Нумерички методи за решавање на равенки со една непозната

Ирена Стојковска
Институт за математика, Природно-математички факултет,
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје

Нека е дадена *равенката со една непозната*

$$f(x)=0, \tag{1}$$

каде $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е дадена реална функција со домен D. Да се реши равенката (1), значи да се најде $x\in D$ за кое е исполнето равенството (1). Сите такви вредности x го сочинуваат *множеството решенија* на равенката (1).

1. Видови на равенки со една непозната, природа на решенијата и локализирање на решенијата

Вообичаена поделба на равенките со една непозната е на:

А. *Алгебарски равенки*, од облик

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots a_{n-1}x+a_n=0, \quad a_0\neq 0. \tag{2}$$

Б. *Трансцедентни равенки*, односно оние равенки (1) кои не се од облик (2).

Најнапред ќе наведеме неколку поми и особини на алгебарските равенки со реални коефициенти $a_k\in\mathbb{R}$, $k=0,1,\dots,n$. Бројот n се нарекува *степен на алгебарската равенка*. Решенијата на алгебарските равенки вообичаено е да се нарекуваат *корени* на равенката. Коренот x_1 има *кратност* s, ако алгебарскиот израз $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots a_{n-1}x+a_n$ е делив со $(x-x_1)^s$, но не е делив со $(x-x_1)^{s+1}$, односно со други зборови кога ќе се најдат сите корени на равенката, вредноста на коренот x_1 се среќава точно s пати. За алгебарските равенки важат следните тврдења:

А1. Една алгебарска равенка од n-ти степен има n корени вклучувајќи ги и кратностите на корените.

А2. Комплексните корени се јавуваат во парови комплексно конјугирани броеви, односно ако $a+ib$ е корен на равенката, тогаш и $a-ib$ е нејзин корен. При тоа, ако $a+ib$ има кратност s, тогаш и $a-ib$ има кратност s.

А3. Ако степенот на алгебарската равенка е непарен, тогаш таа има барем едно реално решение.

А4. Ако $x_1,x_2,\dots,x_n$ се сите корени на алгебарската равенка, тогаш таа може да се запише во *нормиран облик* кој гласи

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)=0.$$

А5. Ако $a_n\neq 0$, тогаш за решенијата x_k на алгебарската равенка важат следните неравенства

$$r=\frac{1}{1+\frac{B}{|a_n|}}<|x_k|<1+\frac{A}{|a_0|}=R,$$

каде $A=\max\{|a_1|,|a_2|,\dots,|a_n|\}$ и $B=\max\{|a_0|,|a_1|,\dots,|a_{n-1}|\}$.

А6. Нека алгебарската равенка е со целобројни коефициенти $a_k\in\mathbb{Z}$, $k=0,1,\dots,n$. Ако постои рационален корен $\frac{p}{q}$ на равенката, тогаш важи дека p е делител на a_n и q е делител на a_0.

Пример 1. Равенката $x^4-9x^2+4x+12=0$, запишана во еквивалентен облик е $(x+3)(x+1)(x-2)^2=0$, од каде ги наоѓаме нејзините решенија $x_1=-3$, $x_2=-1$, $x_3=x_4=2$. Значи, равенката има четири реални корени, од кои -3 и -1 се сократност 1, а коренот 2 е со кратност 2. Понатаму, за оваа равенка важи

$$A=\max\{|a_1|,|a_2|,...,|a_n|\}=\max\{|-9|,|4|,|12|\}=12,$$

$$B=\max\{|a_0|,|a_1|,...,|a_{n-1}|\}=\max\{|1|,|-9|,|4|\}=9,$$

па според тврдењето А5, за корените на равенката треба да важи

$$|x_k|<1+\frac{A}{|a_0|}=1+\frac{12}{|1|}=13 \text{ и } |x_k|>\frac{1}{1+\frac{B}{|a_n|}}=\frac{1}{1+\frac{9}{|12|}}=\frac{4}{7}.$$

Навистина, за $x_1=-3$, $x_2=-1$, $x_3=x_4=2$ важи дека $\frac{4}{7}<|x_k|<13$, $k=1,2,3,4$.

Пример 2. Равенката $x^4-x^2-2=0$, запишана во еквивалентен облик е $(x^2-2)(x^2+1)=0$, од каде нејзините решенија се $x_1=\sqrt{2}$, $x_1=-\sqrt{2}$, $x_3=i$, $x_4=-i$. Па, равенката има два реални корена $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$, и два комплексни корена кои се пар конјугирано комплексни броеви, тоа се i и $-i$. Бидејќи,

$$A=\max\{|a_1|,|a_2|,...,|a_n|\}=\max\{|-1|,|-2|\}=2,$$

$$B=\max\{|a_0|,|a_1|,...,|a_{n-1}|\}=\max\{|1|,|-1|\}=1,$$

според тврдењето А5, за овие корени треба за важи

$$|x_k|<1+\frac{A}{|a_0|}=1+\frac{2}{|1|}=3 \text{ и } |x_k|>\frac{1}{1+\frac{B}{|a_n|}}=\frac{1}{1+\frac{1}{|-2|}}=\frac{2}{3},$$

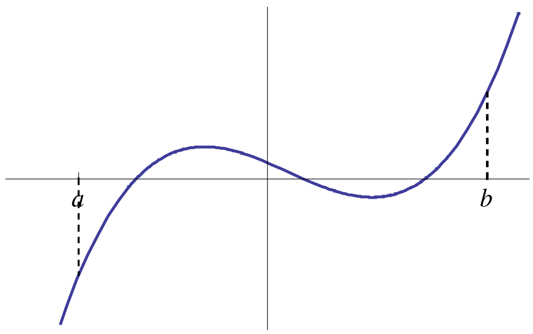
што не е тешко да се провери дека е точно.

Може да забележиме дека тврдењето А5 ни овозможува да најдеме интервали во кои се наоѓаат реалните решенија на алгебарската равенка. Така, за равенката од Пример 1, позитивните реални корени сигурно се во интервалот $(\frac{4}{7},13)$, додека негативните корени се во интервалот $(-13,-\frac{4}{7})$. Постојат и тврдења кои наоѓаат потесни интервали во кои се наоѓаат позитивните, односно негативните решенијата на една алгебарска равенка, [2, 3]. Од друга страна, постапките за наоѓање на интервали во кои се наоѓаат решенијата на една трансцедентна равенка, произлегуваат од некои тврдења од диферернцијално сметање. Следните тврдења важат и за трансцедентни и за алгебарски равенки, односно за равенка од облик (1):

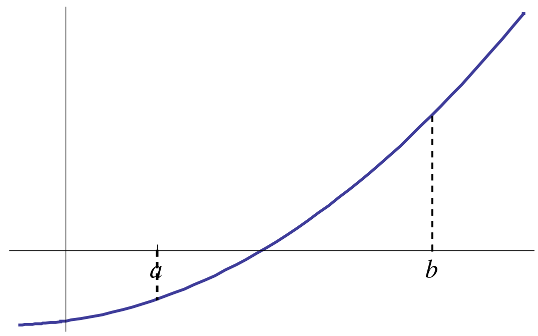
АБ1. Ако функцијата f е непрекината, и на краевите на интервалот $[a,b]$ прима вредности со спротивен знак, односно $f(a)f(b)<0$, тогаш постои барем едно решение на равенката (1) кое се наоѓа во внатрешноста на интервалот $[a,b]$. (Слика 1)

АБ2. Ако изводот f' не го менува знакот на интервалот $[a,b]$ (т.е. f е строго монотона на $[a,b]$) и важи $f(a)f(b)<0$, тогаш постои *единствено* решение на равенката (1) кое се наоѓа во внатрешноста на интервалот $[a,b]$. (Слика 2)

АБ3. Ако $f(a)f(b)>0$ и f има непрекинат втор извод f'' кој не го менува знакот на $[a,b]$ (т.е. f е конвексна или конкавна на $[a,b]$), тогаш равенката (1) може да има или две решенија или едно решение со парна кратност или да нема решенија.



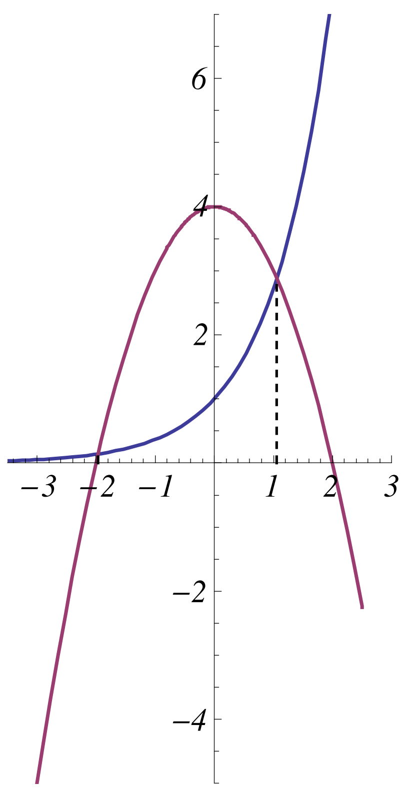
Слика 1.



Слика 2.

Наоѓањето на интервал $[a,b]$, во кој равенката (1) има единствено решение, се нарекува *локализирање* на решението. Тврдењата АБ1-АБ3 ни овозможуваат аналитички да ги локализираме решенијата на една равенка.

Пример 3. За да ги локализираме реалните решенија на равенката од Пример 2, означуваме со $f(x)=x^4-x^2-2$. Бидејќи, $f(1)=-2$, $f(2)=10$, и функцијата f е монотона на $[1,2]$, затоа што $f'(x)=4x^3-2x=2x(2x^2-1)>0$ за секој $x\in[1,2]$, заклучуваме дека во интервалот $[1,2]$ се наоѓа точно едно решение на дадената равенка. Слично, се покажува дека и интервалот $[-2,-1]$ содржи точно едно решение на равенката.



Слика 3.

Аналитичкиот пристап често се изведува со „нагаѓање“, што не е практично во повеќе од случаите, кога функцијата f има посложен облик. Во тој случај се препорачува *графичкиот пристап* за локализирање на решенијата. Имено, решенијата на равенката (1) геометриски претставуваат апциси на пресечните точки на $y=f(x)$ со x-оската. Доколку, не е тешко да се скицира графикот на $y=f(x)$, тогаш би ги нашле интервалите каде се наоѓаат решенијата. Меѓутоа, многу често се применува еквивалентен запис на равенката (1) во облик

$$g(x)=h(x), \qquad (3)$$

за да со помош на графиците на $y=g(x)$ и $y=h(x)$, нацртани во ист координатен систем, ги локализираме решенијата, кои графички претставуваат апциси на пресечните точки на графиците на овие две криви.

Пример 4. Графичкиот метод за локализирање на решенијата може да го примениме на равенката $e^x + x^2 - 4 = 0$. Најнапред, дадената равенка ја запишуваме во еквивалентен облик $e^x = -x^2 + 4$. Потоа, ги скицираме графиците на функциите $y = e^x$ и $y = -x^2 + 4$. Согледуваме дека дадената равенка има два реални корени, локализирани во интервалите $[-2, -1]$ и $[1, 2]$ соодветно. (Слика 3)

2. Методи за решавање на равенки со една непозната

Методите за решавање на равенката (1) може да бидат *точни* или *приближни*. Релативно мал е бројот на функции $f(x)$ за кои постојат точни методи за решавање на равенката (1). Дури и алгебарските равенки (2), не се така едноставни за решавање, имено за нив постојат точни методи за решавање заклучно до четвртиот степен, $n \leq 4$. На пример, решенијата на квадратните равенки се наоѓаат директно и точно по формула изразена со помош на коефициентите на равенката, реални броеви, и операциите собирање, одземање, множење, делење, степенување и коренување. Во општ случај, кога алгебарската равенка е од степен $n \geq 5$, неизводливо е да се напише општа формула со конечно многу од споменатите операции над коефициентите на равенката и реални броеви. Во вакви случаи, а и кај најголем број на трансцедентни равенки, се применуваат методи за нивно приближно решавање со кои се добиваат приближни решенија со однапред зададена *точност*. Имено, се бара да се најде приближно решение $\bar{x}$ кое отстапува од точното решение ξ помалку од зададената точност $\varepsilon > 0$, т.е. $|\bar{x} - \xi| < \varepsilon$.

Приближните методи се начесто *итеративни* методи, кои почнувајќи од почетно приближивање x_0, генерираат низа од приближувања $x_1, x_2, x_3, \ldots$, која под одредени услови конвергира кон решението ξ, т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \xi$. Затоа, важен дел од методот е одредување на *критериум за запирање*, односно одредување на n за кое приближувањето x_n може да се земе за приближно решение на равенката со точност $\varepsilon > 0$.

Постојат повеќе приближни методи за решавање на равенки со една непозната: метод на преполовување, метод на последователни приближувања, Њутнов метод (или Њутн-Рафсонов метод, или метод на тангенти), метод регула фалси (или метод на секанти), како и разни нивни модификации и комбинации. Овде ќе ги обработиме првите два од наведените методи, метод на преполовување и метод на последователни приближувања.

2.1. Метод на преполовување

Ја разгледуваме равенката (1), каде f е непрекината функција на интервалот $[a,b]$ и $f(a)f(b) < 0$, односно равенката (1) има барем едно реално решение на интервалот $[a,b]$. Со точката $c = \frac{a+b}{2}$, која претставува средина на $[a,b]$, го делиме (преполовуваме) интервалот $[a,b]$ на два подинтервала $[a,c]$ и $[c,b]$. Проверуваме на кој од овие интервали f го менува знакот. Ако $f(a)f(c) < 0$, тогаш за нов интервал на кој ја продолжуваме постапката на преполовување го земаме интервалот $[a,c]$. Ако $f(c)f(b) < 0$, тогаш продолжуваме да го преполовуваме интервалот $[c,b]$. Ако го означиме со

$[a_n, b_n]$ интервалот кој го преполовуваме во n-тиот чекор (за почеток $[a_0, b_0]$ е почетниот интервал $[a, b]$), добиваме низа од интервали

$$[a_0, b_0], [a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$$

кои се вгнездени еден во друг, односно

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0,$$

и за кои важи

$$f(a_n) f(b_n) < 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Затоа, точно е тврдењето дека за решението ξ на равенката (1), важи

$$\xi = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n,$$

па a_n и b_n може да се сметаат за приближувања на решението. Понатаму, бидејќи за должината на овие интервали важи

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

тогаш ако за приближување на решението во n-тиот чекор ја земеме средината на $[a_n, b_n]$, односно $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, за него ќе важи

$$| x_n - \xi | \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2^{n+1}}(b - a).$$

Па, ако сакаме да најдеме приближно решение на (1) со точност $\varepsilon > 0$, ќе треба да "преполовуваме" се додека $\frac{1}{2}(b_n - a_n) \geq \varepsilon$, односно $\frac{1}{2^{n+1}}(b - a) \geq \varepsilon$. Не е тешко да се покаже дека, за приближно решение со точност $\varepsilon > 0$, треба да го земеме $\overline{x} = x_n$, за $n = \left[\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}\right] + 1$.

Запишан алгоритамски (со псевдо код), методот на преполовување изгледа вака:

Алгоритам (метод на преполовување).
Дадени: $f(x)$, $[a, b]$, $\varepsilon > 0$.
Стави: $c \leftarrow \frac{a+b}{2}$
Се додека $\frac{1}{2}(b - a) \geq \varepsilon$
    Ако $f(a) f(c) < 0$, **тогаш**
        $b \leftarrow c$
    инаку ако $f(c) f(b) < 0$, **тогаш**
        $a \leftarrow c$
    Крај (на ако)
    Стави: $c \leftarrow \frac{a+b}{2}$
Крај (на додека)
Печати: c

Понатаму овој алгоритам може да се искодира со некој програмски јазик (Pascal, Basic, FORTRAN, C, Mathematica, MATLAB,…), за да побрзо и попрецизно дојдеме до решението на равенката. Методот на преполовување ќе го илустрираме на следниот пример.

Пример 5. Равенката $2x-\sqrt{x^2+1}=0$ има еден реален корени кој е локализиран на интервалот $[0,1]$ (дадената равенка може да се запише во еквивалентен облик $4x^2=x^2+1$, $x\geq 0$, и не е тешко да се види дека апцисата на пресечната точка на графиците на кривите $y=4x^2$ и $y=x^2+1$ која има позитивна x-координата е во интервалот $[0,1]$). Со методот на преполовување ќе го најдеме коренот со точност $\varepsilon=10^{-3}$. Ја правиме следната табела, каде $f(x)=2x-\sqrt{x^2+1}$, и секој меѓу резултат го даваме заокружен на две децимали повеќе отколку што бара точноста, односно на 5 децимали. Постапката ќе запре, тогаш кога $\frac{1}{2}(b-a)<\varepsilon=10^{-3}$.

k	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	(b-a)/2
0	0.00000	1.00000	0.50000	-1.00000	0.58579	-0.11803	0.50000
1	0.50000	1.00000	0.75000	-0.11803	0.58579	0.25000	0.25000
2	0.50000	0.75000	0.62500	-0.11803	0.25000	0.07075	0.12500
3	0.50000	0.62500	0.56250	-0.11803	0.07075	-0.02235	0.06250
4	0.56250	0.62500	0.59375	-0.02235	0.07075	0.02451	0.03125
5	0.56250	0.59375	0.57812	-0.02235	0.02451	0.00116	0.01562
6	0.56250	0.57812	0.57031	-0.02235	0.00116	-0.01057	0.00781
7	0.57031	0.57812	0.57422	-0.01057	0.00116	-0.00470	0.00391
8	0.57422	0.57812	0.57617	-0.00470	0.00116	-0.00177	0.00195
9	0.57617	0.57812	0.57715	-0.00177	0.00116	-0.00030	0.00098<ε

За приближно решение на дадената равенка со точност $\varepsilon=10^{-3}$, ја земаме вредноста на c (средината на последниот интервал) заокружена на 3 децимали, т.е. $\overline{x}=c=0.57715\approx 0.577$.

2.2. Метод на последователни приближувања

Нека f е непрекината функција. Равенката (1) ја запишуваме во нејзин еквивалентен облик

$$x=\varphi(x). \tag{4}$$

Записот (4) не е еднозначен, тривијален начин да се направи тоа е со додавање на x од двете страни на равенката (1), и тогаш $\varphi(x)=f(x)+x$. Подоцна ќе видиме дека не секој еквивалентен запис (4) е погоден за применување на методот на последователни приближувања, односно не секој запис доведува до конвергенција на низата приближивања кон точното решение ξ на равенката (1). Методот на последователни приближувања, почнувајќи од почетно приближивање x_0, генерира низа од приближувања според следната итеративна формула

$$x_{n+1}=\varphi(x_n), \quad n=0,1,2...$$

Па, ако добиената низа приближувања конвергира, и ако граничната вредност ја означиме со $\overline{\xi}$, тогаш за неа имаме дека

$$\overline{\xi}=\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\varphi(x_{n-1})=\varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1})=\varphi(\overline{\xi}),$$

односно $\overline{\xi}$ е решение на (4), а со тоа и решение на (1). Заради единственоста на решението на разгледуваниот интервал $[a,b]$ (кој го наоѓаме со постапката на локализирање на решението), добиваме дека $\overline{\xi}=\xi$.

Значењето на овој метод е во неговата примена во теоријата на неподвижна точка и областите каде таа наоѓа примена (математичките дисциплини како анализа, топологија, геометрија, но исто така и во теорија на игри, економија, физика, биологија, хемија, технички науки), имено вредноста на x за која важи равенството (4) се нарекува *неподвижна точка* на φ.

За да се обезбеди конвергенција на низата приближувања генерирана со методот на последователни приближувања, потребно е да бидат исполнети условите од следната теорема, дадена во нејзиниот наједноставен облик.

Теорема. *Нека* $\varphi:[a,b]\to[a,b]$ *е диференцијабилна на* $[a,b]$. *Ако е*

$$|\varphi'(x)|\le q<1 \text{ за } x\in[a,b],$$

тогаш итеративната постапка

$$x_{n+1}=\varphi(x_n),\quad n=0,1,2...$$

конвергира независно од почетнат вредност $x_0\in[a,b]$, *и*

$$\xi=\lim_{n\to\infty}x_n$$

е единствено решение на равенката (4) на интервалот $[a,b]$.

При практична примена на овој метод, по локализирање на решението на равенката (1) на интервалот $[a,b]$ и трансформација на (1) во облик (4), така да $|\varphi'(x)|<1$ за секој $x\in[a,b]$ (по потреба $[a,b]$ може да се стесни), за почетно приближување $x_0\in[a,b]$ се избира обично некој од краевите на интервалот $[a,b]$ или неговата средина, но така да $|\varphi'(x)|<1$ на некоја мала околина на x_0, т.е. на $[x_0-\rho,x_0+\rho]$.

Се покажува дека ако итеративната постапка на последователни приближувања сопре кога две последователни приближивања станат доволно блиски т.е. $|x_{n+1}-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$, каде $\varepsilon>0$ е однапред дадено, и за приближно решение се земе последната итерација $\bar{x}=x_{n+1}$, тогаш сме нашле решение на равенката до точност $\varepsilon>0$.

Алгоритам (метод на последователни приближувања).
Дадени: $\varphi(x)$, x_0, $\varepsilon>0$.
Стави: $k\leftarrow 0$, $x_1\leftarrow\varphi(x_0)$
Се додека $|x_{k+1}-x_k|\ge\frac{\varepsilon}{2}$
    Стави: $k\leftarrow k+1$, $x_{k+1}\leftarrow\varphi(x_k)$
Крај (на додека)
Печати: x_{k+1}

Пример 6. Да ја решиме равенката од Пример 5, $2x-\sqrt{x^2+1}=0$, овој пат со методот на последователни приближувања. Ја запишуваме равенката во еквивалентен облик $x=\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}$, од каде $\varphi(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}$. Функцијата $\varphi(x)$ ги исполнува условите од Теоремата за конвергенција, односно за нејзиниот прв извод, над интервалот $[0,1]$ во кој го локализиравме решението на равенката, важи

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}\right| = \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}} \le \frac{1}{2\sqrt{0^2+1}} = \frac{1}{2} < 1, \text{ за сите } x \in [0,1],$$

па значи дека итеративната постапка $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n = 0,1,2...$ конвергира кон решението. За почетно приближување ја земаме левата граница на интервалот $[0,1]$, т.е. $x_0 = 0$, бидејќи изводот $\varphi'(x)$ останува строго ограничен со 1 и на некоја мала околина на $x_0 = 0$. Итерираме се додека $|x_{n+1} - x_n| \ge \frac{\varepsilon}{2}$, за $\varepsilon = 10^{-3}$, и ја добиваме следната низа од приближувања:

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	0.00000	
1	0.50000	0.50000
2	0.55902	0.05902
3	0.57282	0.01380
4	0.57622	0.00340
5	0.57707	0.00085
6	0.57728	0.00021<ε/2

Па, за приближно решение на равенката ја земаме последната итерација заокружена на 3 децимали, односно $\bar{x} = x_6 = 0.57728 \approx 0.577$. Инаку, точното решение на оваа равенка е $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577350269189625...$

Задачи:

Најди ги реалните решенија на секоја од равенките, со дадена точност ε, применувајќи ги изложените нумерички методи во овој текст.

1. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$, $\varepsilon = 10^{-3}$,

2. $x^5 - 4x^3 + 6x - 9 = 0$, $\varepsilon = 10^{-4}$,

3. $x^6 - 16x + 15 = 0$, $\varepsilon = 10^{-3}$,

4. $x + \sqrt{x} - 1 - x^2 = 0$, $\varepsilon = 10^{-5}$,

5. $(x^2+1)\sqrt{x^2-1} = 1$, $\varepsilon = 10^{-3}$,

6. $x - 2\sqrt{x^2-4} = 0$, $\varepsilon = 10^{-4}$,

7. $4x - 5\ln x = 5$, $\varepsilon = 10^{-5}$,

8. $x = 1 - \arctan\frac{x}{10}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

Литература:

[1] Б. Трпеновски, Н. Целакоски, *Нумеричка математика,* Просветно дело, Скопје, 1992

[2] I. Ivanšić, *Numerička matematika*, Element, Zagreb, 2002

[3] D. Herceg, N. Krejić, *Numerička analiza. Zbirka zadataka I*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1998

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА кое го издава Сојузот на математичарите на Македонија