Републички натпревар 2000

I година

1. Дали природните броеви од 1 до 1991 можат да се запишат во низа, така што секој од нив ќе биде запишан два пати, при што второто запишување на бројот $k, k \in \{1, 2, ..., 1991\}$ ќе биде точно $k-$места по првото запишување?

Решение. Да претпоставиме дека такво запишување е можно. Бројот $k \in \{1, 2, ..., 1991\}$ не се појавува на $m_k -$то и на $m_k + k -$то место. Тогаш

$$1+2+...+3982 = (m_1 + (m_1 + 1)) + (m_2 + (m_2 + 1)) + ... + (m_{1991} + (m_{1991} + 1))$$

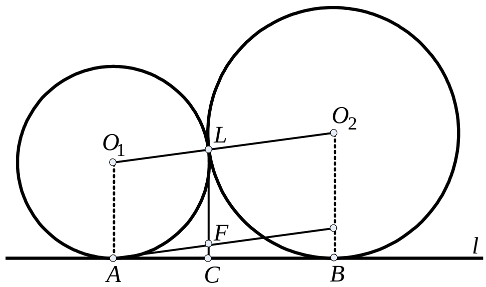
$$7930153 = 2(m_1 + m_2 + ... + m_{1991}) + 1983036$$

$$5947117 = 2(m_1 + m_2 + ... + m_{1991})$$

Добиваме противречност, па затоа таква низа не постои.

2. Две кружници k_1 и k_2 се допираат во точката L. Растојанието од L до нивната заедничка тангента е еднакво на 1. Ако r_1 и r_2 се радиуси на кружниците k_1 и k_2, тогаш $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 2$. Докажи!

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $r_1 \le r_2$. Нека A и B се допирните точки на тангентата l со кружниците k_1 и k_2 соодветно. Точката F е пресек на отсечките LC и AM, каде $M \in BO_2$ и $AM \parallel O_1O_2$. Триаголниците $\triangle AFC$ и $\triangle AMB$ се слични



триаголници и заради тоа $\overline{FC} : \overline{MB} = \overline{AF} : \overline{AM}$, т.е. $\frac{1-r_1}{r_2-r_1} = \frac{r_1}{r_1+r_2}$, од каде $r_1 + r_2 - r_1^2 - r_1r_2 = r_1r_2 - r_1^2$. Значи $r_1 + r_2 = 2r_1r_2$.

3. Нека a, b, p, q, r, s се природни броеви, такви што $qr - ps = 1$ и $\frac{p}{q} < \frac{a}{b} < \frac{r}{s}$. Докажи дека $b \ge q + s$.

Решение. Од $\frac{p}{q} < \frac{a}{b}$ следува $aq - pb > 0$. Бидејќи $aq - pb \in \mathbf{Z}$ добиваме дека $aq - pb \ge 1$. Од $\frac{a}{b} < \frac{r}{s}$ следува $br - as > 0$. Бидејќи $br - as \in \mathbf{Z}$ добиваме дека $br - as \ge 1$. Тогаш

$$b = b(qr - ps) = bqr - bps = (bqr - qas) + (qas - bps) = q(br - as) + s(aq - bp).$$

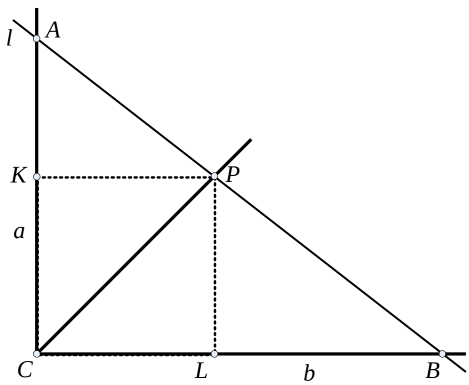
Со користење на претходните две неравенства и последното равенство, добиваме $b \geq q+s$.

4. На симетралата на прав агол е избрана точка P. Низ неа повлекуваме права l која на краците на аголот отсекува отсечки со должини a и b. Докажи дека вредноста на изразот $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ не зависи од изборот на правата l.

Решение. Нека C е темето на правиот агол, а пресекот на правата l со краците на аголот се A и B. Нека $a=\overline{AC}$ и $b=\overline{BC}$. Од точката P спуштаме нормали PK и PL на страните AC и BC соодветно. Тогаш триаголниците $\triangle AKP$ и $\triangle PBL$ се слични и заради тоа

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{KP}}=\frac{\overline{PL}}{\overline{LB}} \quad \text{т.е.} \quad \frac{a-h}{h}=\frac{h}{b-h},$$

каде $h=\overline{PK}=\overline{PL}$. Од $\frac{a-h}{h}=\frac{h}{b-h}$, добиваме $(a-h)(b-h)=h^2$ т.е. $ab=ah+bh$.



Ако последното равенство го поделиме со abh, добиваме $\frac{1}{h}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Бидејќи h е број кој не зависи од изборот на правата l, изразот $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ е константен.

II година

1. Реши го, во множеството комплексни броеви, системот равенки $z^{19}w^{25}=1$, $z^5w^7=1$, $z^4+w^4=2$.

Решение. Од $z^5w^7=1$ добиваме $z^{15}w^{21}=1$, па $\frac{z^{19}w^{25}}{z^{15}w^{21}}=1$, т.е. $z^4w^4=1$. Од последната и од третата равенка на системот добиваме дека z^4 и w^4 се решенија на равенката $t^2-2t+1=0$, т.е. $z^4=w^4=1$. Според тоа $1=z^5w^7=zw^3$. Натаму, $zw^4=w$ па $z=w$. Решенија се $(1,1)$, $(-1,-1)$, (i,i), $(-i,-i)$.

2. Дадена е функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$, таква што $|f(x)|\leq 1$ за $|x|\leq 1$. Докажи дека $|a|\leq 2$.

Решение. Имаме,

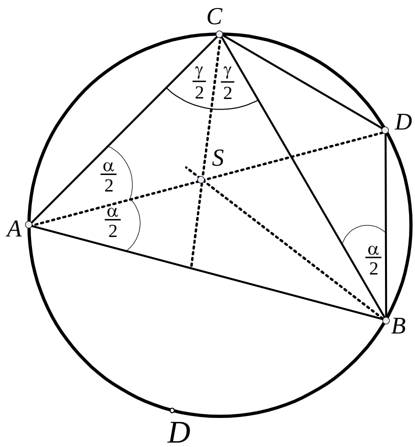
$$f(0)=c \Rightarrow |c|\leq 1,\ |f(1)|=|a+b+c|\leq 1,\ |f(-1)|=|a-b+c|\leq 1$$

Според тоа,

$$|2a|=|(a+b+c)+(a-b+c)-2c|\leq |a+b+c|+|a-b+c|+|-2c|\leq 1+1+2=4$$

т.е. $|a|\le 2$.

3. Ако S е центар на впишаната кружница во триаголникот ABC, а D пресекот на правата AS и опишаната кружница на триаголникот ABC, тогаш $\overline{DB}=\overline{DC}=\overline{DS}$. Докажи!



Решение. Бидејќи D е средина на лакот BC, следува $\overline{DB}=\overline{DC}$.

Имаме: $\measuredangle DBC=\measuredangle DAC=\frac{\alpha}{2}$,

$$\measuredangle DSB=180^\circ-(\measuredangle SBD+\measuredangle BDS\ )$$

$$=180^\circ-(\measuredangle SBC+\measuredangle CBD+\measuredangle BCA)$$

$$=180^\circ-(\ \ )=\frac{\alpha+\beta(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\gamma)}{2}=\measuredangle SBD.$$

Значи $\triangle SBD$ е рамнокрак, па според тоа $\overline{DB}=\overline{DS}$.

4. Множеството A се состои од сите седумцифрени броеви запишани со цифрите $1,2,3,4,5,6$ и 7, при што цифрите им се различни. Докажи дека меѓу нив не постојат два, такви што едниот е делив со другиот.

Решение. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека постојат $a,b\in A$, такви што $a=bk$, $k\ge 2$. Од $k\le\frac{7654321}{1234567}<7$, следува $k\in\{2,3,4,5,6\}$. Бидејќи $1+2+3+4+5+6+7=28$, секој од броевите од множеството A е од видот $3l+1$, т.е. ниту еден од нив не се дели со 3, па според тоа ни со 6. Значи $k\ne 3$ и $k\ne 6$.

Случај $k=2$. Ако $a=2b$, $a+b=3b$. Но $a+b$ не е делив со 3, бидејќи $a=3s+1$ и $b=3p+1$. Значи $k\ne 2$.

Случај $k=5$. Ако $a=5b$, тогаш $a+b=6b$. Бидејќи $a+b$ не е делив со 3, заклучуваме дека $k\ne 5$.

Случај $k=4$. Ако $a=4b$, тогаш $a-b=3b$. Бидејќи $a-b$ се дели со 9 (секој од броевите a и b при делење со 9 има ист остаток) следува дека $a-b=3m$, а оттука и од $a=4b$ добиваме $3m=b$ што не е можно. Значи $k\ne 4$.

III година

1. Ако $a>1$, $b>1$, $c>1$ докажи дека важи неравенството

$$\log_{abc}^{3}a\cdot\log_a b\cdot\log_a c\le\frac{1}{27}.$$

Решение. Имаме $\log_a a=1$, $\log_a b>0$, $\log_a c>0$. Оттука

$$\frac{\log_a a+\log_a b+\log_a c}{3} \geq \sqrt[3]{\log_a a \cdot \log_a b \cdot \log_a c}$$

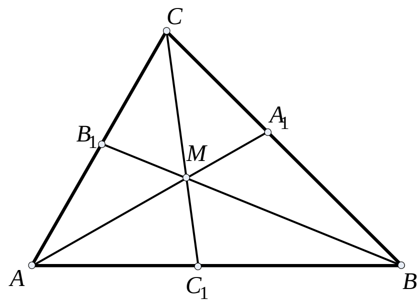
од каде што

$$\log_a^3 abc \geq 27\log_a b \cdot \log_a c \text{ т.е. } \log_{abc}^3 a \cdot \log_a b \cdot \log_a c \leq \frac{1}{27}.$$

2. Нека M е внатрешна точка на триаголникот ABC и нека $AM \cap BC = \{A_1\}$, $BM \cap CA = \{B_1\}$ и $CM \cap AB = \{C_1\}$. Докажи дека

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{A_1M}} + \frac{\overline{BM}}{\overline{B_1M}} + \frac{\overline{CM}}{\overline{C_1M}} \geq 6.$$

Решение. Нека S е плоштина на $\triangle ABC$, а S_1, S_2, S_3 се плоштините на $\triangle MBC, \triangle MCA, \triangle MAB$ соодветно. Триаголниците ABC и MBC имаат иста основа па следува



$$\overline{AA_1} : \overline{MA_1} = S : S_1 = (S_1 + S_2 + S_3) : S_1.$$

Оттука

$$(\overline{AA_1} - \overline{MA_1}) : \overline{MA_1} = (S_2 + S_3) : S_1,$$

односно $\frac{\overline{MA}}{\overline{MA_1}} = \frac{S_2}{S_1} + \frac{S_3}{S_1}$. Аналогно $\frac{\overline{MB}}{\overline{MB_1}} = \frac{S_1}{S_3} + \frac{S_2}{S_3}$ и $\frac{\overline{MC}}{\overline{MC_1}} = \frac{S_1}{S_2} + \frac{S_3}{S_2}$. Значи

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{A_1M}} + \frac{\overline{BM}}{\overline{B_1M}} + \frac{\overline{CM}}{\overline{C_1M}} = (\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1}) + (\frac{S_2}{S_3} + \frac{S_3}{S_2}) + (\frac{S_3}{S_1} + \frac{S_1}{S_3}) \geq 2\sqrt{\frac{S_1}{S_2}\frac{S_2}{S_1}} + 2\sqrt{\frac{S_2}{S_3}\frac{S_3}{S_2}} + 2\sqrt{\frac{S_3}{S_1}\frac{S_1}{S_3}} = 6.$$

3. Ако неравенката $a\cos x + b\cos 3x > 1$ нема решение, тогаш $|b| \leq 1$. Докажи!

Решение. Нека $f(x) = a\cos x + b\cos 3x$. Тогаш $f(x) \leq 1$ за секој x. Според тоа

$$f(\pi) = -(a+b) \leq 1, \ f(0) = a+b \leq 1, \text{ т.е. } |a+b| \leq 1.$$

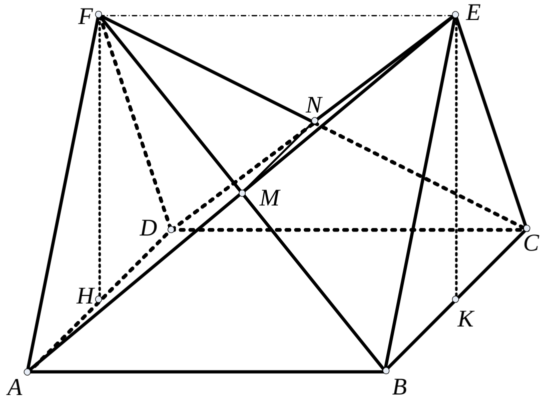
Од друга страна

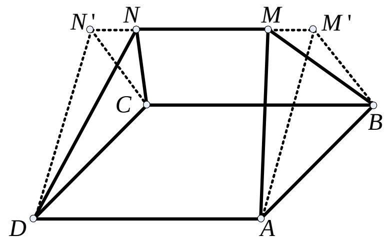
$$f(\tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{a}{2} - b \leq 1, \ f(\tfrac{2\pi}{3}) = b - \tfrac{a}{2} \leq 1,$$

па според тоа $|\frac{a}{2} - b| \leq 1$ т.е. $|2b - a| \leq 2$. Користејќи ги добиените неравенства имаме:

$$|b| = \tfrac{1}{3}|3b| = \tfrac{1}{3}|a+b+2b-a| \leq \tfrac{1}{3}(|a+b| + |2b-a|) \leq \tfrac{1}{3}(1+2) = 1.$$

4. Две пирамиди имаат заедничка основа - квадрат со страна a. Пирамидите се наоѓаат на иста страна од квадратот. Висините на двете пирамиди минуваат низ средините на две спротивни страни на квадратот и имаат должина b. Пресметај го волуменот на заедничкиот дел на двете пирамиди.





Решение. Нека $ABCDE$ и $ABCDF$ се дадените пирамиди. Од правоаголникот $ABEF$ следува дека M е средина на AE. Слично N е средина на CF. Според тоа $\overline{AB} = a$ и висината на $\Delta ABM'$ спуштена од M' е $\frac{b}{2}$. Од друга страна MN е средна линија во ΔADE, па следува $\overline{MN} = \frac{a}{2}$. Според тоа $\overline{MM'} = \overline{MN'} = \frac{a}{4}$ и

$$V_{ABCDMN} = V_{ABCDM'N'} = \frac{1}{2}a\frac{b}{2}a - 2\frac{1}{3}\frac{1}{2}a\frac{b}{2}\frac{a}{4} = \frac{a^2b}{4} - \frac{a^2b}{24} = \frac{5}{24}a^2b.$$

IV година

1. Одреди ја најмалата вредност на изразот $\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz}$, ако $x>0, y>0, \quad z>0$.

Решение. Од

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}x^2y^2} = xy\sqrt{2} \text{ и } z^2 + \frac{1}{2}y^2 \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}z^2y^2} = zy\sqrt{2}$$

добиваме

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz} = \frac{x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y^2+z^2}{xy+yz} \geq \frac{xy\sqrt{2}+yz\sqrt{2}}{xy+yz} = \sqrt{2}.$$

Бидејќи за $x = z = 1, y = \sqrt{2}$ имаме

$$\frac{1^2+(\sqrt{2})^2+1^2}{1\cdot\sqrt{2}+1\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

следува дека мин вредност на изразот $\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz}$ е $\sqrt{2}$.

2. Одреди правоаголен триаголник кај кој аголот меѓу тежишните линии на катетите достигнува најголема вредност.

Решение. Нека $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$. Ако ја примениме косинусната теорема на $\triangle ADT$, добиваме

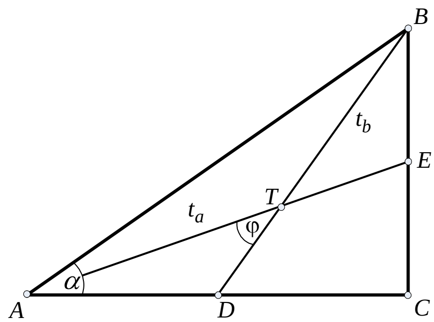
$$2\overline{AT}\cdot\overline{DT}\cdot\cos\phi=\overline{AT}^2+\overline{DT}^2-\overline{AD}^2,$$

т.е.

$$\tfrac{4}{9}\overline{AE}\cdot\overline{DT}\cdot\cos\phi=(\tfrac{2}{3}\overline{AE})^2+(\tfrac{1}{3}\overline{BD})^2-\tfrac{b^2}{4} \qquad (1)$$

Со замена на равенствата $\overline{AE}^2=b^2+\frac{a^2}{4}$ и

$\overline{BD}^2=a^2+\frac{b^2}{4}$ во (1) добиваме



$\frac{1}{9}\sqrt{(4b^2+a^2)(4a^2+b^2)}\cdot\cos\phi=\frac{2}{9}(a^2+b^2)$

т.е.

$$\cos\phi=\frac{2(a^2+b^2)}{\sqrt{(4b^2+a^2)(4a^2+b^2)}} \qquad (2)$$

од каде следува дека

$$\sin\phi=\sqrt{1-\cos^2\phi}=\frac{3ab}{\sqrt{(a^2+4b^2)(4a^2+b^2)}} \qquad (3)$$

Од (2) и (3) добиваме дека $tg\phi=\frac{3ab}{2c^2}$. Ако во последното равенство замениме $a=c\cdot\sin\alpha$, $b=c\cdot\cos\alpha$ добиваме $tg\phi=\frac{3}{4}\sin2\alpha$. Најголемата вредност на $tg\phi$ (а со тоа и за ϕ се достигнува за $\sin2\alpha=1$, т.е. за $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Значи бараниот триаголник е рамнокрак правоаголен триаголник.

3. Одреди ги сите позитивни вредности на пареметарот a за кои ненегативните вредности на x, што ја задоволуваат равенката

$$\cos((8a-3)x)=\cos((14a+5)x),$$

образуваат растечка аритметичка прогресија.

Решение. Дадената равенка ќе ја запишеме во облик

$$\cos((8a-3)x)-\cos((14a+5)x)=0$$

т.е.

$$-2\sin\tfrac{(8a-3)x+(14a+5)x}{2}\sin\tfrac{(8a-3)x-(14a+5)x}{2}=0.$$

Значи, дадената равенка е еквивалентна со вкупноста равенки

$$\left[\begin{array}{l}(8a-3)x+(14a+5)x=2k\pi\\(8a-3)x-(14a+5)x=2n\pi\end{array}\right.,$$

односно со

$$\left[\begin{array}{l}(11a+1)x=k\pi\\(3a+4)x=n\pi\end{array}\right..$$

Бидејќи $a>0$ следува дека $11a+1>0$ и $3a+4>0$. Значи $x=\frac{k\pi}{11a+1}$ или $x=\frac{n\pi}{3a+4}$. Означуваме $x_k=\frac{k\pi}{11a+1}$ и $x_n=\frac{n\pi}{3a+4}$. Бидејќи $x\geq0$, добиваме дека $n,k=0,1,2,...$, па (x_k) и (x_n) се две растечки аритметички прогресии со први членови 0 и разлики $d_1=\frac{\pi}{11a+1}$ и $d_2=\frac{\pi}{3a+4}$ соодветно.

Ќе го докажеме следново својство: *броевите* x_k *и* y_k *образуваат аритметичка прогресија ако и само ако: за* $d_1\le d_2$ *постои* $m\in\mathbb{N}$ *така што* $d_2=md_1$, *или за* $d_2\le d_1$ *постои* $m\in\mathbb{N}$ *така што* $d_1=md_2$.

Навистина ако $d_1\le d_2$, тогаш d_1 е втор член на новата аритметичка прогресија (првиот е 0). Бидејќи $\frac{\pi}{11a+1}\le\frac{\pi}{3a+4}$ следува дека разликата на новата аритметичка прогресија е d_1. Но и d_2 е член на таа аритметичка прогресија, па постои $m\in\mathbf{N}$ така што $d_2=md_1$.

Обратно, нека постои $m\in\mathbb{N}$ така што $d_2=md_1$. Тогаш $x_n=d_2m(n-1)$. Значи секој член од прогресијата (x_n) е член и на прогресијата (x_k), па бараната прогресија е (x_k). Аналогно се докажува и за $d_2\le d_1$.

Натаму нека $d_1\le d_2$. Тогаш постои $m\in\mathbb{N}$ така што $d_2=md_1$, т.е. $m\frac{\pi}{11a+1}=\frac{\pi}{3a+4}$ од каде што следува $a=\frac{4m-1}{11-3m}$. Имаме $m\in\mathbb{N}$ па заради тоа $4m-1>0$, $a>0$ од каде што следува дека $11-3m>0$ па $m\le\frac{11}{3}$. Значи $m\in\{1,2,3\}$ и соодветните вредности за a се $\frac{3}{8},\frac{7}{5},\frac{11}{3}$.

Сега нека $d_2\le d_1$. Тогаш постои $m\in\mathbb{N}$ така што $d_1=d_2m$ т.е. $\frac{\pi}{11a+1}=m\frac{\pi}{3a+4}$, од каде $a=\frac{4-m}{11m-3}$. Заради $m\in\mathbb{N}$ и $a>0$ добиваме, од слични причини како и претходно $m\in\{1,2,3\}$. Соодветните вредности за a се $\frac{3}{8},\frac{2}{19},\frac{1}{30}$.

Значи, $a\in\{\frac{3}{8},\frac{2}{19},\frac{1}{30},\frac{7}{5},\frac{11}{3}\}$.

4. Правоаголник со димензии m и n каде што m и n се природни броеви и $n=mk$ е разделен на $m\cdot n$ единечни квадрати. Секој пат од точката A до точката C по делбените отсечки (страните на малите квадрати) при што е дозволено движење надесно и движење на нагоре, има должина $m+n$. Најди колку пати бројот на патишта од A до C што минуваат низ точката T е поголем од бројот на патишта од A до C што минуваат низ точката S.

Решение. Секој пат од A до C ќе го означиме со нули и единици, при што со единица го означуваме движењето нагоре за единица должина, а со нула го означуваме движењето надесно за единица должина. Според тоа, бројот на патишта низ точката T е

$$C_{m+n-1}^{n-1}=\binom{m+n-1}{n-1},$$

а бројот на патишта низ точката S е

$$C_{m+n-1}^{m-1} = \binom{m+n-1}{m-1}.$$

Бидејќи

$$\frac{C_{m+n-1}^{m-1}}{C_{m+n-1}^{n-1}} = \frac{\binom{m+n-1}{m-1}}{\binom{m+n-1}{n-1}} = k,$$

следува дека бројот на патишта низ точката T е за $k-$пати поголем од бројот на патишта низ точката S.