

## ПРОГРАМА ЗА РАБОТА СО НАДАРЕНИТЕ УЧЕНИЦИ ЗА МАТЕМАТИКА ОД 16-17 ГОДИШНА ВОЗРАСТ

Во овој дел ќе презентираме интегрална наставна програма за работа со надарените ученици за математика на возраст од 16-17 години, т.е. за учениците во II година во средното образование. Оваа наставна програма треба да се реализира континуирано, а не само во периодите кога учениците се подготвуваат за одделните натпревари по математика.

Цели на наставната програма за учениците на возраст од 16-17 години се:

- кај ученикот/ученичката да се развиваат квалитетите на мислењето како што се: еластичноста, шаблонизацијата, широчината, рационалноста, длабочината и критичноста на мислењето,
- да се настојува ученикот/ученичката да ги усвојува научните методи: набљудување, споредување, експеримент, анализа, синтеза, класификација, систематизација, генерализација, специјализација и аксиоматскиот метод,
- да се настојува во ученикот/ученичката да ги усвојува видовите заклучувања: индукција, дедукција и аналогија, при што од особена важност да се презентираат погодни примери од кои ученикот/ученичката ќе осознава дека заклучувањето по аналогија не е секогаш точно,
- ученикот/ученичката да ги усвои предвидените содржини од комплексните броеви и да се оспособин стекнатите знаења да ги применува при решавање на проблеми,
- ученикот/ученичката да ги усвои предвидените содржини од квадратните равенки, неравенки и квадратните функции и да се оспособи стекнатите знаења да ги применува при решавање на проблеми,
- ученикот/ученичката да ги усвои предвидените содржини од неравенствата и да се оспособин стекнатите знаења да ги применува при решавање на проблеми,
- ученикот/ученичката да ги усвои предвидените содржини од линеарните диференцни равенки и да се оспособин стекнатите знаења да ги применува при решавање на проблеми,
- ученикот/ученичката да ги усвои предвидените содржини од комбинаторика и да се оспособин стекнатите знаења да ги применува при решавање на проблеми,
- ученикот/ученичката да ги усвои предвидените содржини од експоненцијалните и логаритамските равенки, функции и неравенства

и да се оспособин стекнатите знаења да ги применува при решавање на проблеми,

- ученикот/ученичката да ги усвои предвидените содржини од теоријата на броеви и да се оспособин стекнатите знаења да ги применува при решавање на проблеми,
- ученикот/ученичката да ги усвои предвидените содржини од тригонометријата и да се оспособин стекнатите знаења да ги применува при решавање на проблеми,
- ученикот/ученичката да ги усвои предвидените содржини за плоштина на рамнинска фигура и да се оспособин стекнатите знаења да ги применува при решавање на проблеми, и
- ученикот/ученичката да ги усвои предвидените содржини од стереометријата и да се оспособин стекнатите знаења да ги применува при решавање на проблеми.

За постигнување на претходно наведените цели потребно е да се усвојат следниве содржини:

**Алгебра (4 часа седмично – 144 часа на годишно ниво).** *Поле на комплексни броеви:* поим за комплексен број (комплексен број како подреден пар реални броеви), собирање, одземање и множење на комплексни броеви, основни својства, коњугиран комплексен број, модул на комплексен број, растојание во  $\mathbb{C}$ , имагинарна единица, алгебарски запис на комплексен број, неравенство на триаголник и равенство на паралелограм, делење и степенување на комплексни броеви, поле на комплексни броеви, корен на комплексен број, геометриска интерпретација на комплексен број, комплексна рамнина, делење на отсечка во даден однос.

*Квадратна равенка и квадратна функција:* поим за квадратна равенка, видови квадратни равенки, решавање на непотполни квадратни равенки, решавање на потполни квадратни равенки, дискриминанта на квадратна равенка (природа на решенијата на квадратна равенка), Виетови формули, примена, разложување на квадратен трином на линеарни множители, равенки кои се сведуваат на квадратни (дробно-рационални и биквадратни), системи квадратни равенки, примена на квадратните равенки и системите квадратни равенки, поим и дефиниција на парабола, квадратна функција, график на квадратна квадратна функција:

$$f(x) = ax^2, f(x) = ax^2 + c, f(x) = ax^2 + bx + c,$$

својства на квадратната функција и графикот, знак на квадратна функција, екстремни вредности на квадратна функција, положба на даден број во однос на нулите на квадратната функција.

*Неравенства:* неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Енгелов принцип на минимум, равенства на Абел, неравенство за преуредување, неравенство на Чебишев, геометриски неравенства.

*Квадратни и ирационални неравенки:* квадратни неравенки, систем квадратни неравенки, ирационални равенки, ирационални неравенки, примена на квадратните неравенки и нивните системи.

*Линеарни диференцни равенки од прв и втор ред:* линеарна диференцна равенка од прв ред, линеарна диференцна равенка од втор ред, хомогена линеарна диференцна равенка од втор ред со константни коефициенти, систем диференцни равенки од видот

$$\begin{cases} x_{n+1} = px_n + qy_n \\ y_{n+1} = rx_n + sy_n \end{cases}$$

решавање на некои нехомогени линеарни диференцни равенки од втор ред со константни коефициенти, триаголни броеви, Фибоначиеви броеви, Лукасови броеви, решавање на некои нелинеарни диференцни равенки.

*Основни комбинаторни конфигурации:* математика индукција (повторување), принцип на збир, производ, вклучување и исклучување (повторување), пермутации без повторување и пермутации со повторување, варијации без повторување и варијации со повторување (варијации од даден тип), комбинации без повторување и комбинации со повторување, триангулација на  $n$ -аголник и проблем на загради, Каталанови броеви, биномна формула, полиномна формула.

*Експоненцијална функција, логаритамска функција, експоненцијални и логаритамски равенки, неравенки и неравенства:* експоненцијална функција, својства и график, експоненцијални равенки, инверзна функција (повторување) и поим за логаритам, основни својства на логаритмот, логаритамска функција, својства и график, логаритамски равенки, системи експоненцијални и логаритамски равенки, експоненцијални и логаритамски неравенки, системи експоненцијални и логаритамски неравенки, степен со ирационален степен показател, експоненцијални и логаритамски неравенства.

*Теорија на броеви:* деливост - општи и посебни критериуми за деливост, НЗД, Евклидов алгоритам и НЗС (повторување), прости и сложени броеви, основна теорема на аритметиката и функциите  $y = [x]$ ,  $y = \{x\}$  (повторување), мултипликативни функции, совршени броеви, конволуциски производ, поим за конгруенција, својства на конгруенциите и нивна примена (повторување), системи остатоци (потполн и редуциран) и нивни својства, Ојлерова функција, теорема на Ојлер, мала теорема на Ферма,

теорема на Кармајкл и теорема на Вилсон, линеарна конгруентна равенка, системи линеарни конгруентни равенки и кинеска теорема за остатоци, нелинеарни конгруентни равенки, линеарна диофантова равенка, Ојлеров метод (повторување), Питагорови тројки, метод на Ферма, збир на четири квадрати, збир на два квадрати, општи квадратни Диофантови равенки, експоненцијални диофантови равенки,.

**Геометрија (3 часа седмично – 108 часа на годишно ниво).** *Тригонометрија:* тригонометрија на правоаголен триаголник (повторување), проширување на поимот агол, ориентиран агол, мерење на агли и лаци, тригонометриска кружница, тригонометриски функции од произволен агол, знаци на тригонометриските функции во одделени квадранти, основни зависимости меѓу тригонометриските функции од еден ист агол, сведување на тригонометриските функции од произволен агол на тригонометриски функции од остар агол, периодичност, парност и непарност на тригонометриските функции, интервали на растење и опаѓање, менување на тригонометриските функции, графици на основните тригонометриски функции, график и основни својства на функција  $y = a\sin(bx + c)$  и слични функции, тригонометриски функции од збир и разлика на два агла, тригонометриски функции на удвоен агол и на половината на даден агол изразени преку функцијата на тој агол, трансформација на алгебарски збир на тригонометриски функции во производ и обратно, инверзни тригонометриски функции, трансформации на инверзните тригонометриски функции, основни тригонометриски равенки, хомогени тригонометриски равенки, равенки од видот  $a\sin x + b\cos x = c$ , каде  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , едноставни тригономериски неравенки, системи тригонометриски равенки и тригонометриски неравенки, синусна теорема, примена, косинусна теорема, примена, решавање на триаголник, решавање на четириаголник.

*Плоштина на рамнинска фигура:* поим за плоштина, плоштина на паралелограм, плоштина на триаголник, Херонова и други формули за плоштина на триаголник, плоштини на слични триаголници, плоштина на трапез и трапезоид, периметар и плоштина на правилен многуаголник, периметар на кружница, плоштина на круг, должина на кружен лак и плоштини на делови од круг.

*Стереометрија:* нормалност на прави и рамнини (повторување), диедар, триедар и коше, поим за полиедар, правилни полиедри, тетраедар, призма, пресеци на призма со рамнина, плоштина и волумен на призма, принцип на Кавалиери, пирамида, пресеци на пирамида со рамнина, плоштина и волумен на пирамида, потсечена пирамида, поим за рота-

циона, цилиндрична и конуска површина, цилиндар, плоштина и волумен, конус, плоштина и волумен, потсечен конус, плоштина и волумен, сфера и топка, пресеци на топка, плоштина и волумен на топка и нејзините делови, примена на тригонометријата во стереометрија.

## Литература

1. Малчески, Р., Малческа, В. (2020). Математика 1 – алгебарски структури (трето издание), Скопје
2. Малчески, Р., Малческа, В. (2020): Математика 5 – дискретна математика (второ издание), Скопје
3. Малчески, Р., Малчески, А. (2019). Функции и функционални равенки (второ издание), Скопје
4. Малчески, Р. (2019). Елементарни алгебарски и аналитички неравенства (второ издание), Скопје
5. Малчески, Р. (2021). Теорија на броеви, Скопје
6. Малчески, Р., Докоска, М. (2002): Математика 2, Скопје
7. Малчески, Р., Малчески, А., Велинов, Д., Малчески, С., Костадинова, С. (2019). Математички талент С1 (збирка задачи за I година, прв дел), Армаганка, Скопје
8. Малчески, Р., Малчески, А., Брсаковска, С., Мисајлески, З., Димовски, Т. (2019). Математички талент С2 (збирка задачи за I година, втор дел), Армаганка, Скопје
9. Малчески, Р., Малчески, А., Велинов, Д., Малчески, С., Костадинова, С. (2019). Математички талент С3 (збирка задачи за II година, прв дел), Армаганка, Скопје
10. Малчески, Р., Малчески, А., Брсаковска, С., Мисајлески, З., Димовски, Т. (2019). Математички талент С4 (збирка задачи за II година, втор дел), Армаганка, Скопје
11. Малчески, Р., Малчески, А., Велинов, Д., Малчески, С., Костадинова, С. (2019). Математички талент С5 (збирка задачи за III година, прв дел), Армаганка, Скопје
12. Малчески, Р., Малчески, А., Брсаковска, С., Мисајлески, З., Димовски, Т. (2019). Математички талент С6 (збирка задачи за III година, втор дел), Армаганка, Скопје
13. Малчески, Р., Малчески, А., Велинов, Д., Малчески, С., Костадинова, С. (2019). Математички талент С7 (збирка задачи за IV година, прв дел), Армаганка, Скопје

14. Малчески, Р., Малчески, А., Брсаковска, С., Мисајлески, З., Димовски, Т. (2020). Математички талент С8 (збирка задачи за IV година, втор дел), Армаганка, Скопје
15. Малчески, Р., Ибраими, А., Малчески, А. (2020). Математички талент С9 (збирка нерешени задачи за натпревари за средно образование), Скопје
16. Малчески, Р., Ибраими, А., Малчески, А. (2020). Математички талент С10 (збирка нерешени задачи за натпревари за средно образование – втор дел), Скопје
17. Малчески, Р., Малчески, А., Малчески, С. (2021). Математички талент С11 – параметарски равенки и неравенки, Скопје
18. Малчески, Р. (2011). Математички талент С12 – Збирка задачи: идентитети, неравенства, низи, полиноми и функции, Скопје
19. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К., Главче, М., Трневски, Д. (2019). Репетиториј по елементарна математика – прв дел, Скопје
20. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К., Главче, М., Трневски, Д. (2019). Репетиториј по елементарна математика – втор дел, Скопје
21. Малчески, А., Малчески, Р., Главче, М., Малчески, С., Трневски, Д. (2020). Репетиториј по елементарна математика – трет дел, Армаганка, Скопје
22. Малчески, А., Малчески, Р., Аневска, К., Малчески, С., Трневски, Д. (2020). Репетиториј по елементарна математика – четврт дел, Армаганка, Скопје
23. Малчески, Р., Малчески, А., Малчески, С. (2021). Маѓународни математички олимпијади 1959-2019, Армаганка, Скопје
24. Малчески, Р., Малчески, А., Малчески, С. (2021). Балкански математички олимпијади 1984-2020, Армаганка, Скопје
25. Младеновиќ, П. (2013). Комбинаторика (четврто издање), ДМС, Београд
26. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazarević, N. (1998). Geometrija za I razred Matematičke gimnazije, Krug, Beograd