd(x+d),$$

$$(x+d)c^2 = da^2 + xb^2 - xd(x+d).$$

Ако од првото равенство го одземеме второто, потоа од првото равенство го одземеме второто помножено со 4, по делењето со 3 и $3x \neq 0$ ги добиваме равенствата

$$(x+d)c^2 = da^2,$$

$$b^2 = d(x+d).$$

Последните равенства ги множиме и добиваме

$$(x+d)c^2b^2 = d^2a^2(x+d), \text{ т.е. } c^2b^2 = d^2a^2.$$

Конечно, бидејќи $a, b, c, d > 0$ добиваме

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}} = \frac{ad}{bc} = 1.$$

18. Нека D е точка на страната AB на триаголникот ABC , а k е опишаната кружница на триаголникот ABC . Кружница k_1 со центар I ги допира отсечките BD и CD и кружницата k , а кружница k_2 со центар J ги допира отсечките AD и CD и кружницата k . Ако точките A, B, I, J се конциклични, докажи дека D е допирната точка на припишаната кружница на триаголникот ABC наспроти темето C .

Решение. Нека O е центарот на кружницата k , точките P, Q, R соодветно се допирните точки на k_1 со AB, k, CD , а K, L, M се соодветно допирните точки на k_2 со AB, k, CD . Ќе докажеме дека концикличноста на точките A, B, I, J повлекува $IJ \parallel AB$. Нека претпоставиме дека правите IJ и AB се сечат во точката T . Бидејќи $\overline{TI} \cdot \overline{TJ} = \overline{TA} \cdot \overline{TB} = \overline{TL} \cdot \overline{TQ}$, заклучуваме дека точките I, J, L, Q се конциклични, па од $\overline{OL} = \overline{OQ}$ следува $\overline{OI} = \overline{OJ}$, т.е. $IJ \parallel KL$, што не е можно. Значи, $IJ \parallel AB$, па затоа кружниците k_1 и k_2 се складни и $\overline{AK} = \overline{BP}$.

Од Кејсиевата теорема за точките A, B, C и кружницата k_1 следува

$$\overline{AB} \cdot \overline{CR} + \overline{AC} \cdot \overline{BP} = \overline{BC} \cdot \overline{AP},$$

па како $\overline{CR} = \overline{CD} - \overline{BD} + \overline{BP}$ и $\overline{AP} = \overline{AB} - \overline{BP}$, од претходното равенство следува $\overline{BP} = \frac{\overline{AB}(\overline{BC} + \overline{BD} - \overline{CD})}{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}}$. Слично имаме $\overline{AK} = \frac{\overline{AB}(\overline{AC} + \overline{AD} - \overline{CD})}{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}}$, па затоа со замена во $\overline{AK} = \overline{BP}$ добиваме $\overline{BC} + \overline{BD} = \overline{AC} + \overline{AD}$, т.е. D е допирна точка на припишаната кружница.

19. Нека O е центарот на опишаната кружница на остроаголниот триаголник ABC . Точките P и Q припаѓаат соодветно на страните AB и AC , и се такви што $\angle BOP = \angle ABC$ и $\angle COQ = \angle ACB$. Докажи дека симетричната

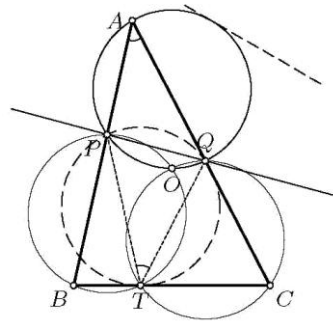
права на правата BC во однос на правата PQ ја допира опишаната кружница на триаголникот APQ .

Решение. Аглите на $\triangle ABC$ ги означуваме вообичаено со α, β, γ . Од

$$\begin{aligned}\angle POQ &= 360^\circ - \angle BOP - \angle COQ - \angle BOC \\ &= 180^\circ - \alpha,\end{aligned}$$

следува дека точките A, B, O, Q се конциклични. Нека точката $T \neq C$ на правата BC е таква што $\overline{PT} = \overline{PB}$. Од $\angle BTP = \angle BOP$ следува дека точките O, P, B, T се конциклични, па затоа O е точката на Микел за P, Q, T . Оттука следува дека и точките O, Q, C, T се конциклични, па затоа $\angle PTQ = \angle BOC - \angle BAC = \alpha$. Според тоа, кружницата PQT е симетрична на кружницата APQ во однос на правата PQ .

Останува да забележиме дека правата BC ја допира кружницата PQT . Навистина, $\angle PQT = \angle AOC - \angle ABC = \beta = \angle PTB$. Оттука непосредно следува тврдењето на задачата.



20. Дијагоналите AC и BD на тетивниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката L . Правите AD и BC се сечат во точката M , а правите AB и CD се сечат во точката N . Симетралата на $\angle ALD$ ги сече страните AD и BC соодветно во точките P и Q , а симетралата на $\angle ALB$ ги сече страните AB и CD соодветно во точките K и T . Докажи дека опишаните кружници околу $\triangle MPQ$, $\triangle NKT$ и $\triangle BKQ$ се сечат во една точка.

Решение. Нека S е точката на Микел за четириаголникот $ABCD$. Бидејќи четириаголникот $ABCD$ е тетивен, следува дека S припаѓа на MN .

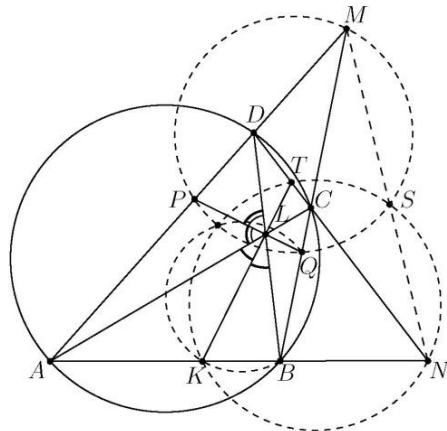
Сега $\triangle SAD \sim \triangle SBC$ и од $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}}$

(следува од својството на симетралата на агол) добиваме

$$\angle SPQ = \angle SAB = \angle MAB = \angle MPQ.$$

Тоа значи дека опишаната кружница околу $\triangle MPQ$ минува низ точката S .

Аналогно се докажува дека и опиша-



ната кружница околу $\triangle NTK$ минува низ S . Сега тврдењето следува од $\triangle NBM$ и точките S, K и Q на неговите страни.

21. Во рамнокрак триаголник ABC точката H е ортоцентар, а G е тежиште. Точките X, Y и Z се одбрани соодветно на страните BC, CA и AB така што $\angle AXB = \angle BYC = \angle CZA$. Опишаните кружници околу триаголниците BXZ и CXY по втор пат се сечат во точката P . Докажи дека $\angle GPH = 90^\circ$.

Решение. *Прв начин.* Според теоремата на Микел точката P исто така припаѓа на опишаната кружница на $\triangle AYZ$. Нека O е центарот и R е радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

Понатаму, да означиме

$$\angle AXB = \angle BYC = \angle CZA = \theta,$$

$$BY \cap CZ = \{A_0\},$$

$$CZ \cap AX = \{B_0\},$$

$$AX \cap BY = \{C_0\}.$$

Бидејќи

$$\angle B_0A_0C_0 = \angle CA_0Y = 180^\circ - \theta - \angle ACZ = \angle BAC$$

и слично $\angle A_0B_0C_0 = \angle ABC$, следува дека $\triangle A_0B_0C_0 \sim \triangle ABC$. Уште повеќе,

$\angle APA_0 = 180^\circ - \angle AZA_0 = 180^\circ - \theta$ и слични $\angle BPB_0 = \angle CZP_0 = 180^\circ - \theta$, па

затоа P е центар на ротациона хомотетија χ која $\triangle ABC$ го пресликува во

$\triangle A_0B_0C_0$.

Бидејќи $\angle BA_0C = \angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$, точката A_0 припаѓа на опишаната кружница околу триаголникот BHC , а неговиот радиус е

$$\frac{\overline{BC}}{2\sin \angle BHC} = \frac{\overline{BC}}{2\sin \angle BAC} = R.$$

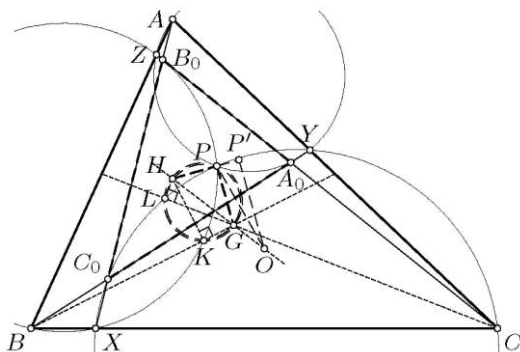
Сега, од $\angle HCA_0 = |90^\circ - \theta|$ следува дека $\overline{A_0H} = 2R\cos\theta$. Аналогно се добива $\overline{B_0H} = \overline{C_0H} = 2R\cos\theta$, што значи дека H е центарот на опишаната кружница околу $\triangle A_0B_0C_0$, а коефициентот на ротационата хомотетија е $2\cos\theta$.

Ротационата хомотетија χ ја пресликува точката O во H , па затоа

$\overline{PH} = 2\overline{PO}\cos\theta$. Понатаму, точките H, G, O лежат на Ојлеровата права и

$\overline{HO} = \frac{3}{2}\overline{HG}$. Нека P' е точка на полуправата HP таква што $\overline{HP'} = \frac{3}{2}\overline{HP}$.

Тогаш $PG \parallel P'O$ и $\overline{PP'} = \overline{PO}\cos\theta = \overline{PO}\cos \angle P'PO$, па затоа е точно равен-



ството $\angle GPH = \angle OP'H = 90^\circ$.

Втор начин. Нека K е подножјето на нормалата повлечена од точката H на правата BC . Ако D е точка таква што $ABCD$ е паралелограм, тогаш $\angle HAD = \angle HCD = \angle HKD = 90^\circ$, па затоа точката K припаѓа на кружницата $AHCD$. Точката $CZ \cap AX = \{B_0\}$ исто така припаѓа на оваа кружница бидејќи

$$\angle AB_0C = \angle AXC + \angle XCB_0 = \angle CZB + \angle BCZ = 180^\circ - \angle ABC = \angle AHC.$$

Понатаму,

$$\angle KB_0X = 180^\circ - \angle KB_0A = \angle KCA = \angle KDA = \angle KBX,$$

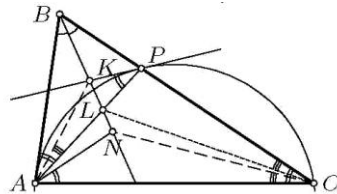
што значи дека точката X припаѓа на опишаната кружница k_b на $\triangle BKB_0$. Аналогно $Z \in k_b$. Според тоа, кружницата k_b се совпаѓа со опишаната кружница околу $\triangle BXZ$, а на неа лежи точката P . Значи, точката P припаѓа на кружницата BXK . Слично, P припаѓа на кружницата CXL , каде L е подножјето на нормалата повлечена од H на CG . Сега според теоремата на Микел за $\triangle BCG$ точката P исто така припаѓа на кружницата GKL , а нејзиниот радиус е GH .

22. Кружница k која минува низ темињата A и C на триаголникот ABC ја допира правата AB и по втор пат ја сече страната BC во точката P . Нека l е тангентата на кружницата k во точката P . Симетралата на аголот во темето B ги сече правите l и AP во точките K и L , соодветно. Докажи дека $\angle LAK = \angle LCB$.

Решение. Триаголниците BPA и BAC се слични и нека при таа сличност на точката K во $\triangle BPA$ и соодветствува точката N во $\triangle BAC$. Тогаш N е на симетралата на $\angle B$ и

$$\angle NAC = \angle KPA = \angle PCA = \angle PAB = \angle LAB.$$

Според тоа точките N и L се изогонално спрегнати во $\triangle ABC$, па затоа $\angle LAK = \angle NCA = \angle LCB$.



23. Даден е $\triangle ABC$ со центар I на впишаната кружница. Права l' ја допира впишаната кружница, а права $l \neq l'$ ги сече страните BC, CA и AB или нивните продолженија соодветно во точките A', B' и C' . Тангентата на впишаната кружница повлечена од точката A' , различна од BC , ја сече правата l' во точката A_1 . Аналогно се дефинираат точките B_1 и C_1 . Докажи дека правите AA_1, BB_1 и CC_1 се сечат во една точка.

Решение. Секаде во решението поимите пол и полара се однесуваат на

точката I и впишаната кружница k во $\triangle ABC$.

Нека D, E и F се допирните точки на k со страните BC, CA и AB , соодветно. Нека P и Q се соодветно половите на l' и l (т.е. P е допирната точка на l' и k). Бидејќи $A' = l \cap BC$, нејзината полара е правата која минува низ половите на l и BC , т.е. правата DQ .

Ако D' е допирната точка на k и $A'A_1$, тогаш D' е полот на правата $A'A_1$. Затоа D' лежи на правата DQ , т.е. DD' минува низ Q . Аналогно се дефинираат и точките E' и F' , така што EE' и FF' исто така минуваат низ Q .

Точките P и D' се полови на правите l' и $A'A_1$. Следствено правата PD' е полара на точката $A_1 = A'A_1 \cap l'$. Правата EF е полара на A и следствено пол на правата AA_1 е точката $PD' \cap EF$.

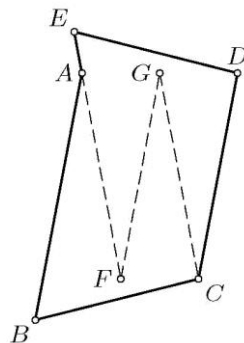
Од досега изнесеното и аналогните заклучувања за правите BB_1 и CC_1 следува дека е доволно да докажеме дека точките $PD' \cap EF$, $PE' \cap FD$ и $PF' \cap DE$ лежат на една права (половите лежат на една права ако и само ако поларите се сечат во една точка). Всушност секои две од овие точки лежат на една права со Q . Последното следува од теоремата на Пап, на пример, од тројките P, D, E и F, E', D' следува дека точките $PD' \cap EF$, $PE' \cap FD$ и $Q = DD' \cap EE'$ лежат на една права.

24. Даден петаголник со искршена линија која поврзува две негови темиња е поделен на два меѓусебно складни петаголници. Докажи дека почетниот петаголник има пар еднакви агли, а петаголниците на кои е поделен имаат по два пара паралелни страни.

Решение. Нека $ABCDE$ е дадениот петаголник. Јасно, дадената искршена линија мора да поврзува две несоседни темиња, да кажеме A и C . Бидејќи двата дела на кои петаголникот е поделен имаат по пет страни, искршената линија се состои од три отсечки (да кажеме $AFGC$), а една нејзина страна е на продолжението на страната на петаголникот (да кажеме F е на продолжението на EA).

Меѓу аглиите на петаголниците $ABCGF$ и $CDEFG$ има најмалку два, но најмногу три конкавни: по еден во F и G и уште најмногу еден меѓу аглиите B, C, D и E на почетниот петаголник.

Според тоа, петаголниците $ABCGF$ и $CDEFG$ имаат по еден конкавен агол, и тоа во темињата F и G , не задолжително во овој редослед. Значи изометријата $\mathfrak{I}$ која го пресликува петаголникот $ABCGF$ во петаголникот



$CDEFG$ го пресликува темето F во G или обратно. Мозни се следниве случаи:

1) $\mathfrak{I}(F)=G, \mathfrak{I}(G)=F$. Тогаш $ABCGF \cong CDEFG$,

па затоа $\overline{AF}=\overline{CG}$ и $\overline{CG}=\overline{EF}$, што не е можно.

2) $\mathfrak{I}(F)=G, \mathfrak{I}(G)=C$. Тогаш $ABCGF \cong FEDCG$ и

$$\angle AFG = \angle FGC = \angle GCD,$$

па затоа $EF \parallel GC$ и $FG \parallel CD$. Исто така,

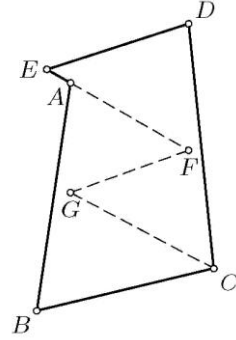
$$\angle ABC = \angle FED = \angle AED.$$

3) $\mathfrak{I}(G)=F, \mathfrak{I}(F)=E$. Тогаш $ABCGF \cong DCGFE$,

па триаголниците BCG, CGF и GFE се склад-

ни. Следува дека точките $B < G < E$ се колинеар-

ни, но тогаш отсечката BA ја сече отсечката FG , што не е можно.



25. Точките D, E и F припаѓаат соодветно на страните BA, CA и AB на $\triangle ABC$ и се такви што $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}$. Докажи дека ако $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ имаат заеднички центар на опишаните кружници, тогаш $\triangle ABC$ е рамнострани.

Решение. Ќе користиме комплексни броеви, при што со малите букви ќе ги означиме афиксите на соодветните точки. Нека заедничкиот центар на опишаните кружници околу $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ е координатниот почеток. Тогаш

$$|a|=|b|=|c| \quad (1)$$

и

$$|d|=|e|=|f|. \quad (2)$$

Од друга страна, ако $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = k \neq 0$, тогаш $\frac{b-d}{d-c} = k$, т.е. $d = \frac{b+kc}{a+k}$. Аналогно

$e = \frac{c+ka}{1+k}$ и $f = \frac{a+kb}{1+k}$. Ако замениме во (2) и ги искористиме (1), добиваме

$$a\bar{b} + b\bar{a} = b\bar{c} + c\bar{b} = c\bar{a} + a\bar{c}.$$

Оттука со повторна примена на (1), следува дека $|a-b|=|b-c|=|c-a|$, т.е. $\triangle ABC$ е рамнострани.

26. Нека четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружница со центар O , при што аглиите $\angle ABC$ и $\angle BCD$ се остри. Нека $AB \cap CD = E$, P и R се подножјата на нормалите повлечени од E соодветно на правите BC и AD , $Q = EP \cap AD$ и $S = ER \cap BC$. Докажи дека правата EO ја преполовува отсечката QS .

Решение. Нека O_1 и O_2 се центрите на опишаните кружници околу $\triangle AED$ и $\triangle CEB$, соодветно. Имаме,

$$\angle BEP = 90^\circ - \angle PBE = 90^\circ - \angle ADE = \angle DER.$$

Според тоа, висината ER во $\triangle AED$ е изогонална на правата EQ (т.е. ER и EQ се симетрични во однос на симетралата на $\angle AED$), што значи дека $O_1 \in EQ$ (Докажи!). Аналогно $O_2 \in ES$.

Од $\triangle AED \sim \triangle CEB$ следува $\overline{EO_1} : \overline{EQ} = \overline{EO_2} : \overline{ES}$. Оттука $\triangle EO_1O_2 \sim \triangle EQS$ и затоа $O_1O_2 \parallel QS$. Според тоа, точките E, K и M лежат на една права, каде K и M се средините соодветно на QS и O_1O_2 .

Сега ќе докажеме дека O лежи на истата права, со што задачата ќе биде решена. Бидејќи O_1 и O се центрите на опишаните кружници околу $\triangle AED$ и $ABCD$, важи $OO_1 \perp AD$. Бидејќи $O_2 \in ES \perp AD$, добиваме $OO_1 \parallel EO_2$. Аналогно $OO_2 \parallel EO_1$. Според тоа, OO_1EO_2 е паралелограм и затоа средината M на O_1O_2 е средина и на OE . Во случајот заклучуваме дека O припаѓа на правата EM .

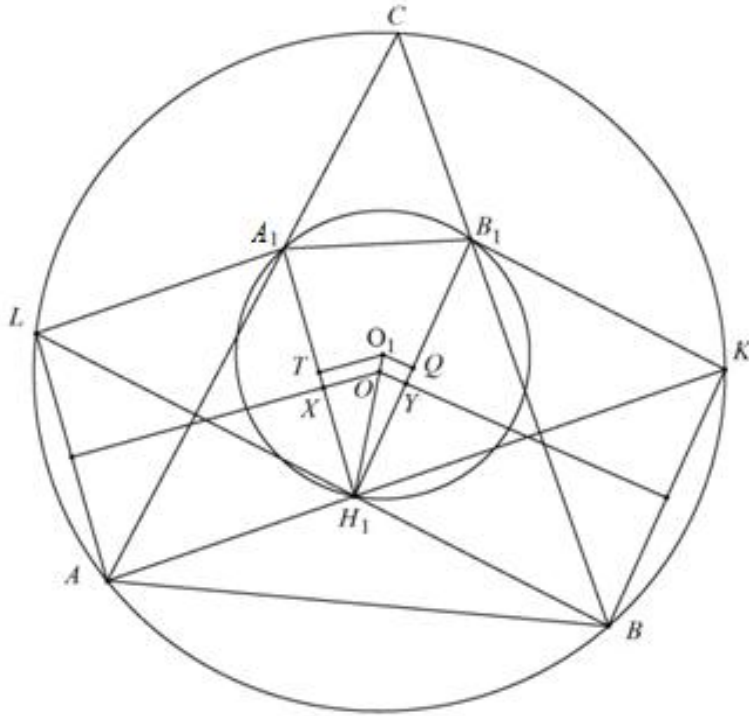
27. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Точката H_1 е ортоцентар на $\triangle ABC$, а точките A_1 и B_1 се симетрични соодветно на точките A и B во однос на правите BH_1 и AH_1 . Точката O_1 е центар на опишаната кружница на $\triangle A_1B_1H_1$. Точката H_2 е ортоцентар на $\triangle ABD$, а точките A_2 и B_2 се симетрични соодветно на точките A и B во однос на правите BH_2 и AH_2 . Точката O_2 е центар на опишаната кружница на $\triangle A_2B_2H_2$. Правата O_1O_2 да ја означиме со l_{AB} . Аналогно се дефинираат правите l_{BC}, l_{CD} и l_{DA} . Ако $l_{AB} \cap l_{BC} = M, l_{BC} \cap l_{CD} = N, l_{CD} \cap l_{DA} = P$ и $l_{DA} \cap l_{AB} = Q$, докажи дека точките M, N, P и Q лежат на една кружница.

Решение. Лема. Точката O_1 лежи на правата H_1O , каде O е центарот на опишаната кружница на $\triangle ABC$. Односот во кој O_1 ја дели H_1O зависи само од $\angle ACB$.

Доказ. Нека K и L се пресечните точки на AH_1 и BH_1 со опишаната кружница околу четириаголникот $ABCD$. Бидејќи H_1 и L се симетрични во однос на AC , заклучуваме дека четириаголникот H_1ALA_1 е ромб, па затоа $\angle AH_1A_1 = 2\angle AH_1L = 2\gamma$. Аналогно H_1BKB_1 е ромб и $\angle BH_1B_1 = 2\gamma$. Според тоа, ромбовите H_1ALA_1 и H_1BKB_1 се слични, од каде добиваме

$$\frac{\overline{H_1T}}{\overline{H_1X}} = \frac{\overline{H_1Q}}{\overline{H_1Y}} = \frac{1}{1+2\cos 2\gamma}.$$

Последното равенство означува дека O_1 лежи на правата H_1O и односот во кој O_1 ја дели H_1O зависи само од $\angle ACB$. ■



Јасно е дека CH_1H_2D е паралелограм (следува од $\overline{CH_1} = \overline{CH_2} = 2R\cos\gamma$) и O_1 и O_2 се хомотетични соодветно на H_1 и H_2 во однос на O . Според лемата коефициентите на двете хомотетии се еднакви (бидејќи зависат само од γ). Според тоа, $O_1O_2 \parallel H_1H_2 \parallel CD$, т.е. правата l_{AB} е паралелна со CD . Добивме дека страните на $MNPQ$ се паралелни со страните на $ABCD$, што значи дека четириаголникот $MNPQ$ е тетивен.

28. Нека r и R се дијаметрите на впишаната и опишаната кружница на триаголникот ABC . Нека r_a е радиусот на кружницата γ_a која одвнатре ја допира опишаната кружница во точката A , а надворешно ја допира впишаната кружница. Аналогно се дефинираат r_b и r_c . Докажи го неравенството

$$\frac{R-r_a}{r+4r_a} + \frac{R-r_b}{r+4r_b} + \frac{R-r_c}{r+4r_c} \geq \frac{3R}{4r}.$$

Решение. Со S да го означиме центарот на кружницата γ_a , а со S и O центрите на впишаната и опишаната кружница, соодветно. Точката S_a припаѓа на отсечката OA , па од теоремата на Стјуарт следува

$$\overline{SS_a}^2 = \frac{r_a}{R} \overline{SO}^2 + \frac{R-r_a}{R} \overline{SA}^2 - r_a(R-r_a).$$

Бидејќи $\overline{SS_a} = r + r_a$ и според теоремата на Ојлер $\overline{SO}^2 = R^2 - 2Rr$, добиваме

$$R(r + r_a)^2 = r_a(R^2 - 2Rr) + (R - r_a)\overline{SA}^2 - r_a(R - r_a),$$

од каде по средувањето добиваме

$$r_a = \frac{R(\overline{SA}^2 - r^2)}{\overline{SA}^2 + 4Rr}, \quad \frac{R - r_a}{r + 4r_a} = \frac{Rr}{\overline{SA}^2}.$$

Аналогни изрази се добиваат за r_b и r_c , со што даденото неравенство се сведува на

$$\frac{r^2}{\overline{SA}^2} + \frac{r^2}{\overline{SB}^2} + \frac{r^2}{\overline{SC}^2} = \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \geq \frac{3}{4},$$

што е еквивалентно со

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Последното неравенство се докажува едноставно

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \gamma \\ &\leq 2 \sin \frac{\gamma}{2} + \cos \gamma \\ &= 1 + 2 \sin \frac{\gamma}{2} - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

29. Нека $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$, $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7$ се правилни седумаголници со плоштини S_A, S_B, S_C , за кои важи $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_3} = \overline{C_1C_4}$. Докажи дека

$$\frac{1}{2} < \frac{S_B + S_C}{S_A} < 2 - \sqrt{2}.$$

Решение. Нека

$$\overline{A_1A_2} = a, \overline{A_1A_3} = b, \overline{A_1A_4} = c.$$

Од теоремата на Птоломеј за четириаголникот $A_1A_3A_4A_5$ следува дека

$$ab + ac = bc, \text{ т.е. } \frac{a}{b} + \frac{a}{c} = 1.$$

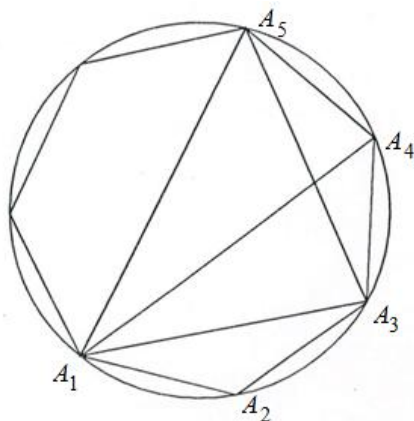
Бидејќи $\triangle A_1A_2A_3 \sim \triangle B_1B_2B_3$, добиваме

$$\frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_1B_3}} = \frac{a}{b} \text{ и затоа } \overline{B_1B_2} = \frac{a^2}{b}. \text{ Аналогно}$$

$$\overline{C_1C_2} = \frac{a^2}{c}. \text{ Според тоа,}$$

$$\frac{S_B + S_C}{S_A} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2}.$$

Имаме $\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} > \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c} \right)^2 = \frac{1}{2}$, бидејќи $\frac{a}{b} \neq \frac{a}{c}$. Од друга страна



$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} = \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right)^2 - \frac{2a^2}{bc} = 1 - \frac{2a^2}{bc}. \quad (1)$$

Од синусната теорема следува дека

$$\frac{a^2}{bc} = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7}} = \frac{1}{4 \cos \frac{2\pi}{7} (1 + \cos \frac{2\pi}{7})}.$$

Бидејќи $\cos \frac{2\pi}{7} < \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ добиваме

$$\frac{a^2}{bc} > \frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})} = \sqrt{2} - 1.$$

Оттука и од (1) следува десното неравенство кое требаше да го докажеме.

30. Определи го најмалиот број m таков што со секои пет рамнострани триаголници со збир на плоштините m може да се покрие рамнострани триаголник со плоштина 1.

Решение. Ќе докажеме дека $m = 2$. Прво ќе докажеме дека $m \geq 2$. Доволно е за секој $s \in (0, 1)$ да најдеме пет рамнострани триаголници со збир на плоштините поголем од $2s$, кои не може да покријат рамнострани $\triangle ABC = \Delta$ со плоштина 1. Нека $A_1B_1C_1$ е рамнострани триаголник со плоштина $\frac{1+s}{2}$ и темињата му се на соодветните страни на Δ . Нека за определеност земеме $2\overline{BA_1} < \overline{BC}$. Очигледно постојат три рамнострани триаголници кои не може да ја покријат било која од отсечките BA_1, CB_1 и AC_1 . Тогаш овие триаголници и два рамнострани триаголници Δ_1 и Δ_2 со плоштина s не може да го покријат Δ . Во спротивно Δ_1 и Δ_2 треба да покријат точки од горните три отсечки и затоа еден од нив, на пример Δ_1 , ќе покрие точки од две од нив, да кажеме $D \in A_1B$ и $E \in B_1C$. Бидејќи $P_{A_1B_1C_1} \geq \frac{1}{3}$, важи $\angle A_1B_1C_1 \geq 90^\circ$ (Докажи!), па затоа страната на Δ_1 е барем $\overline{DE} \geq \overline{A_1B_1}$. Според тоа, $P_{\Delta_1} \geq P_{A_1B_1C_1}$, што е противречност.

Ќе докажеме дека меѓу секои пет рамнострани триаголници со плоштини a^2, b^2, c^2, d^2 и e^2 , за кои $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 2$ има четири кои може да го покријат Δ . Нека $a \geq b \geq c \geq d \geq e > 0$. Ако $a \geq 1$, тогаш триаголникот со плоштина a^2 го покрива Δ . Во спротивен случај $b + c > 1$. Последното е очигледно ако $c > \frac{1}{2}$, а во спротивно

$$b^2 = 2 - a^2 - c^2 - d^2 - e^2 > 1 - 3c^2 \geq (1 - c)^2.$$

Тогаш триаголниците со плоштини a^2, b^2 и c^2 , поставени стандардно во темињата на Δ , ќе се сечат по парови. Тие нема да го покриваат Δ ако

$f = 2 - a - b - c > 0$ и преостанува рамностран триаголник со плоштина f^2 .
Треба да покажеме дека $d \geq f$. Последното е очигледно ако $d > \frac{1}{2}$ (бидејќи $a, b, c \geq d$), а во спротивно од $a, b, c < 1$ следува дека

$$d \geq 2d^2 \geq d^2 + e^2 = 2 - a^2 - b^2 - c^2 > 2 - a - b - c = f.$$

31. Нека $A_0, A_1, \dots, A_{2k}$, во овој редослед, се точки од кружница, кои кружницата ја делат на $2k+1$ еднакви лаци. Точката A_0 е поврзана со тетиви со сите останати точки. Овие $2k$ тетиви го делат кругот на $2k+1$ делови, кои наизменично се обоени со црвена и сина боја, така што бројот на црвените делови е за еден поголем од бројот на сините делови. Докажи дека плоштината на сината површина е поголема од плоштината на црвената површина.

Решение. За $j = 1, 2, \dots, 2k+1$, j -тиот дел

P_j се состои од триаголникот $A_0 A_{j-1} A_j$, каде $A_{2k+1} = A_0$, и кружен отсечок со плоштина S со централен агол $\frac{2\pi}{2k+1}$.

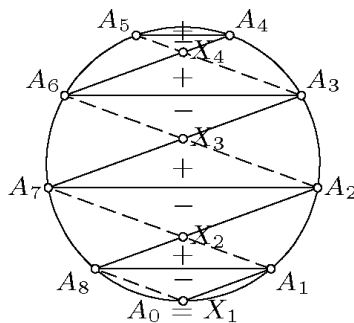
Според тоа,

$$\begin{aligned} P_{2i-1} - P_{2i} &= P_{A_0 A_{2i-2} A_{2i-1}} - P_{A_0 A_{2i-1} A_{2i}} \\ &= P_{A_{i-1} A_{2k+2-i} A_{2k+1-i}} - P_{A_{i-1} A_{2k+1-i} A_{2k+2-i}} \\ &= P_{X_i A_{i-1} A_{2k+2-i}} - P_{X_i A_{2k+1-i} A_{2k+2-i}} \\ &= P_{X_i A_{i-1} A_{2k+2-i}} - P_{X_{i+1} A_{2k+1-i} A_{2k+2-i}}, \end{aligned}$$

каде $X_i = A_{i-1} A_{2k+1-i} \cap A_{2k+2-i}$. Со собирање за $i = 1, 2, \dots, k$ добиваме

$$D = P_1 - P_2 + \dots + P_{2k-1} - P_{2k} + P_{2k+1} = S - P_{X_k A_k A_{k+1}}.$$

Ако тангентите на кружницата во точките A_k и A_{k+1} се сечат во точката T , тогаш $S < P_{TA_k A_{k+1}} = P_{X_k A_k A_{k+1}}$. Значи, $D < 0$, што и требаше да се докаже.



ЛИТЕРАТУРА

1. Djukić, D., Janković, V., Matić, I., Petrović, N.: The IMO Compendium - A Collection of Problems Suggested for The International Mathematical Olympiads: 1959-2009 (Second Edition), Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011
2. Grozdev, S., Kolev, E., Mushkarov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002
3. Malcheski, R., Grozdev, S., Anevski, K.: Geometry of complex numbers, Arhimed, Sofia, 2015
4. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazareveć, N.: Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazija, Krug, Beograd, 1998
5. Аневска, К., Малчески, Р. (2022). Примена на централната ротација во рамнината, Математички талент, Скопје, <https://matematickitalent.mk>
6. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкарров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
7. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкарров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
8. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкарров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2006-2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
9. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкарров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
10. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкарров, О.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
11. Гоговска, В., Малчески, Р. (2022). Инверзијата во олимписки задачи, Математички талент, Скопје, <https://matematickitalent.mk>
12. Ђукић, Д., Радовановић, М.: Математичке олимпијаде средњошколаца од 2012 до 2019 године, ДМ Србије, Београд, 2020
13. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, Београд, 2012
14. Малчески, А., Малчески, Р. (2018). Теорема на Чева, Сигма, Скопје
15. Малчески, Р. (1999). Теорема на Менелаж, Сигма, Скопје
16. Малчески, Р. (2022). Теорема на Менелаж (втор дел), Математички талент, Скопје, <https://matematickitalent.mk>
17. Малчески, Р. (2022). Теорема на Чева (втор дел), Математички талент, Скопје, <https://matematickitalent.mk>
18. Малчески, Р. (2022). Хомотетија (втор дел), Математички талент, Скопје, <https://matematickitalent.mk>

19. Малчески, Р., Аневска, К. (2014). Хомотетија, Сигма, Скопје, <https://matematickitalent.mk>
20. Малчески, Р., Аневска, К. (2018). Теорема на Стјуарт, Сигма, Скопје
21. Малчески, Р., Малчески, А., Брсаковска, С., Мисајлески, З., Димовски, Т.: Математички талент С4 (збирка задачи за II година, втор дел), Армаганка, Скопје, 2019
22. Малчески, Р.: Дваесет и пет избрани задачи од геометриски неравенства, Математички талент, <https://matematickitalent.mk>
23. Малчески, Р.: Примена на синусната и косинусната теорема, Математички талент, <https://matematickitalent.mk>
24. Малчески, С., Малчески, Р. (2022): Степенот на точка во олимписки задачи, Математички талент, Скопје, <https://matematickitalent.mk>