№1. Prove that for some positive integer n the remainder of 3^n when divided by 2^n is greater than 10^{2021}.

Solution I. We choose a positive integer M such that $2^M > 10^{2022}$, and consider the remainder of 3^M when divided by 2^M:

$$3^M \equiv r \pmod{2^M},\ 0 < r < 2^M.$$

If $r > 10^{2021}$, then M is the desired number. Otherwise we choose the smallest integer k for which $3^k r > 10^{2021}$. Then $3^k r < 10^{2022} < 2^M$. Since $3^{k+M} \equiv 3^k r \pmod{2^M}$, the remainder of 3^{k+M} when divided by 2^{k+M} has the form $3^k r + 2^M s$ with some positive integer s, and is therefore greater than 10^{2021}.

Solution II. We choose a positive integer k such that $2^{k+2} > 10^{2021}$. We are going to determine $v_2(3^{2^k} - 1)$, i. e. the largest m such that 2^m divides $3^{2^k} - 1$. According to well-known lifting the exponent lemma,

$$v_2(3^{2^k} - 1) = v_2(3^2 - 1) + k - 1 = k + 2.$$

Then the number $n = 2^k$ satisfies the condition, Indeed, if r is the remainder when 3^n is divided by 2^n, then $r \equiv 3^{2^k} \pmod{2^{2^k}}$ and therefore $r \equiv 3^{2^k} \pmod{2^{k+3}}$ (we use the fact that $2^k \geq k + 3$). Since 2^{k+2} divides $r - 1$ and 2^{k+3} does not, $r \equiv 1 + 2^{k+2} \pmod{2^{k+3}}$, thus $r \geq 1 + 2^{k+2} > 10^{2021}$.

Solution III. Choose a positive integer k such that $3^k > 10^{2021}$, and a positive integer m such that $2^m > 3^k$. There exists a positive integer T such that $3^T \equiv 1 \pmod{2^m}$ (we may take, for instance, $T = 2^{m-2}$). Then for all positive integral s

$$3^{k+sT} \equiv 3^k \pmod{2^m},$$

that is, 3^{k+sT} leaves the remainder 3^k after division by 2^m and, therefore, a remainder not less than $3^k > 10^{2021}$ after division by any higher power of 2. Now we can take $n = k + sT$ such that $k + sT > m$.

№2. In a convex cyclic hexagon $ABCDEF$ $BC = EF$ and $CD = AF$. Diagonals AC and BF intersect at point Q, and diagonals EC and DF intersect at point P. Points R and S are marked on the segments DF and BF respectively so that $FR = PD$ and $BQ = FS$. **The segments** RQ and PS intersect at point T. Prove that the line TC bisects the diagonal DB.

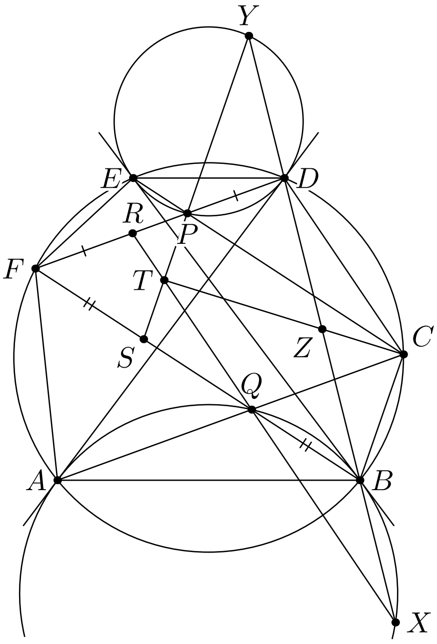
First solution. It follows obviously that $BF \parallel CE$ and $AC \parallel DF$. We denote the circumcircles of $\triangle ABQ$ and $\triangle DEP$ by ω_1 and ω_2, respectively. Note that the lines AD and BE are internal common tangents to ω_1 and ω_2. Indeed, $\angle BAQ = \angle BEC = \angle EBQ$, i. e., EB is tangent to ω_1; the other tangencies are established similarly. Note that $CPFQ$ is a parallelogram. Then $CQ = FP = RD$, that is, $CQRD$ is also a parallelogram as well as $CPSB$. The lines BC and DC are not parallel to BD. Therefore RQ and PS intersect the line BD; we denote the intersections by X and Y respectively. It follows that X lies on ω_1, since $\angle QAB = \angle CDB = \angle BXQ$. Similarly, Y lies on ω_2. Thus

$$DB \cdot DX = DA^2 = BE^2 = BD \cdot BY,$$

hence $DX = BY$, or $BX = DY$. Let TC and BD meet at Z. Then it follows from $TX \parallel CD$ and $TY \parallel BC$ that

$$\frac{DZ}{DX} = \frac{CZ}{CT} = \frac{BZ}{BY},$$

which immediately gives $DZ = BZ$.



Note. The equality $BX = DY$ can be also proved by applying Menelaus theorem to $\triangle BDF$ and the lines $R - Q - X$ and $S - P - Y$.

Second solution. We follow the first solution, using $BF \parallel CE$ and $AC \parallel DF$ to note that $CPFQ$, $CQRD$, and $CPSB$ are parallelograms.

Let N and M be points on the segments CQ and RN respectively such that $FRNQ$ and $FRMS$ are parallelograms. Then $SM = FR = PD$ and $SM \parallel PD$, that is, $SMDP$ is also a parallelogram, hence $DM = PS = CB$ and $DM \parallel CB$, therefore $DMBC$ is a parallelogram, and CM bisects BD. It remains to prove that T, M, C are collinear.

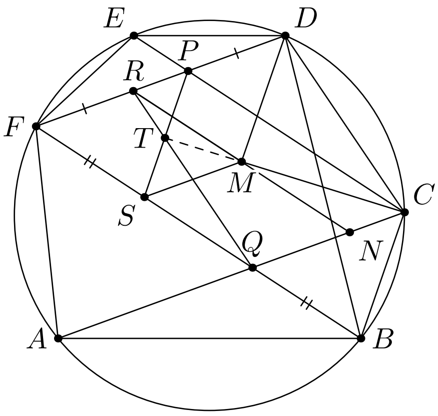
Applying Menelaus theorem to $\triangle FRQ$ and the line $P - T - S$ (and bearing in mind the parallelograms found above) we have

$$1 = \frac{FP}{PR} \cdot \frac{RT}{TQ} \cdot \frac{QS}{SF} = \frac{QC}{CN} \cdot \frac{RT}{TQ} \cdot \frac{NM}{MR},$$

that is,

$$\frac{QC}{CN} \cdot \frac{RT}{TQ} \cdot \frac{NM}{MR} = 1. \tag{1}$$

The collinearity T, M, C follows from (1) immediately by converse Menelaus theorem for $\triangle QNR$.



E
D
P
R
F
T
M
C
S
Q
N
A
B

№3. Let $n \geq 2$ be an integer. Elwyn is given an $n \times n$ table filled with real numbers (each cell of the table contains exactly one number). We define a *rook set* as a set of n cells of the table situated in n distinct rows as well as in n distinct columns. Assume that, for every rook set, the sum of n numbers in the cells forming the set is nonnegative.

By a move, Elwyn chooses a row, a column, and a real number a, and then he adds a to each number in the chosen row, and subtracts a from each number in the chosen column (thus, the number at the intersection of the chosen row and column does not change). Prove that Elwyn can perform a sequence of moves so that all numbers in the table become nonnegative.

Common remarks. We collect here several definitions and easy observations which will be used in the solutions.

A rook set is *nonnegative* (resp., *vanishing*) if the sum of the numbers in its cells is nonnegative (resp., zero). An $n \times n$ table filled with real numbers is *good* (resp., *balanced*) if every rook set is nonnegative (resp., vanishing).

Notice that the sum of numbers in any rook set does not change during Elwyn's moves, so good (balanced) tables remain such after any sequence of moves. Also, notice that the rows and/or columns of the table can be permuted with no effect on the condition of the problem, as well as on the desired result.

The proofs of the following two easy propositions can be found in the addendum after Solution 2.

Proposition 1. Assume that $a_1, a_2, \ldots, a_n$ and $b_1, b_2, \ldots, b_n$ are two sequences of real numbers with equal sums. Then Elwyn can perform a sequence of moves resulting in adding a_i to all cells in the ith row, and subtracting b_j from all numbers in the jth column, for all $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Proposition 2. If an $n \times n$ table B is balanced, then Elwyn can perform several moves on that table getting a table filled with zeros.

Solution 1. We start with the following known consequence of Hall's lemma.

Lemma. Let $G = (U \sqcup V, E)$ be a bipartite multigraph with parts U and V, both of size n. Assume that each vertex has degree k; then the edges can be partitioned into k perfect matchings.

Proof. Induction on k; the base case $k = 1$ is trivial. To perform the step, it suffices to find one perfect matching in the graph: removing the edges of that matching, we obtain a graph with all degrees equal to $k - 1$.

The existence of such matching is guaranteed by Hall's lemma. Indeed, let U' be any subset of U, and let V' be the set of vertices adjacent to U'. Put $u = |U'|$ and $v = |V'|$. The total degree of vertices in U' is ku. so the total degree of vertices in V' is at least ku; hence $ku \leq kv$ and therefore $u \leq v$, which establishes the conditions of Hall's lemma. $\square$

The following claim is the principal step in this solution.

Claim. In any good table, one can decrease some numbers so that the table becomes balanced.

Proof. Say that a cell in a good table is *blocked* if it is contained in a vanishing rook set (so, decreasing the number in the cell would break goodness of the table). First, we show that in any good table one can decrease several numbers so that the table remains good, and all its cells become blocked.

Consider any cell c; let ϵ be the minimal sum in a rook set containing that cell. Decrease the number in c by ϵ; the obtained table is still good, but now c is blocked. Apply such operation to all cells in the table consecutively; we arrive at a good table all whose cells are blocked. We claim that, in fact, this table is balanced.

In the sequel, we use the following correspondence. Let R and C be the sets of rows and columns of the table, respectively. Then each cell corresponds to a pair of the row and the column it is situated in; this pair may be regarded as an edge of a bipartite (multi)graph with parts R and C. This way, any rook set corresponds to a perfect matching between those parts.

Arguing indirectly, assume that there is a non-vanishing rook set $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Each cell s_i is contained in some vanishing rook set V_i. Now construct a bipartite multigraph $G = (R \sqcup C, E)$, introducing, for each set V_i, n edges corresponding to its cells (thus, G contains n^2 edges some of which may be parallel).

Mark each edge with the number in the corresponding cell. Since the sets V_i are all vanishing, the sum of all n^2 marks is zero.

Now, remove n edges corresponding to the cells of S, to obtain a graph G'. Since the sum of numbers in the cells of S is positive, the sum of the marks in G' is negative. On the other hand, the degree of every vertex in G' is $n-1$, so by the Lemma its edges can be partitioned into $n-1$ perfect matchings. At least one of the obtained matchings has negative sum of marks; so this matching corresponds to a rook set with a negative sum. This is impossible in a good table; this contradiction finishes the proof. □

Back to the problem, let T be Elwyn's table. Applying the Claim, decrease some numbers in it to get a balanced table B. By Proposition 2, Elwyn can perform some moves on table B so as to get a table filled with zeros. Applying the same moves to T, Elwyn gets a table where all numbers are nonnegative, as required.

Solution 2. Say that the *badness* of a table is the sum of absolute values of all its negative entries. In Step 1, we will show that, whenever the badness of a good table is nonzero, Elwyn can make some moves decreasing the badness. In a (technical) Step 2, we will show that this claim yields the required result.

Step 1. Let r be a row containing some negative number. Mark all cells in row r containing negative numbers, and mark all cells in other rows containing *nonpositive* numbers. Then there is no rook set consisting of marked cells, since that set would not be nonnegative.

By König's theorem (which is equivalent to Hall's lemma), for some a and b with $a+b<n$, one can choose a rows and b columns such that their union contains all marked cells; fix such a choice. Number the rows from top to bottom, and the columns from left to right. We distinguish two cases.

Case 1: Row r is among the a chosen rows.

Permute the rows and columns so that the top a rows and the right b columns are chosen. Next, if row r contains a negative number in some of the a leftmost entries, swap the column containing that entry with the $(n-b)$th one (recall that $n-b>a$). As a result, there exists $x>a$ such that the xth left entry in row r is negative (while the chosen columns are still the b rightmost ones).

Now, rectangle P formed by the bottom $n-a$ rows and the left a columns contains only positive numbers, as it contains no marked cells, as well as no cells from row r. Let m be the minimal number in that rectangle.

Let Elwyn add m to all numbers in the first a rows, and subtract m from all numbers in the first a columns. All numbers which decrease after this operation are situated in P, so there appear no new cell containing a negative number, and no negative number decreases. Moreover, by our choice, at least one negative number (situated in row r and column x) increases. Thus, the badness decreases, as desired.

Case 2: Row r is not among the a chosen rows.

Add row r to the a chosen rows, and increase a by 1. Notice that the negative numbers in row r are covered by the b chosen columns. As in the previous case, we permute the rows and columns so that the top a rows and the tight b columns are chosen. All negative numbers in row r automatically come to the right b columns. Now the above argument applies verbatim.

Step 2. We show that among the tables which Elwyn can obtain (call such tables *reachable*), there exists a table with the smallest badness. Applying the argument in Step 1 to that table, we get that its badness is zero, which proves the claim of the problem.

Notice that the effect of any sequence of Elwyn's moves has the form described in Proposition 1. Moreover, subtraction of some number ϵ from all the a_i and the b_i provides no effect on the result. Hence, we may assume that the sums of the a_i and of the b_i are both zero.

Let t_{ij} denote the (i,j)th entry of the initial table T. For any two sequences $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ and $\mathbf{b}=(b_1,\ldots,b_n)$ both summing up to zero, denote by $T(\mathbf{a},\mathbf{b})$ the table obtained from T by adding a_i to all numbers in the ith row, and subtracting b_j from all numbers in the jth column, for all $i,j=1,2,\ldots,n$; in particular, $T=T(\mathbf{0},\mathbf{0})$, where $\mathbf{0}=(0,0,\ldots,0)$. Let $f(\mathbf{a},\mathbf{b})$ denote the badness of $T(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Clearly, function f is continuous. Now we intend to bound the set of values that make sense to put in sequences $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$.

Let m be the maximal number in T. Take any $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ summing up to zero, such that some a_i is smaller than $-M = -(m+b)$. Then there exists an index j with $b_j \geq 0$; hence the entry (i,j) in $T(\mathbf{a},\mathbf{b})$ is $t_{ij} + a_i - b_j < m - M + 0 = -b$, so $f(\mathbf{a},\mathbf{b}) > b = f(\mathbf{0},\mathbf{0})$.

So, all pairs of sequences $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ satisfying $f(\mathbf{a},\mathbf{b}) \leq b$ should also satisfy $a_i \geq -M$ and $b_j \geq -M$, and hence $a_i \leq nM$ and $b_j \leq nM$ as well (since each of the sequences sums up to zero). Thus, in order to minimize $f(\mathbf{a},\mathbf{b})$, it suffices to consider only those $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ whose entries lie in $[-M, nM]$. Those values form a compact set, so the continuous function f attains the smallest value on that set.

Addendum. Say that the *price* of Elwyn's move is the number a chosen on that move.

Proof of Proposition 1. Let Elwyn perform a move of price a to row i and column j, and then a move of price $-a$ to row i' and the same column j. The result will consist in adding a to row i and subtracting a from row i'. Similar actions can be performed with columns.

So, Elwyn may add $\Sigma = a_1 + \cdots + a_n$ to the numbers in the first row and subtract Σ from those in the first column, and then distribute those increments and decrements among the rows and columns, using the above argument. $\square$

Proof of Proposition 2. It is easy to see, using Proposition 1, that Elwyn can vanish all numbers in the first column, as well as all numbers in the first row, except for the last its entry.

The resulting table is also balanced; denote the number in its cell (i,j) by d_{ij}. For any $i,j > 1$ with $j < n$, there are two rook sets R and R', one containing cells $(1,1)$ and (i,j), and the other obtained by replacing those by cells $(1,j)$ and $(i,1)$. The sums in those two sets are both zero, so

$$d_{ij} = d_{i1} + d_{1j} - d_{11} = 0.$$

Hence, only the nth column of the obtained table might contain nonzero numbers. But, since each entry in the nth column is contained in some (vanishing) rook set, that entry is also zero. $\square$

Solution 3 (sketch). We implement some tools from multi-dimensional convex geometry.

Each table can be regarded as a point in $\mathbb{R}^{n\times n}$. The set G of good tables is a convex cone determined by $n!$ non-strict inequalities (claiming that the rook sets are nonnegative). Thus this cone is closed.

The set T of tables which can be transformed, by a sequence of Elwyn's moves, into a table with nonnegative entries, is also a convex cone. This cone is the Minkowski sum of the (closed) cone N of all tables with nonnegative entries and the linear subspace V of all tables Elwyn can add by a sequence of moves. Such sum is always closed (a pedestrian version of such argument is presented in Step 2 of Solution 2).

It is easy to see that $T \subseteq G$; we need to show that $T = G$. Arguing indirectly, assume that there is some table $t \in G \setminus T$. Then there exists a linear function f separating t and T, that is — f takes nonnegative values on T but a negative value on t.

This function f has the following form: Let $x \in \mathbb{R}^{n\times n}$ be a table, and denote by x_{ij} its (i,j)th entry. Then

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} x_{ij},$$

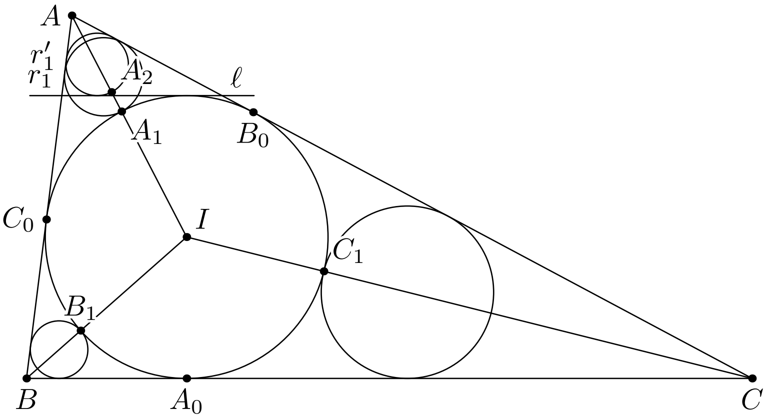
where f_{ij} are some real constants. Form a table F whose (i,j)th entry is f_{ij}.

Since $f(x) \geq 0$ for all tables in N having only one nonnegative entry, we have $f_{ij} \geq 0$ for all i and j. Moreover, f must vanish on all tables in the subspace V, in particular — on each table having 1 in some row, -1 in some column, and 0 elsewhere (the intersection of the row and the column also contains 0). This means that the sum of numbers in any row in F is equal to the sum of the numbers in any its column.

Now it remains to show that F is the sum of several *rook tables* which contain some nonnegative number p at the cells of some rook set, while all other entries are zero; this will yield $f(t) \geq 0$ which is not the case. In other words, it suffices to prove that one can subtract from F several rook tables to make it vanish. This can be done by means of Hall's lemma again: if the table is still nonzero, it contains n positive entries forming a rook set, and one may make one of them vanish, keeping the other entries nonnegative, by subtracting a rook table.

№4. A circle with radius r is inscribed in the triangle ABC. Circles with radii r_1, r_2, r_3 $(r_1, r_2, r_3 < r)$ are inscribed in the angles A, B, C so that each touches the incircle externally. Prove that $r_1 + r_2 + r_3 \geq r$.

First solution. Let ω be the incircle of $\triangle ABC$, I its center, and $p = (AB + BC + AC)/2$ its semiperimeter. We denote the tangency points of the sides BC, AC, AB with ω by A_0, B_0, C_0 respectively. Let the circle of radius r_1 touches ω at A_1.



We draw a tangent ℓ to ω such that $\ell \parallel BC$. Let r_1' be the inradius of the triangle formed by the lines AB, AC, ℓ. The line AI intersects the circle of radius r_1' at two points. From these two points let A_2 be closest to I. Then $\frac{r_1}{r_1'} = \frac{AA_1}{AA_2} \geq 1$ and $\frac{r_1'}{r} = \frac{AB_0}{p}$ (here we use that the semiperimeter of the triangle formed by the lines AB, AC, ℓ equals AB_0 and that this triangle is similar to $\triangle ABC$). Applying the same argument to the circles of raidii r_2' and r_3' and adding the obtained inequalities, we get

$$r_1 + r_2 + r_3 \geq r_1' + r_2' + r_3' = r\left(\frac{AB_0}{p} + \frac{BC_0}{p} + \frac{CB_0}{p}\right) = r.$$

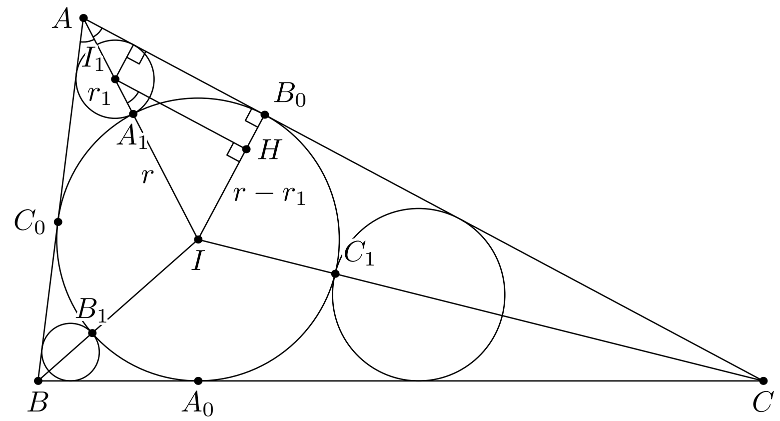
Second solution. Let A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1 retain the meaning they had in the first solution. We have $\angle B_1IC_1 = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$, $\angle A_1IC_1 = 90^\circ + \frac{\angle B}{2}$, $\angle A_1IB_1 = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}$. Obviously

$$\left(\overrightarrow{IA_1} + \overrightarrow{IB_1} + \overrightarrow{IC_1}\right)^2 \geq 0. \tag{1}$$

It follows from (1) that

$$r^2 + r^2 + r^2 + 2r^2\cos\left(90^\circ + \frac{\angle A}{2}\right) + 2r^2\cos\left(90^\circ + \frac{\angle B}{2}\right) + 2r^2\cos\left(90^\circ + \frac{\angle C}{2}\right) \geq 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \sin\left(\frac{\angle A}{2}\right) + \sin\left(\frac{\angle B}{2}\right) + \sin\left(\frac{\angle C}{2}\right) \leq \frac{3}{2}. \tag{2}$$



Let I_1 be the centre of the circle of radius r_1. Draw the perpendicular I_1H from I_1 onto IB_0. One of the acute angles in the right triangle II_1H is $\frac{\angle A}{2}$, the leg opposite this angle is $r - r_1$, and the hypotenuse is $r + r_1$. Therefore $\sin\left(\frac{\angle A}{2}\right) = \frac{r - r_1}{r + r_1}$. Similarly $\sin\left(\frac{\angle B}{2}\right) = \frac{r - r_2}{r + r_2}$ and $\sin\left(\frac{\angle C}{2}\right) = \frac{r - r_3}{r + r_3}$. According to (2)

$$\frac{r - r_1}{r + r_1} + \frac{r - r_2}{r + r_2} + \frac{r - r_3}{r + r_3} \le \frac{3}{2} \iff \frac{2r}{r + r_1} + \frac{2r}{r + r_2} + \frac{2r}{r + r_3} \le \frac{9}{2}\,. \tag{3}$$

Applying Cauchy-Schwarz inequality we have

$$\frac{1}{r + r_1} + \frac{1}{r + r_2} + \frac{1}{r + r_3} \ge \frac{9}{r + r_1 + r + r_2 + r + r_3}\,, \tag{4}$$

thus, (3) and (4) give $\frac{9}{2} \ge \frac{18r}{3r + r_1 + r_2 + r_3} \iff r_1 + r_2 + r_3 \ge r$.

№5. On a party with 99 guests, hosts Ann and Bob play a game (the hosts are not regarded as guests). There are 99 chairs arranged in a circle; initially, all guests hang around those chairs. The hosts take turns alternately. By a turn, a host orders any standing guest to sit on an unoccupied chair c. If some chair adjacent to c is already occupied, the same host orders one guest on such chair to stand up (if both chairs adjacent to c are occupied, the host chooses exactly one of them). All orders are carried out immediately. Ann makes the first move; her goal is to fulfill, after some move of hers, that at least k chairs are occupied. Determine the largest k for which Ann can reach the goal, regardless of Bob's play.

Answer. $k = 34$.

Solution. *Preliminary notes.* Let F denote the number of occupied chairs at the current position in the game. Notice that, on any turn, F does not decrease. Thus, we need to determine the maximal value of F Ann can guarantee after an arbitrary move (either hers or her opponent's).

Say that the situation in the game is *stable* if every unoccupied chair is adjacent to an occupied one. In a stable situation, we have $F \geq 33$, since at most $3F$ chairs are either occupied or adjacent to such. Moreover, the same argument shows that there is a unique (up to rotation) stable situation with $F = 33$, in which exactly every third chair is occupied; call such stable situation *bad*.

If the situation after Bob's move is stable, then Bob can act so as to preserve the current value of F indefinitely. Namely, if A puts some guest on chair a, she must free some chair b adjacent to a. Then Bob merely puts a guest on b and frees a, returning to the same stable position.

On the other hand, if the situation after Bob's move is unstable, then Ann may increase F in her turn by putting a guest on a chair having no adjacent occupied chairs.

Strategy for Ann, if $k \leq 34$. In short, Ann's strategy is *to increase F avoiding appearance of a bad situation after Bob's move (conversely, Ann creates a bad situation in her turn, if she can).*

So, on each her turn, Ann takes an arbitrary turn increasing F if there is no danger that Bob reaches a bad situation in the next turn (thus, Ann always avoids forcing any guest to stand up). The exceptional cases are listed below.

Case 1. After possible Ann's move (consisting in putting a guest on chair a), we have $F = 32$, and Bob can reach a bad situation by putting a guest on some chair. This means that, after Ann's move, every third chair would be occupied, with one exception. But this means that, by her move, Ann could put a guest on a chair adjacent to a, avoiding the danger.

Case 2. After possible Ann's move (by putting a guest on chair a), we have $F = 33$, and Bob can reach a stable situation by putting a guest on some chair b and freeing an adjacent chair c. If $a = c$, then Ann could put her guest on b to create a stable situation after *her* turn; that enforces Bob to break stability in his turn. Otherwise, as in the previous case, Ann could put a guest on some chair adjacent to a, still increasing the value of F, but with no danger of bad situation arising.

So, acting as described, Ann increases the value of F on each turn of hers whenever $F \leq 33$. Thus, she reaches $F = 34$ after some her turn.

Strategy for Bob, if $k \geq 35$. Split all chairs into 33 groups each consisting of three consecutive chairs, and number the groups by $1, 2, \ldots, 33$ so that Ann's first turn uses a chair from group 1. In short, Bob's strategy is to ensure, after each his turn, that

> $(*)$ In group 1, at most two chairs are occupied; in every other group, only the central chair may be occupied.

If $(*)$ is satisfied after Bob's turn, then $F \leq 34 < k$; thus, property $(*)$ ensures that Bob will not lose.

It remains to show that Bob can always preserve $(*)$. after any his turn. Clearly, he can do that oat the first turn.

Suppose first that Ann, in her turn, puts a guest on chair a and frees an adjacent chair b, then Bob may revert her turn by putting a guest on chair b and freeing chair a.

Suppose now that Ann just puts a guest on some chair a, and the chairs adjacent to a are unoccupied. In particular, group 1 still contains at most two occupied chairs. If the obtained situation satisfies $(*)$, then Bob just makes a turn by putting a guest into group 1 (preferably, on its central chair), and, possibly, removing another guest from that group. Otherwise, a is a non-central chair in some group $i \geq 2$; in this case Bob puts a guest to the central chair in group i and frees chair a.

So Bob indeed can always preserve $(*)$.

№6. Let $P(x)$ be a nonconstant polynomial of degree n with rational coefficients which can not be presented as a product of two nonconstant polynomials with rational coefficients. Prove that the number of polynomials $Q(x)$ of degree less than n with rational coefficients such that $P(x)$ divides $P(Q(x))$

a) is finite;

b) does not exceed n.

Solution. It is known that an irreducible polynomial $P(x)$ of degree n with rational coefficients has n different complex roots which we denote by $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

a) If $P(x)$ divides $P(Q(x))$, then $Q(\alpha_k)$ is also a root of $P(x)$ for each $k \le n$. It follows that the values of Q at $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ form a sequence $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n}$, where all terms are roots of P, not necessarily different. The number of such sequences is n^n, and for each sequence there exists at most one polynomial Q such that $Q(\alpha_k) = \alpha_{i_k}$ (since two polynomials of degree less than n with equal values at n points must coincide).

Thus the number of possible polynomials $Q(x)$ does not exceed n^n.

b) For each polynomial Q satisfying the condition, $Q(\alpha_1)$ equals one of the roots α_i. However, there is at most one polynomial Q of degree less than n with rational coefficients such that $Q(\alpha_1) = \alpha_i$, Indeed, if $Q_1(\alpha_1) = Q_2(\alpha_1) = \alpha_i$, then α_1 is a root of the polynomial $Q_1 - Q_2$ with rational coefficients and degree less than n. If this polynomial is not identically zero, its greatest common divisor with P is a nonconstant divisor of P with rational coefficients and degree less than n, a contradiction.

Thus the number of possible polynomials $Q(x)$ does not exceed n.

№1. Докажите, что при некотором натуральном n остаток от деления 3^n на 2^n больше 10^{2021}.

Первое решение. Выберем натуральное M, для которого $2^M > 10^{2022}$, и рассмотрим остаток r при делении 3^M на 2^M:

$$3^M \equiv r \pmod{2^M},\ 0 < r < 2^M.$$

Если $r > 10^{2021}$, число M – искомое. В противном случае выберем наименьшее k, для которого $3^k r > 10^{2021}$. При этом $3^k r < 10^{2022} < 2^M$. Поскольку $3^{k+M} \equiv 3^k r \pmod{2^M}$, остаток от деления 3^{k+M} на 2^{k+M} имеет вид $3^k r + 2^M s$ для некоторого целого неотрицательного s, следовательно, больше 10^{2021}.

Второе решение. Выберем любое натуральное k, для которого $2^{k+2} > 10^{2021}$. Найдём $v_2(3^{2^k}-1)$, то есть наибольшее m, для которого $3^{2^k}-1$ делится на 2^m. Согласно известной лемме об уточнении показателя,

$$v_2(3^{2^k}-1) = v_2(3^2-1) + k - 1 = k + 2.$$

Тогда число $n = 2^k$ удовлетворяет условию задачи. Действительно, если r – остаток при делении 3^n на 2^n, то $r \equiv 3^{2^k} \pmod{2^{2^k}}$ и, следовательно, $r \equiv 3^{2^k} \pmod{2^{k+3}}$ (мы пользуемся тем, что $2^k \geq k+3$). Так как $r-1$ делится на 2^{k+2} и не делится на 2^{k+3}, $r \equiv 1 + 2^{k+2} \pmod{2^{k+3}}$, поэтому $r \geq 1 + 2^{k+2} > 10^{2021}$.

Третье решение. Выберем натуральное k, для которого $3^k > 10^{2021}$, и натуральное m, для которого $2^m > 3^k$. Существует T, для которого $3^T \equiv 1 \pmod{2^m}$ (например, можно взять $T = 2^{m-2}$). Тогда при всех натуральных s

$$3^{k+sT} \equiv 3^k \pmod{2^m},$$

то есть 3^{k+sT} даёт остаток 3^k при делени на 2^m и, следовательно, остаток, не меньший $3^k > 10^{2021}$ при делении на любую более высокую степень 2. Теперь можно взять $n = k + sT$ такое, что $k + sT > m$.

№2. Дан выпуклый вписанный шестиугольник $ABCDEF$, в котором $BC = EF$ и $CD = AF$. Диагонали AC и BF пересекаются в точке Q, а диагонали EC и DF — в точке P. На отрезках DF и BF отмечены точки R и S соответственно так, что $FR = PD$ и $BQ = FS$. **Отрезки** RQ и PS пересекаются в точке T. Докажите, что прямая TC делит диагональ DB пополам.

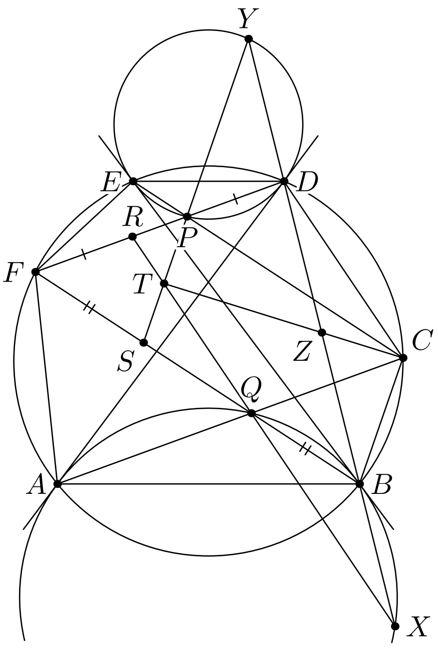
Первое решение. Из условия задачи очевидно следуют параллельности $BF \parallel CE$ и $AC \parallel DF$. Обозначим описанные окружности $\triangle ABQ$ и $\triangle DEP$ через ω_1 и ω_2 соответственно. Заметим, что прямые AD и BE являются общими внутренними касательными к ω_1 и ω_2. Действительно, $\angle BAQ = \angle BEC = \angle EBQ$, то есть прямая EB касается ω_1. Остальные касания устанавливаются аналогично. Заметим, что четырехугольник $CPFQ$ является параллелограммом. Тогда $CQ = FP = RD$, то есть и четырехугольник $CQRD$ — параллелограмм (также, как и четырехугольник $CPSB$). Прямые BC и DC не параллельны прямой BD. Поэтому RQ и PS пересекают прямую BD (обозначим эти точки пересечения через X и Y соответственно). Тогда точка X лежит на ω_1, так как $\angle QAB = \angle CDB = \angle BXQ$. Аналогично, Y лежит на ω_2. Следовательно,

$$DB \cdot DX = DA^2 = BE^2 = BD \cdot BY,$$

откуда $DX = BY$ или же $BX = DY$. Пусть TC и BD пересекаются в точке Z. Тогда из параллельностей $TX \parallel CD$ и $TY \parallel BC$ следует

$$\frac{DZ}{DX} = \frac{CZ}{CT} = \frac{BZ}{BY},$$

что немедленно дает равенство отрезков DZ и BZ.



Замечание. Равенство $BX = DY$ также можно получить из теоремы Менелая (применив два раза) для $\triangle BDF$ и секущих $R - Q - X$ и $S - P - Y$.

Второе решение. Так же, как и в первом решении, запишем параллельности $BF \parallel CE$ и $AC \parallel DF$, и отметим параллелограммы $CPFQ$, $CQRD$ и $CPSB$.

Отметим на отрезке CQ точку N, а на отрезке RN точку M такие, что $FRNQ$ и $FRMS$ — параллелограммы. Тогда $SM = FR = PD$ и $SM \parallel PD$, то есть $SMDP$ — также параллелограмм, откуда $DM = PS = CB$ и $DM \parallel CB$, то есть и $DMBC$ — параллелограмм, а в нем CM делит BD пополам. Для решения задачи осталось доказать, что точки T, M и C лежат на одной прямой.

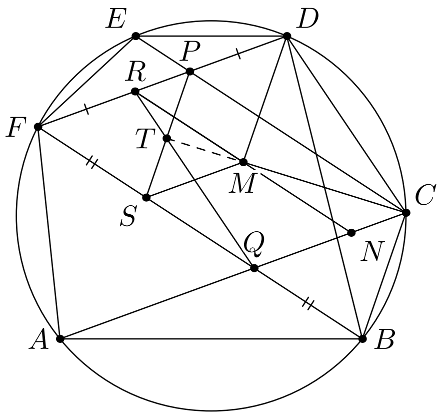
Применяя теорему Менелая к $\triangle FRQ$ и секущей $P - T - S$, из доказанных выше параллельностей получаем:

$$1 = \frac{FP}{PR} \cdot \frac{RT}{TQ} \cdot \frac{QS}{SF} = \frac{QC}{CN} \cdot \frac{RT}{TQ} \cdot \frac{NM}{MR},$$

то есть

$$\frac{QC}{CN} \cdot \frac{RT}{TQ} \cdot \frac{NM}{MR} = 1. \tag{1}$$

Коллинеарность точек T, M и C немедленно следует из (1) по обратной теореме Менелая для $\triangle QNR$.



№3. Дано натуральное число $n \geqslant 2$. У Элвина есть таблица $n \times n$, заполненная вещественными числами (в каждой клетке записано ровно одно число). Назовём *ладейным множеством* множество из n клеток, расположенных как в n различных столбцах, так и в n различных строках. Предположим, что сумма чисел в клетках любого ладейного множества неотрицательна.

За ход Элвин выбирает строку, столбец, а также вещественное число a; к каждому числу в выбранной строке он прибавляет a, а из каждого числа в выбранном столбце — вычитает a (таким образом, число в пересечении строки и столбца не изменяется). Докажите, что Элвин может, сделав несколько ходов, добиться, чтобы все числа в таблице стали неотрицательными.

Общие замечания. Здесь собраны некоторые определения и простые наблюдения, используемые в решениях.

Назовём ладейное множество *неотрицательным* (соотв., *нулевым*), если сумма чисел в клетках этого множества неотрицательна (соотв., нулевая). Таблицу $n \times n$, заполненную вещественными числами, назовём *хорошей* (соотв., *сбалансированной*), если в ней все ладейные множества неотрицательны (соотв., нулевые).

Заметим, что при ходах Элвина сумма чисел в любом ладейном множестве не меняется, так что хорошие и сбалансированные таблицы остаются таковыми. Также заметим, что свойство таблицы быть хорошей (сбалансированной), так же как и требуемое утверждение, не меняются при перестановках строк и/или столбцов.

Доказательства следующих двух несложных предложений приведены в Дополнении после Решения 2.

Предложение 1. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — две последовательности вещественных чисел с одинаковыми суммами. Тогда Элвин может совершить несколько ходов, результатом которых будет прибавление числа a_i ко всем клеткам i-й строки и вычитание числа b_j из всех клеток j-го столбца, при всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Предложение 2. Если таблица $n \times n$ сбалансирована, то Элвин может совершить несколько ходов, после чего таблица будет заполнена нулями.

Решение 1. Начнём с доказательства известного следствия из леммы Холла.

Лемма. Пусть $G = (U \sqcup V, E)$ — двудольный мультиграф с долями U и V, состоящих из n вершин каждая. Пусть каждая вершина имеет степень k. Тогда рёбра G можно разбить на k совершенных паросочетаний.

Доказательство. Индукция по k. База при $k = 1$ тривиальна. Для шага индукции достаточно найти в G одно совершенное паросочетание: выбросив его рёбра, мы получим граф, в котором все степени вершин равны $k - 1$.

Существование такого паросочетания вытекает из леммы Холла. Действительно, пусть U' — подмножество в U, а V' — множество всех соседей вершин из U'. Положим $u = |U'|$ и $v = |V'|$. Суммарная степень вершин из U' равна ku, поэтому суммарная степень всех вершин из V' не меньше ku. Поэтому $ku \leq kv$, то есть $u \leq v$, что и доказывает, что условия леммы Холла выполнены. $\square$

Следующее утверждение — ключевое в этом решении.

Утверждение. В любой хорошей таблице ожно уменьшить числа в некоторых клетках так, чтобы получилась сбалансированная таблица.

Доказательство. Скажем, что клетка хорошей таблицы *устойчива*, если она содержится в нулевом ладейном множестве (так что, если уменьшить число в этой клетке, то таблица перестанет быть хорошей). Для начала мы покажем, что можно уменьшить числа в некоторых клетках хорошей таблицы так, чтобы она осталась хорошей, а все её клетки стали устойчивыми.

Рассмотрим любую клетку c; пусть ϵ — наименьшая сумма в ладейном множестве, содержащем c. Уменьшим число в клетке c на ϵ; таблица останется хорошей, а клетка c станет устойчивой. Проделав такую операцию со всеми клетками таблицы, мы получим хорошую таблицу, все клетки которой устойчивы. Мы докажем, что эта таблица сбалансирована.

В дальнейшем рассуждении мы используем следующее соответствие. Пусть R и C — множества всех строк и всех столбцов таблицы соответственно. Каждой клетке соответствует пара из строки и столбца, содержащих эту клетку; эту пару можно считать ребром двудольного (мульти)графа с долями R и C. Таким образом, каждому ладейному множеству соответствует совершенное паросочетание между этими долями.

Предполагая, что доказываемое утверждение неверно, выберем ненулевое ладейное множество $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Каждая клетка s_i содержится в некотором нулевом ладейном множестве V_i. Построим двудольный мультиграф $G = (R \sqcup C, E)$, включи в него, для каждого множества V_i, n рёбер, соответствующих клеткам в V_i (таким образом, в G ровно n^2 рёбер, некоторые из которых могут быть параллельными). Пометим каждое ребро числом, стоящим в соответствующей ему клетке таблицы. Поскольку все множества V_i нулевые, сумма всех n^2 пометок равна нулю.

Удалим теперь из G n рёбер, соответствующих клеткам из S; обозначим полученный граф через G'. Поскольку сумма чисел в клетках множества S положительна, сумма всех пометок на рёбрах графа G' отрицательна. С другой стороны, степени всех вершин в графе G' равны $n-1$, так что по Лемме его рёбра разбиваются на $n-1$ совершенное паросочетание. Хотя бы в одном из полученных паросочетаний сумма пометок будет отрицательной; это паросочетание соответствует ладейному множеству с отрицательной суммой. Значит. наша таблица — не хорошая; противоречие. $\square$

Вернёмся к решению. Пусть T — исходная таблица. По Утверждению, некоторые числа в T можно уменьшить так, чтобы получилась сбалансированная таблица B. По Предложению 2, Элвин может сделать несколько ходов в таблице S, получив таблицу, заполненную нулями. Применяя такие же ходы к своей таблице T, он получит таблицу, заполненную неотрицательными числами, что и требовалось.

Решение 2. Назовём *дефектом* таблицы сумму модулей всех отрицательных чисел, стоящих в ней. Решение состоит из двух шагов. На Шаге 1 мы покажем, что, если дефект хорошей таблицы ненулевой, то Элвин может совершить несколько ходов, в результате которых дефект уменьшится. На (техническом) шаге 2 мы покажем, что из этого утверждения вытекает утверждение задачи.

Шаг 1. Пусть строка r содержит хотя бы одно отрицательное число. Отметим все клетки в этой строке, содержащие отрицательные числа, а также отметим все клетки в других строках, содержащие *неположительные* числа. Тогда не существует ладейного множества, состоящего из отмеченных клеток, ибо сумма чисел в клетках такого множества была бы отрицательной.

По теореме Кёнига (эквивалентной лемме Холла), найдутся такие числа a и b, что $a + b < n$, и можно выбрать a строк и b столбцов, объединение которых содержит все отмеченные клетки. Зафиксируем такой выбор строк и столбцов. Пронумеруем строки сверху вниз, а столбцы — слева направо. Возможны два случая.

Случай 1: Строка r находится в числе выбранных a строк.

Переставим строки и столбцы так, чтобы выбранными оказались верхние a строк и правые b столбцов. Далее, если среди левых a чисел в строке r есть отрицательное, переставим столбец, содержащий такое число, со столбцом $n-b$; напомним, что $n-b > a$. Тогда в любом случае найдётся номер $x > a$ такой, что x-й слева элемент строки r отрицателен; при этом выбраны по-прежнему b правых столбцов.

Рассмотрим прямоугольник P в пересечении нижних $n-a$ строк и левых a столбцов таблицы. Все числа в нём положительны, поскольку он не содержит отмеченных клеток и не пересекается со строкой r. Пусть m — наименьшее число в этом прямоугольнике.

Пусть Элвин прибавит m к каждому числу в верхних a строках и вычтет m из всех клеток левых a столбцов. Все числа, которые уменьшатся в результате этого, находятся в прямоугольнике P; поэтому новых клеток с отрицательными числами не появится, и ни одно отрицательное число не уменьшится. Более того, согласно нашей процедуре, хотя бы одно отрицательное число (стоящее в пересечении строки r и столбца x) увеличится. Значит, дефект таблицы уменьшится, что и требовалось.

Случай 2: Строка r не выбрана.

Добавим строку r к a выбранным строкам (увеличив a на 1). Заметим, что отрицательные числа в этой строке находятся в b выбранных столбцах Как и в предыдущем случае, переставим строки и столбцы так, чтобы a выбранных строк стояли сверху, а b выбранных столбцов — справа. Тогда все отрицательные числа в строке r автоматически находятся в b правых столбцах. После этого наблюдения рассуждения из предыдущего случая проходят дословно.

Шаг 2. Покажем, что среди таблиц, которые Элвин может получить из исходной (назовём такие таблицы *достижимыми*), есть таблица с *наименьшим* дефектом. Применяя к этой таблице утверждение Шага 1, получим, что её дефект нулевой, что и доказывает утверждение задачи.

Заметим, что любая последовательность ходов Элвина приводит к результату вида, описанного в Предложении 1. Более того, вычитание какого-то числа ϵ из всех чисел a_i и из всех чисел b_j не меняет результата. Поэтому можно считать, что сумма чисел a_i и сумма чисел b_j равны нулю.

Пусть t_{ij} — число, стоящее в клетке (i,j) исходной таблицы T. Для любых двух последовательностей $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, суммы которых равны нулю, обозначим через $T(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ таблицу, полученную из T прибавлением числа a_i ко всем числам в i-й строке и вычитанием b_j из всех чисел в j-м столбце, при всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$; в частности, $T = T(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, где $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. Обозначим через $f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ дефект таблицы $T(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Очевидно, функция f непрерывна. Теперь мы собираемся ограничить числа, которые имеет смысл ставить в последовательности $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Пусть m — наибольшее число в T. Рассмотрим произвольные последовательности $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ с нулевыми суммами, такие, что некоторое число a_i меньше, чем $-M = -(m+b)$. Существует номер j такой, что $b_j \geq 0$; тогда число в клетке (i,j) таблицы $T(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ есть $t_{ij} + a_i - b_j < m - M + 0 = -b$, поэтому $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) > b = f(\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Таким образом, все пары последовательностей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, для которых $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq b$, удовлетворяют неравенствам $a_i \geq -M$ и, аналогично, $b_j \geq -M$; отсюда следует, что $a_i \leq nM$ и $b_j \leq nM$ (поскольку суммы последовательностей — нулевые). Итак, для минимизации дефекта $f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ можно рассматривать лишь последовательности $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, элементы которых лежат на отрезке $[-M, nM]$. Множество таких последовательностей — компакт, поэтому непрерывная функция f достигает на нём своего наименьшего значения.

Дополнение. Назовём *ценой* хода Элвина число a, выбранное на этом ходе.

Доказательство Предложения 1. Предположим, что Элвин применит ход цены a к строке i и столбцу j, а затем — ход цены $-a$ к строке i' и тому же столбцу j. Результатом этого будет прибавление числа a ко всем числам строки i и вычитание a из всех чисел строки i'. Аналогичные действия Элвин может проделывать со столбцами.

Таким образом, Элвин может прибавить в числам первой строки число $\Sigma = a_1 + \cdots + a_n$ и вычесть его же из чисел первого столбца, а затем распределить эти прибавки и вычитания по строкам и столбцам, как описано выше. $\square$

Доказательство Предложения 2. Используя предложение 1, нетрудно видеть, что Элвин может обнулить все числа первого столбца и все числа первой строки, кроме последнего числа в ней.

Полученная таблица сбалансирована. Обозначим через d_{ij} число в её клетке (i,j). Для любых $i, j > 1$ таких, что $j < n$, существуют два ладейных множества R и R'; одно, содержащее клетки $(1,1)$ и (i,j), а другое — полученное из первого заменой этих клеток на клетки $(1,j)$ и $(i,1)$. Суммы чисел, стоящих в клетках этих множеств, нулевые и потому равны; значит,

$$d_{ij} = d_{i1} + d_{1j} - d_{11} = 0.$$

Таким образом, лишь последний столбец полученной таблицы мог бы содержать ненулевые числа. Однако каждая клетка этого столбца содержится в нулевом ладейном множестве, все остальные числа в котором — нули; так что число в этой клетке также равно нулю. $\square$

Решение 3 (набросок). Мы будем использовать некоторые стандартные методы многомерной выпуклой геометрии.

Каждую таблицу, заполненную числами, мы воспринимаем как точку в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$. Множество G всех хороших таблиц — это выпуклый конус в этом пространстве, заданный $n!$ нестрогими неравенствами (утверждающими, что суммы чисел в ладейных множествах неотрицательны). Поэтому этот конус замкнут.

Множество T всех таблиц, из которых Элвин может получить таблицу из неотрицательных чисел — также выпуклый конус. Этот конус является суммой Минковского двух множеств: (замкнутого) конуса N, состоящего из всех неотрицательных таблиц, и линейного подпространства V, состоящего из всех «приавок», которые Элвин может сделать. Такая сумма также является замкнутым множеством (по сути, в Шаге 2 Решения 2 приведено «приземлённое» доказательство именно этого утверждения).

Нетрудно видеть, что $T \subseteq G$; поэтому в задаче требуется доказать, что $T = G$. Предполагая противное, выберем таблицу $t \in G \setminus T$. Тогда существует линейная функция f, отделяющая t от T — именно, f принимает неотрицательные значения на T, но $f(t) < 0$.

Эта функция имеет следующий вид: Для любой таблицы $x \in \mathbb{R}^{n\times n}$, состоящей из чисел x_{ij}, имеем

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}x_{ij},$$

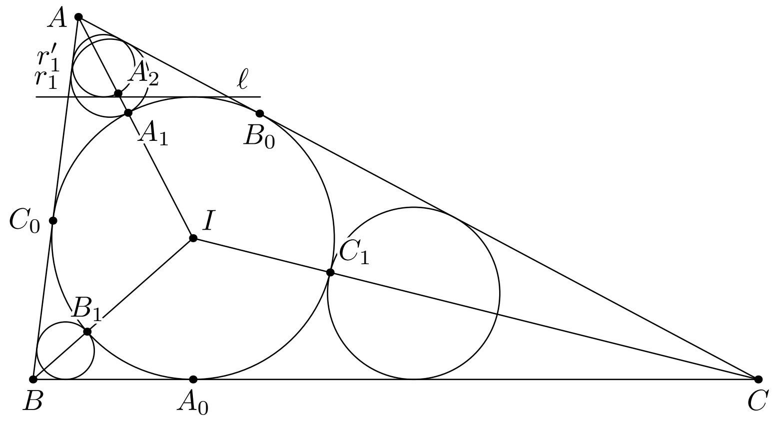
где f_{ij} — некоторые вещественные константы. Обозначим через F таблицу, состоящую из чисел f_{ij}.

Поскольку $f(x) \geq 0$ для всех таблиц $x \in N$, в которых лишь одно число ненулевое, имеем $f_{ij} \geq 0$ при всех i и j. Более того, f должна обнуляться на всём подпространстве V, в частности — на всех таблицах, в которых одна строка заполнена числами 1, один столбец — числами -1, а все остальные элементы)как и элемент в пересечении особых строки и столбца) — нули. Это значит, что сумма чисел в любой строке F равна сумме чисел в любом её столбце.

Осталось показать, что F является суммой нескольких *ладейных таблиц*, то есть таблиц, содержащих одно и то же неотрицательное число p во всех клетках одного ладейного множества и нули в остальных клетках; это будет означать, что $f(t) \geq 0$, что не так. Другими словами, нам осталось показать, что из F можно вычесть несколько ладейных таблиц так, чтобы получить таблицу из нулей. Это нетрудно сделать с помощью леммы Холла: если таблица содержит положительные числа, то в ней есть n клеток. содержащих положительные числа и образующих ладейное множество. Тогда можно вычитанием ладейной таблицы обнулить одно из этих чисел, оставив остальные неотрицательными.

№4. В треугольник ABC вписана окружность радиуса r. Окружности с радиусами r_1, r_2, r_3 (здесь $r_1, r_2, r_3 < r$) вписаны в углы A, B, C соответственно так, что каждая из них касается вписанной окружности внешним образом. Докажите, что $r_1 + r_2 + r_3 \geqslant r$.

Первое решение. Пусть ω — вписанная окружность $\triangle ABC$, а I — её центр, $p = (AB + BC + AC)/2$ — полупериметр. Обозначим точку касания ω со сторонами BC, AC, AB через A_0, B_0, C_0 соответственно. Пусть окружность радиуса r_1 касается вписанной окружности в точке A_1.



Проведем касательную прямую ℓ к ω такую, что $\ell \parallel BC$. Обозначим через r_1' радиус вписанной окружности треугольника, образованного прямыми AB, AC, ℓ. Прямая AI пересекает окружность с радиусом r_1' в двух точках. Из этих двух точек через A_2 обозначим ближайшую к I. Тогда $\frac{r_1}{r_1'} = \frac{AA_1}{AA_2} \geq 1$ и $\frac{r_1'}{r} = \frac{AB_0}{p}$ (здесь мы воспользовались тем, что полупериметр треугольника, образованного прямыми AB, AC, ℓ равен AB_0 и этот треугольник подобен $\triangle ABC$). Применяя те же рассуждения к окружностям с радиусами r_2' и r_3' и складывая полученные неравенства, имеем:

$$r_1 + r_2 + r_3 \geq r_1' + r_2' + r_3' = r\left(\frac{AB_0}{p} + \frac{BC_0}{p} + \frac{CB_0}{p}\right) = r.$$

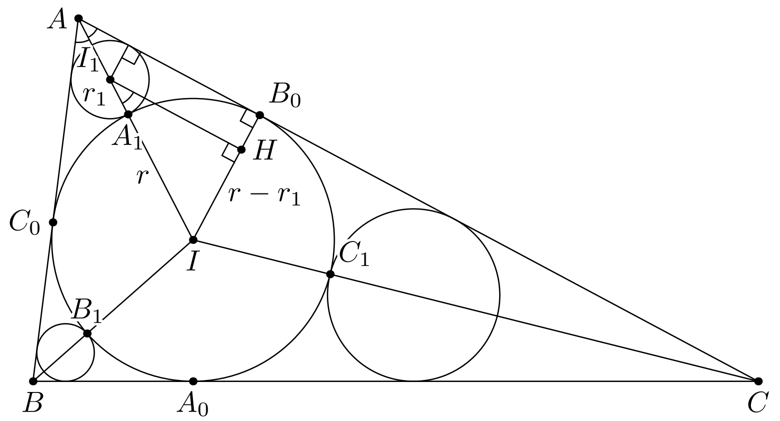
Второе решение. Так же, как и в первом решении, отметим точки A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1. Тогда $\angle B_1IC_1 = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$, $\angle A_1IC_1 = 90^\circ + \frac{\angle B}{2}$, $\angle A_1IB_1 = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}$. Очевидно, что

$$\left(\overrightarrow{IA_1} + \overrightarrow{IB_1} + \overrightarrow{IC_1}\right)^2 \geq 0. \tag{1}$$

Тогда из (1) получим

$$r^2 + r^2 + r^2 + 2r^2\cos\left(90^\circ + \frac{\angle A}{2}\right) + 2r^2\cos\left(90^\circ + \frac{\angle B}{2}\right) + 2r^2\cos\left(90^\circ + \frac{\angle C}{2}\right) \geq 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \sin\frac{\angle A}{2} + \sin\frac{\angle B}{2} + \sin\frac{\angle C}{2} \leq \frac{3}{2}. \tag{2}$$



Пусть I_1 — центр окружности радиуса r_1. Опустим перпендикуляр I_1H из точки I_1 на прямую IB_0. Тогда в прямоугольном треугольнике II_1H один из острых углов равен $\frac{\angle A}{2}$, катет, лежащий напротив этого угла, равен $r - r_1$, а гипотенуза равна $r + r_1$. Следовательно, $\sin\frac{\angle A}{2} = \frac{r - r_1}{r + r_1}$. Аналогично получим $\sin\frac{\angle B}{2} = \frac{r - r_2}{r + r_2}$ и $\sin\frac{\angle C}{2} = \frac{r - r_3}{r + r_3}$. Согласно неравенству (2)

$$\frac{r - r_1}{r + r_1} + \frac{r - r_2}{r + r_2} + \frac{r - r_3}{r + r_3} \le \frac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{2r}{r + r_1} + \frac{2r}{r + r_2} + \frac{2r}{r + r_3} \le \frac{9}{2}\,. \tag{3}$$

По неравенству Коши-Буняковского имеем

$$\frac{1}{r + r_1} + \frac{1}{r + r_2} + \frac{1}{r + r_3} \ge \frac{9}{r + r_1 + r + r_2 + r + r_3}\,, \tag{4}$$

следовательно, из (3) и (4) получим $\frac{9}{2} \ge \frac{18r}{3r + r_1 + r_2 + r_3} \;\Leftrightarrow\; r_1 + r_2 + r_3 \ge r$.

№5. На вечеринку пришли 99 гостей. Двое ведущих вечеринки, Анна и Боб, играют в следующую игру (ведущие не входят в число гостей). По кругу расставлены 99 стульев; изначально все гости ходят вокруг стульев. Ведущие делают ходы по очереди. За ход ведущий выбирает стоящего гостя и указывает ему свободный стул c, на который тот должен сесть; если хотя бы один стул, соседний с c, занят, то тот же ведущий велит одному гостю на стуле, соседнем с c, встать (если оба стула, соседних с c, заняты, ведущий выбирает один из них). Все указания исполняются немедленно. Анна ходит первой; её цель — добиться, чтобы после какого-то её хода хотя бы k стульев были заняты. При каком наибольшем k Анна может добиться цели, как бы ни действовал Боб?

Ответ. $k = 34$.

Решение. *Предварительные замечания.* Обозначим через F количество занятых стульев в текущий момент игры. Заметим, что на каждом ходу F не уменьшается. Таким образом, нам нужно найти наибольшее количество занятых стульев k, которое Анна может гарантировать после *произвольного* хода (её или соперника).

Назовём ситуацию в игре *стабильной*, если у каждого свободного стула есть соседний занятый стул. Поскольку заняты или соседствуют с занятыми максимум $3F$ стульев, в любой стабильной ситуации имеем $F \geq 33$. Более того, тоже соображение показывает, что есть единственная (с точностью до поворота) стаильная ситуация, в которой $F = 33$ (когда ровно каждый третий стул занят); назовём такую ситуацию *плохой*.

Если ситуация после хода Боба стабильна, он может дальше играть так, чтобы значение F больше никогда не увеличилось. Именно, если Анна своим ходом сажает гостя на стул a и освобождает соседний стул b, Боб может посадить гостя на стул b и освободить a, возвращаясь к той же стабильной ситуации.

С другой стороны, если ситуация после хода Боба нестабильна, то найдётся свободный стул a, соседние с которым также свободны. Тогда Анна может посадить на него гостя, увеличив F.

Стратегия для Анны, когда $k \leqslant 34$. Вкратце, стратегия Анны — *каждым ходом увеличивать значение F, избегая появления плохой ситуации после хода Боба (наоборот, Анна создаёт плоху ситуацию после своего хода, если может).*

Таким образом, на каждом своём ходу Анна делает произвольный ход, увеличивающий значение F, если это не приводит к опасности появления плохой ситуации после ответного хода Боба (в частности, Анна не заставляет гостей вставать). Разберём исключительные случаи, в которых опасность появляется.

Случай 1. Пусть Анна может посадить гостя на стул a, после чего F увеличивается до 32, и Боб может добиться плохой ситуации, посадив ещё одного гостя. Это значит, что после хода Анны все занятые стула расположены “через три”, за одним искоючением. Но тогда Анна может посадить гостя не на стул a, а на соседний с ним (оба его соседа также свободны!), избегая опасности.

Случай 2. Пусть Анна может посадить гостя на стул a, после чего F увеличивается до 33, и Боб может добиться плохой ситуации, посадив ещё одного гостя на стул b и подняв гостя с соседнего стула c. Если $a = c$, то Анна может своим ходом посадить гостя не на a, а на b, добившись плохой ситуации после *своего* хода; тогда Боб своим ходом вынужден будет нарушить стабильность ситуации. Иначе, как и в предыдущем случае, Анна может посадить гостя не на a, а на один из соседних стульев, всё ещё увеличивая F, но избегая опасности.

Действуя таким образом, Анна увеличивает F каждым ходом, пока $F \leqslant 33$. Поэтому она добьётся значения $F = 34$.

Стратегия для Боба, когда $k \geqslant 35$. Разобьём все стулья на 33 группы по три рядом стоящих стула, и пронумеруем группы числами от 1 до 33 так, что первым ходом Анна использует стул из группы 1. Вкратце, Боб действует так, чтобы после каждого его хода выполнялось следующее условие:

> ($*$) В группе 1 занято не более двух стульев, а в каждой оставшейся группе лишь средний стул может быть занят.

Если условие ($*$) выполнено после хода Боба, то $F \leqslant 34 < k$; поэтому постоянное выполнение этого свойства гарантирует, что Боб не проиграет.

Осталось показать, что Боб всегда сможет сохранять выполнение условия $(*)$ после своего хода. Очевидно, он может это сделать на первом ходу.

Пусть Анна на очередном ходу сажает гостя на стул a и освобождает соседний стул b; тогда Боб может просто посадить гостя на стул b и освободить a.

Пусть теперь Анна на своём ходе просто сажает гостя на стул a (а соседние с ним стулья свободны). В частности, в группе 1 по-прежнему есть свободный стул. Если полученная ситуация уже удовлетворяет $(*)$, то Боб просто сажает гостя на свободный стул в группе 1 (по возможности — средний) и, если надо, освобождает другой стул в этой же группе. Если же $(*)$ нарушено, то a находится в некоторой группе i (при $i \geqslant 2$), и не является средним стулом там. Тогда Боб сажает гостя на средний стул группы i и освобождает стул a.

Действуя таким образом, Боб всё время добивается выполнения $(*)$.

№6. Пусть $P(x)$ – непостоянный многочлен степени n с рациональными коэффициентами, который нельзя представить в виде произведения двух непостоянных многочленов с рациональными коэффициентами. Докажите, что количество многочленов $Q(x)$ с рациональными коэффициентами, степени, меньшей n, таких, что $P(Q(x))$ делится на $P(x)$,

а) конечно;

б) не превосходит n.

Решение. Как известно, неприводимый многочлен $P(x)$ степени n с рациональными коэффициентами имеет n различных комплексных корней, которые мы обозначим $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

а) Если $P(Q(x))$ делится на $P(x)$, то для каждого $k \leq n$ число $Q(\alpha_k)$ также должно быть корнем $P(x)$. Таким образом, значения многочлена Q в точках $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ образуют некоторый упорядоченный набор $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n}$, все числа в котором – корни P, возможно, повторяющиеся. Количество таких наборов n^n, и для каждого из них существует не более одного многочлена Q такого, что $Q(\alpha_k) = \alpha_{i_k}$ (поскольку два многочлена степени, меньшей n, принимающие одинаковые значения в n точках, совпадают).

Таким образом, количество возможных многочленов $Q(x)$ не превосходит n^n.

б) Для каждого многочлена Q, удовлетворяющего условию задачи, $Q(\alpha_1)$ должно быть равно одному из α_i. Однако многочленов с рациональными коэффициентами степени, меньшей n, для которых $Q(\alpha_1) = \alpha_i$, не более одного. Действительно, если $Q_1(\alpha_1) = Q_2(\alpha_1) = \alpha_i$, то α_1 является корнем многочлена $Q_1 - Q_2$ с рациональными коэффициентами степени, меньшей n. Если этот многочлен – не тождественный ноль, то его наибольший общий делитель с P имеет рациональные коэффициенты, степень меньше n и является непостоянными делителем P, что противоречит условию.

Таким образом, количество возможных многочленов $Q(x)$ не превосходит n.