Р. Малчески
А. Малчески

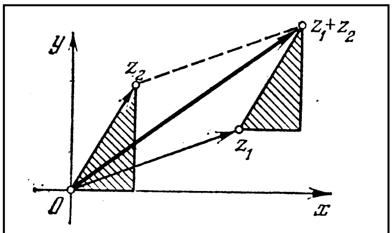
ПРЕСЛИКУВАЊА ВО РАМНИНА ПРЕКУ КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ I

0. ВОВЕД

Во оваа статија, користејќи ги комплексните броеви ќе ги разгледаме сличностите во евклидската рамнина. Исто така со помош на апаратот на комплексните броеви ќе ја разработиме и инверзијата, пресликување кое и покрај неговото огромно значење не се изучува во нашиот образовен систем.

а) Геометриска интерпретација на комплексен број

0.1. Со $\mathbf{R}^2$ ја означуваме евклидската рамнина со декартови координати. Секој комплексен број $z = x + iy$ е подреден пар реални броеви (x, y). Бидејќи множеството подредени парови реални броеви (x, y) е во обратно еднозначно соодветствие со $\mathbf{R}^2$,



Црт. 1

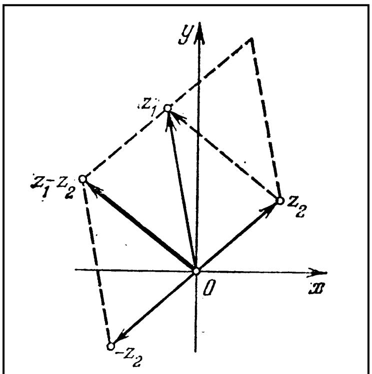
добиваме дека на секоја точка $A \in \mathbf{R}^2$ можеме да и придружиме комплексен број $z = x + iy$, и обратно. За комплексниот број z кој соодветствува на точката A ќе велиме дека е нејзин **афикс**. Ова соодветствие меѓу комплексните броеви и точките од евклидската рамнина е биекција. Притоа, реалните броеви се пресликуваат на точките од апцисната оска, а имагинарните на точки од ординатата. Затоа апцисната оска ја нарекуваме **реална**, а ординатната оска ја нарекуваме **имагинарна оска**. При вакво толкување $\mathbf{R}^2$, природно ја нарекуваме **комплексна рамнина**, а комплексните броеви **точки** од оваа рамнина.

Јасно, точките z и $-z$ се симетрични во однос на координатниот почеток , а $\bar{z}$ и z се симетрични во однос на реалната оска. Имено, ако $z = x + iy$ тогаш

$$-z = (-x) + i(-y) \text{ и } \bar{z} = x + (-y)i\,.$$

Очигледно, комплексниот број z соодветствува на векторот со почетна точка O и крај во точката z. Јасно, ова соодветствие меѓу комплексните броеви и векторите на комплексната рамнина со почеток во O исто така е биекција. Затоа векторот, кој го одредува комплексниот број z, ќе го означуваме со истата буква z.

Со помош на векторската интерпретација нагледно можеме да ги илустрираме соби-



Црт. 2

рањето и одземањето на комплексни броеви. Според 1.2 добиваме дека бројот $z_1 + z_2$ соодветствува на векторот, добиен со собирање на векторите z_1 и z_2 (црт. 1). Векторот $z_1 - z_2$ се конструира како збир на векторите z_1 и $-z_2$ (црт. 2).

Од досега изнесеното и од црт. 2 следува дека растојанието меѓу точките z_1 и z_2 е еднакво на должината на векторот $z_1 - z_2$, т.е. еднакво е на $|\, z_1 - z_2 \,|$. Јасно модулот $|\, z \,|$ е еднаков на должината на радиус векторот на точката z. Ако ги разгледаме триаголниците со темиња во точките $O, z_1, z_1 + z_2$ и $O, z_1, z_1 - z_2$, тогаш е очигледна геометриската смисла на познатите неравенства

$$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2| \text{ и } |z_1-z_2|\ge\big||z_1|-|z_2|\big|$$

за модулот на комплексен број.

0.2. Делење на отсечка во даден однос. Нека се дадени точките A и B чии афикси се z_1 и z_2, соодветно, и нека C е точка од отсечката AB која ја дели AB во однос $\lambda:\mu$, т.е. $\mu\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$. Од $\overrightarrow{AC}=z-z_1$ и $\overrightarrow{CB}=z_2-z$ добиваме $\mu(z-z_1)=\lambda(z_2-z)$. Според тоа, за афиксот на точката C имаме $z=\frac{\lambda z_2+\mu z_1}{\lambda+\mu}$.

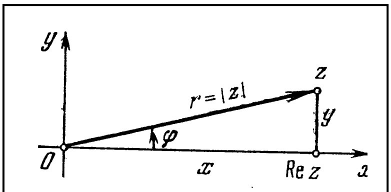
Така, на пример средната точка C на отсечката AB чии крајни точки имаат афикси $a=1+i$ и $b=3+5i$, има афикс

$$c=\frac{1\cdot a+1\cdot b}{1+1}=\frac{(1+i)+(3+5i)}{2}=1+3i\,.$$

0.3. Пример. Множеството точки z, кои ја задоволуваат равенката $|z-z_o|=R$, е кружница со радиус R и центар во точката z_o. Имено, $|z-z_o|$ е растојание помеѓу точките A и B чии афикси се z и z_o, соодветно. ♦

б) Тригонометриски запис на комплексен број

0.4. Аргумент на комплексен број. Аголот φ, кој го зафаќа радиус-векторот на точката z со позитивната насока на реалната оска, го нарекуваме **аргумент** на комплексниот број z, и за него ја прифаќаме



Црт. 3

ознаката $\varphi=\operatorname{Arg}z$, (црт. 3). Аргументот го сметаме за позитивен или негативен во зависност од тоа, дали истиот е ориентиран од позитивната насока на реалната оска кон позитивната или кон негативната насока на имагинарната оска , соодветно.

За бројот $z=0$ аргументот не е определен, па затоа во сите натамошни разгледувања поврзани со аргументот, претпоставуваме, дека $z\ne 0$.

Положбата на точката z во комплексната рамнина е еднозначно определена како со нејзините декартови координати x,y така и со поларните координати $r=|z|$ и $\varphi=\operatorname{Arg}z$. Овие координати меѓу себе се поврзани со формулите

$$x=r\cos\varphi\,,\quad y=r\sin\varphi\,. \qquad (1)$$

За дадена точка z нејзиниот модул е еднозначно определен, а аргументот со точност до собирок $2k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,...$. Вредноста на аргументот, која го задоволува условот $0<\operatorname{Arg}z\le 2\pi$ ја нарекуваме **главна вредност на аргументот** и ја означуваме со $\arg z$. Во натамошните разгледувања најчесто работиме со главната вредност на аргументот.

0.5. Тригонометриски запис на комплексен број. Од формулите (1), кои ги сврзуваат декартовите и поларните координати на точката z, го добиваме таканаречениот тригонометриски запис на комплексен број

$$z=|z|\,(\cos(\arg z)+i\sin(\arg z))\,. \qquad (2)$$

Користејќи го записот (2) за производот на комплексните броеви:

$$z_1=|z_1|\,(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1) \text{ и}$$

$$z_2=|z_2|\,(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

добиваме

$$z_1z_2=|z_1|\cdot|z_2|\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \quad (3)$$

Од својствата на множењето на комплексни броеви, дефиницијата на arg и од

$$z_1z_2=|z_1z_2|\,(\cos(\arg(z_1z_2))+i\sin(\arg(z_1z_2)))$$

следува, дека

$$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2+2k\pi\,, \qquad (4)$$

за $k=0,\pm1,\pm2,...$.

Аналогно, од равенството $z_1=z_2z_3$, при $z_2\ne 0$, од свијствата на операцијата делење на комплексни броеви добиваме

$$\arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2+2k\pi\,,\ k=0,\pm1,\pm2,...$$

0.6. Моаврова формула. Формулите (3) и (4), за производ на два комплексни броеви, со помош математичка индукција, лесно се обопштуваат за конечно многу множители $z_1, z_2,...., z_n$. Имено,

$$\arg(z_1 z_2 ... z_n) = \arg z_1 + ... + \arg z_n + 2k\pi \quad (5)$$

за $k = 0, \pm 1, ...$ Специјално, за $z_1 = ... = z_n$, добиваме $|z^n| = |z|^n$, $\arg z^n = n \arg z + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, ...$ односно

$$z^n = |z|^n (\cos(n \arg z) + i \sin(n \arg z)). \quad (6)$$

Формулата (6) е позната како **Моаврова формула**.

0.7. Пример. Пресметајте ја разликата $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^9 - \left(1+i\sqrt{3}\right)^9$.

Решение. Од

$$\left|-1+i\sqrt{3}\right| = 2 \text{ и } \arg\left(-1+i\sqrt{3}\right) = \tfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,$$

за $k = 0, \pm 1, ...$ добиваме

$$-1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3}\right).$$

Согласно Моавровата формула имаме:

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)^9 = 2^9\left(\cos\tfrac{2\pi}{3}\cdot 9 + i\sin\tfrac{2\pi}{3}\cdot 9\right) = 2^9$$

Аналогно добиваме

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^9 = 2^9\left(\cos\tfrac{9\pi}{3} + i\sin\tfrac{9\pi}{3}\right) = -2^9.$$

Според тоа,

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)^9 - \left(1+i\sqrt{3}\right)^9 = 2^9 - \left(-2^9\right) = 2^{10}. \ \blacklozenge$$

в) Коренување на комплексни броеви

0.8. Дефиниција. Нека е даден комплексен број $z \neq 0$ и природен број n. $n-$**ти корен** од z дефинираме како комплексен број w за кој важи

$$w^n = z. \quad (7)$$

Притоа ја прифаќаме ознаката $w = \sqrt[n]{z}$. Користејќи ја Моавровата формула (6) и тригонометриските записи

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)) \text{ и}$$
$$w = |w|(\cos(\arg w) + i\sin(\arg w))$$

добиваме

$$|w|^n\left(\cos n(\arg w) + i\sin n(\arg w)\right) =$$
$$= |z|\left(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)\right)$$

односно

$$|w|^n = |z| \quad \text{и} \quad n(\arg w) = \arg z + 2k\pi, \quad (8)$$

за $k = 0, \pm 1, ...$. Од (4) и (8) добиваме

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}, \ \arg w = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

т.е.

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) \quad (9)$$

Ако во формулата (9) ставиме $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ за w добиваме n различни вредности $w_0, w_1, ..., w_{n-1}$. Ставајќи $k = n$, заради периодичноста на тригонометриските функции повторно го добиваме бројот w_0 итн. Според тоа, $n-$от корен од комплексниот број z, има точно n различни вредности, кои се добиваат од формулата (9) за $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

0.9. Пример. Најдете $\sqrt[3]{27i^5}$.

Решение. Од

$$i^5 = i^4 \cdot i = i = \cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}$$

добиваме

$$\sqrt[3]{27i^5} = \sqrt[3]{27i} = \sqrt[3]{27\left(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}\right)}$$
$$= 3\left(\cos\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3}\right)$$
$$= 3\left(\cos\frac{(4k+1)\pi}{6} + i\sin\frac{(4k+1)\pi}{6}\right)$$

за $k = 0, 1, 2$. ♦

0.10. $n-$**ти корени на единицата.** Ако $z = 1$, тогаш $\arg z = 0$ и според (9) $n-$те различни корени на бројот 1 се зададени со

$$u_k = \cos\tfrac{2k\pi}{n} + i\sin\tfrac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1. \quad (10)$$

Ако ставиме $u = u_1 = \cos\tfrac{2\pi}{n} + i\sin\tfrac{2\pi}{n}$, тогаш од Моавровата формула добиваме $u_k = u^k$, $k = 0, 1, ..., n-1$.

Да забележиме дека, во геометриска смисла, при $n \geq 3$, точките во комплексната рамнина чии афикси се $n-$те корени на единицата образуваат правилен $n-$аголник, впишан во единечната кружница и едно теме на $n-$аголникот се совпаѓа со точката чиј афикс е $z = 1$.

0.10. Пример. Нека

$$S_p = \sum_{k=0}^{n-1} u_k^p$$

е збирот на $p-$тите степени на $n-$те корени на единицата, $n\in\mathbf{N}$. Докажете дека

$$S_p=\begin{cases} n, & \text{ако}\, n\mid p \\ 0, & \text{ако}\, n\nmid p. \end{cases}$$

Решение. Од $u_k=u^k,\ \ k=0,1,...,n-1$ и $u=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$, добиваме

$$S_p=1+u^p+u^{2p}+...+u^{(n-1)p}. \qquad (11)$$

Ако $n\mid p$ и $\frac{p}{n}=m,$ тогаш $u^p=(u^n)^m=1$ и од (11) следува $S_p=n.$

Нека $n\nmid p.$ Притоа важи $u^{np}=1.$ Од $n\nmid p$ следува $u^p-1\neq 0,$ па затоа

$$S_p=1+u^p+u^{2p}+...+u^{(n-1)p}=\frac{u^{np}-1}{u^p-1}=0. \ ♦$$

0.11. Дефиниција. Комплексниот број u го нарекуваме **примитивен n-ти корен** на единицата, ако $u^n=1$ и ниеден понизок степен на u не е еднаков на 1.

0.12. Пример. Ако $u_k=u^k,\ \ k=0,...,n-1$ се n-те корени на единицата, тогаш u_k е примитивен n-ти корен на единицата ако и само ако n и k се заемно прости броеви.

Решение. Нека n и k се заемно прости броеви и да допуштиме дека за некој $r<n$ важи $u_k^r=1.$ Од Моавровата формула имаме $1=u_k^r=\cos\frac{2kr\pi}{n}+i\sin\frac{2kr\pi}{n}.$ Од последното равенство имаме

$$\cos\frac{2kr\pi}{n}=1,\quad \sin\frac{2kr\pi}{n}=0.$$

Според тоа, $\frac{kr}{n}\in\mathbf{Z}$ и како n и k се заемно прости добиваме $n\mid r,$ што не е можно бидејќи $r<n$. Значи, u_k е примитивен n-ти корен на единицата.

Обратно, нека u_k е примитивен n-ти корен на единицата. Да претпоставиме дека најголемиот заеднички делител на n и k е $d,\ \ d>1.$ Нека $k=k_1d,\ \ n=n_1d.$ Тогаш

$$u_k^{n_1}=(u_1^k)^{n_1}=u_1^{n_1k}=u_1^{k_1dn_1}=u_1^{k_1n}=(u_1^n)^{k_1}=1$$

што противречи на примитивноста на u_k, бидејќи $n_1<n.$ ♦

г) Експоненцијален запис на комплексен број

0.13. Во досегашните разгледувања го презентиравме тригонометрискиот запис на комплексните броеви. Во овој дел ќе се задржиме на таканаречениот екпоненцијален запис на комплексните броеви.

Теорема. Нека функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ е дефинирана со

$$f(\alpha)=\cos\alpha+i\sin\alpha\text{, за секој } \alpha\in\mathbf{R}.$$

Тогаш,

а) $f(\alpha)\neq 0$, $\forall\alpha\in\mathbf{R}$.

b) $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)f(\beta)$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}$.

в) $f(-\alpha)=\frac{1}{f(\alpha)}$, $\forall\alpha\in\mathbf{R}$

Доказ. а) Нека постои $\alpha\in\mathbf{R}$, таков што $f(\alpha)=0$. Според тоа, постои $\alpha\in\mathbf{R}$, таков што $\cos\alpha+i\sin\alpha=0$, односно $f(\alpha)=\cos\alpha+i\sin\alpha$, што противречи на основниот тригонометриски идентитет $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

б) За секои $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ важи

$$f(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$
$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=f(\alpha)f(\beta).$$

в) За секој $\alpha\in\mathbf{R}$ имаме

$$f(-\alpha)=\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)=\cos\alpha-i\sin\alpha$$
$$=\frac{(\cos\alpha-i\sin\alpha)(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{\cos\alpha+i\sin\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha+i\sin\alpha}=\frac{1}{f(\alpha)}$$

0.14. Во претходната теорема докажавме дека функцијата f ги задоволува вообичаените својства на експоненцијалната функција, па затоа природно е да ја воведеме ознаката $f(\alpha)=e^{i\alpha}$, за секој $\alpha\in\mathbf{R}$. При вакво означување својствата б) и в) од претходната теорема можеме да ги запишеме во обликот

$$e^{i\alpha}e^{i\beta}=e^{i(\alpha+\beta)} \qquad (12)$$

$$e^{-i\alpha}=\frac{1}{e^{i\alpha}}. \qquad (13)$$

Ако ги искористиме релациите (12) и (13) и принципот на математичка индукција, тогаш добиваме

$$(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}, \text{ за } n = 0, \pm1, \pm2, \ldots . \quad (14)$$

0.15. Ојлерови формули. Од досега изнесеното следува дека секој комплексен број z, таков што $|z|=1$ и $\varphi = \arg z$ може да се запише во обликот

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}. \quad (15)$$

Притоа,

$$e^{2\pi i} = 1, e^{\pi i} = -1, e^{\frac{\pi i}{2}} = i, e^{\frac{3\pi i}{2}} = -i .$$

Ако φ го замениме со $-\varphi$ добиваме

$$\cos\varphi - i\sin\varphi = e^{-i\varphi}. \quad (16)$$

Од релациите (15) и (16) ги добиваме познатите **Ојлерови формули**:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2}, \quad (17)$$

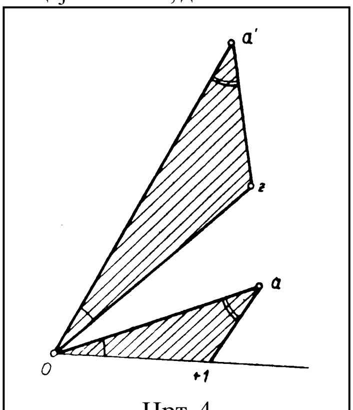
со чија помош тригонометриските функции $\cos$ и $\sin$ се изразуваат преку експоненцијалната функција.

0.16. Од формулите (16) и (22) следува дека секој комплексен број $z \neq 0$ можеме да го запишеме во обликот

$$z = re^{i\varphi}, \quad (18)$$

каде $r = |z|$ и $\varphi = \arg z$. Записот (36) на комплексниот број $z \neq 0$ го нарекуваме **експоненцијален запис** на z.

Ако ги искористиме формулите (12) и (13), тогаш за операциите множење и делење на комплексни броеви, запишани во експоненцијален запис, добиваме



Црт. 4

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad (19)$$

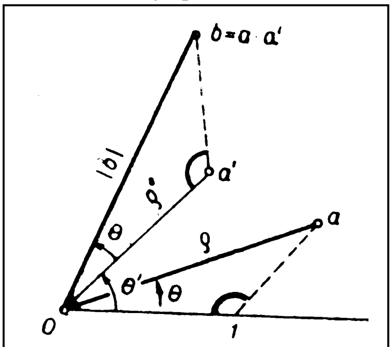
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \quad (20)$$

Нека $z = re^{i\varphi}$. Според (15) и (16) добиваме $\bar{z} = re^{-i\varphi}$. Значи, ако $\varphi = \arg z$, тогаш $-\varphi = \arg \bar{z}$.

0.19. Нека со E ја означиме точката чиј афикс е 1. Да ги разгледаме точките A и A' чии афикси се $a = \rho e^{i\theta}$ и $a' = \rho' e^{i\theta'}$, соодветно. На производот $b = aa'$ соодветствува точка B, која ја добиваме како трето теме на триаголникот $OA'B$, ако овој триаголник го конструираме така што да биде сличен со триаголникот OEA.

Навистина, од сличноста на овие триаголници следува дека $\angle EOA = \angle A'OB$, односно $\arg b = \theta + \theta'$. Од исти причини точно е равенството $\rho : 1 = |b| : \rho'$, т.е. важи $b = \rho\rho'$, па затоа $b = aa'$.

Точката Z чиј афикс е комплексниот број



Црт. 5

$z = \frac{a'}{a}$ се добива со конструкција на триаголник OZA' кој е сличен на триаголникот OEA. Навистина, од сличноста на овие триаголници следува дека $az = a'$, па затоа $z = \frac{a'}{a}$, (црт. 4).

Ако ја искористиме релацијата $a^n = a^{n-1}a$ и ги примениме постапките за конструкција на афиксите за производ и количник на два комплексни броја последователно можеме да ги конструираме точките $\ldots, A_{-2}, A_{-1}, E, A_1, A_2, \ldots$ чии афикси се комплексните броеви $\ldots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \ldots$, соодветно.

Нека $r > 1$ и $0 < \alpha < \pi$. Точките $A_2, A_3, ...$ (црт. 6), чии афикси се комплексните броеви $a^2, a^3, ...$ се добиваат со последователно конструирање на сличните триаголници $OEA_1, OA_1A_2, OA_2A_3, ...$.

Ако со оваа постапка, но во обратна насока ги конструираме сличните триаголници $OEA_1, OA_{-1}E, OA_{-2}A_{-1}, OA_{-3}A_{-2}, ...$ ги добиваме точките $A_{-1}, A_{-2}, A_{-3}, ...$ чии афикси се броевите $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, ...$. Ако ставиме $\rho = r^n, \theta = n\alpha$ и од овие равенки го елиминираме n добиваме дека $\rho = r^{\frac{\theta}{\alpha}}$. Според тоа, сите степени a^n лежат на кривата која во поларни координати е дадена со претходната релација. Оваа крива во литературата е позната како логаритамска (Bernoulli-ева) спирала

Јасно, во претходните разгледувања модулите на степените растат или опаѓаат по геометриска, а аргументите по аритметичка прогресија.

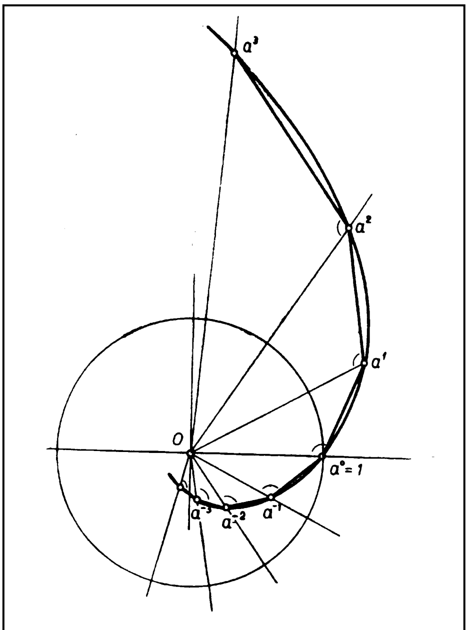
Да забележиме дека, ако $r < 1$ и $0 < \alpha < \pi$, или $r > 1$ и $-\pi < \alpha < 0$, тогаш логаритамската спирала е во спротивна насока од спиралата дадена на црт. 8, и се обвиткува околу координатниот почеток додека θ расте. Меѓутоа, ако $r < 1$ и $-\pi < \alpha < 0$, тогаш логаритамската спирала го има истиот облик како на црт. 6.

1. РАВЕНКА НА ПРАВА

1.1. Нека правата (p) не поминува низ координатниот почеток и нека точката A, со афикс a, е симетрична на координатниот почеток O во однос на правата (p). Тогаш, точката B, со афикс z, припаѓа на правата (p) ако и само ако $\overline{OB} = \overline{OA}$, т.е. $|z| = |z - a|$, односно $z\bar{z} = (z-a)(\bar{z} - \bar{a})$. Последното равенство можеме да го запишеме во обликот

$$\bar{a}z + a\bar{z} = a\bar{a}. \qquad (1)$$

Ако правата (p) минува низ координатниот почеток и точките A и A', со афикси a и a', соодветно, се заемно симетрични во однос на координатниот почеток и во однос на (p), тогаш за произволна точка, со афикс z, од правата (p) важи $\overline{AB} = \overline{A'B}$, т.е. $|z + a| = |z - a|$, односно $(z+a)(\bar{z} + \bar{a}) = (z-a)(\bar{z} - \bar{a})$. Последното



Црт. 6

равенство можеме да го запишеме во обликот

$$\bar{a}z + a\bar{z} = 0. \qquad (2)$$

Ако $a = re^{i\varphi}$, тогаш $\bar{a} = re^{-i\varphi}$, па ако равенките (1) и (2) ги поделиме со $\bar{a}$ ги добиваме равенките

$$z = \eta\bar{z} + a \qquad (3)$$

и

$$z = \eta\bar{z}, \qquad (4)$$

каде $\eta = -\frac{a}{\bar{a}} = -e^{2i\varphi}$. Бројот η го нарекуваме **комплексен аглов коефициент** за правата (p), а точка A ја нарекуваме **огледална точка** на правата (p). Очигледно секоја права (p), која не минува низ координатниот почеток е определена со огледалната точка A, со афикс $a = re^{i\varphi}$, и комплексниот аглов коефициент $\eta = -e^{2i\varphi}$, а секоја права (p) која минува низ координатниот почеток еднозначно е определена со својот комплексен аглов коефициент. Лесно се докажува дека и во двата случаи аголот меѓу правата (p) и позитивниот дел на реалната оска е $\alpha = \varphi - \frac{\pi}{2}$.

Според тоа, важи теоремата.

Теорема. Ако A, со афикс a, е симетричната точка на координатниот почеток во однос на дадена права (p) која не минува низ координатниот почеток и ако φ е ориентираниот агол меѓу реалната оска и нормалата спуштена од координатниот почеток кон (p), тогаш (p) има равенка (3), каде $\eta = -e^{2i\varphi}$. Ако (p) минува низ координатниот почеток, тогаш нејзината равенка е дадена со (4). ♦

1.2. Теорема. Правата (p) која минува низ две различни точки A и B со афикси z_0 и z_1, соодветно, има равенка

$$z - z_0 = \frac{z_1 - z_0}{\overline{z_1} - \overline{z_0}}(\overline{z} - \overline{z_0}) \tag{5}$$

и комплексен аглов коефициент

$$\eta = \frac{z_1 - z_0}{\overline{z_1} - \overline{z_0}}. \tag{6}$$

Доказ. Афиксите z_0 и z_1 на точките A и B ги заменуваме во равенката (3) и добиваме $z_0 = \eta\overline{z_0} + a$ и $z_1 = \eta\overline{z_1} + a$. Ако ги одземеме последните две равенки за комплексниот аглов коефициент наоѓаме $\eta = \frac{z_1 - z_0}{\overline{z_1} - \overline{z_0}}$, т.е. вбажи равенството (6). Со замена во $z_0 = \eta\overline{z_0} + a$ добиваме $a = z_0 - \frac{z_1 - z_0}{\overline{z_1} - \overline{z_0}}\overline{z_0}$, па ако добиените вредности за η и a ги замениме во равенката (3) ја добиваме равенката (5). ♦

1.3 Последица. Точките z_0, z_1 и z_2 се колинеарни ако и само ако

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{\overline{z_2} - \overline{z_0}}{\overline{z_1} - \overline{z_0}}. \tag{7}$$

Доказ. Според теорема 1.2 равенката на правата (p) која минува низ точките z_0 и z_1 е дадена со (5). Точките z_0, z_1 и z_2 се колинеарни ако и само ако z_2 ја задоволува равенката (5), што значи ако и само ако е исполнето равенството

$$z_2 - z_0 = \frac{z_1 - z_0}{\overline{z_1} - \overline{z_0}}(\overline{z_2} - \overline{z_0}),$$

кое е еквивалентно на равенството (7). ♦

1.4. Последица. Точките z_0, z_1 и z_2 се колинеарни ако и само ако $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \in \mathbf{R}$.

Доказ. Непосредно следува од последица 1.3 и својствата на комплексните броеви. ♦

1.5. Забелешка. Бидејќи $|\eta| = \left|\frac{z_1 - z_0}{\overline{z_1} - \overline{z_0}}\right|$ равенката (5) можеме да ја запишиеме во обликот

$$z - z_0 = \eta(\overline{z} - \overline{z_0}),\ |\eta| = 1 \tag{8}$$

Обратно, секоја равенка од обликот (8) е равенка на права.

Навистина, од $|\eta| = 1$ следува дека $\eta = e^{2i\varphi}$, за некој $\varphi \in [0, \pi)$. Ако сега ја составиме равенката на права која минува низ точките z_0 и $z_1 = z_0 + e^{i\varphi}$, ја добиваме равенката (8).

1.6. Забелешка. Според теорема 1.1 правата која минува низ точката $z_0 \neq 0$ и координатниот почеток има равенка

$$z = \eta\overline{z},\ \eta = \frac{z_0}{\overline{z_0}} = e^{2i\varphi} \tag{9}$$

и истата ги содржи точките чии афикси се квадратните корени на комплексниот аглов коефициент η.

Навистина, ако во равенката (9) замениме една од двете вредности на квадратниот корен на η, добиваме

$$\eta\overline{\sqrt{\eta}} = \sqrt{\eta}^2\overline{\sqrt{\eta}} = \sqrt{\eta}\,|\sqrt{\eta}|^2 = \sqrt{\eta}\cdot 1 = \sqrt{\eta}$$

т.е. точките чии афикси се $\sqrt{\eta}$ ја задоволуваат равенката (9).

1.7. Теорема. Ориентираниот агол φ меѓу правите (p) и (q) со комплексни аглови коефициенти $\eta_1 = -e^{2i\varphi_1}$ и $\eta_2 = -e^{2i\varphi_2}$, соодветно, е даден со формулата $e^{2i\varphi} = \frac{\eta_1}{\eta_2}$.

Доказ. Според теорема 1.1 правите (p') и (q'), нормални на (p) и (q), со позитивниот дел на реалната оска зафаќаат ориентирани агли φ_1 и φ_2, соодветно. Значи, ориентираниот агол меѓу овие прави е $\varphi=\varphi_2-\varphi_1$ и тој е еднаков на аголот меѓу правите (p) и (q), како агли со нормални краци. Сега тврдењето на теоремата следува од релацијата

$$\frac{\eta_1}{\eta_2}=\frac{-e^{2i\varphi_1}}{-e^{2i\varphi_2}}=e^{2i(\varphi_2-\varphi_1)}=e^{2i\varphi}\,. \ ♦$$

1.8. Равенството $\varphi=0$ е еквивалентно со тавенството $\eta_1=\eta_2$, а равенството $\varphi=\frac{\pi}{2}$ е еквивалентно со равенството $\eta_1=-\eta_2$, па затоа е точна следната последица.

Последица. а) Две прави се паралелни ако и само ако имаат еднакви комплексни аглови коефициенти.

б) Две прави се заемно нормални ако и само ако имаат спротивни комплексни аглови коефициенти. ♦

1.9. Пример. Во рамнината се дадени две различни точки A и B чии афикси се z_1 и z_2, соодветно. Одредете го афиксот p' на точката P', симетрична на точката P со афикс p, во однос на правата AB.

Решение. Низ точката P повлекуваме права l, нормална на правата AB и го наоѓаме пресекот P_1 на оваа права со правата AB. Сега $P_1(p_1)$ е средина на отсечката PP', т.е. $p_1=\frac{p+p'}{2}$, односно $p'=2p_1-p$.

Правата низ точките A и B има равенка

$$z-z_1=\frac{z_2-z_1}{\overline{z_2-z_1}}(\overline{z}-\overline{z_1})\,. \tag{10}$$

Комплексниот аглов коефициент на правата l е $\eta_1=-\frac{z_2-z_1}{\overline{z_2-z_1}}$, па затоа нејзината равенка е

$$z-p=-\frac{z_2-z_1}{\overline{z_2-z_1}}(\overline{z}-\overline{p})\,. \tag{11}$$

Ако ги собереме равенките (10) и (11) го добиваме афиксот p_1 на точката P_1:

$$p_1=\frac{(\overline{p}-\overline{z_1})(z_2-z_1)+(\overline{z_2}-\overline{z_1})(p+z_1)}{2(\overline{z_2}-\overline{z_1})} \tag{12}$$

Со замена од (12) во равенката $p'=2p_1-p$ за афиксот p' на P' наоѓаме:

$$p'=\frac{\overline{p}(z_2-z_1)+\overline{z_2}z_1-z_2\overline{z_1}}{\overline{z_2}-\overline{z_1}}\,. \ ♦$$

1.10. Пример. Најдете го геометриското место на точки кои се еднакво оддалечени од две дадени точки A и B.

Решение. Нека афиксите на точките A и B се a и b соодветно, и нека точката M со афикс z припаѓа на бараното геометриско место. Тогаш од $\overline{MA}=\overline{MB}$ следува $|z-a|^2=|z-b|^2$. Последната равенка е еквивалентна на равенката $z-\frac{a+b}{2}=-\frac{b-a}{\overline{b-a}}(\overline{z}-\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2})$. Според тоа, бараното геометриско место е права која минува низ средината на отсечката AB и е нормална на правата AB. ♦

2. РАСТОЈАНИЕ ОД ТОЧКА ДО ПРАВА

2.1. Лема. Равенката на права

$$z-z_0=\frac{z_1-z_0}{\overline{z_1-z_0}}(\overline{z}-\overline{z_0})$$

може да се запише во обликот

$$Az+B\overline{z}+C=0\,,\ C\in\mathbf{R} \text{ и } B=\overline{A}\neq 0\,. \tag{1}$$

Обратно, секоја равенка од обликот (1) е равенка на права.

Доказ. Нека е дадена равенката

$$z-z_0=\frac{z_1-z_0}{\overline{z_1-z_0}}(\overline{z}-\overline{z_0})\,.$$

Имаме

$$z(\overline{z_1}-\overline{z_0})-\overline{z}(z_1-z_0)+\overline{z_0}z_1-z_0\overline{z_1}=0\,.$$

Ако последната равенка ја помножиме со i добиваме

$$i(\overline{z_1}-\overline{z_0})z-i(z_1-z_0)\overline{z}+i(\overline{z_0}z_1-z_0\overline{z_1})=0\,.$$

Земаме

$$A=i(\overline{z_1}-\overline{z_0}),\ B=-i(z_1-z_0),\ C=i(\overline{z_0}z_1-z_0\overline{z_1})$$

и за равенката на правата низ точките A и B со афикси z_0 и z_1 добиваме равенка од облик (1).

Обратно, нека е дадена равенката (1). Ако поделиме со A и ставиме $\eta=-\frac{B}{A}$, $a=-\frac{C}{A}$, тогаш добиваме равенка од облик

$z=\eta\bar{z}+a, |\eta|=1$ и според теорема 1.1 е равенка на права. ♦

2.2. Дефиниција. Равенката (1) ја нарекуваме **автокоњугирана** равенка на права.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ