МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 1 (2017), 9 – 19

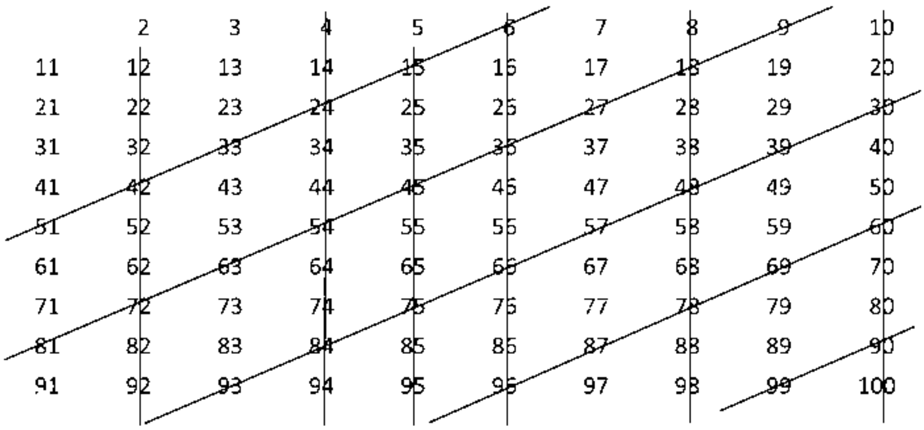
ШЕМИ ЗА РАСПОРЕДУВАЊЕ НА ПРОСТИТЕ БРОЕВИ

Весна Целакоска-Јорданова [1]

Секој природен број поголем од 1 што е делив само со 1 и сам со себе се вика прост број. Запишани во низа, тоа се броевите: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31,... Наједноставен начин за наоѓање на простите броеви е Ератостеновото сито (Ератостен, 276–194 година пред н.е.). Тоа е едноставен алгоритам којшто се состои во следното. Се запишува низата од природни броеви поголеми или еднакви на 2:

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots \qquad (1)$$

Прво, се пречкртуваат броевите во низата (1) што се поголеми од 2 и се деливи со 2 (тоа се: 4, 6, 8, 12, ...), т.е. секој втор број. Потоа, од преостанатите броеви во (1), го наоѓаме најмалиот број што е поголем од 2, т.е. бројот 3 и ги пречкртуваме сите броеви поголеми од 3 што се деливи со 3 (тоа се: 6, 9, 12, 15, 18,...). Ако во низата се испишани n природни броеви, постапката ја продолжуваме натаму сé до најголемиот природен број што е помал или еднаков на $\sqrt{n}$. Броевите што остануваат непречкртани се прости броеви (Слика 1).



Слика 1. Шема на простите броеви до 100.

До денес, не постои формула за одредување на простите броеви. Ниту една комбинација на алгебарски операции не го дава, на пример, стотиот прост број. Сепак, постојат шеми коишто даваат барем некакво чувство за ред меѓу простите броеви. Еден посебно интересен пристап за разгледување на простите броеви е *Уламовата спирала* ([4, 6]). Називот доаѓа од презимето на полско-американскиот математичар Станислав Улам (1909–1984).

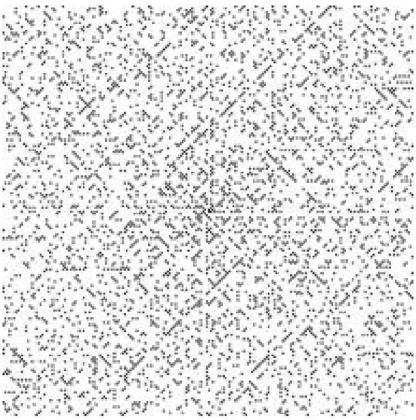
1. УЛАМОВА СПИРАЛА

Спиралата се конструира на следниов начин. Се почнува од 1. Потоа, до него од десната страна се пишува 2, над 2 се пишува 3, до 3 одлево се пишува 4 (така 4 доаѓа над 1), па лево од 4 се пишува 5, под 5 се пишува 6, итн., како на Слика 2; така, „движејќи“ се спротивно од стрелките на часовникот се пишуваат сите останати броеви ([5]). Со сиво се обележани полињата на простите броеви.

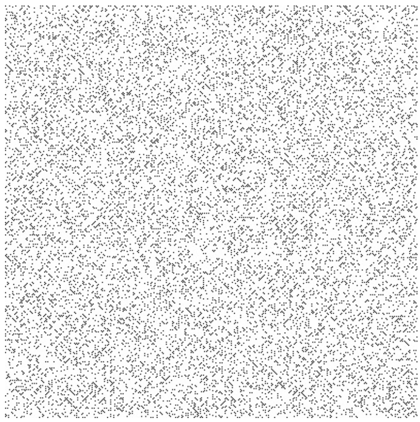
65	64	63	62	61	60	59	58	57
66	37	36	35	34	33	32	31	56
67	38	17	16	15	14	13	30	55
68	39	18	5	4	3	12	29	54
69	40	19	6	1	2	11	28	53
70	41	20	7	8	9	10	27	52
71	42	21	22	23	24	25	26	51
72	43	44	45	46	47	48	49	50
73	74	75	76	77	78	79	80	81

Слика 2. Уламова спирала на броеви до 81.

Во врска со конструкцијата на оваа спирала постои една анегдота. Во 1963 година, присуствувајќи на нечие долго и здодевно излагање на научна конференција, Улам почнал да ги пишува природните броеви во спирала, онака како што ги испишавме на цртежот, и почнал да ги заокружува простите броеви. Изненадено забележал дека простите броеви се редат по прави линии или, како што рекол, „имаат тенденција на неслучајно појавување“. По враќањето во лабораторијата во Лос Аламос, сакал да ја види оваа шема за повеќе броеви. Искористувајќи магнетна лента што ги забележувала првите 90 милиони прости броеви, тој и неговите соработници Мајрон Л. Стајн (Myron L. Stein) и Марк Б. Велс (Mark B. Wells), го програмирале лабораторискиот компјутер Maniac II за да ги прикаже простите броеви во спирала на 65000 последователни природни броеви, како светлечки точки во туба на осцилоскоп поврзана со компјутерот. Направиле фотографија и добиле изненадувачки образец (шара), која ги прикажувала простите броеви не само во дијагонални, туку и во хоризонтални и вертикални прави (Слика 3а.). Овие прави не се појавуваат кога станува збор за спирала од прости броеви на случајно одбрани природни броеви (Слика 3б).



Слика 3а.



Слика 3б.

Овие прави, односно полуправи, кои почнуваат од некој број и се или вертикални, или хоризонтални, или имаат коефициент на правец 1 или –1, навестуваат формули за простите броеви. Денес е познато дека тие најчесто можат да се опишат со помош на квадратни триноми во кои првиот член е $4n^2$. До тој заклучок се стигнува преку табелата од разлики што се формира од почетната низа. На пример, една дијагонална низа ги вклучува простите броеви 5, 19, 41, 71 и 109. Ако на n во трономот $4n^2+10n+5$, му доделиме вредности од 0 до 4, ќе ги добиеме броевите 5, 19, 41, 71 и 109 кои се прости, но за $n=5$ се добива бројот 155, кој очигледно не е прост. Табелата од разлики на оваа низа е:

Низа 0	5		19		41		71		109		155
Разлика од прв ред		14		22		30		38		46	
Разлика од втор ред			8		8		8		8		
Разлика од трет ред				0		0		0			

Табела 1. Табела од разлики на низата 5, 19, 41, 71, 109, 155.

Како што можеме да видиме од табелата, разликите од втор ред се еднакви, па ова ни кажува дека почетната низа може да се опише со помош на полином од втор степен. Полуправата на која ѝ припаѓаат овие броеви може да се опише со алгебарскиот израз $4n^2+10n+5$.

Но, како можеме да ги најдеме алгебраските изрази кои ќе ни определуваат линии од прости броеви? Прво, да забележиме неколку основни својства на Уламовата спирала. Неа можеме да ја разгледуваме како низа од квадрати сместени еден во друг, што се нумерирани на следниов начин:

1) На $n=0$ одговара квадратот што го содржи само 1;
2) На $n=1$ одговара квадратот што ги содржи 1,2, ..., 9. Да забележиме дека страните на овој квадрат имаат 3 елементи;
3) На $n=2$ одговара квадратот што ги содржи 1,2, ..., 25, а страните на овој квадрат имаат 5 елементи; итн.

Тогаш страната на n-тиот квадрат има $2n+1$ елементи. Со индукција по n се покажува дека страната на $(n+1)$-виот квадрат има $2n+3$ елементи. Навистина, $(n+1)$-виот квадрат има онолку елементи на една страна колку што има n-тиот квадрат и уште два повеќе, т.е. $(2n+1)+2=2n+3=2(n+1)+1$.

Очигледно е дека n-тиот квадрат има вкупно $(2n+1)^2$ елементи. Значи, најголемиот елемент во n-тиот квадрат, т.е. елементот во долниот десен агол, е квадрат на непарен број и тоа на $(n+1)$-виот непарен број. Покрај тоа, половина од дијагоналата, т.е. полуправата што ги содржи броевите 1, 9, 25, 49, 81, ... е определена со функцијата

$$f(n)=(2n+1)^2=4n^2+4n+1, \text{ за секој } n\in\mathbb{N}.$$

Слично како претходно, можеме да ја најдеме функцијата што ја определува полуправата што ги содржи 1, 3, 13, 31, 57,... Да го разгледаме сега ($n-1$)-виот квадрат. Најголемиот број во овој квадрат е $(2n-1)^2$, за $n=1,2,3,\dots$. Сакаме да го добиеме најмалиот број што следува по $(2n-1)^2$ кој лежи на полуправа што ги содржи 1,3,13, 31,57,... Затоа, на $(2n-1)^2$ треба да го додадеме бројот на елементи од странта на n-тиот квадрат (т.е. $2n+1$) и да одземеме 1, т.е.

$$g(n)=(2n-1)^2+(2n+1)-1=4n^2-4n+1+2n=4n^2-2n+1.$$

Значи, броевите во полуправата што ги содржи 1, 3, 13, 31, 57,... се определени со $g(n)=4n^2-2n+1$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Оваа полуправа може (паралелно) да се помести со додавање позитивна константа на функцијата g. Ако, на пример, додадеме 2, ќе ја добиеме функцијата $g_1(n)=4n^2-2n+3$, која ни ја дава полуправата што ги содржи броевите 5, 15, 33, 59, 93, ... , т.е. правиме транслација на полуправата определена со функцијата g. Специјално, со додавање на бројот 40 на функцијата g, се добива квадратен трином со кој се добива една од полуправите со најгуст распоред на прости броеви:

$$g_2(n)=4n^2-2n+41,\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Да забележиме дека оваа полуправа ќе започне од n-тиот квадрат така што бројот $g_2(n)=g(n)+40$ ќе лежи на истата хоризонтална страна како $g(n)$, т.е. од n-тиот квадрат, така што $40\le 2n$, од каде што добиваме дека $n\ge 20$. Со други зборови, сите броеви $g_2(n)$ за $n=0,1,\dots,19$ не лежат на таа полуправа.

Слично можат да се добијат и функции на други полуправи коишто имаат густ распоред на прости броеви. На пример, ако го земеме n-тиот квадрат (за кој веќе утврдивме дека има вкупно $(2n+1)^2$ елементи), за да ја одредиме функцијата којашто ја определува полуправата во која се наоѓаат 7, 21,43,73, ... од $(2n+1)^2$ ќе одземеме $2n$. Ја добиваме функцијата $h(n)=4n^2+2n+1$, $n\in\mathbb{N}$. Специјално, со додавање на бројот 40 на функцијата h, се добива квадратен трином со кој исто така се добива полуправа со густ распоред на прости броеви.

Една спирала може да започне и од некој друг број што не е 1. Да земеме, на пример, шемата да започнува со бројот 41 (Слика 4). По дијагоналата на оваа спирала се добива низа од 40 прости броеви без прекин. Тие можат да се добијат со помош на формулата $n^2 + n + 41$, што е всушност, познатата Ојлерова формула за генерирање прости броеви. Интересно е дека од првите 2398 броеви генерирани со оваа формула точно половината се прости броеви. Проверувајќи ги броевите помали од 10 милиони, Улам и неговите соработници утврдиле дека односот меѓу простите и сложените броеви од оваа полуправа е 0,475.

105	104	103	102	101	100	99	98	97
106	77	76	75	74	73	72	71	96
107	78	57	56	55	54	53	70	95
108	79	58	45	44	43	52	69	94
109	80	59	46	41	42	51	68	93
110	81	60	47	48	49	50	67	92
111	82	61	62	63	64	65	66	91
112	83	84	85	86	87	88	89	90
113	114	115	116	117	118	119	120	121

Слика 4. Уламова спирала што започнува од 41.

Исто така, може да се добијат 80 последователни прости броеви со трансформирање на Ојлеровата формула до формулата

$$n^2 - 79n + 1601 = (n-40)^2 + (n-40) + 41 .$$

Постојат и други формули што се богати со прости броеви. На пример, за броевите од облик $4n^2 + 170n + 1847$ односот меѓу простите и сложените броеви е 0,466, додека за оние од облик $4n^2 + 4n + 59$, односот е 0,437. Постојат и квадратни триноми што ретко даваат прости броеви. На пример, изразот $2n^2+4n+117$ води до прост број во само 5% од случаите.

Улам предложил неколку проблеми за натамошно истражување. На пример:

1. Постојат ли прави (полуправи) со бесконечно многу прости броеви?
2. Дали распределбата на прости броеви во секој квадрант е иста?

2. КЛОБЕРОВ ТРИАГОЛНИК

Пред Улам, Американецот Лоренс М. Клобер (Laurence M. Klauber) во 1932 година ги претставил простите броеви меѓу природните броеви наредени во еден триаголник. Оригиналната верзија на овој триаголник започнува со 1 на врвот, а во секој нареден ред го зголемува бројот на елементи за 2, така што n-тиот ред ги содржи броевите од $(n-1)^2+1$ до n^2. Слично како што Улам забележал дека простите броеви се појавуваат во разни дијагонални линии, така и Клобер забележал дека простите броеви се специфично распоредени, т.е. дека се појавуваат на определени прави (Слика 5).

						1						
					2	3	4					
				5	6	7	8	9				
			10	11	12	13	14	15	16			
		17	18	19	20	21	22	23	24	25		
	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	48	48	49

Слика 5. Клоберов триаголник до $n=7$.

Очигледно, во првиот ред има 1 елемент, во вториот – 3, во третиот – 5, итн., во i-тиот има $2i-1$ елементи. Вкупниот број елементи за n редови ($n \geq 1$) е даден со $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$. Оваа формула може да се запише и поедноставно:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=2\sum_{i=1}^{n}i-n=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n=n(n+1)-n=n^2.$$

Последниот елемент од n-тиот ред е n^2, додека првиот од истиот ред е $(n-1)^2+1$. За да ги добиеме броевите од линијата во средина (личи на висина спуштена од темето во 1), ќе забележиме дека тие се средна вредност од првиот и последниот број во n-тиот ред, т.е.

$$\frac{n^2+(n-1)^2+1}{2}=\frac{2n^2-2n+2}{2}=n^2-n+1\,.$$

Значи, броевите од вертикалната линија (означена со темно сива боја на Слика 5) се определени со полиномот:

$$\varphi(n)=n^2-n+1, \text{ за } n\geq 1.$$

Секоја вертикална линија во триаголникот може да се добие со поместување на средната вертикална линија налево или надесно, додавајќи една константа $c\in\mathbb{Z}$ на функцијата $\varphi(n)$. Ако го додадеме, на пример, бројот 40, ќе ја добиеме функцијата

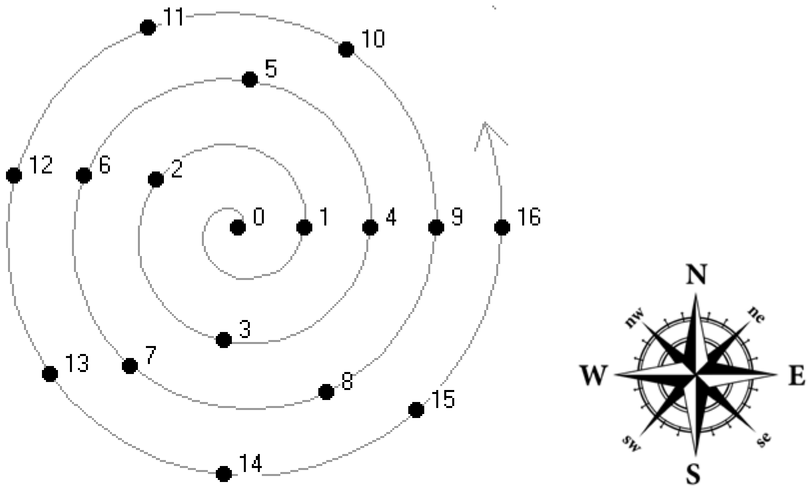
$$\varphi_1(n)=n^2-n+41, \text{ за } n\geq 1.$$

Сите броеви до $n=40$ се прости, но (очигледно) за $n=41$ не се добива прост број. Сепак, се добива многу долга низа од 40 прости броеви.

Има разни варијации на Клоберовиот триаголник. Може, на пример, да се почне од бројот 2, наместо од 1, а може да се почне и со три броја во првиот ред (1, 2 и 3), а потоа во секој нареден да се зголемуваат за 2.

3. САКСОВА СПИРАЛА

Во 1994 година, Роберт Сакс (Robert Sacks) дошол на идеја да ги претстави ненегативните цели броеви врз Архимедова спирала ([3]), а своите откритија ги објавил на интернет во 2003 година. Во почетокот на Архимедовата спирала е сместена нулата, а квадратите на природните броеви се наредени на една полуправа десно од нулата (Слика 6). Останатите броеви се разместени измеѓу. На пример, меѓу 1 и 4 на еднакви растојанија се сместени 2 и 3, при ротација обратно од стрелките на часовникот. На извесен начин, оваа дводимензионална „бројна сфера“ ни открива шеми и правила на распоредување на броевите, заради што може да се смета како периоден систем на броевите. Ќе го користиме компасот за определување на страните во Саксовата спирала, зашто формално немаме оски.



Слика 6. Саксова спирала.

- **Исток (E)**

Спиралата започнува и ја комплетира секоја ротација на саканата 0°-оска. Броевите од оската се квадрати на природните броеви (и нулата), па формулата што ја претставува оваа оска е просто n^2. Низата броеви од оваа оска започнува со: 1, 4, 9, 16, 25, 36.

- **Север (N)**

Север се наоѓа на четвртина завртување од 0°-оската обратно од стрелките на часовникот. Формулата што ги опишува овие броеви на приближно 90°-оска е $n(4n+1)$. Низата започнува со: 5, 18, 39, 68, 105, 150.

- **Запад (W)**

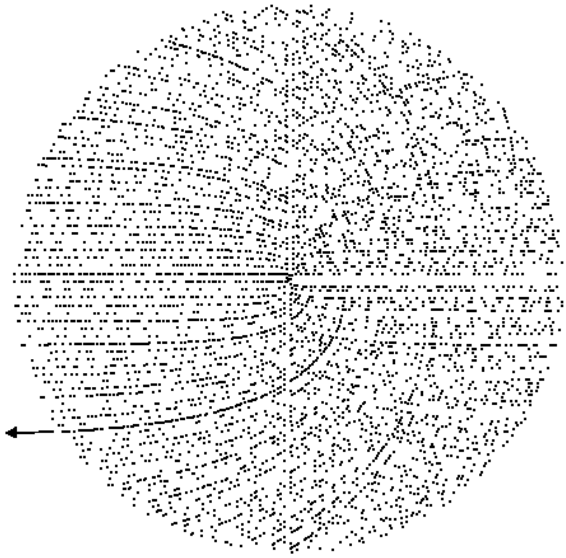
Запад се наоѓа на половина завртување од 0°-оската обратно од стрелките на часовникот. Формулата што ги опишува овие броеви на приближно 180°-оска се боревите од облик $n(n+1)$. Низата започнува со: 2, 6, 12, 20, 30, 42.

- **Југ (S)**

Југ се наоѓа на четвртина завртување од 0°-оската во насока на стрелките на часовникот. Формулата што ги опишува овие броеви на приближно 270°-оска е $n(4n-1)$. Низата започнува со: 3, 14, 33, 60, 95, 138.

Причината што низите на север и на југ растат двапати побрзо од оние на исток или на запад е тоа што секој број на север, односно југ, е разделен од следниот со две завртувања на спиралата.

Со означување на простите броеви на Саксовата спирала може да се дојде до подлабоки сознанија за шемите на распределување на простите броеви, многу подлабок отколку оние од Уламовата псевдоспирала или од Клоберовиот триаголник.



Слика 7. Стрелката ги означува броевите од облик $n(n-1)+41$.

Црните точки на Слика 7 ги претставуваат простите броеви, а со стрелка означената крива ги претставува броевите од облик $n(n-1)+41$, т.е. тоа е Ојлеровата формула за генерирање прости броеви. Изгледа дека простите броеви се концетрираат во криви што се движат кон северозапад и југозапад.

4. НАМЕСТО ЗАКЛУЧОК

Шемите од прости броеви не се многу испитувани. Но, тие се значајни зашто покажуваат постоење на јасен образец кој постои меѓу простите броеви. Тој, пак, може да овозможи откривање на нови полиноми што ќе генерираат поголеми прости броеви, а тие можеби ќе водат до подобро разбирање на многу интерсни хипотези во врска со простите броеви ([1, 2]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Целакоска-Јорданова, *Спирала од прости броеви*, Портал ПОИМ на Институтот за математика, ПМФ, Скопје, 5 јануари 2017, http://poim-pmf.weebly.com/spirala-od-prosti-broevi.html

[2] В. Целакоска-Јорданова, *Прочитајте математички трилер! „Стрико Петрос и Голдбаховата хипотеза“ од Апостолос Доксиадис*, Портал ПОИМ на Институтот за математика, ПМФ, Скопје, 9 јануари 2015, http://poim-pmf.weebly.com/matematicki-triler.html

[3] M. M. Ross, *The Sacks Number Spiral*, 2007 – 2012, http://www.naturalnumbers.org/sparticle.html

[4] H. Rudd, *A visual analysis of prime number distribution*, 2010, http://ulamspiral.com/generatePage.asp?ID=1

[5] J. Strickland, *Quantum Phaith*, Lulu. Inc. 2011

[6] E. W. Weisstein, *Prime Spiral*, (1999-2010), Wolfram Math World Research, http://mathworld.wolfram.com/PrimeSpiral.html

[1] Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје
Природно-математички факултет,
Институт за математика
ул. Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Македонија
e-mail: celakoska@gmail.com

Примен: 4.04.2017
Поправен: 24.04.2017
Одобрен: 25.04.2017