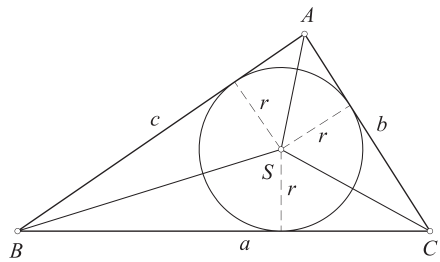
Lijepa analogija

Mladen Halapa, Bjelovar

U članku se opisuje primjena metode analogije na sljedeći zadatak iz planimetrije i stereometrije:

- izračunati ploštinu trokuta, kojem znamo polumjer upisane kružnice r i opseg O,
- izračunati obujam piramide, kojoj su zadani polumjer upisane sfere r i oplošje O.



Neka je u trokut ABC upisana kružnica sa središtem S i polumjerom r. Spojimo vrhove A, B i C s točkom S i uočimo trokute ABS, BCS i CAS. Opseg trokuta ABC je

$$O = a + b + c.$$

Ploština trokuta ABC jednaka je zbroju ploština trokuta ABS, BCS i CAS:

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= P_{ABS} + P_{BCS} + P_{CAS} \\ &= \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} = \frac{r}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}rO. \end{aligned}$$

Neka je u n-terostranu piramidu upisana sfera sa središtem S i polumjerom r. Obujam piramide iznosi

$$V = \frac{1}{3}Bv,$$

a oplošje

$$O = B + P = B + P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n.$$

Kao što smo u prethodnom slučaju središte kružnice shvatili kao vrh pomoćnih trokuta, ovdje pretpostavimo da je središte sfere vrh svih pomoćnih piramida. Visine pomoćnih piramida jednake su polumjeru upisane sfere. Baze pomoćnih piramida su baza cijele piramide B i sve njezine pobočke P_1, P_2, P_3,..., P_n.

Obujam piramide jednak je zbroju obujama pomoćnih piramida:

$$\begin{aligned} V &= V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \ \ldots \ + V_n, \\ V &= \frac{Br}{3} + \frac{P_1 r}{3} + \frac{P_2 r}{3} + \ \ldots \ + \frac{P_n r}{3} \\ &= \frac{r}{3}(B + P_1 + P_2 + \ \ldots \ + P_n) = \frac{1}{3}rO. \end{aligned} \tag{1}$$

Primjer 1. Oko sfere promjera 20 opisana je piramida kojoj je obujam 200. Nađite oplošje piramide.

Rješenje.

$$V = \frac{1}{3}rO \implies O = \frac{3V}{r} = 60.$$

Primjer 2. Pravilnom oktaedru upisana je kugla polumjera 2. Koliki je njegov brid?

Rješenje. Budući da obujam pravilnog oktaedra brida a je

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

slijedi

$$V = \frac{1}{3}rO \implies \frac{a^3\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3}r \cdot 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \implies a\sqrt{2} = 2r\sqrt{3} \implies a = 2\sqrt{6}.$$

Primjer 3. Tetraedru brida a upisana je kugla polumjera r. Nađite omjer duljine brida a i polumjera r.

Rješenje. Iz formule za obujam tetraedra brida a:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

dobije se

$$V = \frac{1}{3}rO \implies \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{1}{3}r \cdot 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \implies 3a\sqrt{2} = 12r\sqrt{3} \implies \frac{a}{r} = 2\sqrt{6}.$$

Primjer 4. U kocku brida a upisana je kugla polumjera r. Izvedite formulu, $V = a^3$, za obujam kocke pomoću (1).

Rješenje.

$$V = \frac{1}{3}rO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a \cdot 6a^2 = a^3.$$

Literatura

[1] BRANKO TOPIĆ, *Matematika za prijamne ispite*, Branko Topić, Varaždin, 2004.

[2] PAVKOVIĆ-VELJAN, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.