Владимир Стојановић ♠ Нинослав Ћирић

5 MATHEMATISKOP 5

ЗБИРКА РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА

ЗА

ТРЕЋИ РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

МАТЕМАТИСКОП ♠ Београд 1999.

Владимир Стојановић, Нинослав Ћирић
MATHEMATISKOP 5
ЗБИРКА РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА за трећи разред средњих школе

Рецензент
Јулија Вукадиновић

Издаје:
ИП МАТЕМАТИСКОП, н.х. Т. Томшича 6, Београд
тел. (011)413-403 тел/факс (011)340-70-90
E-mail: mate.skop@drenik.net

За издавача
Нада Стојановић, директор

Уредник
Душан Стојановић

Слике и корице
Нада Стојановић

Компјутерска обрада текста:
Катарина Бабарогић
Никола Стојановић
Лука Нинковић

ЦИП - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

372.851(075 . 3) (076)

СТОЈАНОВИЋ, Владимир
Одабрани задаци: за трећи разред средње школе / Владимир Стојановић, Нинослав Ћирић. – Београд : Математископ, 1998 (Београд: ЛИОН). – 420 стр.: граф. прикази ; 24 cm. – (Mathematiskop; 5)

Тираж 2000.
ISBN 86-7076-006-1

1. Ћирић Нинослав

ИД=67123724

Тираж 2000
Штампа: Штампарија "ЛИОН", Београд

САДРЖАЈ

ПРВА ГЛАВА

УВОД 7

1.1 Површине многоуглова 7

1.2 Мерење круга и његових делова 14

1.3 Праве и равни 16

1.4 Диедар 17

1.5 Рогаљ 19

ДРУГА ГЛАВА

2 ПОЛИЕДРИ 21

2.1 Правилни полиедри 21

2.2 Равни пресеци призме и пирамиде 23

2.3 Површина и запремина призме 28

2.4 Површина и запремина пирамиде 32

2.5 Зарубљена пирамида 41

ТРЕЋА ГЛАВА

3 ОБРТНА ТЕЛА 45

3.1 Прав ваљак 45

3.2 Права купа 49

3.3 Зарубљена купа 54

3.4 Лопта и делови лопте 57

3.5 Уписана и описана лопта 62

ЧЕТВРТА ГЛАВА

4 СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА 67

4.1 Детерминанте 67

4.2 Системи линеарних једначина. Гаусов поступак 70

4.3 Системи линеарних једначина. Крамерово правило 73

ПЕТА ГЛАВА

5 ВЕКТОРИ 77

5.1 Вектори у правоуглом координатном систему 77

5.2 Скалаарни производ два вектора 81

5.3 Векторски производ два вектора 83

5.4 Мешовити производ 86

ШЕСТА ГЛАВА

6 АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА У РАВНИ 91

6.1 Дуж у координатном систему 91

6.2 Права у равни 96

6.2.1 Неки облици једначине праве 100

6.2.2 Нормални облик једначине праве 104

6.3 Круг. Круг и права 106

6.4 Елипса. Елипса и права 111

6.5 Хипербола. Хипербола и права 115

6.6 Парабола. Парабола и права 119

6.7 Криве другог реда 122

СЕДМА ГЛАВА

7 СИСТЕМИ НЕЈЕДНАЧИНА 125

7.1 Системи линеарних неједначина са две непознате 125

7.2 Линеарно програмирање 127

7.3 Нелинеарне неједначине са две непознате 129

ОСМА ГЛАВА

8 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА. НИЗОВИ 131

8.1 Дељивост бројева 131

8.2 Математичка индукција 134

8.3 Бројни низови 138

8.4 Неки специјални низови 140

8.4.1 Аритметички низ 140

8.4.2 Геометријски низ 143

8.4.3 Диференцне једначине 146

8.5 Гранична вредност 147

8.5.1 Геометријски ред 150

ДЕВЕТА ГЛАВА

9 КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ 153

9.1 Комплексна раван 153

9.2 Степеновање и кореновање комплексних бројева 155

ДЕСЕТА ГЛАВА

10 ПОЛИНОМИ 159

10.1 Полиноми над пољем комплексних бројева 159

10.2 Вијетове формуле 163

10.3 Полиноми са реалним коефицијентима 165

10.4 Системи алгебарских једначина вишег реда 168

ЈЕДАНАЕСТА ГЛАВА

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА 169

УВОДНА РЕЧ АУТОРА - ЧИТАОЦУ

Књига коју имате пред собом садржи веома битне делове елементарне математике. То је озбиљан материјал и од читаоца се захтева стрпљивост, пажња и систематичност. Бирање ,,лакших" тема и прескакање ,,тежих" има за последицу површно упознавање градива и велику ,,рупу" у знању.

Предлажемо Вам да обрадите све наслове редом. Ниво жељеног знања ћете постићи одабирањем задатака. За основно знање треба урадити све задатке који су означени са ,,$\triangle$". За такмичаре су посебно означени задаци са звездицама (*).

Прве три главе садрже геометрију (стереометрију), која се сматра тешком за учење. Ако желите да савладате стереометрију онда *обавезно* урадите све задатке из ПРВЕ ГЛАВЕ. После тога ће Вам тродимензионални простор постати јаснији.

ШЕСТА ГЛАВА, АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА (у Декартовом координатном систему) такође захтева пажљиво изучавање. Стога би било пожељно да одељке 6.1 и 6.2 обрадите што детаљније.

Дуго се чекало да MATHEMATISKOP 5 изађе из штампе. Главни разлог је велики труд који су аутори морали уложити да би од обиља разноликог материјала одабрали оно што је читаоцу најкорисније. Надамо се да ћете бити задовољни оним што Вам нудимо. Без обзира на већ уложени труд и време за израду ове Збирке задатака, на Ваше примедбе, које са захвалношћу прихватамо, реаговаћемо одмах, тако да ће наредна издања, бити још боља.

Захваљујемо се рецензенту, Јулији Вукадиновић, на сугестијама и примедбама, које су допринеле квалитету књиге.

Посебну захвалност дугујемо Катарини Бабарогић која је уложила огромне напоре, жељу и време, да компјутерски слог буде благовремено и квалитетно урађен.

Аутори

ЛИТЕРАТУРА

М. Ашић и група аутора: САВЕЗНА И РЕПУБЛИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА, Друштво математичара Србије, Београд 1984.

Ж. Ивановић и Б. Ђерасимовић - Милић: МАТЕМАТИКА - решени задаци за III разред, СТРУЧНА КЊИГА, БЕОГРАД 1986.

Б. Јанковић, З. Каделбург, П. Младеновић: МЕЂУНАРОДНЕ И БАЛКАНСКЕ ОЛИМПИЈАДЕ, Друштво математичара Србије, Београд 1990.

З. Каделбург, П. Младеновић: САВЕЗНА ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ, Друштво математичара Србије, Београд 1990.

З. Каделбург, В. Мићић, С. Огњановић: АНАЛИЗА СА АЛГЕБРОМ, Круг, Београд 1997.

И. А. Каплан: ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯАТИЯ ПО ВЫШЕЙ МАТЕМАТИКЕ Харков 1973.

В. С. Кущенко: СБОРНИК КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ Судостроение, Ленинград 1964.

П. Младеновић, С. Огњановић: ПРИПРЕМНИ ЗАДАЦИ ЗА МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА, Друштво математичара Србије, Београд 1991.

П. С. Моденов: СБОРНИК ЗАДАЧ ПО СПЕЦИЈАЛНОМ КУРСУ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ Высшая школа, Москва 1960.

И. В. Проскуряков: СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ Наука, Москва 1972.

М. И. Сканави и група аутора: СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ Высшая школа, Москва 1972.

Д. К. Фадеев, И. С. Соминский: СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ Наука, Москва 1972.

Н. Ћирић и група аутора: ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА Клуб НТ, Београд 1995.

О. Н. Цубербилер: ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ Наука, Москва 1968.

К. У. Шахно: КАК ГОТОВИТЬСЯ К ПРИЕМНЫМ ЭКЗАМЕНАМ В ВУЗ Вышэйшая школа, Минск 1973.

Задаци са разних математичких такмичења, домаћих и иностраних и задаци са разних пријемних испита за упис на факултет

ПРВА ГЛАВА

1 УВОД

Ова глава ће нам послужити да се припремимо за израчунавања у тродимензионалном простору. Израчунавања површина и запремина полиедара (ДРУГА ГЛАВА) захтева одлично познавање особина многоуглова (подударност, сличност, Питагорина теорема, површине). Стога ћемо се у одељку 1.1 позабавити овом проблематиком.

Ради припреме за мерење обртних тела (ТРЕЋА ГЛАВА), решићемо групу задатака о кругу и деловима круга - *одељак* 1.2.

Сем тога, неопходно је и извесно минимално искуство у ,,посматрању" и уочавању елемената тродимензионалних фигура. У том циљу морамо пажљиво проучити *одељке* 1.3, 1.4 и 1.5, као и равне пресеке тела у *одељку* 2.2.

1.1 ПОВРШИНЕ МНОГОУГЛОВА

Неопходно је знати следеће формуле и теореме.

За произвољан троугао, чије странице имају дужине a, b, c и висине h_a, h_b, h_c:

$P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$ (површина троугла)

$2s = a + b + c$ (обим троугла)

$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (Херонов образац)

$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$ (површина троугла)

$r = \frac{P}{s}$ (полупречник уписаног круга)

$R = \frac{abc}{4P}$ (полупречник описаног круга)

$a : b = h_b : h_a$ (однос страница и висина)

$m_a = \frac{a}{2}$, $m_b = \frac{b}{2}$, $m_c = \frac{c}{2}$ (средње линије троугла)

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$ (синусна теорема)

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha$
$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\ \cos\beta$ (косинусна теорема)
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma$

За два слична троугла, ABC и $A_1B_1C_1$ (и за два слична многоугла):

$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{s}{s_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{R}{R_1} = \frac{h}{h_1} = \frac{t}{t_1}$ и $P : P_1 = a^2 : a_1^2$ (сличност)

Ако је ABC правоугли троугао са хипотенузом c:

$c^2 = a^2 + b^2$ (Питагорина теорема)

$P = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ (површина правоуглог троугла)

$R = \frac{c}{2} = t_c$ (полупречник описаног круга)

$r = s - c$ (полупречник уписаног круга)

$h_c^2 = pq$ (p и q пројекције катета на хипотенузу)

Ако је троугао једнакостраничан:

$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (површина једнакостраничног троугла)

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (висина једнакостраничног троугла)

$R = 2r = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (полупречници описаног и уписаног круга)

За четвороуглове користимо формуле:

$P = a^2 = \frac{d^2}{2}$ (површина квадрата)

$d = a\sqrt{2}$ (дијагонала квадрата)

$2r = a$ (пречник уписаног круга квадрата)

$2R = d$ (пречник описаног круга квадрата и правоугаоника)

$d^2 = a^2 + b^2$ (дијагонала правоугаоника)

$P = ab$ (површина правоугаоника)

$P = ah_a = bh_b = ab\ \sin\alpha = d_1d_2\sin\varphi$ (површина паралелограма)

$P = ah = \frac{d_1d_2}{2}$ (површина ромба)

$2r = h$ (пречник уписаног круга ромба)

$P = \frac{a+b}{2}h = mh$ (површина трапеза)

$m = \frac{a+b}{2}$ (средња линија трапеза)

$P = ab\ \sin\alpha$ (површина произвољног четвороугла)

$P = \dfrac{d_1 d_2}{2}$ (површина делтоида)
$a + c = b + d$ (тангентни четвороугао)
$P = rs$ (површина тангентног четвороугла)
$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^o$ (тетивни четвороугао)
$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ (површина тетивног четвороугла)

Правилан шестоугао се може разделити на шест једнакостраничних троуглова.
$R = a$ (полупречник описаног круга правилног шестоугла)
$2r = a\sqrt{3}$ (пречник уписаног круга правилног шестоугла)
$P = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ (површина правилног шестоугла)
$d = 2r$ (мања дијагонала правилног шестоугла)
$D = 2a$ (већа дијагонала правилног шестоугла)

Пажња! Проучите пажљиво два важна троугла: *једнакокраки правоугли* (пола квадрата) са страницама: a, $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{2}$ и угловима: 90^o, 45^o, 45^o и *пола једнакостраничног троугла*, страница: a, $\dfrac{a}{2}$, $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ и угловима: 90^o, 30^o, 60^o.

Увежбајмо формуле на следећим задацима.

△ **1.** Израчунати површину и обим правоугаоника страница a, b и дијагонале d, ако је:
а) $a = 0,07$, $d = \dfrac{1}{4}$; *б)* $a = 2b$, $d = 3\sqrt{5}$.

△ **2.** Израчунати површину и полупречник уписаног круга ромба, ако је:
а) $d_1 = 24$ cm, $d_2 = 10$ cm; *б)* $a = 50,5$ cm, $d_1 = 99$ cm;
в) $h = 24$ cm, $d_1 = 40$ cm; *г)* $2s = 6$ dm, $d_1 : d_2 = 3 : 4$.

△ **3.** Израчунати дијагонале ромба ако је:
а) $P = 480$ cm^2, $a = 26$ cm; *б)* $P = 384$ m^2, $r = 96$ dm.

△ **4.** Израчунати површину једнакокраког троугла основице a, ако је:
а) $a = 16$, $b = 17$; *б)* $b = 5$, $h_a = 1,4$; *в)* $a = 14,5$, $h_b = 10,5$;
г) $h_a = 15$ cm, $h_b = 18$ cm; *д)* $h_a = 24$ cm, $t_b = 25,5$ cm;
ђ) $a = 20$ cm, $t_b = 17$ cm.

△ **5.** Израчунати висину h_b, која одговара краку једнакокраког троугла, ако је:
а) $a = 24$, $b = 13$; *б)* $a = 18$, $b - h_b = 3$.

△ **6.** Позната је дужина c хипотенузе и збир k катета правоуглог троугла. Израчунати површину овог троугла.

△ **7.** У троуглу ABC дате су дужине двеју страница, a и b. Ако је $h_c = h_a + h_b$, израчунати дужину треће странице.

△ **8.** Права p, паралелна основици AB троугла ABC, разлаже троугао на два дела једнаких површина. Израчунати дужину одсечка праве p између страница датог троугла, ако је $AB = 16$ cm.

△ **9.** Висина која одговара краку разлаже једнакокраки троугао на два дела, чије површине стоје у размери $1:3$. Израчунати мању од површина, ако је основица троугла 48.

△ **10.** Израчунати површину и углове паралелограма, ако су му странице 15 cm и 34 cm и дијагонала 35 cm.

△ **11.** Нека су a и b основице $(a > b)$, c и h краци $(c > h)$, d_1 и d_2 дијагонале $(d_1 < d_2)$ правоуглог трапеза. Израчунати површину овог трапеза, ако је:

а) $a = 23,\ b = 13,\ c = 26$; *б)* $a = 28,\ c = 29,\ h = 21$;

в) $a = 9,\ c = 13,\ d_2 = 15$; *д)* $c = 17,\ h = 15,\ d_1 = 39$.

△ **12.** Нека су a и b основице $(a > b)$, c крак и d дијагонала једнакокраког трапеза. Израчунати површину трапеза ако је:

а) $b = 16{,}5,\ c = 61,\ h = 11$; *б)* $a = 27,\ b = 13,\ d = 29$;

в) $b = 33,\ c = 25,\ d = 52$; *г)* $d = 65,\ h = 63$.

△ **13.** Израчунати површину трапеза $ABCD$ са основицама AB и CD, $AB > CD$ и висином h, ако је:

а) $AB = 70{,}5,\ CD = 18{,}5,\ BC = 53, AD = 51$;

б) $CD = 16,\ BC = 17,\ AC = 25,\ h = 15$;

в) $AC = 26,\ BD = 25,\ h = 24$.

△ **14.** Израчунати обим једнакокраког трапеза површине P, основица a и b, $a > b$, крака c и висине h, ако је:

а) $P = 195\ \text{dm}^2,\ a = 21\ \text{dm},\ b = 5\ \text{dm}$;

б) $P = 108\ \text{m}^2,\ h = 8\ \text{m},\ a - b = 12\ \text{m}$;

в) $P = 72\ \text{cm}^2,\ c = 5\ \text{cm},\ a - b = 6\ \text{cm}$;

г) $P = 180,\ c = 17,\ h = 15$.

15. Трапез основица $a = 12$ cm, $b = 8$ cm и висине $h = 9$ cm, пресечен је двема правим које су паралелне са основицама и висину деле на три једнака одсечка. Израчунати површине делова на које је трапез издељен овим правим.

16. Трапез основица 20 cm и 12 cm и висине 8 cm разложити на два дела једнаке површине правом која је паралелна са основицом. Колико је ова права удаљена од веће основице?

△ **17.** У квадрату $ABCD$ тачка M је средиште странице AB, а N тачка странице AD, таква да је $AN = 2ND$. Израчунати површину квадрата $ABCD$, ако је $MN = 1$ m.

△ **18.** Висина једнакокраког трапеза је дужине h cm, а површина трапеза је h^2 cm^2. Израчунати углове између дијагонала.

△ **19.** Дат је квадрат $ABCD$, са страницом дужине a. У квадрату су дате тачке M и P, такве да су троуглови ABM и CDN једнакостранични. Пресеком ова два троугла је одређен четвороугао $MNPQ$. Израчунати површину четвороугла $MNPQ$.

△ **20.** У једнакокраком троуглу угао на основици је α. Израчунати дужину основице, ако је њена висина за k већа од полупречника уписаног круга.

* **21.** Туп угао ромба је β, а дијагонале се разликују за d. Израчунати дужину странице. (Специјално: $\beta = 150^o$, $d = 10$.)

* **22.** Једнакокраки трапез са оштрим углом α и већом основицом a је описан око круга. Израчунати обим и површину трапеза.(Специјално: $\alpha = \frac{\pi}{6}$.)

* **23.** Дата је произвољна тачка D у троуглу ABC са страницама a, b, c. Дужине нормала из тачке D на странице a, b, c, износе редом: m, n, p. Израчунати збир: $\frac{m}{h_a} + \frac{n}{h_b} + \frac{p}{h_c}$.

* **24.** У датом троуглу ABC одредити тачку M, такву да површине троуглова ABM, BCM и CAM буду једнаке.

25. Додирне тачке уписаног круга са страницама датог троугла одређују на страницама одсечке дужина m, n и p. Доказати да је површина троугла $\sqrt{mnp(m+n+p)}$.

△ **26.** Израчунати површину правоуглог троугла, ако су дати полупречници уписаног и описаног круга, r и R.

* **27.** Доказати да је површина правоуглог троугла једнака производу одсечака, које на хипотенузи одређује додирна тачка хипотенузе са уписаним кругом.

* **28.** Дијагонале произвољног трапеза деле тај трапез на четири троугла. Израчунати површину трапеза, P, ако два троугла који садрже основице имају површине P_1 и P_2.

* **29.** На страници AB конвексног четвороугла $ABCD$ дате су тачке M, N и на страници CD тачке P и Q, такве да је $AM = MN = NB$ и $CP = PQ = QD$. Ако је површина датог четвороугла једнака 3 dm^2, колика је површина четвороугла $MNPQ$?

* **30.** Оштар угао троугла ABC је $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$. Доказати да је површина овог троугла $P = \sqrt{3}(s-b)(s-c)$.

* **31.** Одредити површину троугла ABC, ако је $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $a = \sqrt{21}$ и $b + c = 9$.

△ **32.** Израчунати површину трапеза коме су дијагонале дужина 3 cm и 5 cm и средња линија 2 cm.

△ **33.** Израчунати површину једнакокраког трапеза, који има дијагоналу дужине 2 и оштар угао 45^o.

△ **34.** Једнакокраки трапез има дијагоналу d, која са основицом одређује угао α. Израчунати површину тог трапеза.(Специјално $d = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$.)

35. Израчунати површину једнакокраког трапеза са оштрим углом α и краком дужине k, ако су дијагонале трапеза узајамно нормалне.

* **36.** Дијагонале трапеза су нормалне на одговарајуће краке, а оштар угао међу њима је α. Израчунати површину трапеза, ако је дужина његове веће основице a.

* **37.** Центар круга уписаног у правоугли трапез, удаљен је од крајева дужег крака p cm и q cm. Израчунати површину трапеза.(Специјално: $p = 2$ cm, $q = 4$ cm.)

38. Већа основица трапеза је дужине 5 cm, а налегли углови су $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{4}$. Ако је површина трапеза $(4\sqrt{3} - 4)$ cm^2, колика је дужина висине?

39. У правоугли троугао ABC је уписан правоугаоник $MNPQ$, тако да тачке M и N припадају хипотенузи AB. Катете датог троугла су $AC = 4$ cm и $BC = 3$ cm. Ако је површина правоугаоника $\frac{5}{3}$ cm^2, колике су му странице?

* **40.** У троуглу ABC симетрала угла BAC сече страницу BC у N, а симетрала угла ABC сече страницу AC у P, при чему је $PN = k$. Пресечна тачка симетрала AN и BP је Q. Описани круг троугла NPQ садржи тачку C. Израчунати површину троугла NPQ.

* **41.** Израчунати углове троугла коме су две странице дужина a и b и површина $P = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$.

* **42.** На страницама AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$, дате су тачке K, L, M, N, такве да је $AK = BL = CM = DN = 1$. Израчунати

површину четвороугла ограниченог правим AL, BM, CN, DK, ако је површина датог квадрата једнака S и $S > 1$.

43. Око троугла ABC је описан круг, па су на кругу конструисане тачке K, L, M, редом симетричне теменима A, B, C, у односу на центар O круга. Ако је површина датог троугла S, колика је површина шестоугла $AMBKCL$?

* **44.** Нека је S средиште висине CD која одговара основици AB једнакокраког троугла ABC. Праве AS и BS секу редом краке у тачкама K и L. Израчунати површину четвороугла $SKCL$, ако је површина дотог троугла ABC једнака P.

* **45.** На страницама AB, BC, CA троугла ABC, дате су редом тачке M, N, P, тако да је MN паралелно са AC и MP паралелно са BC. Израчунати површину P_3 троугла CPN, ако су дате површине P_1 и P_2 троуглова AMP и BNM.

* **46.** На страницама AB, BC, CA, троугла ABC дате су редом тачке M, N, P, такве да је $AM : MB = BN : NC = CP : PA = k$. Одредити k, тако да површина троугла MNP чини 28% од површине троугла ABC.

* **47.** Нека су M, N, P тачке, тим редом, на страницама AB, BC, CA, троугла ABC такве да је $AM : AB = BN : BC = CP : CA = k$. Одредити k за које је површина троугла MNP најмања.

* **48.** Средиште сваке странице паралелограма $ABCD$ спојено је са теменима наспрамне странице. Тако добијемо осам дужи које ограничавају осмоугао. (Ни једна тачка ових дужи није у унутрашњости осмоугла).Ако је S површина паралелограма, колика је површина осмоугла?

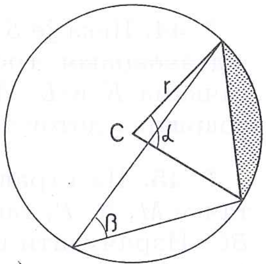
49. Израчунати површину троугла ABC у функцији од дужина двеју страница a, b и симетрале s захваћеног угла.

50. Нека је AB тангентна дуж и AC сечица круга k из тачке A, која сече круг још и у тачки D, тако да је D између A и C. Тачка B и центар S круга су са разних страна сечице. Израчунати површину троугла ABC ако је полупречник круга дужине r, централно растојање сечице d и $\angle BAC = \alpha$.

1.2 МЕРЕЊЕ КРУГА И ЊЕГОВИХ ДЕЛОВА

Обим круга се дефинише као дужина која је већа од обима било ког уписаног конвексног многоугла, а мања од обима било ког описаног многоугла.

Површина круга се дефинише као број који је већи од површине било ког уписаног многоугла, а мањи од површине било ког описаног многоугла.



$\pi = 3,14159... \approx \dfrac{22}{7}$ (Лудолфов број)

$O = 2\pi r$ (обим круга)

$P = \pi r^2$ (површина круга)

$l = \dfrac{\pi r \alpha}{180^o}$ (дужина лука са централним углом α)

$P_i = \dfrac{\pi r^2 \alpha}{360^o} = \dfrac{r \cdot l}{2}$ (површина исечка са централним углом α)

$P_o = P_i - P_\triangle$ (површина одсечка осенченог на слици)

$P = \pi(R^2 - r^2)$ (површина прстена одређеног концентричним круговима полупречника R и r)

$\alpha = 2\beta$ (централни и периферијски угао, види слику)

$\triangle$ **51.** Колико се пута обрне точак аутобуса на релацији Београд - Ваљево, ако је дужина пута 91 km и 60 m, а пречник точка је 8 dm? ($\pi = 3,14$).

$\triangle$ **52.** Из кружне плоче пречника 12 cm треба изрезати концентричну кружну плочу, тако да остатак (кружни прстен) има површину 110 cm^2. Колики је пречник изрезаног дела? (Узети $\pi = \dfrac{22}{7}$).

$\triangle$ **53.** Око круга k, полупречника r cm, описано је шест истих толиких кругова, који се додирују међусобно и додирују круг k. Затим је конструисан круг k_1, који обухвата ових шест кругова и круг k_2, који са k_1 образује кружни прстен. Ако је површина овог кружног прстена једнака збиру површина седам једнаких кругова, израчунати ширину прстена.

$\triangle$ **54.** Око троугла са страницама 13 cm, 14 cm и 15 cm је описан круг k. Израчунати део површине круга k, који остаје кад се из њега изреже уписани круг датог троугла. ($\pi = 3,14$).

$\triangle$ **55.** Израчунати површину полукруга, чији је центар на најдужој страници датог троугла (28 cm) и који додирује друге две странице троугла (17 cm и 25 cm).

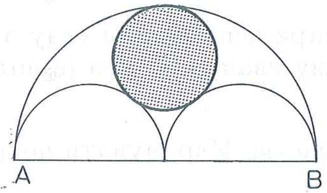
* **56.** Тачке M и N су средишта катета AC и BC троугла ABC. Израчунати дужину тетиве PQ коју на хипотенузи одсеца круг пречника MN, ако су дужине катета датог троугла 60 cm и 80 cm.

57. Странице троугла ABC су $AB = 78$ cm, $BC = 50$ cm и $AC = 80$ cm. Тачка M је средиште странице AB и дуж CN је висина. Израчунати површину круга описаног око троугла CMN.

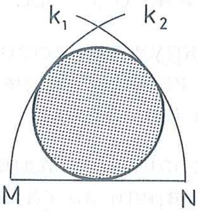
△ **58.** У једном кругу, луку дужине 4π cm одговара исечак површине 12π cm^2. Колики је периферијски угао над овим луком?

59. На сл. *а* је $AB = 12$ cm. Израчунати површину осенченог круга, који додирује сва три полукруга ($\pi = 3,14$).

60. Центри лукова k_1 и k_2 су тачке M и N. Израчунати површину осенченог круга који додирује лукове k_1, k_2 и дуж MN, где је $MN = 8$ cm, сл.*б*. ($\pi = 3,14$).



Сл. *а*



Сл. *б*

△ **61.** Три круга полупречника r cm додирују се међу собом. Израчунати површину фигуре ограничене мањим луковима између додирних тачака.

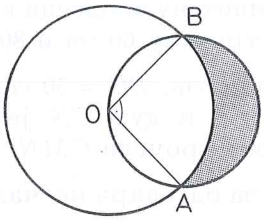
△ **62.** Над страницом дужине a, једнакостраничног троугла, конструисан је круг пречника a. Израчунати део површине троугла, који је изван круга.

△ **63.** Теме A једнакостраничног троугла ABC је центар круга који додирује страницу BC. Колики проценат површине троугла остаје ван круга?

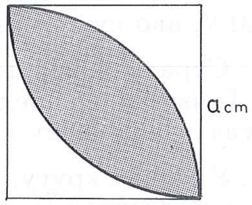
△ **64.** Тачке M и N су средишта двеју наспрамних страница квадрата. Колики део квадрата лежи у кругу полупречника MN? ($\pi = 3,14$ и $\sqrt{3} = 1,73$).

△ **65.** На сл. *в* је $\angle AOB = 90^o$ и $OA = 2$ cm. Израчунати површину осенченог дела. ($\pi = 3,14$).

66. Израчунати осенчену површину на сл. *г*.



Сл. *в*



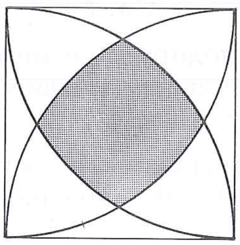
Сл. *г*

67. Ван круга полупречника r cm, конструисана су три круга једнаких полупречника, који се додирују међу собом и додирују мањи круг. Израчунати површину једног од три криволинијска троугла ограниченог мањим луковима ових кругова.

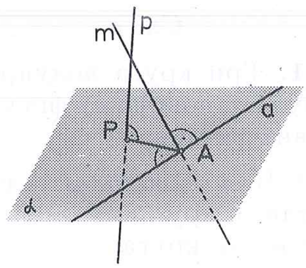
68. У круг полупречника 10 cm је уписан једнакокраки троугао. Ако је угао наспрам основице од 45^o, израчунати површине сваког од три кружна одсечка, који су ван троугла. ($\pi = 3,14$ и $\sqrt{2} = 1,41$).

* **69.** У кружни одсечак, који одговара цептралном углу од 120^o, уписан је квадрат. Одредити површину квадрата, ако је полупречник круга $(2 + \sqrt{19})$ cm.

* **70.** Страница квадрата је дужине a cm. Израчунати површину осенчене површи на сл. *д*.



Сл. *д*



Сл. *ђ*

1.3 ПРАВЕ И РАВНИ

Теорема о три нормале: Нека је дата раван α и права a у тој равни. Ако је права p нормална на раван α у тачки P, сл. *ђ*, и ако је A подножје нормале из тачке P на праву a, тада је свака права m, која садржи тачку A и сече праву p, нормална на правој a. (Важи и обрнута теорема.)

Дефиниција: Ако је права p нормална на раван α, онда је угао између праве и равни прав, а ако p није нормална на раван α, онда је угао између праве p и равни α оштар угао између праве p и њене нормалне пројекције на раван α.

△ **71.** Једна од катета једнакокраког правоуглог троугла налази се у равни π, а друга је нагнута према равни под углом од 45^o. Одредити угао φ између хипотенузе и равни π.

* **72.** Правоугли троугао ABC, са правим углом код темена C, наслања се катетом BC на раван α и нагнут је према равни под углом од $\frac{\pi}{4}$. Одредити одстојање темена A од равни α, ако је $BC = 2$ cm и $AB : AC = 3 : 1$.

* **73.** Катета AC, дужине a cm, правоуглог троугла ABC са углом $\alpha = 60^o$, лежи у равни π. Хипотенуза AB овог троугла нагнута је према равни π под углом од 30^o. Израчунати дужине нормалних пројекција страница датог троугла у равни π.

△ **74.** Дуж AB је нагнута према равни π под углом од 45^o. Друга дуж, дуж AC, лежи у равни π и са пројекцијом дужи AB одређује угао од 45^o. Израчунати угао BAC.

△ **75.** Основица AB трапеза $ABCD$ лежи у равни π, а друга основица је од равни π удаљена 10 cm. Израчунати колико је од равни удаљена пресечна тачка O дијагонала, ако је $AB : CD = 3 : 1$.

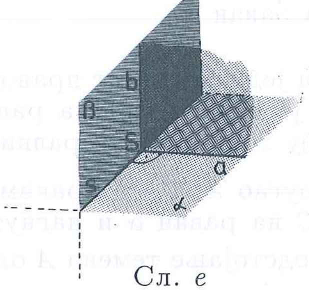
△ **76.** Тачка M је удаљена од сваког темена правоуглог трогла ABC по 26 cm, а од равни ABC је удаљена 24 cm. Колике су странице овог троугла, ако му се катете односе као $3 : 4$?

77. Врх A једнакокраког троугла ABC припада равни π. Крак AB нагнут је према равни π под углом од 45^o, а крак AC под углом од 60^o. Права BC продире раван у тачки P, тако да је $BP = 12(2 + \sqrt{6})$. Ако је нормална пројекција крака AC у равни π дужине 5 cm, колика је површина троугла ABC?

1.4 ДИЕДАР

Скуп тачака једне равни π и свих тачака са једне стране те равни, представља *полупростор*. Раван π је граница полупростора.

Пресек два полупростора дефинише познату фигуру *диедар*. Права по којој се секу границе полупростора је *ивица диедра*, на сл. е права s. Заједнички део полупростора одређених равнима α и β је *диедарска област*, а полуравни које ограничавају ову област су *стране диедра.* (Према сл. *е*, диедарску област чине тачке које су истовремено ,,изнад" равни α и ,,десно" од равни β).



Сл. *е*

Раван, која је нормална на ивицу диедра у пресеку са диедром одређује *угао диедра*, на сл. $e \angle Sab$. Краци угла диедра су нормални на ивицу.

Два диедра су једнака ако имају једнаке углове.

Стране диедра су нормалне једна на другу, ако и само ако је угао диедра прав. Тада имамо *прав* диедар. Угао диедра представља угао (нагиб) између равни које садрже стране диедра.

Разматраћемо само *конвексне диедре* (који имају конвексне углове).

△ **78.** На једној страни диедра, чији је угао 45^o, дата је тачка A, која је од ивице удаљена a cm. Одредити растојање те тачке од друге стране диедра.

△ **79.** Тачка M једне стране диедра три пута је ближа другој страни него ивици диедра. Колики је угао диедра?

* **80.** Тачке A и B, које припадају различитим странама правог диедра, једнако су удаљене од ивице диедра. Одредити углове између праве AB и ивице диедра и угао између праве AB и стране диедра, ако је $A_1B_1 : AA_1 = \sqrt{2} : 1$. ($A_1$ и B_1 су пројекције на ивицу).

△ **81.** На једној страни диедра, чији је угао $\frac{\pi}{3}$, дата је тачка A на одстојању h од друге стране. Колико је тачка A удаљена од ивице диедра?

△ **82.** У диедру, чији је угао 60^o, дата је тачка D, једнако удаљена од страна диедра, удаљена од ивице за d cm. Израчунати растојање тачке D од стране диедра.

△ **83.** Тачке A и B припадају разним странама диедра који има угао 60^o и удаљене су по 1 cm од ивице диедра. Наћи растојање тачке A од подножја нормале из тачке B на ивицу диедра, ако је $AB = \sqrt{2}$.

△ **84.** Крајеви дужи AB, $AB = 10$ cm, припадају двема странама диедра. Растојања AA_1 и BB_1 од крајева дате дужи до страна диедра су редом 5 cm и 6 cm. Ако је $A_1B_1 = 8$ cm, одредити угао диедра.

△ **85.** У диедру од 120^o дата је тачка M која је од сваке стране удаљена d cm. Колико је M удаљена од ивица диедра?

△ **86.** Тачка P је удаљена 6 cm од ивице диедра са углом од 30^o и једнако је удаљена од страна диедра. Израчунати одстојање тачке P од страна.

△ **87.** Крајеви дужи AB, дужине 10 cm, припадају редом странама α и β правоуглог диедра. Дужине нормалних пројекција дате дужи на странама диедра су 8 cm и 7,5 cm. Одредити дужину пројекције на ивицу диедра.

88. Дат је диедар са углом од 60^o и тачка A која припада једној страни. Тачка B је подножје нормале из A на симетријску раван датог диедра. Ако је дуж AB дужине a, колика је дужина њене нормалне пројекције на другу страну диедра?

89. На једној страни правоуглог диедра дата је тачка A, на растојању од 24 cm од ивице диедра. На другој страни је тачка B, удаљена 32 cm од ивице. Дужина нормалне пројекције дужи AB на ивицу диедра је дужине 42 cm. Колика је дужина дужи AB?

90. Катета AC једнакокраког правоуглог троугла ABC, површине P, припада страни α правоуглог диедра. Притом теме C правог угла је на ивици диедра, а угао између катете AC и ивице је 45^o. Раван датог троугла је нагнута према страни α под углом од 30^o. Израчунати површину S нормалне пројекције датог троугла на страни β.

1.5 РОГАЉ

Нека је $A_1A_2...A_n$ раван n-тоугао и S тачка ван равни датог n-тоугла. Скуп свих полуправих, са заједничком почетном тачком S, одређених (свим) теменима многоугаоне линије $A_1A_2...A_n$, је *n-тострани рогаљ*. Занимају нас само *конвексни* рогљеви, тј. рогљеви одређени конвексним многогловима.

Тачка S је *врх* рогља, полуправе SA_1, $SA_2, ...$, су *ивице* рогља, а углови: $\angle A_1SA_2$, $A_2SA_3, ...$, $\angle A_nSA_1$, су *стране* рогља. Две стране са заједничком ивицом, суседне стране, одређују диедар. Унија свих страна рогља је *рогљаста површ*.

Збир свих страна конвексног рогља је мањи од 2π. Рогаљ је *правилан* ако су му једнаке све стране и једнаки сви диедри.

Рогаљ са три стране, на пример рогаљ $Sabc$, назива се *триедар*. Збир две стране триедра већи је од треће стране, а разлика две стране триедра је мања од треће стране.

△ **91.** Ако су две стране триедра прави углови, онда су му два диедра права. Доказати.

△ **92.** Ако су све стране триедра прави углови онда су и сви диедри тог триедра прави. Доказати.

△ **93.** Правилан четворострани рогаљ има стране од 60^o. Ако је S врх и A, B, C, D, редом тачке ивица, такве да је $SA = SB = SC = SD$, израчунати углове триедра са врхом A.

△ **94.** Стране триедра $Sabc$ су прави углови. Нека су A, B, C тачке ивица Sa, Sb, Sc, такве да је $SA = SB = SC$. Одредити углове триедра са врхом A.

△ **95.** У триедру $Sabc$ страна Sab је прав угао, а остале две по $\frac{\pi}{3}$. Одредити нагиб ивице Sc према наспрамној страни.

96. Стране триедра $Sabc$ су: две по $\frac{\pi}{2}$ и једна (Sab) је угао од $\frac{\pi}{3}$. На ивицама су дате тачке A, B, C, такве да је $SA = SB = SC$. Одредити стране триедра са врхом C.

△ **97.** Дат је једнакокраки правоугли троугао ABC. Кроз средиште O хипотенузе AB постављена је дуж OS једнака половини хипотенузе и нормална на раван троугла ABC. Одредити стране рогљева са врховима у тачкама S, A, B, C (четири рогља).

98. Полуправе Ss_1, Ss_2, Ss_3 су симетрале страна рогља $Sabc$. Ако су стране рогља $Sabc$ прави углови, одредити стране рогља чије су ивице симерале s_1, s_2, s_3.

99. Стране триедра су углови од $\frac{\pi}{3}$. На ивици Sa дата је тачка A, таква да је $SA = \sqrt{3}$. Одредити растојање тачке A од стране Sbc.

100. Сваки четворострани рогаљ се може пресећи једном равни, тако да су пресечне тачке на ивицама рогља темена паралелограма. Доказати.

ДРУГА ГЛАВА

2 ПОЛИЕДРИ

Разматраћемо само конвексне полиедре.

Подсетићемо се на неке опште особине полиедара.

а) Полиедар који има i ивица има тачно $2i$ углова страна.

б) Збир свих углова страна конвексног полиедра који има t темена је: $S = (t-2) \cdot 360^o$.

в) За сваки конвексан полиедар, који има t темена, s страна, i ивица, важи једнакост: $t + s = i + 2$ (Ојлерова теорема).

2.1 ПРАВИЛНИ ПОЛИЕДРИ

Међу конвексним полиедрима, *правилни полиедри* заузимају посебно место. То су полиедри чије су стране правилни многоуглови, а правилни су и сви рогљеви.

Правилних полиедара има само пет врста. То су: правилан тетраедар, коцка (хексаедар), октаедар, додекаедар и икосаедар (тим редом су приказани на слици).

Кроз наредне задатке упознаћемо се детаљније са овим полиедрима.

△ **101.** Нека је A једно теме коцке странице a cm.

а) Означимо са AK, AL и AM три ивице коцке. Израчунати површину пресека коцке и равни одређене тачкама K, L и M.

б) Нека су AP, AQ и AR дијагонале страна коцке. Израчунати површину пресека коцке и равни коју одређују тачке P, Q и R.

△ **102.** Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и тачка M ивице $BB_1 = a$, таква да је $BM : MB_1 = 3 : 1$. Израчунати површину пресека коцке и равни одређене тачкама A, M и D.

* **103.** Израчунати угао који одређују дијагонала коцке BD_1 и дијагонала стране CB_1*) у произвољној коцки $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

△ **104.** Ивица коцке има дужину a cm. Одредити (најкраће) растојање између дијагонале коцке и њој мимоилазне ивице.

△ **105.** Израчунати одстојање једног темена од дијагонале коцке, ако дијагонала не садржи то теме, а ивица коцке има дужину a cm.

106. Коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ивице a, пресечена је са равни одређеном средиштима M, N и R ивица BB_1, B_1C_1 и AD. Доказати да је пресек правилан шестоугао и израчунати његову површину.

△ **107.** Ако правилан тетраедар пресечемо једном равни која је паралелна са две мимоилазне ивице, доказати да је пресек паралелограм.

△ **108.** Дужи чији су крајеви средишта двеју мимоилазних ивица правилног тетраедра секу се у једној тачки. Доказати.

△ **109.** Израчунати угао диедра правилног тетраедра и нагиб ивице према страни.

△ **110.** Израчунати дужину висине правилног тетраедра ако му је дужина ивице a cm.

△ **111.** Израчунати одстојање темена A коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ од равни троугла B_1CD_1, ако је ивица коцке дужине a cm.

112. Ивица правилног тетраедра је 2 cm. Израчунати (најкраће) растојање двеју мимоилазних ивица.

△ **113.** Доказати да се висине правилног тетраедра секу у једној тачки, која сваку висину дели у размери $3 : 1$.

△ **114.** Израчунати углове диедра правилног октаедра.

115. Ивица правилног октаедра има дужину a cm. Израчунати растојање d између наспрамних страна.

116. Тачке пресека дијагонала страна коцке представљају темена правилног октаедра. Доказати.

---

*) Ако су праве p и q мимоилазне, онда за угао под којим се секу праве p и q_1,где је $q_1 \parallel q$, кажемо да је одређен мимоилазним правим p и q.

117. Доказати да су тежишта страна правилног октаедра темена коцке.

118. Кроз ивицу AD правилног октаедра $ABCDEF$ је постављена раван која сече октаедар по четвороуглу $ADKL$. Доказати да су четвороуглови $ADKL$ и $BCKL$ трапези. Нека је M пресечна тачка дијагонала трапеза $ADKL$ и N пресечна тачка дијагонала трапеза $BCKL$. Доказати да су четвороуглови $ABNM$ и $CDMN$ трапези.

△ **119.** У правилан октаедар ивице a cm уписати коцку, тако да темена коцке припадају ивицама октаедра. Колика је ивица коцке?

120. Доказати да:

а) Центри страна правилног додекаедра представљају темена правилног икосаедра.

б) Центри страна правилног икосаедра представљају темена правилног додекаедра.

2.2 РАВНИ ПРЕСЕЦИ ПРИЗМЕ И ПИРАМИДЕ

Призму или пирамиду можемо пресецати разним равнима. Пресек који садржи унутрашње тачке тела је неки многоугао. Занимају нас, више од осталих, тзв. *паралелни* и *дијагонални* пресеци.

Под паралелним подразумевамо пресек полиедра неком равни, која је паралелна основи (бази) полиедра.

Паралелни пресек призме је многоугао који је подударан основи призме.

Паралелан пресек пирамиде је многоугао који је сличан основи пирамиде. Површине базе и паралелног пресека пирамиде су пропорционалне квадратима страница тих многоуглова и квадратима одстојања врха од равни многоуглова. На пример, ако је база пирамиде троугао ABC, а паралелни пресек троугао $A_1B_1C_1$, онда је $P : P_1 = AB^2 : A_1B_1^2 = h^2 : h_1^2$.

Кад се од пирамиде одбаци део од паралелног пресека до врха добије се полиедар, тзв. *зарубљена пирамида.* Њене базе су слични многоуглови са паралелним одговарајућим страницама. Омотач образују трапези.

Ако су бочне ивице пирамиде (и зарубљене пирамиде) једнаке међу собом, тада је пирамида (зарубљена пирамида) права.

Код праве пирамиде подножје висине је центар описаног круга основе. Висина праве пирамиде, бочна ивица и полупречник описаног круга основе образују правоугли троугао.

Ако је база праве пирамиде (зарубљене пирамиде) правилни многоугао, онда се пирамида (зарубљена пирамида) назива правилном.

Правилна пирамида (зарубљена пирамида) *није правилан полиедар* (осим у случају правилног тетраедра).

Бочне ивице праве пирамиде су једнако нагнуте према равни основе.

Ако пресечна раван садржи дијагоналу основе и две бочне ивице онда је то *дијагонални пресек.*

Дијагонални пресек призме је паралелограм. Код праве призме је правоугаоник.

Дијагонални пресек праве пирамиде је једнакокраки троугао.

Дијагонални пресек зарубљене пирамиде је једнакокраки трапез.

Висина дијагоналног пресека праве призме, затим праве четворостране пирамиде и праве зарубљене четворостране пирамиде истовремено је и висина полиедра. Исто важи за већи дијагонални пресек правилне шестостране пирамиде (и зарубљене пирамиде).

△ **121.** Правоугли паралелепипед са ивицама основе дужина 6 cm и 8 cm, пресечен је са равни која садржи једну основну ивицу, а нагнута је према основи под углом од 60^o. Израчунати површину пресека, ако је висина паралелепипеда већа од 15 cm.

△ **122.** Основа праве призме је ромб $ABCD$ са углом $\angle BAD = 60^o$. Висина призме, дужине a cm, једнака је основној ивици. Израчунати површину пресека призме и равни BDM, где је M средиште бочне ивице CC_1. Колики је нагиб пресека према равни основе?

△ **123.** Основне ивице правог паралелепипеда, дужина 7 cm и $3\sqrt{2}$ cm, захватају угао од 135^o. Ако је бочна ивица дужине 12 cm, израчунати дужину дијагонале паралелепипеда.

124. Кроз теме A базе правилне четворостране призме постављена је раван која у пресеку са призмом одређује ромб са оштрим углом α. Одредити нагиб пресечене равни према равни основе.

△ **125.** Права призма из задатка 122. пресечена је са равни π, која садржи већу дијагоналу базе и нагнута је према равни основе под углом од 60^o. Израчунати површину пресека, ако је основна ивица $a = 4$ cm.

△ **126.** Права призма висине $12\sqrt{3}$ cm има за основу правоугли троугао са хипотенузом 25 cm и катетом 20 cm. Раван α је одређена хипотенузом једне основе и теменом правог угла друге основе. Колики је угао диедра који ова раван гради са основом?

△ **127.** Дата је правилна тространа призма са основном ивицом a. Израчунати површину пресека дате призме са равни која садржи једну основну ивицу и са основом одређује диедар са углом φ.

△ **128.** Правилна тространа призма је пресечена са равни која садржи основну ивицу и нагнута је према равни основе под углом од 45^o. Израчунати површину пресека, ако је површина основе $B = \sqrt{50}$.

△ **129.** Праву једнакоивичну тространу призму сече раван која садржи ивицу једне основе и полови две ивице друге основе. Израчунати површину Q пресека, ако је ивица призме 12 cm.

△ **130.** Права тространа призма $ABCA_1B_1C_1$ има основу површине B. Раван одређена теменима A, B и C_1 нагнута је према равни основе под углом од 60^o. Израчунати површину пресека равни са призмом и површину стране ABB_1A_1.

△ **131.** Површина бочне стране правилне шестостране призме је S. Израчунати површине Q_1 и Q_2 њених дијагоналних пресека.

* **132.** Правилна једнакоивична шестострана призма је пресечена са равни која садржи једну основну ивицу и већу дијагоналу призме. (Заправо, садржи две супротне ивице горње и доње базе.) Израчунати површину Q пресека у функцији дужине a ивице призме.

* **133.** Правилна шестострана призма је пресечена са две паралелне равни. Прва садржи једну основну ивицу и већу дијагоналу призме, а друга дели осу призме у односу $1:3$. Израчунати површину другог пресека, ако је површина првог једнака Q.

134. Правилна шестострана призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ има већу дијагоналу дужине m, и мању дијагоналу основе дужине n. Наћи површину Q пресека паралелног дужима BF и AD_1, који сече дуж AD у тачки S, тако да је $AS:SD = 3:1$.

△ **135.** Правилна четворострана пирамида је пресечена са равни која садржи подножје висине пирамиде и паралелна је једној бочној страни. Израчунати површину пресека ако је основна ивица дужине 28 cm и висина пирамиде 48 cm.

136. Правилна четворострана пирамида је пресечена симетралном равни једне основне ивице. Ако је површина добијеног пресека једнака Q, колика је површина пресека исте пирамиде и друге равни, паралелне са првом, која тачком P дели исту ивицу у односу $AP:PB = 5:1$?

△ **137.** Правилна четворострана пирамида основне ивице $a = 6$ cm пресечена је са равни паралелном основи, тако да мања добијена пирамида има висину која представља $\frac{2}{3}$ првобитне висине. Израчунати површину пресека.

* **138.** Правилна четворострана пирамида $SABCD$, висине 8 cm и бочне ивице 10 cm, пресечена је са равни која пролази кроз теме A и нормална је на ивицу SC. Израчунати површину пресека.

139. Права четворострана пирамида има за основу правоугаоник ивица 8 и 6. Раван која садржи дијагоналу основе и паралелна је једној бочној ивици сече пирамиду. Израчунати површину пресека ако је висина пирамиде 3,6.

* **140.** Раван сече бочне ивице правилне четворостране пирамиде у тачкама A, B, C, D. Ако је S врх пирамиде, доказати да је $\frac{1}{SA} + \frac{1}{SC} = \frac{1}{SB} + \frac{1}{SD}$.

△ **141.** У правилну четворострану пирамиду ивице 4 cm и висине 12 cm уписана је коцка, тако да јој четири темена припадају основи пирамиде, а остала четири припадају бочним ивицама. Колика је ивица коцке?

△ **142.** Правилна тространа пирамида основне ивице 24 cm и бочне ивице дужине 16 cm, пресечена је са равни која полови две основне ивице и нормална је на раван основе. Израчунати површину пресека.

143. Правилна тространа пирамида је пресечена са равни која је паралелна бочној ивици и полови две основне ивице. Колика је површина пресека ако су дужине основне ивице и бочне ивице a и s?

△ **144.** Дата је правилна тространа пирамида чија бочна страна има површину S. Кроз подножје висине пирамиде је постављена раван паралелна са бочном страном. Израчунати површину Q пресека.

145. Дата је правилна тространа пирамида чија је бочна ивица два пута већа од основне ивице. Симетрална раван једне бочне ивице пресеца призму по троуглу површине $2\sqrt{11}$ cm^2. Колика је основна ивица пирамиде?

146. Бочне ивице тростране пирамиде су две по две нормалне међу собом. Раван α сече ове бочне ивице у тачкама A, B и C, тако да је $SA = a$, $SB = b$ и $SC = c$. Израчунати површину пресека ABC

147. Кроз ивицу основе правилне шестостране пирамиде постављена је раван која полови две супротне бочне ивице. Израчунати површину пресека равни и пирамиде, ако је висина пирамиде једнака H и основна ивица a.

148. Правилна зарубљена четворострана пирамида са дијагоналама основа дужина d и $2d$, пресечена је са равни која садржи дијагоналу пирамиде и паралелна је једној дијагонали основе. Израчунати површину пресека ако је дужина дијагонале пирамиде једнака m.

$\triangle$ **149.** Основне ивице правилне тростране зарубљене пирамиде су 2 cm и 6 cm. Бочна страна је нагнута према равни основе под углом $\frac{\pi}{3}$. Колика је висина зарубљене пирамиде?

$\triangle$ **150.** Правилна тространа зарубљена пирамида има основне ивице a и b, $a > b$. Бочна ивица је нагнута према равни основе под углом од 45^o. Израчунати површину пресека пирамиде и равни коју одређују бочна ивица и висина пирамиде.

* **151.** Основне ивице правилне шестостране зарубљене пирамиде су a и $3a$. Раван која садржи две паралелне основне ивице, које не припадају једној страни, сече пирамиду. Растојање између ове две ивице је k. Израчунати површину пресека.

$\triangle$ **152.** Пирамида, којој је висина дужине h, пресечена је са равни, која је од основе удаљена за m. Површина основе је за k^2 већа од површине паралелног пресека. Израчунати површину пресека.

$\triangle$ **153.** Раван паралелна основи правилне четворостране зарубљене пирамиде полови висину. Израчунати површину пресека ако су основне ивице дужина $5a$ и a.

$\triangle$ **154.** Два многоугла једнаке површине леже у истој равни. Они представљају основе двеју пирамида са висинама дужина H и $4H$. На растојању $\frac{3}{4}H$ од равни основа постављена је паралелна раван. Одредити размеру $Q_1 : Q_2$ пресека паралелне равни са датим пирамидама.

155. Основне ивице зарубљене пирамиде се односе као $1 : 4$. Висина је двема равнима, које су паралелне равни основе, подељена на три једнаке дужи. Збир површина мање основе и паралелних пресека износи k. Колика је површина веће основе зарубљене пирамиде?

2.3 ПОВРШИНА И ЗАПРЕМИНА ПРИЗМЕ

Површина полиедра је збир површина страна. Тако имамо уопштену формулу:
$P = 2B + M$ (површина произвољне призме) где B означава површину основе, а M је омотач, уствари збир површина бочних страна.

За поједине врсте призми важе следеће формуле (a и b су основне ивице, H је висина, а код квадра често означена са c):

$P = 6a^2$ (површина коцке)
$P = 2(ab + bc + ac)$ (површина квадра)
$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH$ (површина правилне тростране призме)
$P = 2a^2 + 4aH$ (површина правилне четворостране призме)
$P = 3a^2\sqrt{3} + 6aH$ (површина правилне шестостране призме)

Сем тога је :

$D = a\sqrt{3}$ (дијагонала коцке)
$D = a^2 + b^2 + c^2$ (дијагонала квадра)

Општа формула за израчунавање запремине било какве призме је:
$V = B \cdot h$
а за поједине врсте призми користимо формуле:
$V = a^3$ (запремина коцке)
$V = abc$ (запремина квадра)
$V = a^2H$ (запремина правилне четворостране призме)
$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}H$ (запремина правилне тростране призме)
$V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}H$ (запремина правилне шестостране призме)
$V = Q \cdot b$ (запремина косе призме, са бочном ивицом b и површином Q нормалног пресека)

(четворостране призме су од 156. до 177. задатка, а тростране од 178. до 189.)

△ **156.** Дате су две коцке са ивицама дужина 12 cm и 5 cm. Израчунати запремину оне коцке која има површину тачно колико обе дате коцке заједно.

△ **157.** Основа правог паралелепипеда је паралелограм са страницама 1 cm и 4 cm и оштрим углом од 60^o. Већа дијагонала паралелепипеда је 5 cm. Израчунати запремину датог полиедра.

$\triangle$ **158.** Основа праве призме је ромб. Израчунати површину омотача ако су површине дијагоналних пресека призме једнаки Q_1 и Q_2.

$\triangle$ **159.** Дијагонални пресек квадра је квадрат површине 1 m^2. Израчунати површину и запремину квадра ако основне ивице задовољавају услов $a : b = 3 : 4$.

$\triangle$ **160.** Израчунати запремину правоуглог паралелепипеда са основним ивицама a и b, ако је дијагонала тела нагнута према равни основе под углом α.

$\triangle$ **161.** Основа правог паралелепипеда је паралелограм чије странице, дужина 3 cm и 4 cm, захватају угао од $\frac{2\pi}{3}$. Мања дијагонала паралелепипеда је једнака већој дијагонали основе. Израчунати запремину тог полиедра.

$\triangle$ **162.** Израчунати површину и запремину правилне четворостране призме, која има омотач $M = 12\sqrt{6}$ cm^2, а нагиб дијагонале према равни основе је 30^o.

$\triangle$ **163.** Права призма површине $P = 334$ cm^2 има у основи паралелограм са страницама 9 cm и 10 cm и дијагоналом 17 cm. Колика је запремина ове призме?

$\triangle$ **164.** Треба начинити 15 m насипа чији је попречни пресек једнакокраки трапез висине 64 cm и крака 136 cm. Газећа површина насипа (ширина) је 4 m. По прорачуну потребно је око 50 кубика земље (прецизно је израчунато $49,92$ m^3). Насип је започет са тачно планираном ширином, дужином и нагибом, али је насут тачно до половине планиране висине. Колико је кубика земље насуто?

$\triangle$ **165.** Одводни канал дубине $2,6$ m има попречни пресек у облику једнакокраког трапеза, са мањом основицом дужине $10,2$ m и тупим углом од 120^o. Колико максимално воде прима овај канал на одсечку дужине 1 m? ($\sqrt{3} = 1,73$. Рачунати са две децимале.)

$\triangle$ **166.** Основу косе четворостране призме представља квадрат $ABCD$ странице a. Бочна ивица AA_1 има дужину a. Управна пројекција тачке A_1 на основу је центар квадрата $ABCD$. Израчунати површину и запремину призме и одредити нагибни угао бочних ивица према равни основе.

$\triangle$ **167.** Основне ивице квадра односе се као $m : n$, а дијагонални пресек је квадрат површине Q. Израчунати запремину квадра.

168. Основа призме је једнакокраки трапез са краком дужине 17 cm и основицама 44 cm и 28 cm. Један дијагонални пресек призме је ромб који има оштар угао од 45^o, а нормалан је на раван основе. Израчунати запремину призме.

169. Квадар основних ивица a и b има дијагоналу која са равни основе одређује угао од 60^o. Израчунати запремину и омотач квадра.

* **170.** Израчунати запремину квадра чија је дијагонала, дужине k, према једној бочној страни нагнута под углом од 45^o, а према другој под углом од 30^o.

△ **171.** Израчунати запремину правилне четворостране призме чија дијагонала са бочном страном образује угао од 30^o, ако је основна ивица дужине a.

172. Правилна четворострана призма је пресечена са равни која садржи две паралелне основне ивице и дијагоналу призме. Дијагонала призме, дужине k, са једном страницом дијагоналног пресека одређује угао од 30^o. Израчунати површину и запремину призме. Колики је нагиб дијагонале према равни основе?

173. Дијагонала основе квадра има дужину d. Основна ивица BC гради са овом дијагоналом угао α, а са дијагоналом квадра угао β. Израчунати површину омотача квадра.

△ **174.** Основа правог паралелепипеда је паралелограм са оштрим углом од 30^o. Површина основе је 4 dm^2, а површине бочних страна су 6 dm^2 и 12 dm^2. Израчунати запремину паралелепипеда.

175. Основа праве призме је трапез. Доказати да је запремина призме једнака производу аритметичке средине површина двеју паралелних бочних страна и (најкраћег) растојања између тих страна.

* **176.** Дате су две једнаке коцке ивице a. Ако се прва коцка обрне за 90^o око средње линије једне своје стране, поклопиће се са другом коцком. Колика је запремина заједничког дела ових двеју коцки?

* **177.** Све стране призме су ромбови странице a и оштрог угла α. Израчунати површину и запремину призме. (Специјално: $\alpha = 60^o$.)

△ **178.** Права тространа призма висине $H = 5$ dm има бочне стране површина: 125 dm^2, 85 dm^2 и 140 dm^2. Израчунати запремину призме.

△ **179.** Основа праве призме је једнакокраки троугао крака дужине 5. Висина призме је 10, а запремина 120. Израчунати површину призме.

△ **180.** Израчунати запремину праве тростране призме, ако је основна ивица дужине a, а омотач чини половину површине призме.

△ **181.** Дата је правилна тространа призма висине H. Права одређена центром горње основе и средиштем ивице доње основе нагнута је према равни основе под углом од 60^o. Израчунати површину и запремину призме.

△ **182.** Основа праве тростране призме има површину $4\ \mathrm{cm}^2$, а бочне стране су површина: $9\ \mathrm{cm}^2$, $10\ \mathrm{cm}^2$ и $17\ \mathrm{cm}^2$. Израчунати запремину.

△ **183.** Правилна тространа призма је пресечена са равни, која је одређена ивицом доње основе и супротним теменом горње основе. Израчунати запремину призме ако је пресечна раван нагнута према основи под углом од 45^o, а површина пресека је једнака Q.

△ **184.** Основа призме је једнакокраки правоугли троугао. Једна бочна страна, која садржи катету основе, је квадрат и нагнута је према равни основе под углом α. Израчунати запремину призме, ако је катета основе a.

△ **185.** Основа призме је једнакостранични троугао странице 4 cm. Бочна ивица, дужине 6 cm, нагнута је према равни основе под углом од 60^o. Израчунати запремину призме и површину нормалног пресека. (То је пресек са равни која је нормална на бочне ивице.)

186. Основа косе призме је једнакостраничан троугао странице a. Једна бочна ивица одређује са суседним ивицама једне основе углове од 45^o. Ако је дужина бочне ивице b, израчунати површину, запремину и висину призме.

187. Основа праве призме је правоугли троугао. Израчунати запремину призме ако су дате дужине дијагонала бочних страна: d_1, d_2, d_3 и $d_1 \leq d_2 < d_3$.

188. Правилна тространа призма је пресечена са равни која садржи ивице доње основе и супротно теме горње основе. Израчунати површину и запремину призме, ако је пресечна раван нагнута према равни основе под углом α, а површина пресека је Q. (Специјално $\alpha = 30^o$.)

189. Код косе тростране призме међусобна растојања између бочних ивица дужине k износе: m, n и p. Израчунати површину и запремину, ако је висина призме једнака H.

△ **190.** Већа дијагонала правилне шестостране призме, дужине d, одређује са бочном ивицом угао од 30^o. Израчунати запремину призме.

2.4 ПОВРШИНА И ЗАПРЕМИНА ПИРАМИДЕ

За израчунавање површине пирамиде користимо формулу:
$P = B + M$ (површина произвољне пирамиде)
Са B је означена површина основе, а са M површина омотача. Омотач се састоји од троуглова. Висине бочних страна називамо *апотемама* и означавамо их са h.

Бочне стране праве пирамиде су једнакокраки троуглови.

Ако су све бочне стране пирамиде једнако нагнуте према равни основе, онда су им једнаке све апотеме, а подножје висине је центар круга уписаног у основу. Тада апотема, висина и полупречник круга уписаног у основу формирају правоугли троугао.

За поједине врсте пирамида користимо формуле:

$P = a^2 + 2ah$ (површина правилне чеворостране пирамиде)

$P = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3ah}{2}$ (површина правилне тростране пирамиде)

$P = a^2\sqrt{3}$ (површина правилног тетраедра)

$P = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah$ (површина правилне шестостране пирамиде)

За израчунавање запремина користимо формуле:

$V = \dfrac{1}{3}B \cdot H$ (запремина произвољне пирамиде)

$V = \dfrac{1}{3}a^2 \cdot H$ (запремина правилне четворостране пирамиде)

$V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}H$ (запремина правилне тростране пирамиде)

$V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}H$ (запремина правилне шестостране пирамиде)

$V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ (запремина правилног тетраедра)

(Од 191. до 225. задатка су четворостране пирамиде, од 226. до 279. тростране и од 280. до 285. шестостране.)

$\triangle$ **191.** Омотач правилне четворостране пирамиде износи 135 cm^2. Основна ивица је за 50% дужа од висине пирамиде. Колика је запремина?

$\triangle$ **192.** Основна ивица правилне четворостране пирамиде је за 1 cm дужа од висине пирамиде. Ако је бочна ивица дужине 9 cm, одредити запремину пирамиде.

$\triangle$ **193.** Висина правилне четворостране пирамиде је H. Површина једне бочне стране једнака је површини основе. Израчунати површину и запремину пирамиде.

△ **194.** Основа пирамиде је једнакокраки трапез са основицама 3 cm и 5 cm и краком дужине 7 cm. Подножје висине пирамиде је пресечна тачка дијагонала трапеза. Већа бочна ивица је дужине 10 cm. Колика је запремина пирамиде?

△ **195.** Израчунати површину и запремину правилне четворостране пирамиде, ако је основна ивица дужине a и нагиб бочне стране према равни основе је 60^o.

△ **196.** Кроз основну ивицу правилне четворостране пирамиде, чији омотач има површину 100 cm^2, постављена је раван која од супротне бочне стране одсеца троугао површине 16 cm^2. Израчунати површину омотача пирамиде, која је датом равни одсечена од дате пирамиде.

△ **197.** Израчунати запремину правилне четворостране пирамиде, која има висину H и дијагонални пресек површине Q. (Специјално: $H = 8$, $Q = 60$.)

△ **198.** У коцки ивице a, центар једне стране спојен је са теменима наспрамне стране. Израчунати површину добијене пирамиде.

△ **199.** Дата је коцка ивице a. Израчунати површину и запремину пирамиде чији је врх центар једне стране, а темена основе су средишта страница наспрамне стране коцке.

△ **200.** Израчунати површину и запремину тела чија су темена центри страна дате коцке, ивице a.

△ **201.** Дата је правилна четворострана пирамида основне ивице $a = 12$ cm и бочне ивице $s = 2\sqrt{34}$ cm. Израчунати ивицу коцке која је уписана у ту пирамиду, тако да се њена четири горња темена налазе на бочним ивицама пирамиде. Колика је запремина дела пирамиде који је изнад коцке?

△ **202.** У правилну четворострану пирамиду, основне ивице a и запремине $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$, уписана је коцка, тако да једна страна коцке лежи у основи пирамиде, а темена супротне стране су на апотемама. Израчунати дужину ивице коцке.

203. У правилан октаедар уписана је коцка, тако да су јој темена тежишта страна октаедра. Наћи однос запремина коцке и октаедра.

* **204.** Суседне бочне стране правилне четворостране пирамиде одређују диедар чији је угао 120^o. Израчунати површину омотача пирамиде, ако је површина дијагоналног пресека једнака Q.

△ **205.** Основа четворострне пирамиде је правоугаоник чије се дијагонале секу под углом од 30^o. Бочне ивице, дужине s, нагнуте су према равни основе под углом од 45^o. Израчунати запремину пирамиде.

* **206.** Правилна четворострана пирамида има основну ивицу дужине 8 cm. Суседне бочне стране образују диедар са углом од 120^o. Израчунати површину и запремину пирамиде.

* **207.** Основа четворостране пирамиде је ромб са оштрим углом α и краћом дијагоналом d. Све бочне стране су нагнуте према равни основе под углом β. Израчунати површину пирамиде.

208. Основа пирамиде је правоугаоник површине B. Две бочне стране су нормалне на раван основе, трећа је нагнута према основи под углом α, а четврта под углом β. Израчунати запремину пирамиде.

209. Правилна четворострана пирамида има површину P, а бочне стране су нагнуте према равни основе под углом β. Израчунати запремину пирамиде.

210. Основна ивица правилне четворостране пирамиде је a. Угао при врху бочне стране је α. Израчунати омотач и запремину пирамиде.

△ **211.** Бочна ивица правилне четворостране пирамиде, дужине s, нагнута је према равни основе под углом α. Израчунати запремину пирамиде.

212. Основа пирамиде је правоугаоник којем је једна страница дужине a. Од две бочне стране које садрже основну ивицу дужине a, једна је нормална на раван основе. Остале три бочне стране су нагнуте према равни основе под углом β. Израчунати поврчину омотача пирамиде.

213. Основа пирамиде је правоугли трапез који има већи крак дужине 12 cm и оштар угао од 30^o. Све бочне стране имају једнаке нагибе у односу на раван основе. Ако је површина омотача 90 cm^2, колика је запремина пирамиде?

△ **214.** Основа пирамиде је правоугаоник са дијагоналама дужине d, које се секу под углом од 60^o. Све бочне ивице су нагнуте према равни основе под углом од 30^o. Израчунати запремину пирамиде.

△ **215.** Израчунати запремину правилне четворостране пирамиде, која има дијагонални пресек површине Q и бочне ивице су нагнуте према равни основе под углом од 45^o.

216. Омотач површине M, правилне четворостране пирамиде образују стране које су нагнуте према равни основе под углом β. Израчунати запремину пирамиде.

217. Основа пирамиде је квадрат. Две бочне стране су нормалне на раван основе, а друге две су нагнуте под углом од 45^o. Средња по величини бочна ивица има дужину s. Израчунати површину и запремину пирамиде.

△ **218.** Основна ивица правилне четворостране пирамиде има дужину a. Израчунати површину омотача и запремину пирамиде, ако су површине основе и дијагоналног пресека једнаке.

△ **219.** Основа пирамиде је паралелограм са страницама $a = 10$ cm, $b = 18$ cm и површином $B = 90$ cm^2. Подножје висине пирамиде је пресечна тачка дијагонала основе. Висина је 6 cm. Израчунати површину омотача пирамиде.

△ **220.** Основа пирамиде је паралелограм са страницама 9 cm, 10 cm и дијагоналом 11 cm. Наспрамне бочне ивице су две и две једнаке. Већа од њих је дужине 10,5 cm. Израчунати запремину пирамиде.

△ **221.** Над квадратом дијагонале d, као заједничком основом, уздижу се две правилне четворостране пирамиде. Код једне су бочне ивице нагнуте према равни основе под углом од 60^o, а код друге под углом од 45^o. Затим је из веће ,,извађена" мања пирамида. Израчунати површину и запремину добијеног тела.

* **222.** Основна ивица правилне четворостране пирамиде је дужине a. Кроз једно тем основе је постављена раван нормална на наспрамну бочну ивицу. Бочна ивица и висина пирамиде образују угао од 30^o. Израчунати запремину дела пирамиде између основе и пресечне равни.

* **223.** Из средишта M висине SO правилне четворостране пирамиде спуштене су нормале $MP = p$ на бочну ивицу и $MQ = q$ на бочну страну пирамиде. Израчунати запремину пирамиде. (Специјално: $p = \sqrt{3}$, $q = \sqrt{2}$.)

* **224.** Основа четворостране пирамиде је паралелограм. Раван која садржи једну ивицу основе и средњу линију наспрамне бочне стране дели пирамиду на два тела. Како се односе њихове запремине?

* **225.** Основа пирамиде је квадрат. Нагибни углови њених бочних страна пирамиде према основи односе се као $1 : 2 : 4 : 2$. Одредити те углове.

△ **226.** Површина правилне тростане пирамиде је $8\sqrt{3}$. Израчунати запремину пирамиде, ако јој је висина два пута већа од основне ивице.

△ **227.** Извести формулу за запремину правилног тетраедра ивице a. Затим, одредити размеру запремина коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и тетраедра AB_1CD_1.

△ **228.** Израчунати површину правилног тетраедра висине H.

△ **229.** Центри страна правилног тетраедра представљају темена новог тетраедра. Наћи размеру површина и размеру запремина ових двају тетраедара.

△ **230.** Израчунати површину правилне тростране пирамиде, ако јој је основна ивица дужине a и бочне стране су нагнуте према равни основе под углом од 60^o.

△ **231.** Једнакокраки троугао основице 6 cm и одговарајуће висине 9 cm, представља основу пирамиде, чије су све бочне ивице 13 cm. Израчунати запремину пирамиде.

232. Израчунати запремину правилне тростране пирамиде која има апотему дужине h и висину v основе.

△ **233.** Тространа пирамида има бочне ивице дужине s, а рогаљ при врху има стране од 60^o, 60^o и 90^o. Израчунати површину и запремину пирамиде.

△ **234.** Рогаљ при врху правилне тростране пирамиде образују три права угла. Наћи размеру површине основе према површини омотача.

235. Основне ивице тростране пирамиде су a, a и b. Све бочне ивице су нагнуте према равни основе под углом од 60^o. Израчунати запремину пирамиде.

236. Основа пирамиде је троугао са страницама дужина a, a и b. Све бочне стране су нагнуте према равни основе под углом од 45^o. Израчунати запремину пирамиде. (Специјално: $a = 5$ cm, $b = 6$ cm.)

△ **237.** Од коцке ивице a одрезани су рогљеви, тако да свака од страна коцке постане правилан осмоугао. Колика је запремина тако добијеног полиедра.

238. Доказати следеће особине правилног тетраедра:

а) Збир нормала из *произвољне* унутрашње тачке датог тетраедра на његове стране има константну вредност.

б) Свака раван која садржи средишта двеју мимоилазних ивица дели тетраедар на два дела једнаких запремина.

239. Основа пирамиде је троугао са страницама 13 cm, 14 cm и 15 cm. све бочне стране имају нагиб према равни основе по 30^o. Израчунати површину пирамиде.

240. Основна ивица правилне тростране призме има дужину a и мања је од бочне ивице. Раван, која садржи ивицу горње основе и са равни основе образује диедар од 45^o, сече призму. Израчунати запремину и омотач полиедра изнад пресечне равни.

241. Правилна тространа пирамида је пресечена са равни која полови две основне ивице и нормална је на раван основе. Основна ивица дате пирамиде има дужину a. Колика је запремина одсечене пирамиде, ако је нагиб бочних страна према равни основе једнак 45^o?

242. Основна ивица правилне тростране пирамиде је a cm. Израчунати запремину, ако је теме A од наспрамне стране удаљено h cm.

△ **243.** Израчунати запремину правилне тростране пирамиде, чији рогаљ код врха S чине три права угла, а растојање од бочне ивице до мимоилазне основне ивице износи d.

244. Основа праве призме је правоугли троугао са хипотенузом c и оштрим углом од 30^o. Раван одређена хипотенузом једне основе и теменом правог угла друге основе нагнута је према равни основе под углом од 45^o. Израчунати запремину тростране пирамиде коју ова раван одсеца од призме.

△ **245.** Израчунати запремину тростране пирамиде којој су две мимоилазне ивице 4 cm и 12 cm, а остале ивице имају дужину 7 cm.

246. Правилна тространа пирамида је пресечена косом равни, која садржи једну основну ивицу и нормална је на наспрамну бочну ивицу. Ова раван и раван основе одређују диедар са углом α. Одсечак пирамиде између основе и косе равни има запремину V. Израчунати дужину висине дате пирамиде.

247. Два правилна тетраедра имају заједничку основу и тако образују двојну пирамиду. Центри бочних страна ове двојне пирамиде су темена тростране призме. Израчунати запремину ове призме, ако је ивица тетраедра дужине a.

248. Средиште основне ивице тростране пирамиде је од мимоилазне бочне ивице удаљено k cm. Израчунати запремину пирамиде, ако је нагиб бочне ивице према равни основе једнак φ.

249. Бочне стране правилне тростране пирамиде су нагнуте према равни основе под углом φ. Теме основе је на одстојању k од наспрамне бочне стране. Израчунати површину омотача пирамиде.

250. Основа пирамиде је правоугли троугао са оштрим углом α. Бочне ивице, дужине s, нагнуте су према равни основе под углом φ. Израчунати запремину пирамиде. (Специјално: $\alpha = 30^o$, $\varphi = 45^o$.)

251. Основа пирамиде је једнакокраки троугао чији краци, дужине b, захватају угао α. Бочне ивице са висином пирамиде захватају углове једнаке φ. Израчунати запремину пирамиде.

△ **252.** Бочне ивице тростране пирамиде су две и две међу собом нормалне и имају дужине m, n и p. Ако странице и углове основе означимо редом са a, b, c, α, β, γ, доказати да важи једнакост: $mnp = abc\sqrt{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$.

△ **253.** Две бочне стране тростране пирамиде, су узајамно нормалне и имају површине P и Q. Израчунати запремину пирамиде, ако је дужина заједничке ивице ових страна једнака s.

254. Све четири стране тростране пирамиде су једнакокраки троуглови са основицом a и крацима b. Израчунати запремину пирамиде. Да ли постоји какво ограничење за a и b?

255. Бочне ивице тростране пирамиде имају дужину s. Рогаљ при врху има две стране од по 45^o и једну страну од 60^o. Израчунати запремину пирамиде.

256. Две правилне тростране пирамиде имају заједничку висину, тако да је врх сваке од њих истовремено центар основе друге пирамиде. Свака бочна ивица сече једну бочну ивицу друге пирамиде. Дужина бочне ивице једне је s и она са висином одређује угао α. Бочна ивица друге пирамиде сече висину под углом β. Израчунати запремину заједничког дела ових пирамида. (Специјално: $\alpha = 75^o$, $\beta = 60^o$.)

* **257.** Раван која садржи основну ивицу BC правилног тетраедра $SABC$, сече ивицу SA у тачки D, тако да је однос запремина тетраедара $ABCD$ и $SBCD$ једнак $1:3$. Израчунати нагибни угао пресечне равни према равни ABC.

258. Све ивице тетраедра $SABC$, осим ивице AB, имају дужину a. Дат је угао $\angle ACB = \gamma$. Израчунати запремину пирамиде.

259. Правилна тространа пирамида има висину дужине H. Израчунати површину пирамиде, ако раван која садржи једно теме основе и нормална је на наспрамну бочну страну, одређује са равни основе диедар чији је угао $\frac{\pi}{6}$.

260. Две стране тростране пирамиде су једнакостранични троуглови, који су узајамно нормални. Дужина странице ових троуглова је a. Израчунати површину пирамиде.

261. Бочне стране тростране пирамиде су две по две нормалне међу собом и њихове површине су једнаке a^2, b^2 и c^2. Израчунати површину основе.

262. Бочне ивице тростране пирамиде су две по две узајамно нормалне. Површине бочних страна су 6 cm^2, 4 cm^2 и 3 cm^2. Одредити основне ивице и запремину пирамиде.

263. Бочне ивице тростране пирамиде су две и две нормалне међу собом и имају дужине: $\sqrt{70}$ cm, $\sqrt{99}$ cm и $\sqrt{126}$ cm. Израчунати висину пирамиде из темена датог рогља (са три права угла).

* **264.** Ако су у тетраедру $SABC$ сви ивични углови код темена S прави, бочне ивице $SA = a$, $SB = b$ и $SC = c$, а H висина из темена S доказати да је $\frac{1}{H^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

* **265.** Дат је тетраедар $ABCD$ чије су стране подударни троуглови са страницама a, b, c. Израчунати запремину октаедра, чија су темена средишта ивица датог тетраедра.

* **266.** Поље има облик троугла коме су странице дужина a, b, c. Из хеликоптера, који непомично лебди у ваздуху, све странице троугла се виде под правим углом. На којој је висини хеликоптер?

* **267.** Коса раван садржи једну основну ивицу правилног тетраедра и сече тетраедар тако да његову запремину дели у размери $3:5$. Израчунати тангенсе углова α и β, на које ова раван дели угао диедра оних двеју страна које се састају у тој ивици.

* **268.** Мимоилазне ивице тростране пирамиде $ABCD$ су нормалне међу собом. Доказати да је: $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

* **269.** Дат је правилан тетраедар $SABC$. Доказати да се из средишта D висине SO ивице основе ABC виде под правим углом.

* **270.** Све три стране рогља код врха S пирамиде $SABC$ су углови од 60^o. Доказати да је $SA + SB + SC \leq AB + BC + CA$.

* **271.** Бочна страна SAC тетраедра је нормална на раван основе ABC. Сви углови рогља при врху S су 60^o. Ако је $SA = SC = 1$, израчунати запремину тетраедра.

* **272.** На ивицама AD, AC, BD, BC правилног тетраедра, дате су редом тачке M, N, P, Q, такве да је $\frac{AM}{AD} = \frac{AN}{AC} = \frac{BP}{BD} = \frac{BQ}{BC} = k$. Наћи размеру запремина V_1 полиедра $AMNBPQ$ и V датог тетраедра.

* **273.** Дато је n међусобно различитих дужи, таквих да се од било које три може образовати троугао. Колико се међусобно неподударних тетраедара може образовати од тих дужи? (Равански симетрични тетраедри су подударни.)

* **274.** Ако су у тространој пирамиди дужи које спајају средишта мимоилазних ивица узајамно нормалне, доказати да је збир страна у свим рогљевима једнак 180^o.

* **275.** Дата је пирамида $SABC$ и тачка Q у њој. Доказати да је: $\angle BQC + \angle CQA + \angle AQB < \angle BSC + \angle CSA + \angle ASB$.

* **276.** Дат је тетраедар $ABCD$. Бисекторна раван диедра код ивице AB (симетрална раван диедра са ивицом AB) сече ивицу CD у тачки M. Означимо са S_1 и S_2 површине страна ABC и ABD. Доказати да је $MC : MD = S_1 : S_2$.

* **277.***) Дат је тетраедар коме је дужина тачно једне ивице већа од 1. Доказати да запремина тетраедра није већа од $\frac{1}{8}$.

* **278.** У тетраедру $SABC$ је $SA \perp SB$, а подножије нормале из темена S на раван ABC је ортоцентар тог троугла. Доказати да је $(|AB| + |BC| + |AC|)^2 \leq 6(|AS|^2 + |BS|^2 + |CS|^2)$. За какве тетраедре важи знак једнакости?

* **279.** Дат је тетраедар $ABCD$. Теме D је спојено са тежиштем D_1 стране ABC. Кроз тачке A, B и C конструисане су праве паралелне са DD_1, чије су пресечне тачке са наспрамним странама: A_1, B_1 и C_1, тим редом. Доказати да је запремина тетраедра $ABCD$ три пута мања од запремине тетраедра $A_1B_1C_1D_1$. Да ли је ово тачно уколико је D_1 произвољна тачка у троуглу ABC?

$\triangle$ **280.** Основна ивица правилне шестостране пирамиде је $a = 2$. Омотач је три пута већи од површине основе. Израчунати површину и запремину пирамиде.

$\triangle$ **281.** Основа правилне пирамиде је многоугао који има збир унутрашњих углова 720^o. Израчунати запремину те пирамиде, ако њена бочна ивица, дужине s, са висином одређује угао од 30^o.

---

*) Задаци 277, 278 и 279 су са *IX*, *XII* и *VI* међународне олимпијаде.

$\triangle$ **282.** Основна ивица правилне шестостране пирамиде је a. Сви дијагонални пресеци пирамиде имају једнаке површине. Израчунати запремину пирамиде и површину омотача .

$\triangle$ **283.** Висина правилне шестостране пирамиде је 12 dm. Раван, паралелна основи, удаљена од основе 9 dm, сече пирамиду, тако да је површина пресека једнака 450 cm^2. Израчунати запремину пирамиде.

$\triangle$ **284.** Бочна ивица правилне шестостране пирамиде је дужине s. Пресек пирамиде и равни, која је одређена врхом и мањом дијагоналом основе представља једнакокраки правоугли троугао. Израчунати запремину пирамиде.

285. Дата је правилна шестострана пирамида запремине V. Кроз сваку мању дијагоналу основе постављене су равни, нормалне на основу. Пресечне праве ових равни продиру бочне стране дате пирамиде. Ове тачке продора и пресечне тачке мањих дијагонала основе пирамиде одређују правилну шестострану призму. Израчунати запремину те призме.

2.5 ЗАРУБЉЕНА ПИРАМИДА

Површина сваке зарубљене пирамиде израчунава се по формули:

$P = B_1 + B_2 + M$

B_1 и B_2 су површине основа, које представљају два слична многоугла са паралелним одговарајућим страницама. Омотач се састоји од трапеза, чије висине називамо бочним висинама.

Зарубљена пирамида се добија паралелним пресеком (са основом) обичне пирамиде. Због тога су подножја висина *праве* зарубљене пирамиде (у обе основе) центри кругова описаних око основа, а бочне ивице су једнаке међу собом.

Општа формула за израчунавање запремине зарубљене пирамиде је:

$V = \frac{H}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)$

(Задаци 286.-295. односе се на четворострану зарубљену пирамиду, 296.-305. су тростране, а 306.-310. су шестостране.)

$\triangle$ **286.** Израчунати површину и запремину правилне четворостране зарубљене пирамиде која има основне ивице $a = 13$ cm, $b = 1$ cm и бочну ивицу $s = 10$ cm.

$\triangle$ **287.** Израчунати запремину правилне четворостране зарубљене пирамиде која има основне ивице $a = 12$ cm, $b = 6$ cm, ако омотач представља половину површине полиедра.

$\triangle$ **288.** Основне ивице правилне четворостране зарубљене пирамиде су a и $3a$. Бочне стране су нагнуте према равни основе под углом од 45^o. Израчунати површину и запремину тела.

$\triangle$ **289.** Дијагонални пресек правилне четворостране зарубљене пирамиде је $132\ \mathrm{cm}^2$, бочна ивица је $s = 13$ cm и висина $H = 12$ cm. Израчунати запремину.

$\triangle$ **290.** Правилна четворострана пирамида има основну ивицу 6 dm и висину 4 dm. Раван паралелна основи, на одстојању 1 dm од основе, одсеца врх пирамиде. Израчунати површину омотача добијене зарубљене пирамиде.

$\triangle$ **291.** Израчунати запремину правилне четворостране зарубљене пирамиде основних ивица a и b, $a > b$, ако су бочне ивице нагнуте према равни основе под углом од 45^o.

292. Основне ивице правилне четворостране зарубљене пирамиде су 6 cm и 3 cm, а висина је 9 cm. Кроз тачку пресека дијагонала пирамиде постављена је раван паралелна основама, која дели дату пирамиду на две зарубљене пирамиде. Израчунати запремине добијених делова.

293. Основне ивице правилне четворостране зарубљене пирамиде су a и b, $a > b$. Бочне ивице су нагнуте према равни основе под углом од 60^o. Израчунати површину омотача.

$\triangle$ **294.** Израчунати запремину правилне четворостране зарубљене пирамиде, ако је њена дијагонала дужине 18 cm, а основне ивице су 14 cm и 10 cm.

$\triangle$ **295.** Висина правилне четворостране зарубљене пирамиде је 3 cm, а запремина је $38\ \mathrm{cm}^3$. Површине основа односе се као $9 : 4$. Израчунати површину омотача.

$\triangle$ **296.** Основне ивице правилне тростране зарубљене пирамиде су 6 dm и 2 dm, а омотач је једнак збиру површина основа. Израчунати запремину тела.

297. Висина тростране зарубљене пирамиде је 10 cm. Ивице једне основе су 27 cm, 29 cm и 52 cm. Обим друге основе је 72 cm. Израчунати запремину зарубљене пирамиде.

298. Бочне ивице правилне тростране зарубљене пирамиде су нагнуте према основи под углом од 30^o. Основне ивице су a и b, $a > b$. Израчунати запремину зарубљене пирамиде.

299. Правилна тространа зарубљена пирамида има основне ивице a и b, $a > b$, а бочне ивице са основом захватају угао α. Израчунати запремину тела.

△ **300.** Основне ивице правилне тростране зарубљене пирамиде су a и $4a$. Бочне стране су нагнуте према основи под углом од 45^o. Израчунати запремину зарубљене пирамиде.

301. Од правилне тростране зарубљене пирамиде одсечена су три рогља равнима, које су одређене теменом мање основе и средиштима ближих ивица веће основе. Површине основа су B_1 и B_2, а висина зарубљене пирамиде је H. Израчунати запремину преосталог дела.

302. У тространој зарубљеној пирамиди кроз ивицу мање основе постављена је раван паралелна наспрамној бочној страни. Наћи размеру запремина добијених делова, ако се основне ивице односе као $2:1$.

303. Дата је зарубљена тространа пирамида чије ивице веће основе према ивицама мање основе стоје у размери $2:1$. Кроз једну ивицу горње основе је постављена раван, која је паралелна наспрамној бочној ивици. Одредити размеру запремина делова на које је зарубљена пирамида подељена овом равни.

304. Дате су две подударне правилне зарубљене тростране пирамиде, са основама површина B_1 и B_2 и висином H. Оне су постављене тако да им се центри основа поклапају и мања основа једне је у већој основи друге, док су им основне ивице паралелне. Израчунати запремину заједничког дела ових зарубљених пирамида.

△ **305.** Зарубљену пирамиду добијамо кад обичној пирамиди одсечемо део који представља мању пирамиду, сличну првој. Тај одсечени део назваћемо *допунском пирамидом* зарубљене пирамиде. Израчунати висину v допунске пирамиде зарубљене пирамиде, ако знамо висину H и површине B_1 и B_2 основа зарубљене пирамиде, $B_1 > B_2$.

Користећи се претходним резултатом израчунати запремину допунске пирамиде оне зарубљене пирамиде, која има висину $H = 3$ cm, запремину 76 cm^3 и већу основу површине 36 cm^2.

△ **306.** Израчунати запремину правилне шестостране зарубљене пирамиде, ако је површина веће основе 36, висина 12, а основне ивице одређују размеру $a_1 : a_2 = 3:2$.

△ **307.** Израчунати површину омотача правилне шестостране зарубљене пирамиде, ако су јој основне ивице 12 cm и 2 cm, а запремина $430\sqrt{3}$ cm^3.

△ **308.** Бочне стране правилне шестостране зарубљене пирамиде су нагнуте према равни основе под углом од 30^o. Висина допунске пирамиде је k. Ако се површине основа односе као $4:1$, колика је запремина зарубљене пирамиде? Израчунати омотач зарубљене пирамиде.

309. Две подударне правилне тростране зарубљене пирамиде, свака запремине V, постављене су тако, да им веће основе леже у истој равни и формирају правилну шестокраку звезду, а мање основе су у другој заједничкој равни. Израчунати запремину заједничког дела ових зарубљених пирамида.

310. Раван, која је одређена центром мање основе и средиштима двеју наспрамних ивица веће основе, сече правилну шестострану зарубљену пирамиду. Пресек је трапез крака 10 dm, висине 8 dm и површине 96 dm^2. Израчунати висину допунске пирамиде.

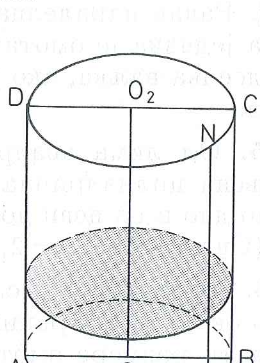
ТРЕЋА ГЛАВА

3 ОБРТНА ТЕЛА

Заједничким именом *обртна тела* називамо фигуре које настају обртањем равних фигура око неке праве. Детаљније о настајању и дефинисању ових фигура можете прочитати у својим уџбеницима. Овде ћемо се позабавити израчунавањем димензија ових тела, мерењем њихових површина, као и површина њихових равних пресека и израчунавањем њихових запремина. Детаљно ћемо проучити ваљак, купу, зарубљену купу, лопту и делове лопте. Такође ћемо се срести са сложеним телима која настају комбиновањем набројаних.

3.1 ПРАВ ВАЉАК

Ваљак је ограничен са два подударна круга и делом цилиндричне површи. Кругови су *основе*, а део цилиндричне површи је *омотач* ваљка. Дуж чији су крајеви центри основа, на слици дуж O_1O_2, је *оса* ваљка. Ако је оса нормална на раван основе, онда је реч о *правом* ваљку. Растојање између основа је висина. Код правог ваљка је висина дуж O_1O_2. Дуж, паралелна оси, са крајевима на кружним линијама основа, је *изводница* ваљка (на слици су то дужи AD, BC, MN). Код правог ваљка је изводница једнака висини.



Полупречник основе се назива *полупречником* ваљка.

Обратимо пажњу на *равне пресеке* ваљка.

Посебно истичемо *осни* (осовински) пресек. Осни пресек правог ваљка је правоугаоник. (Пресечна раван садржи осу ваљка.)

Паралелни пресек одређен је неком равни која је паралелна основи. Сви паралелни пресеци ваљка су подударни основи.

Под *нормалним* пресецима подразумевамо пресеке са равнима које су нормалне на основу. Нормалан пресек правог ваљка је правоугаоник.

Запамтимо још један појам:

Ваљак чији је *осни пресек квадрат* назива се *једнакостраничним*. Ако висину ваљка означимо са H, а полупречник са r, тада важи: $H = 2r$.

Треба да знамо следеће формуле:

$P = 2B + M = 2r^2\pi + 2r\pi H$ (површина ваљка)

$M = 2r\pi H$ (површина омотача ваљка)

$V = BH = r^2\pi H$ (запремина ваљка)

$P = 6r^2\pi$ (површина једнакостраничног ваљка)

$V = 2r^3\pi$ (запремина једнакостраничног ваљка)

(Сви наведени задаци се односе на прав ваљак, па то нећемо посебно истицати.)

△ **311.** Израчунати површину пресека кога у једнакостраничном ваљку висине H одређује раван, удаљена од осе за пола полупречника.

△ **312.** Површина ваљка износи 28π, а висина и полупречник односе се као $5:2$. Израчунати запремину.

△ **313.** Обим основе ваљка износи 20π, а осни пресек има површину 30. Израчунати површину и запремину ваљка.

△ **314.** Раван паралелна основи пресеца ваљак. Површина горњег дела једнака је омотачу датог ваљка. Израчунати запремину доњег одсечка ваљка, ако је пресечна раван од доње основе удаљена k cm.

△ **315.** Од лима квадратног облика, ивице a dm, савијањем је начињена цилиндрична цев. Колико још лима треба да би се начинило дно и од цеви постао лонац. Колико литара захвата овај лонац? (Специјално: $a = 2$, узети $\pi = 3,14$.)

△ **316.** Правоугаоник са страницама a cm и b cm обрће се око једне, па око друге странице. У оба случаја добијају се цилиндри. Израчунати размере омотача, површина и запремина ових двају цилиндара.

△ **317.** Дата је коцка ивице a cm. Израчунати запремину дела ваљка описаног око дате коцке, који преостаје кад се из овог ваљка извади ваљак уписан у дату коцку.

△ **318.** Око квадра димензија 6 cm, 8 cm, 15 cm, могу се описати три ваљка. Одредити размеру њихових омотача и размеру њихових запремина.

△ **319.** Дата је правилна тространа призма. Одредити размеру запремина ваљка уписаног у призму и ваљка описаног око призме.

△ **320.** Одредити размеру омотача ваљка уписаног у тространу призму и ваљка описаног око тростране призме, која има основне ивице: 13 cm, 14 cm и 15 cm.

△ **321.** Правилна шестострана призма има основне ивице дужине 6 cm и висину 80 cm. Израчунати запремину утрошеног материјала за израду цеви коју одређују описан и уписан ваљак дате призме. (Узети $\pi = 3,14$.)

△ **322.** Осни пресек ваљка има површину 120 cm^2 и дијагоналу дужине 17 cm. Израчунати површину ваљка.

△ **323.** Колико метара бакарне жице, дебљине 2,5 mm има у једном килограму? Специфична тежина бакра је $8,9\dfrac{g}{\mathrm{cm}^3}$. ($\pi = 3,14$)

324. Раван нормална на изводницу ваљка одређује пресек површине R. Израчунати површину и запремину ваљка, ако осни пресек има површину Q.

325. У ваљак је уписана правилна тространа призма запремине V. Колика је запремина ваљка?

326. Раван нормална на основу, удаљена d cm од осе ваљка, одсеца од круга основе лук од α радиана. Површина пресека је Q. Колика је запремина ваљка?

327. У цилиндрични суд пречника 8 cm наливена је вода до пола висине. Затим је у воду потопљен предмет облика правилног тетраедра ивице 6 cm, тако да је цео под водом. За колико cm се подигао ниво воде у суду?

328. Осни пресек ваљка има површину 60 cm^2 и дијагоналу дужине 13 cm. Израчунати површину и запремину правилне тростране призме, уписане у том ваљку.

329. У коцку ивице a уписан је ваљак, тако се оса ваљка и дијагонала коцке поклапају, а основе ваљка додирују по три стране коцке. Израчунати запремину ваљка, ако му је висина четири пута већа од полупречника основе.

330. У правилну четворострану пирамиду висине 4 и основне ивице дужине 6, уписан је ваљак чија је оса паралелна са основном ивицом пирамиде. Израчунати запремину ваљка.

331. У четворострану пирамиду, чија је основа правоугаоник са страницама 20 cm и 15 cm, уписан је ваљак, тако да му је оса паралелна са већом основном ивицом пирамиде. Израчунати површину и запремину ваљка, ако је висина пирамиде 8 cm.

332. У правилну четворострану једнакоивичну пирамиду ивице a је уписан једнакостраничан ваљак, тако да се једна основа ваљка налази у равни основе пирамиде, а друга основа ваљка додирује све бочне стране пирамиде. Израчунати површину ваљка.

333. У правилни октаедар је уписан ваљак, тако да му се оса поклапа са једном дијагоналом октаедра, а додирне тачке основа ваљка са странама октаедра полове одговарајуће висине тих страна. Израчунати размеру запремине V_1 октаедра, према запремини V_2 уписаног ваљка.

334. Ваљак је уписан у правилан октаедар, тако да му свака од основа додирује по четири стране октаедра у центрима тих страна. Ако је ивица октаедра дужине a, колика је запремина ваљка?

335. Дат је правилан октаедар странице $8\sqrt{2}$ cm и у њега је уписан ваљак, тако да му основе додирују по четири стране октаедра, а висина, дужине 12 cm, поклапа се са једном дијагоналом октаедра. Израчунати полупречник ваљка.

336. У дати правилни октаедар ивице a cm уписан је једнакостранични ваљак, тако да основе ваљка додирују по четири стране октаедра. Израчунати запремину ваљка.

337. У правилан тетраедар ивице a уписан је једнакостраничан ваљак. Једна основа ваљка лежи у равни основе тетраедра, а друга основа ваљка додирује остале три стране тетраедра. Израчунати површину и запремину ваљка.

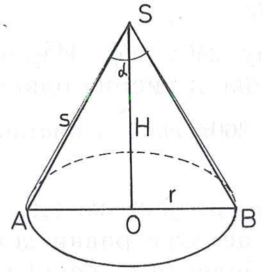
338. Раван која садржи центар једне основе ваљка, нагнута према основи под углом α, одсеца од друге основе тетиву дужине t, којој одговара централни угао 2β. Израчунати запремину ваљка.

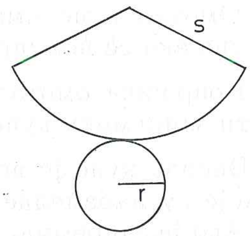
339. Дат је ваљак димензија $r = H = a$ cm. Кроз осу датог ваљка постављен је омотач другог ваљка, који дели обим основе датог ваљка у размери $2:1$. На тај начин је први ваљак подељен на два дела. Израчунати запремину и површину омотача већег дела.

340. Дијагонала коцке је висина ваљка, чији омотач пролази кроз преосталих шест темена коцке. Израчунати запремину ваљка, ако је дужина ивице коцке a cm.

3.2 ПРАВА КУПА

Купа је ограничена једним кругом и делом конусне површи. Круг је основа купе, а део конусне површи омотач. Проучићемо *праву* купу, код које је центар основе истовремено подножје нормале из врха S. Права SO је оса купе. Свака дуж која спаја врх са тачкама на обиму основе је *изводница* купе. Све изводнице праве купе су једнаке.





Пресек купе са равни која садржи осу, тзв. *осни пресек*, је једнакокраки троугао, на слици лево троугао SAB, из ког имамо једнакости:

$s = r^2 + H^2$ и $\dfrac{r}{H} = tg\dfrac{\alpha}{2}$

Ако је $s = 2r$, тј. ако је осни пресек једнакостранични троугао, купа се назива *једнакостраничном*.

Пресеци купе са равнима паралелним основи, тзв. *паралелни* пресеци, су кругови.

Свака раван кроз врх, која сече купу, одређује у пресеку једнакокраки троугао.

Ако се омотач разреже по једној изводници и ,, развије " у раван, добија се кружни исечак са полупречником s, као на слици десно. Лук овог исечка једнак је обиму основе купе, тј. једнак је $2r\pi$.

За израчунавање површина и запремина користимо формуле:

$P = B + M = r^2\pi + r\pi s$ (површина купе)

$V = \dfrac{1}{3}BH = \dfrac{1}{3}r^2\pi H$ (запремина купе)

$M = r\pi s$ (омотач купе)

$P = 3r^2\pi$ (површина једнакостраничне купе)

$V = \dfrac{1}{3}r^3\pi\sqrt{3}$ (запремина једнакостраничне купе)

Купа настаје обртањем правоуглог троугла око једне катете и обртањем једнакокраког троугла око симетрале основице (осе симетрије).

У следећим задацима биће говора искључиво о правој купи, па се неће посебно истицати.

△ **341.** Површина купе је 96π cm^2 и изводница $s = 10$ cm. Израчунати запремину купе.

△ **342.** Једнакостранична купа и једнакостранични ваљак имају осне пресеке једнаких површина. Одредити размеру запремина купе и ваљка.

△ **343.** Израчунати површину и запремину једнакостраничне купе, ако осни пресек има површину Q.

△ **344.** Омотач купе има површину 240π cm^2. Израчунати запремину купе ако се полупречник основе и висина односе као $3:4$.

△ **345.** Површина омотача купе је 260π cm^2, а висина је 24 cm. Израчунати запремину купе.

△ **346.** Висина купе је подељена на три једнака одсечка, двема равнима које су паралелне основи купе. Ове равни деле купу на три дела. Ако је запремина дате купе једнака V, колика је запремина дела између пресечних равни?

△ **347.** Ваљак и купа имају једнаке површине, једнаке запремине и висине једнаке H cm. Колики су полупречници ваљка и купе?

△ **348.** Површина омотача купе је M, а ако се омотач развије у раван, добије се кружни исечак са централним углом од 36^o. Израчунати запремину купе.

△ **349.** Ако се омотач купе развије у раван добија се кружни исечак полупречника 15 cm, са централним углом од 120^o. Израчунати запремину купе.

△ **350.** Савијањем полукруга добили смо конус. Колики је угао осног пресека конуса?

△ **351.** Угао при врху у осном пресеку купе је 2α. Одредити централни угао исечка, који настаје развијањем омотача купе у раван.

△ **352.** Од кружног исечка полупречника 8 cm и централног угла 135^o начињен је омотач купе. Колики круг треба изрезати да би се начинила основа те купе, ако је њена висина 20 cm?

△ **353.** Од кружног исечка са централним углом од 216^o добија се омотач купе. Колика је површина купе, ако је њена висина 20 cm?

△ **354.** Кад се омотач купе развије у раван добије се исечак са централним углом од 72^o. Ако је површина омотача 72π cm^2, колика је запремина купе?

△ **355.** Полупречник основе купе је r. Када се омотач развије у раван добије се четвртина круга. Израчунати запремину купе.

△ **356.** Једнакостраничан троугао странице a cm ротира око праве која садржи једно теме троугла и паралелна је наспрамној страници. Израчунати површину и запремину добијеног обртног тела.

△ **357.** Једнакостраничан троугао странице a cm ротира:
а) око висине; *б)* око странице.
Израчунати површину и запремину добијеног обртног тела.

△ **358.** Троугао са страницама 10 dm, 17 dm, 21 dm ротира око највеће странице. Израчунати површину и запремину добијеног тела.

△ **359.** Троугао са страницама 4 cm, 13 cm и 15 cm ротира најпре око најмање странице, а затим око праве, која садржи теме најмањег угла троугла и паралелна је наспрамној страници.
Упоредити површине оба добијена тела, а онда и запремине.

360. Троугао са страницама a, b, c, ротира редом око сваке своје странице. Доказати да се тако добијене запремине односе као висине троугла, нормалне на осу обртања, тј. $V_a : V_b : V_c = h_a : h_b : h_c$.

361. Једнакокраки троугао са краком b и углом β на основици, ротира око праве која садржи теме основице и паралелна је краку. Израчунати запремину обртног тела.

362. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом једнакокраког троугла, основице 24 cm и крака 13 cm, око праве која садржи крак.

363. Квадрат површине 72 cm^2 обрће се око дијагонале. Израчунати површину и запремину добијеног тела.

364. Правоугли трапез има основице дужина 1 dm и 2 dm и дужи крак 26 cm. Упоредити запремине тела која настају ротацијама датог трапеза око основица.

365. Паралелограм ротира једном око једне странице, а други пут око друге странице. Доказати да је количник запремина добијених тела једнак размери страница паралелограма.

366. Површина купе једнака је P. Изводница је нагнута према равни основе под углом α. Израчунати запремину купе.

367. Полупречник основе, висина и изводница купе имају дужине изражене са три узастопна природна броја. Израчунати површину и запремину купе.

368. Полупречник купе је r, а површина омотача је једнака збиру површина основе и осног пресека. Израчунати запремину купе.

369. Израчунати нагибни угао φ изводнице према основи купе, ако је површина купе два пута већа од површине осног пресека ваљка, који са купом има заједничку основу и висину.

370. Раван паралелна основи сече купу, тако да преполови омотач. Колико је растојање пресечне равни од врха купе?

371. Над кругом полупречника 5 cm су купа и ваљак са исте стране равни круга. Ваљак и купа имају једнаке површине и једнаке запремине. Израчунати запремину заједничког дела.

372. Ваљак и купа имаје једнаке висине. Површине омотача ваљка и купе односе се као $m : n$. Знамо да је изводница купе нагнута према равни основе под углом α. Одредити размеру запремина ваљка и купе (наћи $V_v : V_k$).

373. Полупречник основе купе је r. Две узајамно нормалне изводнице деле омотач у размери $1 : 2$. Израчунати запремину купе.

374. Две изводнице купе, које се секу под углом α, одређују раван π. Раван π је нагнута према равни основе под углом β. Ако је висина купе H, колика је запремина купе?

375. Две изводнице купе секу се под углом α. Раван одређена овим изводницама нагнута је према равни основе под углом β. Површина пресека је Q. Израчунати површину омотача купе.

376. Угао при врху осног пресека купе је 2α, а збир дужина висине и изводнице је m. Израчунати запремину купе.

377. У једнакостраничан ваљак су уписане две купе, тако да су основе ваљка истовремено и основе ових купа, а средиште висине ваљка је врх купа. Израчунати размере запремине ваљка према збиру запремина купа и омотача ваљка према збиру омотача купа.

378. Израчунати размеру запремина уписане и описане купе, у правилној шестостраној пирамиди.

379. Изводница купе је нагнута према равни основе под углом од 30^o. Површина омотача је $3\pi\sqrt{3}$. Израчунати запремину правилне шестостране пирамиде уписане у конус.

380. Око купе је описана произвољна пирамида чији је обим основе једнак $2p$. Полупречник основе купе је r. Одредити размере запремина и размере омотача купе и пирамиде.

381. Око купе је описана тространа пирамида, чија основа има површину 120 cm^2. Површине бочних страна су $97,5\ \text{cm}^2$, $62,5\ \text{cm}^2$ и $40\ \text{cm}^2$. Израчунати запремину купе.

382. У правилну купу висине $H = 6$ cm и полупречника основе $r = 4$ cm уписана је коцка, чија једна страна лежи у основи купе, а остала темена су на омотачу. Колика је ивица коцке?

383. У купу висине 24 cm уписана је правилна четворострана призма запремине $54\sqrt{33}\ \text{cm}^3$, висине $\frac{3}{2}\sqrt{33}$. Призма је постављена тако да једном бочном страном лежи у основи купе, а четири темена припадају омотачу купе. Израчунати површину купе.

384. У купу површине 384π и полупречника основе $r = 12$ cm, уписана је правилна тространа призма, тако да једном бочном страном лежи у основи купе, а два темена су на омотачу. Израчунати запремину призме, ако јој је висина 15 cm.

385. Осни пресек купе је правоугли троугао. У њој је уписан једнакостраничан ваљак. Израчунати размеру запремину купе и ваљка.

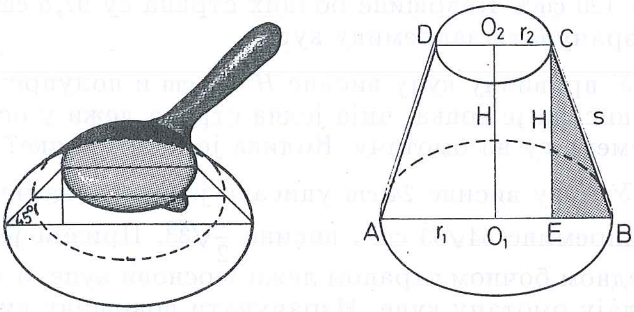
386. У купу је уписан ваљак чија је висина једнака полупречнику основе купе. Једна основа ваљка је у основи купе. Површина ваљка према површини основе купе односи се као 3 : 2. Одредити угао између осе купе и изводнице.

387. У правилан октаедар је уписана купа, тако да њена основа додирује четири стране октаедра у њиховим тежиштима, а врх јој је најудаљеније теме октаедра. Одредити размеру запремина купе и октаедра.

* **388.** У купу су постављене две лопте, полупречника 1 cm и 2 cm. Мања лопта додирује омотач купе, а већа додирује основу и омотач купе и додирује мању лопту. Израчунати запремину купе.

* **389.** Врх купе је истовремено центар основе ваљка. Друга основа ваљка и основа купе припадају једној равни. Полупречник основе ваљка је r и висина је H. Купа и ваљак имају једнаке запремине. Израчунати запремину заједничког дела ваљка и купе.

390. Посуда за кување кафе има облик одсечене купе, као на слици лево. Пречник основе је 16 cm, а дубина суда је 5 cm. Изводнице су нагнуте према дну под углом од 45°. У суд је наливена вода до висине од 3 cm. Затим је у воду потопљен метални ваљак пречника 4 cm и дужине 6 cm, тако да ни једним делом не излази ван течности. За колико се милиметара подигао ниво течности?



3.3 ЗАРУБЉЕНА КУПА

Зарубљена купа настаје када се неком равни, која је паралелна равни основе праве купе, од те купе одсече део који садржи врх (слика десно). Зарубљена купа је ограничена са две неједнаке основе, два круга полупречника r_1 и r_2, и дела омотача првобитне купе.

Осни пресек зарубљене купе је једнакокраки трапез са основицама $2r_1$ и $2r_2$ и краком s. Крак s је *изводница* зарубљене купе.

На слици је осенчен правоугли троугао BCE. У њему уочавамо везу:
$H^2 + (r_1 - r_2)^2 = s^2$,
где је H *висина* зарубљене купе и висина осног пресека.

Паралелни пресеци зарубљене купе су кругови.

Висина x одсеченог дела првобитне купе израчунава се по формули:

$$x = \frac{Hr_2}{r_1 - r_2}$$

За израчунавања у вези са зарубљеном купом истичемо опште формуле:

$M = r_1\pi s + r_2\pi s$ (омотач зарубљене купе)

$P = B_1 + B_2 + M = r_1^2\pi + r_2^2\pi + (r_1 + r_2)\pi s$ (површина зарубљене купе)

$V = \dfrac{\pi H}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$ (запремина зарубљене купе)

У свим наведеним задацима биће говора *искључиво о правој зарубљеној купи*. Њена оса, на слици права O_1O_2, је нормална на основе. Због тога у текстовима задатака ова чињеница неће бити истицана.

△ **391.** Израчунати површину зарубљене купе, ако су јој полупречници основа 5 cm и 20 cm и висина 8 cm.

△ **392.** Запремина зарубљене купе је 172π cm^3, а полупречници основа су 8 cm и 5 cm. Колика је површина зарубљене купе?

△ **393.** Осни пресек зарубљене купе има површину 110 cm^2. Ако је висина зарубљене купе $1,5$ cm и изводница $2,5$ cm, израчунати површину и запремину тела.

△ **394.** Висина зарубљене купе, дужине 6 cm, преполовљена је са равни која је паралелна равни основе. Ако је површина добијеног паралелног пресека $113,04$ cm^2 и изводница 10 cm, израчунати површину и запремину зарубљене купе. (Узети: $\pi = 3,14$.)

△ **395.** Израчунати запремину зарубљене купе, која има изводницу дужине 5 cm и омотач површине 40π cm^2, ако је полупречник једне основе за 4 cm већи од полупречника друге основе.

△ **396.** Израчунати запремину зарубљене купе која има изводницу дужине 10 cm, један полупречник дужине 9 cm и површину $P = 210\pi$ cm^2.

△ **397.** Зарубљена купа има запремину 620π cm^3 и висину 15 cm. Израчунати површину омотача, ако је збир површина основа једнак 104π cm^2.

△ **398.** Изводница зарубљене купе има дужину 5 cm. Разлика полупречника основа је 3 cm. Колика је запремина зарубљене купе, ако површина омотача представља половину површине тела.

△ **399.** Купа висине 12 cm и полупречника основе $r = 9$ cm пресечена је једном равни, која је паралелна равни основе. На тај начин је омотач купе подељен на делове чије се површине односе као $8 : 1$. Израчунати запремину добијене зарубљене купе.

△ **400.** Израчунати запремину зарубљене купе ако су површине основа и омотача редом: 25π cm^2, 4π cm^2, 35π cm^2.

△ **401.** Омотач зарубљене купе је једнак збиру основа, а полупречници основа су $r_1 = 6$ cm и $r_2 = 3$ cm. Израчунати запремину зарубљене купе.

△ **402.** Купа висине 12 cm и полупречника 4 cm, пресечена је једном равни која је паралелна равни основе. Колико је пресечна раван удаљена од равни основе, ако је површина омотача добијене зарубљене купе $15\pi\sqrt{10}$ cm^2?

△ **403.** Изводница и полупречници основа зарубљене купе односе се редом као $5 : 4 : 1$. Ако је висина 8 cm, израчунати површину зарубљене купе.

△ **404.** Израчунати површину и запремину зарубљене купе, која има полупречник једне основе $7,5$ cm, изводницу $12,5$ cm и омотач површине $143,75$ cm^2.

△ **405.** Висина зарубљене купе је H, а полупречници основа стоје у размери $1:3$. Израчунати површину и запремину зарубљене купе, ако је изводница нагнута према равни основе под углом од 45^o.

406. Једна основа зарубљене купе има четри пута већу површину од друге основе. Изводница s је нагнута према већој основи под углом α. Израчунати запремину зарубљене купе.

△ **407.** Купа полупречника основе $r = 6$ cm, пресечена је 12 cm изнад основе паралелном равни. Тако се добије зарубљена купа запремине 304π cm^3. Колика је запремина дате купе?

408. Зарубљена купа висине H има запремину V. Осни пресек има површину m^2. Израчунати дужине полупречника основа зарубљене купе.

409. Полупречници основа зарубљене купе су r_1 и r_2. Бочна ивица је нагнута према равни основе под углом α. Израчунати омотач и запремину зарубљене купе. (Специјално: $\alpha = 60^o$.)

△ **410.** Страница ромба је дужине a и оштар угао је α. Израчунати површину тела које настаје ротацијом ромба око праве која садржи теме оштрог угла и нормална је на страницу. (Специјално: $\alpha = 60^o$.)

△ **411.** Израчунати површину и запремину тела које настаје ротацијом ромба странице 3 cm и угла од 45^o, око праве која садржи теме мањег угла и нормална је на страницу.

△ **412.** Једнакокраки трапез са основицама 2 cm и 4 cm и оштрим углом од 60^o ротира око крака. Израчунати површину и обим добијеног тела.

△ **413.** Правилан шестоугао површине $24\sqrt{3}$ cm^2 обрће се око једне странице. Израчунати запремину добијеног тела.

414. Једнакокраки троугао, основице 20 cm и крака $12,5$ cm, ротира око праве која садржи теме основице и нормална је на крак који садржи то теме. Израчунати површину и запремину добијеног тела.

415. Ромб $ABCD$ странице a ротира најпре око странице AB, а затим око дијагонале AC. Означимо са V и V_1 запремине тако насталих фигура. Израчунати оштар угао ромба из услова $V : V_1 = 9 : \sqrt{3}$. Наћи, затим, запремину тела које настаје ротацијом датог ромба око праве која садржи теме A оштрог угла и нормална је на страницу AB.

* **416.** Троугао ABC је правоугли и $AB = AC = a$. Нека је p права у равни овог троугла, која садржи тачку A и са полуправом AB захвата угао α. Ако су $P\ (\alpha)$ и $V\ (\alpha)$ редом површина и запремина тела које настаје ротацијом троугла ABC око праве p, доказати да количник $P(\alpha) : V(\alpha)$ не зависи од α.

△ **417.** Дата је коцка запремине V. Израчунати запремину зарубљене купе чија је једна основа круг описан око једне стране дате коцке, а друга основа круг уписан у наспрамну страну коцке.

△ **418.** Дата је зарубљена купа са полупречницима основа 20 cm и 5 cm, запремине 3150π cm^3. У њој је уписан једнакостраничан ваљак, тако да се једна основа ваљка налази у већој основи зарубљене купе, а друга основа додирује омотач. Израчунати површину ваљка.

419. У прав ваљак су уписане две купе чије се основе поклапају са основама ваљка, а врхови су центри супротних основа ваљка. Одредити размеру запремине добијене двоструке купе (заједничког дела уписаних купа) и запремине оног дела ваљка који је изван обе уписане купе.

420. Дата је зарубљена купа висине H. Нека су r_1 и r_2 полупречници основа тела. У зарубљену купу су уписане две купе чије се основе поклапају са основама дате зарубљене купе, а врхови су центри основа купе. Израчунати запремину оног дела зарубљене купе који је ван заједничког дела двеју уписаних купа (ван двојне купе).

3.4 ЛОПТА И ДЕЛОВИ ЛОПТЕ

Сфера представља скуп свих тачака једнако удаљених од једне утврђене тачке. Та тачка је *центар*, а растојање тачака сфере од центра је *полупречник* сфере.

Скуп свих тачака, чије је растојање од дате тачке S мање или једнако датој дужи r, је *лопта* полупречника r. Тачка S је центар лопте.

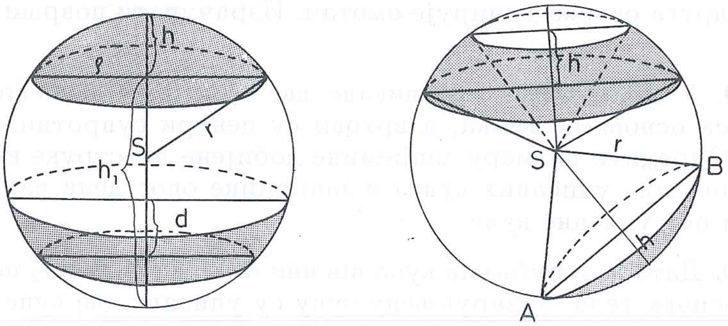
Омотач лопте је сфера.

Равни пресеци лопте су кругови. Ако пресечна раван садржи центар лопте, пресек је тзв. *велики круг* лопте. Полупречник великог круга је полупречник лопте.

Раван која садржи једну тачку T сфере и нормална је на полупречник, додирује лопту у тачки T и назива се *тангентном равни.*

Раван пресек дели лопту на два *одсечка.* Ако је пресек велики круг онда имамо две *полулопте.* Дужина одсеченог дела оног пречника лопте, који је нормалан на пресечну раван, је *висина* одсечка. На слици су то дужи h и h_1.

Део сфере који припада одсечку је *калота.* Висина одсечка је и висина калоте. Дуж ρ на слици, $\rho \leq r$, је полупречник равног пресека.



Део сфере између два паралелна пресека је *зона* или *појас (лоптин појас).*

Растојање између паралелних пресека је *висина* појаса. На слици лево је висина појаса означена са d, а означава се и са h.

Ако се одсечак лопте допуни купом са центром S, настаје тело које се назива *лоптин исечак.* (На слици десно то је калота са тетивом AB). Омотач лоптиног исечка се састоји из калоте и омотача купе.

Лоптиним исечком називамо и сложено, неконвексно тело које се добија као разлика два конвексна исечка. (На слици десно одговара му осенчен лоптин појас). Омотач неконвексног лоптиног исечка образују лоптин појас и омотачи двеју одговарајућих купа.

И конвексан и неконвексан исечак се добијају ротацијом одговарајућег кружног исечка око пречника.

Висина калоте, односно висина појаса је и висина одговарајућег лоптиног исечка.

Део лопте између два паралелна пресека је *слој*, односно *лоптин* *слој*. Висина одговарајућег појаса је и висина слоја.

Користићемо следеће формуле:

$P = 4r^2\pi$ (површина сфере, односно лопте)

$V = \frac{4}{3}r^3\pi$ (запремина лопте)

$P = 2r\pi h$ (површина калоте и појаса висине h)

$V = \frac{2}{3}r^2\pi h$ (запремина лоптиног исечка)

$V = \pi h^2(r - \frac{h}{3})$ (запремина лоптиног одсечка)

Запремину слоја израчунавамо као разлику запремина двају одговарајућих одсечака.

(Задаци о деловима лопте су од 442. до 460.)

△ **421.** Симетрална раван полупречника лопте сече лопту, тако да је површина пресека једнака 48π cm^2. Колики је полупречник лопте?

△ **422.** Кроз крајњу тачку пречника лопте постављена је раван, према којој је овај пречник нагнут под углом од 30^o. Ако је r полупречник лопте израчунати површину добијеног равног пресека.

△ **423.** Две паралелне равни, на међусобном растојању од 3 dm, секу лопту, обе са исте стране центра, тако да су полупречници пресечених кругова 9 cm и 12 cm. Израчунати полупречник лопте.

△ **424.** Лопта пречника 24 cm је пресечена двема паралелним равнима. Колико је међусобно растојање ових равни, ако су површине добијених пресека лопте и равни 140π cm^2 и 135π cm^2?

△ **425.** Две паралелне равни одсецају од лопте слој дебљине 27 cm. Полупречници пресека су 15 cm и 24 cm. Израчунати висине калота добијених овим сечењем.

△ **426.** Кроз крајњу тачку тетиве дужине 6 cm постављена је раван, која сече лопту по кругу површине 256π cm^2. Ако је дата тетива нагнута према пресечној равни под углом од 60^o, колики је полупречник лопте?

△ **427.** Из тачке S пролазе светлосни зраци који осветљавају део лопте. У односу на тачку S, најближа тачка лопте је A, а најдаља B. Ако је $SA = 4$ cm и $SB = 16$ cm, израчунати обим круга, који представља границу између осветљеног и неосветљеног дела лопте.

△ **428.** Ако се полупречник лопте повећа за 3 cm, њена површина се повећа за 108π cm^2. За колико се променила запремина те лопте?

△ **429.** Три оловне кугле полупречника 3 cm, 4 cm и 5 cm су претопљене и изливена је нова кугла. Колики је полупречник нове кугле?

△ **430.** Разлика површина двеју лопти је 64π cm^2. Одредити њихове полупречнике, ако се зна да је збир ових полупречника 8 cm.

△ **431.** Од лопте полупречника 3 dm изливене су три једнаке лопте. Израчунати површину мање лопте.

△ **432.** Од коцке ивице 1 dm изливена је лопта. Колики је полупречник лопте?

433. Од металне лопте полупречника r изливена је купа, код које је површина омотача три пута већа од површине основе. Израчунати висину купе.

△ **434.** Купа и полулопта имају заједничку основу полупречника r и једнаке запремине. Израчунати површину омотача купе.

△ **435.** Лопта полупречника 5 cm додирује странице троугла: $a = b = 10$ cm и $c = 12$ cm. Колико је центар лопте удаљен од равни датог троугла?

△ **436.** У цилиндричном суду полупречника 20 cm налази се извесна количина воде. За колико ће се подићи ниво течности, ако се у воду потопи кугла пречника 18 cm?

437. Посуда облика једнакостраничног ваљка, који има пречник 10 cm, испуњена је водом до $\frac{11}{12}$ висине. Колики је полупречник највеће лопте која се може потопити у воду, а да не дође до преливања.

△ **438.** Три лопте полупречника 1 cm постављене су на хоризонталну раван, тако да се међусобно додирују. На њих је постављена четврта лопта истог полупречника, тако да их све додирује. Колико је од хоризонталне равни удаљен центар горње лопте?

△ **439.** На хоризонталну раван су постављене четири лопте полупречника r, тако да свака додирује две лопте, при чему њихови центри представљају темена квадрата. На ове лопте је спуштена једна лопта истог полупречника, тако да додирује све четири лопте на равни. Одредити растојање од хоризонталне равни оне тачке пете лопте, која је највише удаљена од равни.

440. Две једнаке лопте, полупречника r, додирују једна другу. Три једнаке лопте, непознатог полупречника, додирују једна другу и додирују обе лопте полупречника r. Израчунати дужину непознатог полупречника.

441. На једну раван су постављене две лопте полупречника r и две лопте непознатог полупречника. Свака од ових лопти додирује оста ле три. Израчунати дужину непознатог полупречника.

△ **442.** Полулопта је великим кругом наслоњена на раван. Како треба изабрати раван паралелну великом кругу, да би она полулопту поделила на два тела једнаких површина?

△ **443.** Полулопта полупречника r и купа висине $H = 2r$, имају за основе исти велики круг, и налазе се са исте стране равни тог круга. Купа сече полулопту по једном кругу. Одредити размеру површина добијене калоте и појаса.

△ **444.** Дата је сфера полупречника r. Удаљеност тачке M од центра O те сфере износи $OM = c > r$. Израчунати површину оног дела сфере који се види из тачке M.

△ **445.** Раван пресеца лопту полупречника r, тако да површина пресека и калоте стоје у размери $2:3$. Колика је висина калоте?

△ **446.** На ком растојању од центра лопте полупречника r треба поставити тачкасти светлосни извор, да би он осветлио трећину површине лопте?

447. Колико квадратних километара површине Земље види космонаут из вештачког сателита, који се креће на висини од 420 km изнад Земљине површине? (Узети полупречник Земље $r = 6300$ km.)

△ **448.** Израчунати површину лоптиног појаса, ако је полупречник лопте $r = 65$ cm, а полупречници кругова, који ограничавају појас износе: $\rho_1 = 63$ cm и $\rho_2 = 60$ cm.

△ **449.** Полулопта је пресечена једном равни на одстојању 10 cm од равни великог круга. Полупречник добијеног пресека је 24 cm. Израчунати површину добијеног појаса.

△ **450.** Израчунати запремину лоптиног исечка, ком одговара појас површине 150π cm^2 и висине 3 cm.

△ **451.** Висина лоптиног исечка је 4 cm. Површина одговарајуће калоте представља четвртину површине исечка. Израчунати запремину исечка.

△ **452.** Запремина лоптиног исечка је k пута мања од запремине лопте. Доказати да је површина одговарајуће калоте k пута мања од површине лопте.

453. Одредити запремину лоптиног исечка ако је Q површина одговарајуће калоте и M површина омотача купе која одређује исечак.

454. Раван дели површину лопте у односу 1 : 2. Одредити размеру запремина лопте и одговарајућег лоптиног исечка.

455. Површина калоте је два пута већа од површине одговарајућег пресека. Израчунати запремину одсечка којем припада ова калота.

456. Две паралелне равни, на међусобном растојању од 7 cm, одсецају од лопте слој ограничен пресечним круговима полупречника 3 cm и 4 cm. Израчунати запремину лоптиног слоја.

457. Две паралелне равни, једна удаљена 7 cm, а друга 15 cm од центра лопте, секу лопту полупречника 25 cm. Израчунати запремину лоптиног слоја.

458. Одсечак висине 6 cm има запремину 216π cm^3. Колика је запремина одговарајућег исечка?

459. Лопта полупречника r пресечена је једном равни, којом је запремина одговарајућег исечка преполовљена. Израчунати запремину одговарајућег одсечка.

460. Лопта пречника 1 m пресечена је двема паралелним равнима, које су од центра удаљене за 14 cm и 30 cm. Израчунати површину зоне и запремину слоја ако:

а) Обе равни секу једну полулопту;

б) Центар лопте лежи између пресечних равни.

3.5 УПИСАНА И ОПИСАНА ЛОПТА

У овом одељку решаваћемо проблеме везане за уписивање и описивање полиедара и обртних тела у лопту и обрнуто. За израчунавање димензија најчешће ћемо користити равне пресеке.

$\triangle$ **461.** Једнакостранична купа је уписана у лопту. Израчунати површину и запремину лопте ако је изводница купе дужине s.

$\triangle$ **462.** Око лопте полупречника r је описана купа, чија је висина дупло већа од пречника лопте. Одредити размере запремина и размере површина купе и лопте.

△ **463.** Кроз лопту од чврстог материјала, полупречника r, пробушен је цилиндричан отвор. Оса цилиндра пролази кроз центар лопте, а пречник је једнак полупречнику лопте. Израчунати запремину преосталог дела лопте.

△ **464.** Дата је купа висине 4 cm и изводнице 5 cm. Израчунати запремину полулопте, која је уписана у купу, тако да јој основа лежи на основи купе.

△ **465.** У једнакостраничну купу је уписана лопта. Израчунати запремину купе, ако је запремина лопте $\frac{32}{3}\pi$ cm^3.

△ **466.** У једнакостранични ваљак су уписани лопта и купа. Основа и оса купе се поклапају са основом и осом ваљка. Израчунати размеру запремина ваљка, лопте и купе.

△ **467.** У лопту је уписана једнакостранична купа. Одредити размеру површина лопте и купе.

△ **468.** У полулопту је уписана једнакостранична купа, тако да је центар великог круга полулопте истовремено врх купе. Одредити размеру запремина полулопте и купе.

469. Лопта запремине V је уписана у купу чија је изводница нагнута према равни основе под углом α. Израчунати запремину купе. (Специјално: $\alpha = 60^o$.)

470. Површина основе купе је B. Изводница је нагнута према равни основе под углом α. У купу је уписана лопта. Тангентна раван лопте, паралелна са равни основе, одсеца од дате купе мању купу. Израчунати запремину мање купе. (Специјално: $B = 4$ и $\alpha = 60^o$.)

△ **471.** У суд конусног облика, окренутог са врхом надоле, стављена је метална кугла полупречника r. Угао при врху осног пресека суда је 60^o. У суд се налије воде, тачно толико да површински слој додирује горњи део кугле. Колика је дубина воде у суду кад се кугла извади?

△ **472.** Око лопте су описани једнакостраничан ваљак и једнакостранична купа. Одредити размеру површина и размеру запремина ових тела.

473. У лопту је уписана купа висине H. Запремина купе једнака је четвртини запремине лопте. Израчунати запремину лопте.

474. У лопту је уписана купа, таква да паралелни пресек кроз центар лопте дели купу на два дела једнаке запремине. Одредити нагиб изводнице према равни основе купе.

△ **475.** Око лопте је описана зарубљена купа са пречницима основа 8 cm и 2 cm, а у лопту је уписана купа висине 6 cm. Одредити размеру запремина ових тела.

△ **476.** Око лопте полупречника r описана је зарубљена купа. Једна основа зарубљене купе има површину два пута већу од површине друге основе. Израчунати запремину зарубљене купе.

477. Лопта површине P уписана је у зарубљену купу. Изводница купе је према равни основе нагнута под углом од 60^o. Израчунати површину омотача ове зарубљене купе.

478. У лопту полупречника 10 cm уписан је ваљак висине 12 cm и купа висине 12 cm. Ваљак и купа имају заједничку осу. Израчунати запремину оног дела лопте који је ван ваљка и ван купе.

479. У лоптин исечак дате лопте је уписана лопта. Ако осни пресек исечка има централни угао од 90^o, израчунати размеру запремина дате и уписане лопте.

480. Око зарубљене купе, чији су полупречници основа r_1 и r_2, $r_1 > r_2$, описана је лопта. Израчунати полупречник лопте, ако је изводница зарубљене купе нагнута према равни основе под углом α. (Специјално: $\alpha = 90^o$, $r_1 = 2r_2$.)

△ **481.** У лопту полупречника r уписана је права тространа призма. Основа призме је правоугли троугао са оштрим углом α. Највећа бочна страна призме је квадрат. Израчунати запремину призме.

△ **482.** Око правилне тростране призме, која има висину два пута већу од основне ивице, описана је лопта. Израчунати размеру запремина лопте и призме.

483. Око лопте полупречника r описана је правилна шестострана призма. Израчунати површину омотача призме.

△ **484.** Израчунати површину лопте која је уписана у једнакоивичну тространу пирамиду ивице a.

△ **485.** Израчунати површину лопте уписане у тространу пирамиду, чије су основне ивице: 13 cm, 14 cm и 15 cm, а све апотеме имају дужине 5 cm.

486. У лопту полупречника r уписана је правилна четворострана пирамида. Израчунати запремину ове пирамиде ако је полупречник круга, описаног око њене основе, једнак k.

487. У правилну четворострану пирамиду је уписана лопта. Израчунати површину лопте ако је основна ивица пирамиде 9 cm и бочна страна има при врху угао α. (Специјално: $\alpha = 30^o$.)

488. Израчунати запремину лопте, која је уписана у правилну пирамиду. Висина пирамиде је H, а бочне стране са основом одређују диедар са углом 60^o.

489. У лопту полупречника r је уписана правилна шестострана зарубљена пирамида, тако да центар лопте припада доњој основи. Бочне ивице су нагнуте према основи под углом од 60^o. Израчунати запремину пирамиде.

490. Површине основа правилне тростране зарубљене пирамиде односе се као $4:1$. У зарубљену пирамиду је уписана лопта. Одредити угао диедра одређеног основом и бочном страном.

491. Израчунати полупречник сфере која додирује основу ABC правилног тетраедра $SABC$ и ивице SA, SB и SC, ако је $SA = a$.

492. Дате су четири лопте полупречника r, од којих свака додирује остале три. Колики је полупречник сфере која додирује четири дате лопте?

493. Површина купе је два пута већа од површине уписане лопте. Одредити размеру запремина ових тела.

494. Од свих правих купа уписаних у сферу полупречника $\frac{3}{4}$ dm, највећу запремину има она чија је висина једнака 1 dm. Доказати.

495. Од свих ваљака уписаних у сферу полупречника $\frac{\sqrt{3}}{2}$ највећу запремину има онај чија је висина једнака 1. Доказати.

* **496.** Дата је права кружна купа*) и у њу уписана лопта. Око те лопте је описан прав кружни ваљак, чија основа лежи у равни основе дате купе. Нека је V_1 запремина купе и V_2 запремина ваљка.

а) Доказати да је једнакост $V_1 = V_2$ немогућа.

б) Наћи најмање k за које је $V_1 = k \cdot V_2$ и у том случају одредити угао при врху осног пресека купе.

* **497.** Одредити максималну вредност размере запремина лопте и око ње описане купе.

* **498.** У праву купу полупречника основе 1 и нагибног угла изводнице према основи једнаког 2α $(2\alpha < \frac{\pi}{2})$, уписана је лопта L.

*)Задатак је тако формулисан на *II* међународној математичкој олимпијади.

Затим је конструисано још n лопти, од којих свака додирује основу и омотач купе, лопту L и по две од тих n лопти. Одредити везу између n и α.

* **499.** На сфери полупречника 13 налази се 25 тачака. Доказати да постоји раван која сече сферу по кругу полупречника 5, таква да се свих 25 тачака налазе са једне њене стране.

* **500.** Круг k, полупречника 10π, сече 30 правих. Доказати да постоји круг k_1, полупречника 1, који лежи у кругу k, а ни са једном од датих правих нема заједничких тачака.

ЧЕТВРТА ГЛАВА

4 СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА

У овој глави решаваћемо углавном системе са две и три непознате. Користићемо познату *Гаусову методу* и *Методу детерминанти (Крамерово правило)*. Најпре ћемо се упознати са детерминантама другог и трећег реда.

4.1 ДЕТЕРМИНАНТЕ

Детерминанта првог реда, односно детерминанта која садржи само један реалан или комплексан број, дефинише се као тај број.

Детерминанте другог и трећег реда дефинисане су са

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Детерминанте имају следећа својства:

1° Вредност детерминанте се не мења ако врсте замене места са колонама.

2° Ако две врсте (две колоне) замене места детерминанта мења знак.

3° Ако се једна врста (колона) састоји од нула детерминанта је једнака нули.

4° Ако једну врсту (колону) детерминанте помножимо бројем, тада смо детерминанту помножили тим бројем.

5° Збир две детерминанте које имају једнаке све елементе осим елемената i-те врсте (колоне) је детерминанта код које су елементи i-те врсте (колоне) једнаки збиру одговарајућих елемената i-те врсте (колоне) детерминаната сабирака, а остали елементи једнаки су елементима детерминаната сабирака.

6° Детерминанта се не мења ако елементима једне врсте (колоне) додамо одговарајуће елементе неке друге врсте (колоне) претходно помножене неким бројем.

7° Ако су две врсте (колоне) детерминанте пропорционалне, детерминанта је једнака нули.

8° Ако израчунамо производе сваког елемента једне врсте (колоне) са $(-1)^{i+j}$, где су i и j врста и колона у којој се тај елеменат налази, и са детерминантом која се добије када се избришу врста и колона у којој се тај елеменат налази, па добијене производе саберемо, добијени збир једнак је детерминанти (развој детерминанте по врсти или колони).

Детерминанта трећег реда се може израчунати по тзв. *Сарусовом* правилу

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb.$$

(„Допишемо“ прву и другу колону десно поред детерминанте. Затим, као што је наглашено стрелицама, множимо три пута у правцу главне дијагонале (aei) и добијеним производима не мењамо знак – означено са „+“. Онда множимо три пута у правцу споредне дијагонале (gec) и мењамо знак сваког производа – означено са „–“.)

△ **501.** Израчунати детерминанте другог реда ($i^2 = -1$)

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; *б)* $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$; *в)* $\begin{vmatrix} \cos 34^\circ & -\sin 34^\circ \\ \cos 56^\circ & \sin 56^\circ \end{vmatrix}$; *г)* $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 2+i & 2-i \end{vmatrix}$; *ђ)* $\begin{vmatrix} \log_2 5 & \log_3 5 \\ \log_2 3 & 1 \end{vmatrix}$; *е)* $\begin{vmatrix} \frac{1-x^2}{1+x^2} & \frac{2x}{1+x^2} \\ -\frac{2x}{1+x^2} & \frac{1-x^2}{1+x^2} \end{vmatrix}$; *ж)* $\begin{vmatrix} 2+3i & 3-2i \\ 3+2i & 2-3i \end{vmatrix}$.

△ **502.** Израчунати детерминанту $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$:

а) Сарусовим правилом;
б) развојем по трећој колони;
в) развојем по другој врсти.

△ **503.** Израчунати детерминанту $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$:

а) развојем по другој колони;

б) развојем по другој колони уз претходно „прављење“ што више нула у њој.

△ **504.** Израчунати детерминанту $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 4 \\ 12 & 3 & -4 \end{vmatrix}$:

а) Сарусовим правилом;
б) свођењем на троугаони облик (испод главне дијагонале су нуле).

△ **505.** Израчунати детерминанте

$$а)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix};\quad б)\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix};\quad в)\ \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix};\quad г)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix};$$

$$д)\ \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix};\quad ђ)\ \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta \\ cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix};$$

$$е)\ \begin{vmatrix} i\sqrt{3}-1 & 1 & 0 \\ 1 & i\sqrt{3}-1 & 1 \\ 0 & -1 & i\sqrt{3}-1 \end{vmatrix};\quad ж)\ \begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}.$$

△ **506.** Користећи особине детерминанти доказати да су следеће детерминанте једнаке нули.

$$а)\ \begin{vmatrix} 1 & 310 & 31 \\ 2 & 220 & 22 \\ 3 & 130 & 13 \end{vmatrix};\quad б)\ \begin{vmatrix} 11 & 300 & 311 \\ 12 & 200 & 212 \\ 13 & 100 & 113 \end{vmatrix};\quad в)\ \begin{vmatrix} x-2y & y^2 & (x-y)^2 \\ x-4y & 4y^2 & (x-2y)^2 \\ x-6y & 9y^2 & (x-3y)^2 \end{vmatrix};$$

$$г)\ \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ 1 & a+b & a^2+ab+b^2 \\ b & b^2 & b^3 \end{vmatrix};\quad д)\ \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix};$$

$$ђ)\ \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix};\quad е)\ \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}.$$

△ **507.** Решити једначине:

$$а)\ \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix};\quad б)\ \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}=0;\quad в)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix}=0.$$

508. Не рачунајући детерминанте доказати једнакости

$$а)\ \begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$б)\ \begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1i+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2i & a_2i+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3i & a_3i+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

△ **509.** Израчунати детерминанте

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix};\quad б)\ \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix};\quad в)\ \begin{vmatrix} a-b-c & 2b & 2c \\ 2a & b-c-a & 2c \\ 2a & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

510. Не рачунајући детерминанте доказати једнакости

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix};\quad б)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix};$$

$$в)\ \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+ac+bc)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

4.2 СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА ГАУСОВ ПОСТУПАК

Под системом од m линеарних једначина са n непознатих подразумевамо следећи систем једначина

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

где су коефицијенти система a_{ij} и слободни чланови b_i дати реални бројеви, а x_i непознате. Под решењем система подразумевамо уређену n-торку реалних бројева*) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ (скуп од n бројева у коме се тачно зна који је први, који је други,... и који је последњи), такву да ако у једначине система уместо x_i заменимо α_i, оне постају идентитети. Два решења система, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ биће једнака ако је $\alpha_i = \beta_i$ за свако $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, а у противном су различита.

Систем линеарних једначина је одређен ако има тачно једно решење, немогућ ако нема ни једно решење, а неодређен ако има бар два међусобно различита решења (тада их има бесконачно много). Систем је сагласан ако има решења, односно ако је одређен или неодређен.

Ако је $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ систем једначина се назива *хомогеним.* Уређена n-торка $(0, 0, \ldots, 0)$ је решење сваког хомогеног система, па се назива *тривијалним решењем.* Свако друго решење система хомогених линеарних једначина, је *нетривијално* решење.

Гаусов поступак за решавање система линеарних једначина спроводи се у два дела. Најпре се систем из стандардног облика

*) Може се посматрати систем једначина код ког су коефицијенти и слободни чланови комплексни бројеви. Код таквих система решење је уређена n-торка комплексних бројева.

трансформише у тзв. трапезни облик еквивалентан полазном, а онда се траже решења:

$$\begin{array}{rl}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{22}^{(2)}x_2+\cdots+a_{2r}^{(2)}x_r+\cdots+a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)}\\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots &\quad \vdots\\
a_{rr}^{(r)}x_r+\cdots+a_{rn}^{(r)}x_n &= b_r^{(r)} \quad *)\\
0 &= b_{r+1}^{(r)}\\
\vdots &\quad \vdots\\
0 &= b_m^{(r)}
\end{array}$$

где је $a_{11}\neq 0,\ a_{22}^{(2)}\neq 0,\ldots,\ a_{rr}^{(r)}\neq 0$.

Разликоваћемо три случаја:

1° Неки од слободних чланова $b_{r+1}^{(r)},\ldots,b_m^{(r)}$ је различит од нуле. Тада систем нема решења (немогућ је), јер ако је $b_i^{(n)}\neq 0$, једначина $0=b_i^{(n)}$ не може постати идентитет.

2° Нека је $b_{r+1}^{(r)}=b_{r+2}^{(r)}=\cdots=b_m^{(r)}=0$ и $r=n$. Тада једначине облика $0=0$ одбацимо, па је преостали систем троугаоног облика:

$$\begin{array}{rl}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n-1}x_{n-1}+a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{22}^{(2)}x_2+\cdots+a_{2n-1}^{(2)}x_{n-1}+a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)}\\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots &\quad \vdots\\
a_{n-1n-1}^{(n-1)}x_{n-1}+a_{n-1n}^{(n-1)}x_n &= b_{n-1}^{(n-1)}\\
+a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^{(n)}
\end{array}$$

Из последње једначине израчунавамо: $x_n=\dfrac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}$. Заменом x_n у претпоследњу налазимо x_{n-1}, итд, из друге налазимо x_2 и на крају из прве x_1. Систем је одређен, тј. има јединствено решење.

3° Нека је $b_{r+1}^{(r)}=b_{r+2}^{(r)}=\cdots=b_m^{(r)}=0$ и $r<n$. Тада једначине облика $0=0$ одбацимо, а слично претходном случају, r-ту једначину решимо по x_r, тј. x_r изразимо преко $x_{r+1},\ldots,x_n$. Затим, добијено x_r заменимо у $(r-1)$-у једначину и решимо је по x_{r-1}, тј. x_{r-1} изразимо преко $x_{r+1},\ldots,x_n$, итд. На крају x_1 изразимо преко $x_{r+1},\ldots,x_n$. Тада, за сваку бројну вредност $x_{r+1},\ldots,x_n$, добијамо једно решење система. Дакле, систем има бесконачно много решења, тј. систем је неодређен.

*) Индекс (r) означава да је нпр. $b_r^{(r)}$ резултат r-те по реду трансформације система.

△ **511.** Користећи Гаусов поступак решити системе једначина:

а) $$\begin{aligned} x+2y&=4\\ x-\ \ y&=1 \end{aligned}$$ *б)* $$\begin{aligned} 2x+3y&=8\\ -4x-6y&=3 \end{aligned}$$ *в)* $$\begin{aligned} 3x-\ \ y&=5\\ 6x-2y&=10 \end{aligned}$$

г) $$\begin{aligned} 3x+2y&=5\\ 2x+3y&=5 \end{aligned}$$ *д)* $$\begin{aligned} x-\ \ y&=1\\ -2x+2y&=3 \end{aligned}$$ *ђ)* $$\begin{aligned} x+\ \ y&=3\\ 2x+2y&=6 \end{aligned}$$

△ **512.** Решити системе једначина Гаусовим поступком:

а) $$\begin{aligned} 6x+5y+4z&=3\\ 3x+3y+2z&=2\\ 5x+4y+2z&=1 \end{aligned}$$ *б)* $$\begin{aligned} y-2z&=-1\\ 2x+\ \ y+3z&=\ \ 8\\ x+\ \ y+\ \ z&=\ \ 4\\ 3x-5y+2z&=\ \ 3 \end{aligned}$$ *в)* $$\begin{aligned} y-2z&=-1\\ 2x+\ \ y+3z&=\ \ 8\\ x+\ \ y+\ \ z&=\ \ 4\\ 3x-5y+2z&=\ \ 5 \end{aligned}$$

г) $$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+2x_3+2x_4&=2\\ 2x_1+3x_2+2x_3+5x_4&=3\\ 9x_1+\ \ x_2+4x_3-5x_4&=1\\ 2x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=5\\ 7x_1+\ \ x_2+6x_3-\ \ x_4&=7 \end{aligned}$$ *д)* $$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+2x_3+2x_4&=2\\ 2x_1+3x_2+2x_3+5x_4&=3\\ 9x_1+\ \ x_2+4x_3-5x_4&=1\\ 2x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=5\\ 7x_1+\ \ x_2+6x_3+\ \ x_4&=7 \end{aligned}$$

ђ) $$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+2x_3+2x_4&=2\\ 2x_1+3x_2+2x_3+5x_4&=3\\ 9x_1+\ \ x_2+4x_3-5x_4&=1\\ 2x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=5\\ 7x_1+\ \ x_2+6x_3-\ \ x_4&=8 \end{aligned}$$ *е)* $$\begin{aligned} 2x_1+7x_2+3x_3+\ \ x_4&=6\\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4&=4\\ 9x_1+4x_2+\ \ x_3+7x_4&=2 \end{aligned}$$

ж) $$\begin{aligned} 2x_1+5x_2-8x_3&=8\\ 4x_1+3x_2-9x_3&=9\\ 2x_1+3x_2-5x_3&=7\\ x_1+8x_2-7x_3&=12 \end{aligned}$$ *з)* $$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+2x_3&=\ \ 4\\ 2x_1+3x_2+2x_3&=\ \ 8\\ 9x_1+\ \ x_2+4x_3&=-4\\ 2x_1+2x_2+3x_3&=\ \ 9\\ 7x_1+\ \ x_2+6x_3&=\ \ 6 \end{aligned}$$

△ **513.** Гаусовим поступком решити хомоген систем једначина:

а) $$\begin{aligned} x+\ \ y+\ \ z&=0\\ x+2y+3z&=0\\ x+3y+\ \ z&=0 \end{aligned}$$ *б)* $$\begin{aligned} x+2y+\ \ z&=0\\ 2x+\ \ y+\ \ z&=0\\ 3x+3y+2z&=0\\ 4x+5y+3z&=0 \end{aligned}$$ *в)* $$\begin{aligned} x+y+z&=0\\ x+y+z&=0\\ x+y+z&=0 \end{aligned}$$

△ **514.** У зависности од реалних параметара a и b дискутовати и решити систем једначина. Користити Гаусов поступак.

а) $\begin{aligned} x+3y&=0\\ ax+2y&=0 \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} x+2y&=1\\ 2x+a^2y&=a \end{aligned}$ в) $\begin{aligned} x+y&=1\\ 2x+2y&=2\\ 3x+ay&=b \end{aligned}$

г) $\begin{aligned} x+2y-3z&=8\\ 2x-y+z&=-1\\ 3x+y-2z&=a \end{aligned}$ д) $\begin{aligned} x+y+z&=0\\ x-2y-z&=0\\ 3x-3y-z&=0\\ 2x-y+az&=0 \end{aligned}$ ђ) $\begin{aligned} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4&=2\\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4&=4\\ 4x_1+14x_2+x_3+7x_4&=4\\ 2x_1-3x_2+3x_3+ax_4&=7 \end{aligned}$

4.3 СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА КРАМЕРОВО ПРАВИЛО

Посматрајмо системе од две једначине са две непознате и од три једначине са три непознате

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y&=c_1\\ a_2x+b_2y&=c_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z&=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z&=d_3 \end{aligned}$$

Првом систему придружимо детерминанте другог реда:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\qquad D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1\\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},\qquad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

а другом следеће детерминанте трећег реда:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\ D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\ D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\ D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Детерминанте система, то су детерминанте означене са D, садрже коефицијенте који стоје уз непознате (с левих страна једначина), а детерминанте D_x, D_y, D_z се добијају, тако што се у детерминанти система коефицијенти уз непознате, редом, x, y, z, замене одговарајућим слободним члановима.

Крамерово правило повезује наведене детерминанте и решења система једначина:

1° Ако је $D\neq 0$ систем једначина је одређен, а његово (јединствено) решење је $x=\dfrac{D_x}{D}$, $y=\dfrac{D_y}{D}$, односно $\left(\dfrac{D_x}{D},\dfrac{D_y}{D}\right)$ за први систем, а $x=\dfrac{D_x}{D}$, $y=\dfrac{D_y}{D}$, $z=\dfrac{D_z}{D}$, односно $\left(\dfrac{D_x}{D},\dfrac{D_y}{D},\dfrac{D_z}{D}\right)$ за други систем.

2° Ако је $D = 0$, а бар једна од детерминанти D_x, D_y (или D_z за други систем) различита од нуле, систем је немогућ (нема решења).

3° Ако је $0 = D = D_x = D_y (= D_z)$, систем је немогућ или неодређен. На пример:

У систему: $\begin{matrix} x + \ \ y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{matrix}$, $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$, и $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$, а систем је неодређен и решење је $(2, -\alpha, \alpha)$, $\alpha \in R$, док у систему $\begin{matrix} x + 2y + 3z = 4 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ x + 2y + 3z = 5 \end{matrix}$, $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$, $D_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$, $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$, и $D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$ (све детерминанте имају прве две врсте једнаке), а систем је немогућ, јер ако трећој једначини додамо прву помножену са -1, трећа постаје $0 = 1$.

У случају 3° одређивање да ли је систем немогућ или неодређен, као и налажење решења кад је неодређен, може се извршити Гаусовим поступком.

Крамерово правило се може применити на хомогене системе једначина:

$$\begin{matrix} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0. \end{matrix}$$

Овакви системи увек имају решење (0,0) односно (0,0,0), које смо назвали *тривијалним*. Поред тога, како им се по једна колона састоји од нула, детерминанте D_x, D_y и D_z су једнаке нули, па Крамерово правило за хомоген систем гласи:

1° Ако је $D \neq 0$ систем има јединствено решење, односно има само тривијално решење.

2° Ако је $D = 0$ систем је неодређен, што значи да (поред тривијалног) има и нетривијална решења.

У случају 2° сва решења се могу наћи Гаусовим поступком.

△ **515.** Користећи Крамерово правило решити систем једначина

а) $\begin{matrix} x + 2y = 4 \\ 2x - \ \ y = 3 \end{matrix}$ *б)* $\begin{matrix} 3x - y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{matrix}$ *в)* $\begin{matrix} x\cos\alpha + y\sin\alpha = 1 \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0 \end{matrix}$

г) $\begin{matrix} ex + 2y = 3e \\ -x + \ \ y = e - 1 \end{matrix}$ *д)* $\begin{matrix} ax - \ \ y = 1 \\ x + ay = 1 \end{matrix}$ *ђ)* $\begin{matrix} 5x + \ \ y = \ \ 7 \\ x - 5y = -9 \end{matrix}$

△ **516.** Применити Крамерово правило на систем једначина, па затим, ако има, наћи решења:

а) $\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ -4x + 2y &= -6 \end{aligned}$ *б)* $\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ 4x + 2y &= 6 \end{aligned}$ *в)* $\begin{aligned} 0\cdot x + 0\cdot y &= 0 \\ 0\cdot x + 0\cdot y &= 1 \end{aligned}$

г) $\begin{aligned} 3x + 0\cdot y &= 2 \\ 5x + 0\cdot y &= 3 \end{aligned}$ *д)* $\begin{aligned} x - y &= 2 \\ -2x + 2y &= -4 \end{aligned}$ *ђ)* $\begin{aligned} x - y &= 2 \\ -2x + 2y &= 0. \end{aligned}$

△ **517.** Користећи Крамерово правило решити хомоген систем једначина:

а) $\begin{aligned} -4x + 5y &= 0 \\ 2x - 3y &= 0 \end{aligned}$ *б)* $\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 3x + 3y &= 0 \end{aligned}$ *в)* $\begin{aligned} 0\cdot x + 0\cdot y &= 0 \\ 0\cdot x + 0\cdot y &= 0 \end{aligned}$

△ **518.** У зависности од реалног параметра m дискутовати и решити систем једначина:

а) $\begin{aligned} m^2x + 2my &= 1 \\ 2mx + m^2y &= -1 \end{aligned}$ *б)* $\begin{aligned} m^2x + 2my &= 0 \\ 2mx + m^2y &= 0 \end{aligned}$ *в)* $\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ x + my &= 1 \end{aligned}$

г) $\begin{aligned} mx + y &= 1 \\ x + my &= 1 \end{aligned}$ *д)* $\begin{aligned} mx + y &= 0 \\ x + my &= 0 \end{aligned}$ *ђ)* $\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ mx - y &= 3 \end{aligned}$

$*$ **519.** Бројеви a, b, c су такви да систем једначина

$$\begin{aligned} ax - by &= 2a - b \\ (c+1)x + cy &= 10 - a + 3b \end{aligned}$$

има бесконачно много решења, при чему је $x = 1$, $y = 3$ једно од тих решења. Наћи a, b и c.

△ **520.** Користећи Крамерово правило решити систем једначина

а) $\begin{aligned} 2x - y - z &= 4 \\ 3x + 4y - 2z &= 11 \\ 3x - 2y + 4z &= 11 \end{aligned}$ *б)* $\begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= -4 \\ 4x + y + 4z &= -2 \end{aligned}$ *в)* $\begin{aligned} x + z &= 7 \\ x + y &= 8 \\ 2y - z &= 7 \end{aligned}$

г) $\begin{aligned} x - y &= 1 \\ y - z &= 1 \\ x + z &= 4 \end{aligned}$ *д)* $\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ x + 2y + 3z &= 8 \\ x + 3y + 4z &= 11 \end{aligned}$ *ђ)* $\begin{aligned} y + z &= 0 \\ x + z &= 0 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$

△ **521.** Применити Крамерово правило на систем једначина, па затим, ако има, наћи решења:

а) $\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 4 \\ 3x + y \quad &= 6 \end{aligned}$ *б)* $\begin{aligned} 2x + y + z &= 2 \\ 3x + y + z &= 0 \\ 7x + 2y + 2z &= 4 \end{aligned}$ *в)* $\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 1 \\ 2x + 6y - 4z &= 3 \\ -x - 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$

г) $\begin{aligned} x-y&=1\\ y-z&=2\\ z-x&=3\end{aligned}$ *д)* $\begin{aligned} x-y&=1\\ y-x&=-1\\ z-x&=-2\end{aligned}$ *ђ)* $\begin{aligned} x+y+z&=1\\ x+y-z&=-1\\ 3x+3y+z&=1\end{aligned}$

△ **522.** Користећи Крамерово правило решити хомоген систем једначина

а) $\begin{aligned} 3x+2y-2z&=0\\ 4x+6y+8z&=0\\ 5x+7y+9z&=0\end{aligned}$ *б)* $\begin{aligned} 2x+y+3z&=0\\ 4x+2y+6z&=0\\ -3x-5y&=0\end{aligned}$ *в)* $\begin{aligned} x+2y+z&=0\\ 2x+4y+2z&=0\\ -x-2y-z&=0\end{aligned}$

г) $\begin{aligned} x-y&=0\\ y-z&=0\\ z-x&=0\end{aligned}$ *д)* $\begin{aligned} x+y+z&=0\\ x+y-z&=0\\ 3x+3y+z&=0\end{aligned}$ *ђ)* $\begin{aligned} x+y+z&=0\\ x+y-z&=0\\ x-y+z&=0\end{aligned}$

523. У зависности од реалних параметара m и n дискутовати и решити системе једначина:

△ *а)* $\begin{aligned} x-y+z&=1\\ (m+1)x+(m^2-1)y+z&=-1\\ (m^2+2)x+(m-2)y+2z&=4\end{aligned}$ △ *б)* $\begin{aligned} x-y+z&=0\\ (m+1)x+(m^2-1)y+z&=0\\ (m^2+2)x+(m-2)y+2z&=0\end{aligned}$

в) $\begin{aligned} mx+y+z&=1\\ x+my+z&=1\\ x+y+mz&=1\end{aligned}$ *г)* $\begin{aligned} mx+y+z&=4\\ x+ny+z&=3\\ x+2ny+z&=4\end{aligned}$ *д)* $\begin{aligned} (m+1)x-2y+(m+2)z&=0\\ -2x+my-2z&=0\\ (m-1)x-y+z&=0\end{aligned}$

∗ **524.** У зависности од реалних параметара a, b, c, d, p дискутовати и решити системе једначина:

а) $\begin{aligned} ax+y+z&=1\\ 2x+2ay+2z&=3\\ x+y+az&=1\end{aligned}$ *б)* $\begin{aligned} (a-1)x-y+z&=a\\ -x+(a-1)y-z&=-2\\ 3x-3y+(a+1)z&=1\end{aligned}$ *в)* $\begin{aligned} ax+y+z&=0\\ 2x+2ay+2z&=0\\ x+y+az&=0\end{aligned}$

г) $\begin{aligned} x+ay+a^2z&=a^3\\ x+by+b^2z&=b^3\\ x+cy+c^2z&=c^3\end{aligned}$ *д)* $\begin{aligned} x+y+z&=1\\ ax+by+cz&=d\\ a^2x+b^2y+c^2z&=d^2\end{aligned}$ *ђ)* $\begin{aligned} ax+by+bz&=1\\ bx+ay+bz&=2\\ bx+by+az&=3\end{aligned}$

е) $\begin{aligned} ax+by+az&=1\\ x+y+az&=1\\ x+y+2z&=1\end{aligned}$ *ж)* $\begin{aligned} -x+(p+1)y+(p^2-2)z&=p-2\\ 3x-3y+(7-p^2)z&=4-p\\ 4x-4y+(9-p^2)z&=5-p\end{aligned}$

∗ **525.** Наћи услове које треба да задовоље параметри a, b, c, d да би имао решења систем:

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=ab\\ x_1+x_3&=ac\\ x_1+x_4&=ad\\ x_2+x_3&=bc\\ x_2+x_4&=bd\\ x_3+x_4&=cd\end{aligned}$$

ПЕТА ГЛАВА

5 ВЕКТОРИ

5.1 ВЕКТОРИ У ПРАВОУГЛОМ КООРДИНАТНОМ СИСТЕМУ

За векторе $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ кажемо да су линеарно зависни ако постоје бројеви $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, од којих бар један није једнак нули, такви да је $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$. У противном су линеарно независни. Два вектора су линеарно зависна акко су колинеарна, а три акко су компланарна. Више од три вектора су увек линеарно зависна.

Ако $\vec{a}$ није нула вектор и ако је $\vec{b}$ колинеаран са $\vec{a}$, онда постоји тачно један реалан број x такав да је $\vec{b} = x \cdot \vec{a}$.

Ако су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линеарно независни, а $\vec{c}$ вектор компланаран са њима, онда се $\vec{c}$ на јединствен начин може изразити преко $\vec{a}$ и $\vec{b}$, као $\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$.

Ако су вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линеарно независни, онда се сваки вектор $\vec{d}$ на јединствен начин може изразити преко њих као $\vec{d} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}$.

Јединични, међусобно нормални вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ су линеарно независни вектори, па се сваки вектор $\vec{a}$ може изразити као $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} = (a_1, a_2, a_3)$. Бројеве a_1, a_2 и a_3 називамо координатама вектора $\vec{a}$. Ако је $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ онда је $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$, $x \cdot \vec{a} = (xa_1, xa_2, xa_3)$ и $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Ако је тачка O заједнички почетак вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, онда је одређен правоугли координатни систем $Oxyz$, при чему су $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ јединични вектори оса Ox, Oy и Oz. Тачка M има координате: x, y и z (пишемо $M(x, y, z)$) акко је $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$. Тачке $M(x_1, y_1, z_1)$ и $N(x_2, y_2, z_2)$ одређују вектор $\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, а растојање између тачака M и N једнако је
$MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Вектори који припадају равни одређеној јединичним међусобно нормалним векторима $\vec{i}$ и $\vec{j}$ могу се изразити преко њих као $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} = (a_1, a_2)$, али се могу схватити као специјални случајеви вектора у простору, чија је трећа координата једнака нули. Тако је $\vec{a} = (a_1, a_2, 0) =$ (по договору) (a_1, a_2), а све горе наведене формуле важе ако у њих ставимо $a_3 = b_3 = z_1 = z_2 = 0$.

Јединични вектор вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ је вектор $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \dfrac{1}{|\vec{a}|}(a_1, a_2, a_3)$.

△ **526.** Дати су вектори: $\vec{a} = (4,3)$, $\vec{b} = -4\vec{i} + 5\vec{j}$ и $\vec{c} = (3,0)$. Израчунати:

а) $\vec{a} + \vec{b}$; *б)* $\vec{a} - 2\vec{b}$; *в)* $\vec{a} + 3\vec{b} - 7\vec{c}$; *г)* $|\vec{a}|$; *д)* $\dfrac{1}{|\vec{a}|}(\vec{b} + \vec{c})$; *ђ)* $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$;
е) јединични вектор $\vec{n}_0$ вектора $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

△ **527.** Дати су вектори: $\vec{a} = (3,4,12)$ и $\vec{b} = 12\vec{i} + 5\vec{k}$. Израчунати:

а) $\vec{a} + \vec{b}$; *б)* $3\vec{a} - 2\vec{b}$; *в)* $\vec{a} + 2\vec{i}$; *г)* $\vec{a} + \vec{b} + \vec{j}$; *д)* $|\vec{a}| \cdot \vec{b} - |\vec{b}| \cdot \vec{a}$;
ђ) обим троугла чија су темена заједнички почетак и крајеви вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
е) јединични вектор $\vec{s}_0$ симетрале угла између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

△ **528.** Одредити збир вектора положаја тачака у равни и простору:

а) $A(1,2)$, $B(3,-1)$, $C(2,1)$; *б)* $A(2,3)$, $B(-2,-3)$;
в) $A(1,2,3)$, $B(2,-1,3)$, $C(4,1,2)$; *г)* $A(1,-1,3)$, $B(2,3,1)$, $C(-3,-2,-4)$.

△ **529.** Дати су вектори: $\vec{a} = (2,1)$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = (0,1,2)$ и $\vec{d} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$. Одредити координате тачака у равни и простору чији су вектори положаја:

а) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{p} = \vec{a} + \vec{i}$, $\vec{q} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}$;
б) $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{r} = \vec{c} + \vec{d}$, $\vec{s} = 2\vec{c} - 3\vec{d}$, $\vec{t} = \vec{c} + \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{u} = |\vec{c}| \cdot \vec{d}$.

△ **530.** Одредити координате вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ и наћи дужине дужи AB, AC и BC ако је:

а) $A(1,2,3)$, $B(4,3,2)$, $C(2,1,0)$; *б)* $A(1,-1,1)$, $B(2,3,1)$, $C(1,-1,1)$;
в) $A(-3,-1,1)$, $B(-2,-2,-2)$, $C(-1,-3,1)$.

△ **531.** Испитати да ли су тачке A, B и C темена троугла, па ако јесу испитати да ли је тај троугао: оштроугли, правоугли или тупоугли и да ли је једнакостраничан, једнакокрак или разностран, ако је:

а) $A(2,1,3)$, $B(3,2,4)$, $C(4,3,5)$; *б)* $A(1,1,0)$, $B(1,0,1)$, $C(0,1,1)$;
в) $A(2,1,-1)$, $B(3,3,0)$, $C(3,2,1)$; *г)* $A(1,0,-1)$, $B(3,1,2)$, $C(0,-3,-3)$;
д) $A(2,1,0)$, $B(5,2,1)$, $C(6,3,-1)$; *ђ)* $A(5,2,3)$, $B(3,1,0)$, $C(1,2,1)$;
е) $A(1,1,0)$, $B(2,5,0)$, $C(4,2,1)$.

△ **532.** Дат је троугао ABC и на правој AB тачка V таква да је $\overrightarrow{AV} = m\overrightarrow{VB}$, односно која дели дуж AB у односу $m : 1$, $m \in R$. Изразити вектор $\vec{v} = \overrightarrow{CV}$ преко вектора $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$. За које вредности реалног броја m распоред тачака A, B и V је следећи:

а) $A - V - B$; *б)* $A - B - V$; *в)* $V - B - A$;
г) V је средиште дужи AB; *д)* B је средиште дужи AV;
ђ) A је средиште дужи VB;

533. Нека су T, O и O_c тежиште, центар уписаног круга и центар споља уписаног круга који додирује страницу AB троугла ABC. Изразити преко вектора $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ и њихових интезитета a, b и c векторе $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{AO_c}$.

534. Дате су тачке $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Користећи задатак 532 одредити координате тачке M која дели дуж AB у односу $m : 1$, $m \in R$, а затим наћи координате тачке S, средишта дужи AB.

△ **535.** Дате су тачке $A(2,1,-3)$ и $B(4,-1,1)$. Одредити координате:

а) средишта S дужи AB;
б) тачке C са дужи AB, такве да је $AC : BC = 2 : 3$;
в) тачке D, $D \neq C$, са праве AB, такве да је $AD : BD = 2 : 3$;
г) тачке E са праве AB, која не припада дужи AB, пет пута ближе тачки B него тачки A;
д) тачака F_1 и F_2 које деле дуж AB на три једнака дела;
ђ) тачака F_3 и F_4 таквих да је $\overrightarrow{AF_1} = \overrightarrow{BF_3}$ и $\overrightarrow{AF_2} = \overrightarrow{BF_4}$.

536. Одредити дужине тежишних линија троугла ABC чије је тежиште T, а средишта страница BC, CA и AB су тачке A_1, B_1 и C_1, ако је:

а) $A(0,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,2)$; *б)* $A(2,1,3)$, $B(4,-1,1)$, $C(-2,3,-1)$;
в) $A(2,1,3)$, $B(4,-1,1)$, $A_1(4,1,2)$; *г)* $A(2,4,0)$, $B_1(-1,4,2)$, $T(0,3,3)$;

537. Дате су тачке $A(2,3,1,)$, $B(-1,4,-2)$ и $C(-1,-7,1)$. Одредити координате:

а) средишта C_1 странице AB и тежишта T троугла ABC;
б) темена D паралелограма $ABCD$;
в) тачака M и N таквих да је B средиште странице AM, а C тежиште троугла AMN.

△ **538.** Одредити дужину дијагонале AC паралелограма $ABCD$ ако је:

а) $\overrightarrow{AB}=(-3,2,0)$, $\overrightarrow{BC}=(0,-6,0)$; *б)* $\overrightarrow{AB}=(3,2,1)$, $\overrightarrow{DA}=(7,-1,1)$;
в) $A(1,3,0)$, $B(2,5,-3)$, $D(0,13,8)$; *г)* $B(3,1,-2)$, $C(1,0,-2)$, $D(11,2,2)$.

△ **539.** Доказати да су дати вектори линеарно зависни:

а) $\vec{a}=(-6,9)$ и $\vec{b}=(4,-6)$;
б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, где је $A(-1,0)$, $B(7,-6)$, $C(9,5)$, $D(-3,14)$;
в) $\vec{a}=(3,7)$, $\vec{b}=(1,3)$ и $\vec{c}=(2,2)$;
г) $\vec{a}=(2k,1)$, $\vec{b}=(6,-3)$ и $\vec{c}=(3-k,-2)$, $k\in R$.

△ **540.** Доказати да су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линеарно независи, па разложити вектор $\vec{c}$ преко њих, ако је:

а) $\vec{a}=(2,-3)$, $\vec{b}=(-9,6)$, $\vec{c}=(-4,1)$; *б)* $\vec{a}=(3,5)$, $\vec{b}=(1,1)$, $\vec{c}=(-6,-10)$;
в) $\vec{a}=(1,0)$, $\vec{b}=(1,1)$, $\vec{c}=(3,5)$; *г)* $\vec{a}=(k,1)$, $\vec{b}=(-1,k)$, $\vec{c}=(1,1)$, $k\in R$.

541. У зависности од реалног параметра m дискутовати линеарну зависност вектора $\vec{a}=(m,1)$ и $\vec{b}=(1,m)$, и могућност разлагања вектора $\vec{c}=(1,1)$ преко вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Дати геометријско тумачење резултата.

542. Доказати да су вектори $\vec{a}=(2,1,3)$ и $\vec{b}=(1,1,-1)$ линеарно независни, а да су вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}=(4,3,1)$ линеарно зависни, па разложити вектор $\vec{c}$ преко вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

543. Доказати да су вектори $\vec{a}=(1,0,0)$, $\vec{b}=(1,1,0)$ и $\vec{c}=(1,1,1)$ линеарно независни, па изразити векторе $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ преко њих. Изразити вектор $\vec{d}=(x,y,z)$ преко вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

△ **544.** Испитати колинеарност тачака

а) $A(2,3,-1)$, $B(3,-1,2)$, $C(5,-9,8)$;
б) $A(1,1,1)$, $B(2,1,3)$, $C(5,2,1)$;
в) $A(1,0,1)$, $B(2,m,3)$, $C(3,2,n)$;

г) $A(-2,1,3)$, $B(1,m+1,4)$, $C(4,2m+1,5)$.

△ **545.** Испитати компланарност тачака

а) $A(2,3,1)$, $B(3,5,4)$, $C(4,2,2)$, $D(6,6,8)$;
б) $A(3,5,1)$, $B(4,7,4)$, $C(5,10,2)$, $D(5,9,8)$;
в) $A(-4,-1,1)$, $B(m,-4,3)$, $C(-5,m,0)$, $D(-2,-2,2)$;
г) $A(1,1,1)$, $B(3,2,0)$, $C(4,m+1,n+1)$, $D(8,m+3,n-1)$;
д) $A(2,1,5)$, $B(m,1,4)$, $C(9,5,8)$, $D(6,3,7)$.

546. Дат је вектор $\vec{a}=(3,-6,2)$ и тачка $M(-1,1,0)$. Одредити координате тачке N, тако да је:

а) $\overrightarrow{MN}=\vec{a}$; *б)* $\overrightarrow{MN}=-3\vec{a}$; *в)* $\overrightarrow{MN}\parallel\vec{a}$ и $|\overrightarrow{MN}|=2$.

547. Дате тачке $A(-3,1,2)$, $B(2,4,-1)$, $C(1,5,-1)$ су темена паралелограма $ABCD$.

а) Израчунати дужину дијагонале BD.
б) Одредити координате тачке D.

5.2 СКАЛАРНИ ПРОИЗВОД ДВА ВЕКТОРА

Скаларни производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се дефинише као број:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b}).$$

За произвољне векторе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и реалан број α важе следеће особине:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (комутативност)
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ (дистрибутивност у односу на сабирање)
$(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})=\alpha\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$
$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff (|\vec{a}|=0\vee|\vec{b}|=0\vee\vec{a}\perp\vec{b})$ (услов нормалности)
$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{\vec{a}^2}$ *) (интензитет вектора)
$\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ (угао између два вектора)
$\vec{a}\cdot\vec{b}>0 \iff 0\leqslant\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})<90^\circ$
$\vec{a}\cdot\vec{b}<0 \iff 90^\circ<\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\leqslant180^\circ$
$Pr_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$ (скаларна пројекција вектора)

*) $\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$ чита се: „вектор $\vec{a}$ на квадрат“.

$\vec{P}r_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}$ (векторска пројекција вектора)

$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} \neq \vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$ (не важи „асоцијативност")

Нека су вектори дати координатама: $\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$, $\vec{d}=(d_1,d_2,d_3)$. Тада је:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2$ и $\vec{c}\cdot\vec{d} = c_1\cdot d_1 + c_2\cdot d_2 + c_3\cdot d_3$ (скаларни производ)

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2}$, $|\vec{c}| = \sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}$ (интензитет вектора)

△ **548.** Нека је $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$ и $\sphericalangle(\vec{m},\vec{n}) = 60^\circ$. Израчунати скаларне производе вектора:

а) $\vec{m}$ и $\vec{n}$; *б)* $\vec{m}$ и $\vec{m}$; *в)* $\vec{n}$ и $\vec{n}$;
г) $\vec{m}$ и $2\vec{m}+\vec{n}$; *д)* $\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{m}-\vec{n}$; *ђ)* $2\vec{m}+\vec{n}$ и $3\vec{m}-7\vec{n}$.

△ **549.** Нека је $\vec{a} = 2\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m}-2\vec{n}$, при чему је $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$ и $\sphericalangle(\vec{m},\vec{n}) = 60^\circ$. Израчунати:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; *б)* $|\vec{a}|$; *в)* $|\vec{b}|$; *г)* $\sphericalangle(\vec{a},\vec{m})$;
д) $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$; *ђ)* $Pr_{\vec{b}}\vec{a}$; *е)* $\vec{P}r_{\vec{b}}\vec{a}$; *ж)* $Pr_{\vec{m}}\vec{a}$.

550. Паралелограм је ромб акко *) има нормалне дијагонале. Доказати.

551. Доказати да је $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leqslant |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. Када важи једнакост?

△ **552.** Ако је $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ и $|2\vec{a}+\vec{b}| = 4$, наћи $|\vec{a}+\vec{b}|$.

△ **553.** Наћи вектор $\vec{c}$ колинеаран са $2\vec{a}+\vec{b}$, ако је $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$, $\vec{b}\cdot\vec{c} = 3$ и $|\vec{b}| = 2$.

554. Нека је AA_2 висина, H ортоцентар троугла ABC. Преко вектора $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, њихових интензитета и скаларних производа, изразити векторе:

а) $\vec{h} = \overrightarrow{AA_2}$; *б)* $\overrightarrow{AH}$.

△ **555.** Вектори $\vec{a} = \vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{b} = 5\vec{m}-2\vec{n}$ представљају странице правоугаоника. Ако је $\vec{m}$ орт **) и $|\vec{n}| = 2$, израчунати:

а) $\sphericalangle(\vec{m},\vec{n})$; *б)* Угао између дијагонала правоугаоника.

△ **556.** Наћи интензитете вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ ако је $(2\vec{a}-\vec{b})\perp(\vec{a}+\vec{b})$, $(\vec{a}-2\vec{b})\perp(2\vec{a}+\vec{b})$ и $|\vec{a}+\vec{b}| = 3$.

*) *Акко* се чита: „ако и само ако".
**) $|\vec{m}|=1$.

557. Нека је $ABCD$ тетраедар. Ако је $AB \perp CD$ и $AC \perp BD$, онда је и $AD \perp BC$. Доказати.

558. Нека су AC и BC катете и CC_1 висина правоуглог троугла ABC. Ако су M и N средишта дужи CC_1 и BC_1, онда је $AM \perp CN$. Доказати.

559. Паралелограм је правоугаоник акко има једнаке дијагонале. Доказати.

560. Ивице AB и CD тетраедра $ABCD$ су нормалне акко је $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$. Доказати.

561. Нека је $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 7$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 2$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$, $(\vec{c} - \vec{a}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$. Израчунати:

а) $|\vec{a}|$; *б)* обим троугла одређеног векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
в) обим паралелограма чије су дијагонале одређене векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
г) $|\vec{e}|$, где је $\vec{e}$ нормална пројекција вектора $\vec{c}$ на раван одређену векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

562. Дата је тачка $M(3, -1, -1)$. Одредити тачку B у равни xOy, тако да је вектор $\overrightarrow{MB}$ нормалан на вектор $\vec{a} = (-1, 2, -2)$, и $|\overrightarrow{MB}| = 3$.

563. Дати су следећи подаци: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 2$ и $|\vec{b}| = 2$.

а) Ако су вектори $\vec{m}$ и $\vec{n}$ узајамно нормални, при чему је $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{n} = \vec{c} - \vec{a}$, израчунати $|\vec{a}|$.
б) Одредити вектор $\vec{p}$, компланаран са $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тако да је вектор $\vec{p} - \vec{c}$ нормалан на раван одређену векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
в) Израчунати $|\vec{p}|$.

5.3 ВЕКТОРСКИ ПРОИЗВОД ДВА ВЕКТОРА

За три некомпланарна вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ кажемо да чине десни систем вектора или десни триедар, ако се, кад су доведени на заједнички почетак, ротација вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$, за угао мањи од 180°, врши у смеру супротном кретању казаљке на сату, посматрано са врха вектора $\vec{c}$. (Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ тим редом, распоређени су као палац, кажипрст и средњи прст десне руке.) У противном

$\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине леви систем вектора (леви триедар).

За два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, векторски производ, у ознаци $\vec{a}\times\vec{b}$, је вектор чији је

1) интензитет: $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a},\vec{b})$,

2) правац нормалан на раван одређену векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

3) смер такав, да вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$ чине десни триедар.

За произвољне векторе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и реални број α важе следеће особине:

$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ (антикомутативност)

$\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$ (уопште $\vec{a}\parallel\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$) (колинеарност)

$(\alpha\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\alpha\vec{b}) = \alpha\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ и

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ (дистрибутивност)

Геометријско значење:

$|\vec{a}\times\vec{b}| = P$ (површина паралелограма)

$P_{\triangle} = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ (површина троугла)

Ако су дати вектори: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тада је:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Ако је $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$, тада је $\vec{c} = k\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.

$\triangle$ **564.** Ако је $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ и $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{6}$, израчунати:

а) $|\vec{a}\times\vec{b}|$; *б)* $|(3\vec{a}+\vec{b})\times(2\vec{a}-\vec{b})|$;
в) површину паралелограма, одређеног векторима $3\vec{a}+2\vec{b}$ и $7\vec{a}-\vec{b}$.
г) површину троугла одређеног векторима $\vec{a}$ и $\vec{a}+\vec{b}$.
д) висине троугла из *г)*.

565. Ако је $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 7$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 12$, наћи:

а) $|\vec{a}\times\vec{b}|$; *б)* $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$; *в)* $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$; *г)* $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{b})$.

$\triangle$ **566.** Ако је $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2$, $|\vec{a}\times\vec{b}| = 2\sqrt{3}$ и $|\vec{a}+2\vec{b}| = \sqrt{73}$, израчунати интензитете вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$.

567. У каквој размери су површине троуглова одређених векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{a}$ и $\vec{c}$, ако је $\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c} = \vec{0}$?

△ **568.** Израчунати површину троугла одређеног векторима $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n} + \vec{p}$ и $\vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n} + \vec{p}$ и дужину његове висине која одговара страници $\vec{a}$, ако су $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$ јединични вектори такви да је $\vec{m} \perp \vec{n}$, $\sphericalangle(\vec{m}, \vec{p}) = 60°$, $\sphericalangle(\vec{n}, \vec{p}) = 45°$.

569. Ако је $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ и $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$, онда су вектори $\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$ колинеарни. Доказати.

570. Нормално на сваку страну конвексног полиедра постављен је вектор интензитета једнаког површини те стране, а који је усмерен ка спољашњости полиедра. Доказати да је збир тих вектора једнак $\vec{0}$ ако:

а) дати полиедар има четири стране, односно ако је тетраедар;
б) дати полиедар је произвољни конвексан полиедар.

571. Нека су $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ надовезани вектори страница многоугла равни α и $\vec{n}$ јединични вектор нормалан на раван α. Доказати да је:

а) вектор $\vec{a}_i' = \vec{a}_i \times \vec{n}$ добијен ротацијом вектора $\vec{a}_i$ у равни α за $90°$, око свог почетка у смеру казаљке на сату, посматрано с врха вектора $\vec{n}$;
б) $\sphericalangle(\vec{a}_i', \vec{a}_j') = \sphericalangle(\vec{a}_i, \vec{a}_j)$; *в)* $\vec{a}_1' + \vec{a}_2' + \cdots + \vec{a}_k' = \vec{0}$; *г)* $(\vec{a}_i \times \vec{n}) \cdot (\vec{a}_j \times \vec{n}) = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j$.

△ **572.** Дати су вектори $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (3, -1)$ и $\vec{c} = (2, 1)$. Израчунати:

а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; *б)* $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$; *в)* угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
г) $Pr_{\vec{b}}\vec{a}$; *д)* $\vec{P}r_{\vec{b}}\vec{a}$;
ђ) вектор висине троугла одређеног векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чији је почетак врх вектора $\vec{a}$, а крај је на правој одређеној вектором $\vec{b}$.

△ **573.** Дати су вектори $\vec{a} = (-1, 1, 0)$, $\vec{b} = (2, 1, 3)$ и $\vec{c} = (1, 1, 1)$. Израчунати:

а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; *б)* $\vec{b} \times \vec{c}$; *в)* $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$;
г) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$; *д)* $\vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$; *ђ)* $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$;
е) угао између вектора $\vec{a}$ и равни одређене векторима $\vec{b}$ и $\vec{c}$;
ж) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$.

574. Дати су вектори $\vec{a} = (2, 3)$ и $\vec{b} = (-1, m)$. Наћи вектор $\vec{c}$ нормалан на вектор $\vec{a}$, такав да је $\vec{b} \cdot \vec{c} = 7$. У зависности од реалног параметра m, одредити колико задатак има решења.

△ **575.** Дати су вектори $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(2,2,1)$ и $\vec{c}=(1,2,-6)$. Одредити вектор $\vec{d}$, нормалан на векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$, такав да је $\vec{c}\cdot\vec{d}=3$.

△ **576.** Дати су вектори $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(-1,0,1)$ и $\vec{c}=(2,3,1)$. Одредити вектор $\vec{d}$, нормалан на векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$, који са вектором $\vec{c}$ одређује паралелограм површине $\sqrt{75}$.

△ **577.** Дати су вектори $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(1,0,0)$ и $\vec{c}=(1,1,0)$. Наћи јединични вектор $\vec{d}$ нормалан на вектор $\vec{a}$, који са вектором $\vec{b}$ гради угао од 60°, а са вектором $\vec{c}$ туп угао.

578. Дати су вектори $\vec{a}=(2,3,1)$ и $\vec{b}=(3,1,0)$. Наћи јединични вектор $\vec{n}$, компланаран са векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а нормалан на $\vec{a}$.

579. Дати су вектори $\vec{a}=(1,1,1)$ и $\vec{b}=(1,-1,-1)$. Одредити јединични вектор $\vec{c}$ који са вектором $\vec{a}$ гради угао од 30°, такав да је површина паралелограма одређеног векторима $\vec{b}$ и $\vec{c}$ једнака $\sqrt{2}$.

580. Дати су вектори $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(2,-1,1)$ и $\vec{c}=(13,2,0)$. Одредити вектор $\vec{d}$ такав да је $|\vec{d}|=\sqrt{6}$, $\vec{d}\perp\vec{a}$, $\sphericalangle(\vec{d},\vec{c})$ оштар и да је површина паралелограма одређеног векторима $\vec{b}$ и $\vec{d}$ једнака $\sqrt{11}$.

5.4 МЕШОВИТИ ПРОИЗВОД

Мешовити производ три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ у ознаци $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ је број $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$. Ако вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ чине десни систем вектора, онда је $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ позитиван и представља запремину V паралелепипеда одређеног векторима $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а ако чине леви систем вектора, онда је негативан и једнак $-V$. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ су компланарни акко

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0 \quad \text{(услов компланарности)}.$$

Мешовити производ има следећа својства:

$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=[\vec{b},\vec{c},\vec{a}]=[\vec{c},\vec{a},\vec{b}]$

$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=-[\vec{b},\vec{a},\vec{c}]=-[\vec{a},\vec{c},\vec{b}]=-[\vec{c},\vec{b},\vec{a}]$

$[\alpha\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\alpha\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b},\alpha\vec{c}]=\alpha[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$,

где су $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ произвољни вектори, $\alpha\in R$.

Ако је $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, и $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ онда је:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

Запремине V_1 паралелепипеда и тетраедра V_2 одређених векторима $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ су $V_1 = |[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$ и $V_2 = \dfrac{1}{6}|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$.

$\triangle$ **581.** Мешовити производ три вектора од којих су два колинеарна једнак је нули. Доказати.

582. Преко $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ изразити:

а) $[\vec{a}+\vec{b},\vec{b},\vec{c}]$; *б)* $[\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{c}]$; *в)* $[\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}]$; *г)* $[2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},3\vec{a}+4\vec{b}]$.

$\triangle$ **583.** Нека је $|\vec{m}| = |\vec{n}| = |\vec{p}| = 1$, $\sphericalangle(\vec{m},\vec{n}) = 60^\circ$, $\vec{m}\perp\vec{p}$ и $\vec{n}\perp\vec{p}$. Израчунати:

а) $[\vec{m},\vec{m},\vec{p}]$;
б) запремину паралелепипеда одређеног векторима $\vec{m}-\vec{n}+\vec{p}$, $\vec{m}+\vec{n}-\vec{p}$ и $-\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$;
в) запремину тетраедра одређеног векторима $\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{m}+\vec{p}$ и $\vec{n}+\vec{p}$.

584. Ако вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ задовољавају услов $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$, онда су компланарни. Доказати.

585. Ако су вектори $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{b}\times\vec{c}$ и $\vec{c}\times\vec{a}$ компланарни, онда су и колинеарни. Доказати.

586. Нека је $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$, $|\vec{p}|=4$, $\sphericalangle(\vec{n},\vec{p})=60^\circ$, $\vec{n}\perp\vec{m}$ и $\vec{m}\perp\vec{p}$. Израчунати:

а) запремину тетраедра одређеног заједничким почетком и крајевима вектора $\vec{a}=\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$, $\vec{b}=2\vec{m}+\vec{p}$ и $\vec{c}=3\vec{m}+\vec{n}$;
б) површину стране тетраедра одређене векторима $\vec{b}$ и $\vec{c}$;
в) висину тетраедра која одговара тој страни.

587. Ако је $\vec{a}=a_1\vec{m}+a_2\vec{n}+a_3\vec{p}$, $\vec{b}=b_1\vec{m}+b_2\vec{n}+b_3\vec{p}$, $\vec{c}=c_1\vec{m}+c_2\vec{n}+c_3\vec{p}$ и $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$, онда је $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = D\cdot[\vec{m},\vec{n},\vec{p}]$. Доказати.

588. Користећи задатак 587 проверити тачност израчунатих мешовитих производа у задацима 582, 583 и 586.

$*$ **589.** На страницама троугла ABC споља су конструисани квадрати BAA_1B_2, CBB_1C_2 и ACC_1A_2. Нека су P, Q и R њихови центри и нека је A_3 теме паралелограма $A_1AA_2A_3$. Доказати да је:

а) $AA_3\perp BC$; *б)* $AA_3 = BC$;
в) $PQ\perp BR$; *г)* $PQ = BR$.

△ **590.** Израчунати $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$, ако је:

а) $\vec{a}=(2,3,1)$, $\vec{b}=(3,-1,2)$, $\vec{c}=(1,1,3)$; *б)* $\vec{a}=(3,2,1)$, $\vec{b}=(2,1,0)$, $\vec{c}=(1,0,1)$;
в) $\vec{a}=(2,1,3)$, $\vec{b}=(-5,3,-2)$, $\vec{c}=(-1,4,6)$; *г)* $\vec{a}=(2,1,3)$, $\vec{b}=(4,2,6)$, $\vec{c}=(5,1,8)$.

△ **591.** Испитати да ли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине десни триедар, леви триедар или су компланарни ако је:

а) $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(-1,1,2)$, $\vec{c}=(3,2,1)$; *б)* $\vec{a}=(1,2,-1)$, $\vec{b}=(2,1,3)$, $\vec{c}=(4,5,1)$;
в) $\vec{a}=(-1,1,2)$, $\vec{b}=(1,2,3)$, $\vec{c}=(3,2,-1)$; *г)* $\vec{a}=(2,3,1)$, $\vec{b}=(3,-1,1)$, $\vec{c}=(1,2,3)$;
д) $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

△ **592.** За које вредности параметра m су вектори $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(3,-1,2)$ и $\vec{c}=(5,1,m)$:
а) компланарни;
б) некомпланарни и чине десни триедар;
в) некомпланарни и чине леви триедар?

△ **593.** *а)* Наћи запремину паралелепипеда одређеног векторима $\vec{a}=(2,1,3)$, $\vec{b}=(1,-1,4)$ и $\vec{c}=(-3,-3,0)$.
б) Наћи висину тог паралелепипеда која одговара страни одређеној векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

594. Дати су вектори $\vec{a}=(m,1,1)$, $\vec{b}=(1,m,1)$ и $\vec{c}=(1,1,1)$.

а) Ни за једно m дати вектори не чине леви триедар. Доказати.
б) Ако су ови вектори компланарни, доказати да су колинеарни.
в) Одредити $m \in R$ такво да запремина тетраедра одређеног датим векторима буде једнака 6.

595. Дати су вектори $\vec{a}=(3,2,1)$, $\vec{b}=(4,5,6)$ и $\vec{c}=(8,9,7)$. Одредити $Pr_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}$ и $\vec{Pr}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}$.

596. Дати су вектори $\vec{a}=(m,1,-1)$, $\vec{b}=(3,m,2)$ и $\vec{c}=(7,4,0)$.

а) Одредити $m \in R$ тако да дати вектори буду компланарни.
б) За тако нађено m, израчунати косинусе углова које вектор $\vec{a}$ гради са координатним осама.
в) Разложити вектор $\vec{c}$ преко вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

△ **597.** Дати су вектори $\vec{a}=(1,1,1)$ и $\vec{b}=(0,0,1)$. Одредити јединични вектор $\vec{c}$, који је нормалан на вектор $\vec{a}$ и са $\vec{b}$ гради угао од $45°$, тако да $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине десни систем вектора.

△ **598.** Дати су вектори $\vec{a} = (-2, -6, -1)$, $\vec{b} = (1, 2, 0)$ и $\vec{c} = (2, -1, 0)$.

а) Одредити онај од јединичних вектора нормалних на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ који са $\vec{c}$ образује оштар угао.
б) Одредити вектор $\vec{d}$, истог правца и смера као јединични вектор из *а)*, који са векторима $\vec{a}$ и $\vec{c}$ одређује тетраедар запремине $\frac{28}{3}$.

△ **599.** Одредити вектор $\vec{c}$, нормалан на векторе $\vec{a} = (2, 1, 3)$ и $\vec{b} = (1, 2, 2)$, ако је интензитет вектора $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ једнак $\sqrt{69}$ и ако вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ чине леви триедар.

△ **600.** Дати су вектори $\vec{a} = (3, 2, -2)$, $\vec{b} = (-1, 4, 1)$ и $\vec{c} = (10, 2, m)$, $m \in R$.

а) Одредити такво m да запремина паралелепипеда одређеног векторима $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ буде једнака 140, а вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ да чине десни триедар.
б) За тако нађено m, разложити вектор $\vec{d} = (19, -6, -4)$ преко вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

△ **601.** Наћи тачку D, која се налази на оси Ox, а која је компланарна са тачкама $A(0, 1, 2)$, $B(2, 3, 3)$ и $C(1, 1, 1)$.

△ **602.** Одредити $m \in R$, тако да тачке $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$, $C(5, 6, 7)$ и $D(8, 9, m)$ буду компланарне.

△ **603.** Дате су тачке $A(2, 2, 2)$, $B(5, 4, 3)$, $C(4, 3, 2)$ и $D(3, 2, 3)$.

а) Доказати да постоји тачно једна раван којој припадају тачке A, C и D.
б) Наћи растојање тачке B од те равни.

604. Дате су тачке $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, -1)$, $C(4, 1, 5)$ и $D(0, 2, 2)$.

а) Наћи тачку E подножје висине тетраедра $ABCD$ из тачке D.
б) Наћи тачку F симетричну тачки D у односу на раван ABC.

605. Дате су тачке $A(1, 2, 3)$, $B(4, 8, 0)$, $C(2, 10, 2)$ и $D(2, 7, m)$, $m \in R$.

а) Одредити m, тако да тачке A, B, C, D буду компланарне.
б) За тако нађено m, наћи растојање тачке D од праве одређене тачкама A и B.
в) Наћи тачку E, нормалну пројекцију тачке D на праву AB.

606. Дате су тачке $A(1, 1, 1)$, $B(3, 2, 3)$, $C(2, 4, 0)$ и $D(2, 2, -2)$.

а) Доказати да су праве p и q на којима се налазе дужи AB и CD мимоилазне.
б) Наћи најкраће растојање између правих p и q.
в) На правој p наћи тачку M, а на правој q тачку N, такве да је $p \perp MN$ и $q \perp MN$.

607. Наћи растојање тачке M од равни одређене тачкама A, B и C, ако је:

а) $M(3,-4,1)$, $A(0,0,0)$, $B(1,2,1)$, $C(1,0,-1)$;
б) $M(0,0,0)$, $A(0,-7,0)$, $B(1,-1,1)$, $C(2,-6,-1)$.

608. Наћи растојање тачке M од праве одређене тачкама A и B, ако је:

а) $M(7,9,7)$, $A(2,1,0)$, $B(6,4,2)$;
б) $M(2,-1,3)$, $A(-1,-2,4)$, $B(5,6,14)$.

609. Права p је одређена тачкама A и B, а права q тачкама C и D. Показати да су праве p и q мимоилазне, па затим наћи најкраће растојање између њих, ако је:

а) $A(1,-2,5)$, $B(2,0,7)$, $C(0,3,-1)$, $D(-2,-6,-7)$;
б) $A(0,-3,0)$, $B(9,3,3)$, $C(4,0,-4)$, $D(2,1,0)$.

610. Испитати међусобни положај праве p која садржи тачке A и B и праве q која садржи тачке C и D, ако је:

а) $A(1,2,3)$, $B(3,4,5)$, $C(-5,3,8)$, $D(-2,6,11)$;
б) $A(-1,0,1)$, $B(0,-1,3)$, $C(2,0,2)$, $D(4,-2,6)$;
в) $A(0,0,0)$, $B(1,1,1)$, $C(1,2,3)$, $D(1,3,4)$;
г) $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$, $C(5,6,7)$, $D(8,9,10)$;
д) $A(-1,1,1)$, $B(0,2,2)$, $C(-1,2,2)$, $D(-1,1,2)$;
ђ) $A(1,2,1)$, $B(2,3,2)$, $C(3,4,3)$, $D(-1,-2,-1)$.

ШЕСТА ГЛАВА

6 АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА У РАВНИ

Захваљујући познавању вектора многи проблеми, који су чисто геометријске природе, могу се решавати алгебарским путем, помоћу једначина и неједначина, тј. *аналитички.* Основу оваквог гледишта представљају тачке, које су одређене својим *координатама* у правоуглом, тзв. Декартовом, *) координатном систему. Тако одређене тачке формиране у скупове – геометријске фигуре, праве и криве линије, представљају предмет проучавања у овој глави. Наш задатак биће, између осталог, да ове скупове тачака изражавамо одговарајућим алгебарским једначинама, као и да, користећи њихове једначине долазимо до тражених особина.

За разлику од претходног поглавља, овде ћемо решавати задатке из равни, тј. из дводимензионалног простора.

6.1 ДУЖ У КООРДИНАТНОМ СИСТЕМУ

Наводимо најпре формуле које се односе на дуж одређену крајњим тачкама $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad \text{(растојање између две тачке)}$$

Можемо рећи и *дужина дужи* AB. Растојање (дужина) је по дефиницији ненегативно, конкретно: $d(A, B) \geqslant 0$. Знак „=“ подразумева се у случају када A и B нису две тачке, тј. кад је $A = B$.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad \text{(координате средишта дужи)}$$

Ако је $C(x, y)$ тачка праве AB, $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, таква да је $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{CB} = m$, тада је:

$$x = \frac{x_1 + mx_2}{1 + m} \quad \text{и} \quad y = \frac{y_1 + my_2}{1 + m} \qquad \text{(подела дужи у датој размери)}$$

*) Descartes René (1596 – 1650), велики француски математичар, филозоф и физичар.

Претходна формула је специјални случај ове формуле за $m = 1$.

Ако је троугао ABC задат координатама својих темена $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, тада имамо и следеће формуле:

$$x_t = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad \text{и} \quad y_t = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad \text{(тежиште троугла)}$$

$$2P = |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| \quad \text{(површина троугла)}$$

Формула за израчунавање површине троугла може се записати и у облику детерминанте другог или трећег реда:

$$\pm 2P = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(површина троугла)}$$

У случају четвороугла $ABCD$, чија су темена одређена координатама: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ је:

$$\pm 2P = x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_1 - y_3) \quad \text{(површина четвороугла)}$$

У двема последњим формулама знак $+$ или $-$ одређујемо тако да добијемо $P \geqslant 0$.

У наредним задацима, закључно са задатком 624 користићемо само формулу за растојање двеју тачака. Површину троугла и четвороугла користимо у задацима од 644 до 650.

$\triangle$ **611.** Дата је тачка $A(2, 5)$. Одредити координате тачке A_1, која је симетрична тачки A у односу на:
а) осу Ox; *б)* осу Oy;
в) координатни почетак; *г)* симетралу првог и трећег квадранта;
д) симетралу другог и четвртог квадранта.

Поступајући слично, датим тачкама: $B(0, -2)$, $C(-1, 3)$, $D(-2, -2)$, $E(-2, -3)$, $F(4, 0)$, одредити симетричне тачке.

$\triangle$ **612.** Одредити дужину дужи AB, ако су дате координате крајњих тачака:
а) $A(-6, 3)$ и $B(0, -5)$; *б)* $A(7, -1)$ и $B(2, 11)$; *в)* $A(3, 7)$ и $B(3, 1)$;
г) $A(-11, 5)$ и $B(1, 0)$; *д)* $A(3, 6)$ и $B(5, 8)$; *ђ)* $A(-2, -1)$ и $B(1, 8)$;
е) $A(\sqrt{2}, \sqrt{7})$ и $B(\sqrt{8}, 0)$; *ж)* $A(m^2, mn)$ и $B(n^2, -mn)$, $m, n \in R$.

$\triangle$ **613.** Датој тачки $A(-3, 8)$ одредити најближу од три тачке: $B(-7, 5)$, $C(2, -4)$, $D(3, 0)$.

$\triangle$ **614.** Дате су координате темена четвороугла $A(-3, 1)$, $B(-1, 4)$, $C(1, 2)$, $D(3, -2)$. Између четири странице и две дијагонале, која је дуж највећа?

△ **615.** Тачка $S(-4,7)$ је центар круга полупречника 3. Како су према овом кругу распоређене тачке $A(-5,6)$, $B(2,8)$, $C(-1,7)$?

△ **616.** На оси Ox одредити тачку X, која је од тачке $A(1,3)$ удаљена за 5.

△ **617.** Тачке $A(5,5)$ и B припадају симетрали првог и трећег квадранта. Одредити координате тачке B, тако да је $AB=4$.

△ **618.** Дата су темена троугла ABC, и то $A(-6,0)$, $B(-7,7)$, $C(1,1)$. Одредити координате центра S круга описаног око троугла ABC. Колико је тачка S удаљена од центра круга описаног око троугла MNP, ако је $M(-1,8)$, $N(-3,4)$, $P(6,7)$?

△ **619.** Израчунати обим троугла ABC, ако су му дата темена:
а) $A(4,5)$, $B(1,1)$, $C(8,2)$; *б)* $A(7,-3)$, $B(12,9)$, $C(6,1)$;
в) $A(1,3)$, $B(4,5)$, $C(-5,-5)$; *г)* $A(2,3)$, $B(6,7)$, $C(-6,2)$.

△ **620.** Доказати да је троугао ABC правоугли једнакокраки:
а) $A(0,0)$, $B(4,2)$, $C(-2,4)$; *б)* $A(4,7)$, $B(-1,3)$, $C(8,2)$.

621. Доказати да је троугао ABC тупоугли, ако су му темена $A(2,3)$, $B(6,7)$, $C(-7,2)$.

622. Колики угао одређује права AB са позитивним делом осе Ox, ако је:
а) $A(-1,2)$, $B(3,5)$; *б)* $A(-4,3)$, $B(1,-2)$?

∗ **623.** Дате су тачке: $A(-1,2)$ и $B(5,2)$. Одредити скуп тачака M, таквих да је $AM^2-BM^2=96$.

∗ **624.** Наћи најмању вредност израза: $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-8x+25}$.

△ **625.** Одредити координате средишта S дужи AB, ако је:
а) $A(-4,9)$, $B(2,-1)$; *б)* $A(-2,7)$, $B(-4,-3)$.

△ **626.** Одредити средишта страница и тежиште троугла ABC:
а) $A(-5,1)$, $B(-3,3)$, $C(1,-1)$; *б)* $A(-6,2)$, $B(-1,-2)$, $C(-8,-6)$.

△ **627.** Одредити координате тачака које дуж AB деле на четири једнака дела, ако је $A(-6,1)$, $B(2,-11)$.

△ **628.** Дате су координате средишта S дужи AB и једна крајња тачка дужи. Одредити координате непознатог краја дужи, ако је

а) $A(7,5)$, $S(12,9)$; *б)* $S(-6,5)$, $B(-1,2)$;
в) $S(-1,4)$, $B(4,3)$; *г)* $A(2,2)$, $S\left(-\frac{3}{2},0\right)$.

△ **629.** Тачке M, N и P су средиште редом страница AB, BC, CA троугла ABC. Одредити координате темена троугла, ако је
а) $M(7,8)$, $N(-4,5)$, $P(1,-4)$; *б)* $M(-4,6)$, $N(2,-6)$, $P(0,-4)$.

630. Одредити непозната темена паралелограма $ABCD$, ако је:
а) $A(2,4)$, $B(-3,7)$, $C(-6,6)$; *б)* $A(-6,-4)$, $B(-4,8)$, $C(-1,5)$;
в) $A(-1,3)$, $B(0,3)$, $C(3,5)$; *г)* $A(-3,0)$, $B(2,-1)$, $D(0,5)$;
д) $A(-2,-3)$, $B(1,-1)$, $S(-1,2)$, где је S пресечна тачка дијагонала.

631. Наћи дужину дијагонале AC паралелограма $ABCD$, ако:
а) $A(3,0)$, $B(5,-3)$, $D(13,8)$; *б)* $B(3,4)$, $C(1,1)$, $D(11,14)$.

632. Доказати да су тачке: $A(5,1)$, $B(4,4)$, $C(-2,2)$ темена правоугаоника. Одредити координате тачке D.

633. Проверити да ли је четвороугао $ABCD$ или $ABDC$ трапез, па израчунати дужину дужи чији су крајеви средишта основица трапеза, ако је:
а) $A(5,-2)$, $B(1,-6)$, $C(1,3)$, $D(-1,1)$;
б) $A(0,3)$, $B(-3,8)$, $C(-1,2)$, $D(6,-6)$.

634. Дат је четвороугао $ABCD$, тако да је: $A(-7,-6)$, $B(7,-4)$, $C(3,2)$, $D(-5,0)$. Одредити координате средишта страница AB, BC, CD, DA, редом тачке M, N, P, Q. Уверити се да је четвороугао $MNPQ$ паралелограм.

635. Дата су два темена $A(3,6)$ и $B(-3,5)$ троугла ABC. Одредити координате темена C, ако средишта страница AC и BC припадају различитим координатним осама.

△ **636.** На датој дужи AB одредити тачку C која дуж AB дели у датој размери:
а) $A(2,-4)$, $B\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$, $AC:CB=3:7$; *б)* $A(2,5)$, $B(6,9)$, $AC:CB=1:3$;
в) $A(1,3)$, $B(-2,-3)$, $AC:CB=1:5$; *г)* $A(4,-2)$, $B(-1,8)$, $AC:CB=3:2$.

△ **637.** На дужи AB одредити тачке M и N, које дату дуж деле на три једнака дела.
а) $A(-4,8)$, $B(2,2)$; *б)* $A(4,7)$, $B(7,1)$.

△ **638.** На дужи AB наћи тачке P и Q, које деле дату дуж у датој продуженој размери

а) $A(4,-3)$, $B(9,17)$, $AP:PQ:QB=6:3:1$;
б) $A(-2,9)$, $B(16,3)$, $AP:PQ:QB=5:3:4$.

639. Тачке A, B, C су колинеарне. Одредити непознате координате једне тачке ако је дато:
а) $A(-2,4)$, $C\left(-\frac{4}{7},4\right)$, $AC:CB=2:5$;
б) $A(-4,7)$, $B(1,-1)$, $AC=3AB$ и $B\in AC$;
в) $B(-2,-6)$, $C(-5,6)$, $AB=\frac{4}{3}BC$ и $C\in AB$.

△ **640.** На датој дужи AB одредити тачку P, ако:
а) $A(1,-1)$, $B(4,5)$, тачка P има ординату 1;
б) $A(-4,2)$, $B(3,16)$, апсциса тачке P је 1;
в) $A(1,3)$, $B(5,-1)$, тачка P је пресек са осом Ox.

△ **641.** Дат је троугао ABC, и то: $A(3,3)$, $B(0,-1)$, $C(3,1)$. Одредити тачку M у којој симетрала угла BAC сече наспрамну страницу.

642. Дате су тачке $A(-1,-1)$, $B(2,5)$ и $M(5,1)$. Одредити координате подножја N, нормале из M на AB. (Користити чињеницу да је нормала најкраће растојање од тачке до праве.)

643. Дата су темена трапеза $ABCD$, и то: $A(-2,-3)$, $C(3,1)$, $D(1,4)$, $AB\parallel CD$. Одредити координате тачке B, ако је $AB=5CD$.

△ **644.** Израчунати површину троугла ABC, односно четвороугла $MNPQ$, ако је:
а) $A(2,-3)$, $B(1,1)$, $C(-6,5)$; *б)* $A(-2,4)$, $B(-6,8)$, $C(5,-6)$;
в) $M(1,-2)$, $N(2,3)$, $P(-1,4)$, $Q(-3,-1)$;
г) $M(-2,1)$, $N(4,2)$, $P(2,8)$, $Q(0,6)$.

△ **645.** Дата су темена основице AB једнакокраког троугла ABC, чија је површина $P=5$. Одредити координате темена C, ако је $A(2,-2)$, $B(6,0)$.

646. Дата су темена троугла ABC. Одредити тражену висину.
а) $A(0,0)$, $B(-1,7)$, $C(7,1)$, $h_A=?$ *б)* $A(3,6)$, $B(-1,3)$, $C(2,-1)$, $h_C=?$
в) $A(-3,4)$, $B(-4,1)$, $C(-1,2)$, тражи се највећа висина.

△ **647.** Доказати да су тачке A, B и C колинеарне:
а) $A(2,-6)$, $B(0,0)$, $C(-1,3)$; *б)* $A(1,3)$, $B(4,-3)$, $C(-2,9)$;
в) $A(4,7)$, $B(0,-3)$, $C(-2,-8)$; *г)* $A(1,8)$, $B(-2,-7)$, $C(-4,-17)$.

648. Доказати да дате тачке припадају једној правој
а) $A(6,1)$, $B(-2,9)$, $C(5,2)$, $D(-5,12)$;
б) $A(3,3)$, $B(0,5)$, $C(-3,7)$, $D(-9,11)$, $E(6,1)$.

649. Да ли дате тачке представљају темена троугла:
а) $A(0,2)$, $B(-1,3)$, $C(5,5)$; *б)* $M(-1,1)$, $N(5,-1)$, $P(-4,2)$;
в) $K\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{6}\right)$, $L\left(-2,-\frac{8}{3}\right)$, $M\left(\frac{4}{9},1\right)$?
У случају троугла израчунати његову површину.

650. Да ли дате тачке одређују четвороугао:
а) $A(3,-1)$, $B(1,2)$, $C(-1,1)$, $D(1,-2)$;
б) $K(1,4)$, $L(3,-2)$, $M(-1,10)$, $N(0,7)$;
в) $P(1,-5)$, $Q(4,1)$, $R(-2,4)$, $S(6,0)$?
У случају четвороугла израчунати његову површину.

6.2 ПРАВА У РАВНИ

Скуп тачака (x, y) у координатној равни, којем одговара линеарна једначина по x и y, је *права*.

Основни облик једначине праве (*имплицитни* облик) је

$Ax + By + C = 0$, где је $|A| + |B| \neq 0$ (*општи* облик једначине праве.)

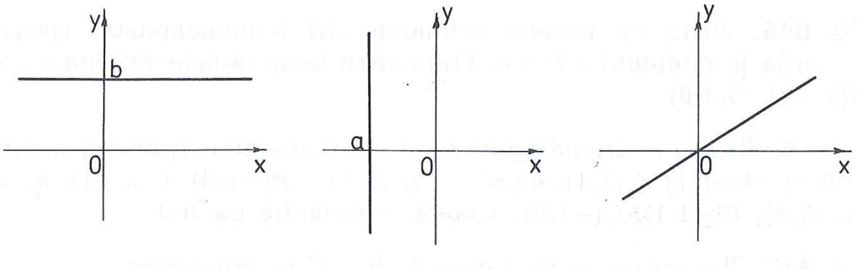
Ако је $A = 0$ и $C = 0$, једначина се своди на $y = 0$ – то је оса Ox.

Ако је $B = 0$ и $C = 0$, добијамо: $x = 0$ – то је оса Oy.

За $A = 0$, једначина добија облик: $y = b$, то је права паралелна оси Ox, сл. лево.

За $B = 0$, једначина гласи: $x = a$, то је права паралелна са осом Oy, сл. у средини.

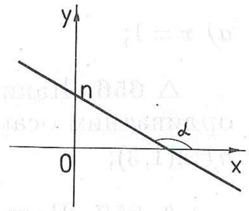
За $C = 0$ и $B \neq 0$, једначина има облик: $y = kx$, то је коса права кроз координатни почетак, сл. десно.



Тзв. *експлицитни* облик (решен по y) је:

$y = kx + n$ (главни – експлицитни облик једначине праве.)

Број $-\dfrac{A}{B} = k$, $B \neq 0$, је:



$k = \operatorname{tg}\alpha$ (коефицијент правца праве)

(α је угао који је одређен правом и позитивним делом осе Ox.)

Број n је одсечак праве на оси Oy.

Коефицијент k одређује следеће особине правих:

$k_1 = k_2$ (услов паралелности две праве)

$k_1 \cdot k_2 = -1$ (услов нормалности две праве)

$tg\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$ (угао између две праве (оштар угао))

Вектор $\vec{n} = (A, B)$ је *нормални вектор* праве $Ax + By + C = 0$ (видети решење задатка 680).

Две праве се секу ако је $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$. Једначине правих дефинишу систем једначина:

$$\left.\begin{array}{r} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Решење овог система даје координате пресечне тачке.

△ **651.** Истаћи особености у положају дате праве у координатном систему:
а) $2x - 5y = 0$; *б)* $3x - 2 = 0$; *в)* $5x = 0$; *г)* $7y + 12 = 0$;
д) $-4y + 7 = 0$; *ђ)* $-x - 11 = 0$; *е)* $x + y = 0$; *ж)* $-13y = 0$.

△ **652.** Написати у експлицитном облику једначине правих:
а) $4x - 3y + 12 = 0$; *б)* $2x + 4y = 0$; *в)* $x + 3y - \dfrac{1}{2} = 0$;
г) $\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{6}y + 1 = 0$; *д)* $x - ay - 1 = 0$; *ђ)* $ax - \dfrac{1}{a}y + \dfrac{1}{a} = 0$, $a \neq 0$.

△ **653.** Дате су праве: (p_1) $2x + y - 3 = 0$, (p_2) $x + y - 2 = 0$, (p_3) $y = -3x$, (p_4) $3x - y - 6 = 0$ и тачке $A(2, -6)$, $B(-1, -1)$, $C(1, 1)$, $D(2, 0)$, $E(3, -3)$. Која од датих тачака припада некој од датих правих?

△ **654.** Одредити координате тачака у којима дата права сече координатне осе
а) $x + y = 0$; *б)* $2x - y + 10 = 0$; *в)* $x + 6y + 4 = 0$.

△ **655.** На правој $3x - 2y - 3 = 0$ одредити тачку чије координате задовољавају дати услов:

а) $x = 1$; *б)* $y = -3$; *в)* $C(2, y)$; *г)* $D(x, 2x)$.

△ **656.** Написати једначине правих које су паралелене са координатним осама и садрже тачку:
а) $A(1, 3)$; *б)* $B(-2, 1)$; *в)* $C(0, -10)$.

△ **657.** Написати једначину праве која пролази кроз координатни почетак и са позитивним смером осе Ox одређује угао:
а) $45°$; *б)* $60°$; *в)* $135°$; *г)* $150°$.

△ **658.** Одредити углове α и β под којим дата права сече редом осе x и y. (*Пазите:* Пресечни угао двеју правих је *оштар* угао!)
а) $y = x + 3$; *б)* $2x + 2y - 5 = 0$; *в)* $x + y\sqrt{3} - 2 = 0$; *г)* $3x - y\sqrt{3} + 2 = 0$.

△ **659.** Од правих датих једначинама:
а) $x - 5y + 7 = 0$; *б)* $2x + y - 1 = 0$; *в)* $3x - y + 5 = 0$;
г) $3x - 15y + 4 = 0$; *д)* $x + 3y - 1 = 0$; *ђ)* $x - 2y + 8 = 0$,
изабрати парове паралелних и парове нормалних правих.

△ **660.** Одредити вредност параметра m, тако да права $2x - y + 3 = 0$ буде паралелна правој
а) $2x + my - 3 = 0$; *б)* $mx - y + 1 = 0$; *в)* $(1 - m)x + (m + 1)y - 4 = 0$.

△ **661.** Одредити параметар a тако да су дате праве нормалне:
а) $3x + 2ay + 4 = 0$ и $4x - 3y - 5 = 0$;
б) $9x + 3ay - 2 = 0$ и $ax - (a + 2)y + 1 = 0$.

△ **622.** Написати једначину симетрале угла одређеног правом $y = x\sqrt{3}$ и осом Ox.

△ **663.** За коју је вредност параметра m права $mx - 3y + 6 = 0$:
а) паралелна правој $2x + 2y + 3 = 0$;
б) нормална на праву $x - 2y - 1 = 0$;
в) нагнута према оси Ox под углом од $60°$?

△ **664.** За коју вредност параметра p права $px + (3 - p)y + 2 = 0$
а) пролази кроз тачку $A(2, -6)$;
б) паралелна је правој $x + 5y - 7 = 0$;
в) нормална је на праву $2x - y + 1 = 0$?

△ **665.** Израчунати угао између правих:
а) $2x + y - 2 = 0$ и $3x - y + 3 = 0$; *б)* $x - 2y + 4 = 0$ и $x + 3y - 1 = 0$;
в) $3x - 2y + 1 = 0$ и $2x + 3y + 5 = 0$; *г)* $5x - y + 12 = 0$ и $3x + 2y + 1 = 0$;
д) $3x + 5y - 7 = 0$ и $x - y + 5 = 0$; *ђ)* $3x + y - 7 = 0$ и $x - y + 4 = 0$;
е) $(3 + \sqrt{2})x + (\sqrt{6} - \sqrt{3})y + 7 = 0$ и $x\sqrt{2} - y\sqrt{3} - 5 = 0$.

666. Дате су три паралелне праве: $x+5y-4=0$, $2x+10y-1=0$ и $x+5y+3=0$. која од њих се налази између остале две?

667. Дате су тачке $A(3,1)$ и $B(-2,-9)$. Наћи једначину праве, која садржи координатни почетак и дуж AB дели у размери $2:3$.

668. Дата је дуж AB и права $x-y+5=0$. Под којим углом и у којој тачки се секу дата права и права која пролази кроз координатни почетак и средиште дате дужи AB, ако је $A(1,-3)$ и $B(7,1)$?

$\triangle$ **669.** Одредити унутрашње углове троугла ABC, ако су странице троугла дате једначинама.
а) $AB: 2x-y-5=0$, $BC: x-3y-5=0$, $CA: 2x+3y-6=0$;
б) $AB: x+2y+1=0$, $BC: x-y=0$, $CA: x+y=0$.

$\triangle$ **670.** Одредити вредност реалног параметра m, тако да се две дате праве секу под углом од $45°$.
а) $3x+2y-1=0$ и $mx-y+2=0$; *б)* $5x+2my+5=0$ и $x-3y=0$.

$\triangle$ **671.** Написати једначину симетрале дужи AB, ако је
а) $A(-1,3)$, $B(3,1)$; *б)* $A(1,0)$, $B(3,-2)$.

$\triangle$ **672.** Одредити координате темена троугла ABC, односно четвороугла $KLMN$, ако су му дате једначине страница:
а) $AB: x-3y-1=0$, $BC: 2x+5y-13=0$, $CA: 4x-y+7=0$;
б) $KL: 2x+y-3=0$, $LM: 2x-3y-15=0$, $MN: 2x+y+5=0$, $NK: 2x-3y+9=0$.

$\triangle$ **673.** На правој $3x+4y-14=0$ наћи тачку једнако удаљену од тачака $A(-1,6)$ и $B(2,-3)$.

$\triangle$ **674.** У једначини праве $12x+ky-60=0$ одредити k, тако да координатне осе одсецају од ње дуж AB, која има дужину 13.

$\triangle$ **675.** Троугао ABC има површину 4 и темена $A(-1,4)$ и $B(0,5)$. Одредити координате темена C, које лежи на правој $2x+y-4=0$.

676. Да ли праве $2x-3y-1=0$, $4x-5y-3=0$ и $x+y-3=0$ пролазе кроз једну тачку?

677. Одредити параметар m, тако да се праве: $mx+(2m+3)y+m+6$ и $(2m+1)x+(m-1)y+m-2=0$ секу у тачки на оси Oy.

678. Наћи праву која сече праве: $x+y+3=0$ и $2x-y-5=0$ у тачкама A и B, тако да је тачка $M(1,1)$ средиште дужи AB.

679. На правој $2x-y-10=0$ наћи тачку, тако да је збир квадрата њених растојања од тачака $M(-5,0)$ и $N(-3,4)$ минималан.

$\triangle$ **680.** Доказати да је вектор $\vec{n}=(A,B)$ нормалан на праву $Ax+By+C=0$.

6.2.1 НЕКИ ОБЛИЦИ ЈЕДНАЧИНЕ ПРАВЕ

Према једној аксиоми геометрије, права је одређена са две различите тачке. Нека су то тачке $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$. Свака тачка $P(x,y)$, која припада правој AB, има особину да је површина „троугла“ ABP једнака нули. Користећи се овом чињеницом добијамо

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{(једначина праве кроз две тачке)}$$

односно: $x(y_1-y_2)+y(x_2-x_1)+x_1y_2-x_2y_1=0$.

Ако је $x_1=x_2$ добијамо једначину $x=a$.

Ако је $y_1=y_2$ имамо једначину $y=b$.

Ако је $x_1\neq x_2$ једначина се своди на

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \qquad \text{(једначина праве кроз две тачке)}$$

Ова једначина може да се представи и у облику $y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x+\dfrac{x_2y_1-x_2y_2}{x_2-x_1}$. Поредећи је са експлицитним обликом, увиђамо да је коефицијент правца $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Одавде добијамо једначину праве кроз дату тачку (x_1,y_1):

$$y-y_1=k(x-x_1)$$

Наиме, све праве које садрже тачку $A(x_1,y_1)$ имају овај облик једначине (осим праве $x=x_1$), у којем k узима разне вредности.

Ако је тачка $P(x_1,y_1)$ дата као пресек две праве:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{aligned}\right\} \; P(x_1,y_1)$$

тада имамо једначину

$$m(A_1x+B_1y+C_1)+n(A_2x+B_2y+C_2)=0, \quad |m|+|n|\neq 0 \text{ (прамен правих)}$$

Ово је скуп правих које садрже пресечну тачку двеју датих правих (m и n узимају разне вредности).

Осим тога имамо и следеће облике једначине праве

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1,\quad m\cdot n\neq 0 \qquad \text{(сегментни облик једначине праве)}$$

где су m и n редом апсциса, односно ордината пресечних тачака праве са одговарајућим координатним осама.

Ако је дат вектор $\vec{p}=(a,b)$, $|a|+|b|\neq 0$, паралелан са правом p (вектор правца) и тачка $P(x_1,y_1)$ те праве, тада је сваки вектор праве p паралелан вектору $\vec{p}$, па добијамо једначину:

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b} \qquad \text{(канонични облик једначине праве) *)}$$

Уводећи параметар t, такав да је $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=t$, добијамо

$$\begin{aligned} x&=x_1+at\\ y&=y_1+bt \end{aligned} \qquad \text{(параметарски облик једначине праве)}$$

где се координате тачака праве p добијају варирањем вредности реалног параметра t.

Вектор правца $\vec{p}$, за $a\neq 0$, можемо написати у облику: $\vec{p}=(a,b)=a\left(1,\dfrac{b}{a}\right)=a(1,k)$. Узимајући да је $\vec{p}=(1,k)$, канонични облик једначине прелази у једначину праве кроз дату тачку.

△ **681.** Написати једначину праве AB, ако су дате тачке:
а) $A(1,1)$, $B(3,7)$; *б)* $A(-3,1)$, $B(4,-2)$; *в)* $A(-3,1)$, $B(-3,4)$.

△ **682.** Дата су темена троугла. Написати једначине страница
а) $A(3,-5)$, $B(-1,-1)$, $C(4,0)$; *б)* $A(1,-1)$, $B(3,5)$, $C(-7,11)$.

△ **683.** Темена троугла су: $A(8,6)$, $B(6,4)$, $C(-2,14)$. Наћи једначине тежишних линија и уверити се да се оне секу у једној тачки.

△ **684.** Сваку од датих правих написати у сегментном облику:
а) $x-y-1=0$; *б)* $x-y+1=0$; *в)* $5x-y+20=0$;
г) $3x-2y+12=0$; *д)* $x-4y+8=0$; *ђ)* $4x+9y+6=0$.

△ **685.** Одсечак праве између координатних оса је преполовљен тачком $A(1,3)$. Колика је површина троугла којег она одређује са координатним осама?

△ **686.** Написати једначину праве која пролази кроз тачку $N(6,-1)$ и са координатним осама одређује троугао површине $P=3$.

*) Може бити $a=0$ или $b=0$. Одговарајуће једначине правих су $x=x_1$ у првом и $y=y_1$ у другом случају.

△ **687.** Кроз тачку $P(0,1)$ поставити праву, која је према оси Ox нагнута под углом:
а) 45°; *б)* 60°; *в)* 120°; *г)* 135°.

△ **688.** Написати једначину праве која пролази кроз дату тачку и паралелна је датој правој p:
а) $A(2,-6)$, p: $y=2x+7$; *б)* $B(-5,1)$, p: $3x-y-1=0$;
в) $V(2,5)$, p: $3x-4y=0$; *г)* $G(2,-3)$, p: $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$.

△ **689.** Кроз дату тачку M поставити нормалу на праву q:
а) $M(5,-1)$, q: $3x-7y-1=0$; *б)* $M(-3,2)$, q: $7x+4y=0$;
в) $M(0,0)$, q: $3x-2y+1=0$; *г)* $M(8,-1)$, q: $x-3y-3=0$.

△ **690.** Написати једначину праве, која пролази кроз тачку A и сече праву m под углом од 45°:
а) $A(3,3)$, m: $y=4x-1$; *б)* $A(-1,3)$, m: $3x+2y+2=0$.

△ **691.** На датој правој p наћи тачку P, најближу датој тачки M, ако је:
а) $M(2,-2)$, p: $x+y+2=0$; *б)* $M(2,-1)$, p: $3x-y+3=0$;
в) $M(1,2)$, p: $x+3y+3=0$.

692. Датој тачки A наћи тачку B, симетричну у односу на дату праву s:
а) $A(1,3)$, s: $x-3y+3=0$; *б)* $A(2,-3)$, s: $x+2y+1=0$.

693. Светлосни зрак пролази кроз тачке $A(4,6)$ и $B(5,8)$, пада на праву $x-2y+2=0$ и одбија се од праве. Наћи једначину одбијеног зрака.

694. Светлосни зрак полази из тачке $A(1,2)$, одбија се од праве $3x-y+5=0$ и пролази кроз тачку $B(7,8)$. Написати једначине упадног и одбојног зрака.

695. Дате су тачке A и B и права p. Светлосни зрак пролази кроз тачку A, одбија се од дате праве и пролази кроз тачку B. Наћи једначине ова два зрака, ако је:
а) $A(1,1)$, $B(2,3)$, p: $x+y+1=0$; *б)* $A(1,2)$, $B(-1,3)$, p: $x+5y+1=0$.

△ **696.** Кроз пресечну тачку правих $2x+5y+8=0$ и $3x-4y-6=0$, поставити праву која:
а) сече осу Oy у -4; *б)* пролази кроз тачку $(1,-1)$;
в) паралелна је оси Ox; *г)* паралелна је правој $x-y-3=0$;
д) сече праву $4x-y+3=0$ под углом од 45°.

697. Једначина $(3m+2)x-(m-1)y+m+4$, $m\in R$, представља скуп правих. (За разне вредности m, добијамо различите праве.) Доказати да се све ове праве секу у једној тачки. Одредити координате ове тачке.

698. Дат је вектор $\vec{p}$ и тачка A. Написати једначину праве која садржи тачку A и паралелна је вектору $\vec{p}$, ако је:

а) $\vec{p} = (2, -3)$, $A(1, 0)$; *б)* $\vec{p} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, $A(-2, 2)$.

в) $\vec{p} = (0, 2)$, $A(3, -3)$; *г)* $\vec{p} = (-1, 0)$, $A(3, 0)$.

699. Дата је тачка M и вектор $\vec{m}$. Написати у параметарском облику једначину праве m, која садржи тачку M и паралелна је вектору $\vec{m}$, ако је:

а) $M(2, -3)$. $\vec{m} = (-1, 2)$; *б)* $M(0, 0)$, $\vec{m} = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$;

в) $M(3, 1)$, $\vec{m} = (0, 2)$; *г)* $M(-3, 0)$ $\vec{m} = \overrightarrow{AB}$, $A(2, -1)$, $B(0, 3)$.

△ **700.** Дата је права p једначином у параметарском облику: $x = -1 + t$, $y = 2 - 3t$.
а) Наћи пресечну тачку праве q: $2x - y - 1 = 0$ и праве p.
б) Написати једначину праве m, која садржи тачку $M(-2, 0)$ и паралелна је са p, у главном облику $(y = kx + n)$.
в) Написати једначину праве n, која садржи тачку $N(2, 2)$ и нормална је на p.
г) Одредити нормалну пројекцију тачке $A(10, -1)$ на правој p.

701. Написати једначине страница троугла ABC, ако су:
а) једначине двеју висина: $2x - 3y + 1 = 0$ и $x + y = 0$ и $A(1, 2)$;
б) једначине двеју висина: $x - 2y - 3 = 0$ и $x + 4y - 17 = 0$ и једначина странице AB: $x - y - 2 = 0$;
в) темена $A(2, 1)$ и $B(4, 9)$ и ортоцентар $H(3, 4)$;
г) средишта страница: $M(1, 2)$, $N(7, 4)$ и $P(3, -4)$.

702. Кроз тачку $P(1, 2)$ поставити праву, која је једнако удаљена од тачака $M(2, 3)$ и $N(4, -5)$.

703. Одредити координате ортоцентра троугла ABC, ако су му задата темена $A(-8, 4)$, $B(-2, 1)$, $C(1, -3)$.

704. Дате су једначине двеју страница троугла: $x + y - 1 = 0$ и $y + 1 = 0$ и тежиште $T(-1, 0)$. Наћи једначину треће странице.

705. Одредити једначине страница троугла ABC, ако су му дате једначине: висине h_c: $2x + 3y - 11 = 0$, тежишне линије t_b: $4x - 5y + 3 = 0$ и странице BC: $x - 3y - 1 = 0$.

706. У троуглу ABC је дато теме $A(-2,5)$, једначина висине h_b: $2x-3y+11=0$ и тежишне линије t_c: $4x+5y-3=0$. Написати једначине страница троугла.

707. Одредити координате темена квадрата $ABCD$, ако је дато:
а) $A(2,1)$ и $C(4,5)$; *б)* $A(1,4)$ и $B(4,5)$;
в) $B(-3,-6)$ и једначина дијагонале AC: $2x+y+2=0$.

708. Једна дијагонала ромба је два пута већа од друге дијагонале. Краћа дијагонала је AC, где је $A(6,-4)$ и $C(-2,6)$. Одредити координате темена B и D.

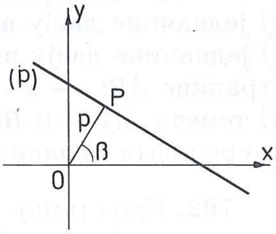
709. Нека су $x+3y-8=0$ и $2x+y+4=0$ једначине правих на којима леже страница AB и дијагонала AC ромба $ABCD$ и нека се тачка $E(-9,-1)$ налази на страници CD. Написати једначине правих које садрже остале странице.

710. На правој $x+y\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ одредити тачке A и B, тако да троугао OAB буде једнакостраничан. (O је координатни почетак.)

6.2.2 НОРМАЛНИ ОБЛИК ЈЕДНАЧИНЕ ПРАВЕ

Нека је $\overrightarrow{OP}$, $P\in p$, $P\neq O$, вектор нормалан на праву (p), (слика). Означимо са β угао који ова нормала одређује са позитивним делом осе Ox. Тада праву (p) можемо описати једначином:

$$x\cos\beta+y\sin\beta-p=0 \qquad \text{(нормални облик једначине праве)}$$



где је p, $p>0$, дужина нормале из координатног почетка на праву (p).

Очигледно су $\cos\beta$ и $\sin\beta$ координате јединичног вектора вектора $\overrightarrow{OP}$, тј. $\vec{p_0}=(\cos\beta,\sin\beta)$.

На основу задатка 680, долазимо до још једног облика једначине праве. Ако је $\vec{n}=(A,B)$ вектор нормалан на праву p и $P(x_0,y_0)$ тачка праве p, тада је за сваку тачку $M(x,y)$ праве p вектор $\vec{n}$ нормалан на $\overrightarrow{PM}$, па је $\vec{n}\cdot\overrightarrow{PM}=0$. Одавде добијамо:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \qquad \text{(векторска једначина праве)}$$

(Упоредите овај облик са општим обликом једначине праве.)

На основу овога, могуће је општи облик једначине праве, тј. облик: $Ax+By+C=0$, за $C\neq 0$, свести на нормални облик:

$$\frac{Ax+By+C}{-\operatorname{sgn}C\sqrt{A^2+B^2}}=0 \ ^{*)} \quad \text{(свођење једначине праве на нормални облик)}$$

*) $-\operatorname{sgn}C$ се узима зато што је $p>0$, па је $p=\frac{C}{\operatorname{sgn}C\sqrt{A^2+B^2}}$.

Ако је $M(x_0, y_0)$ тачка, која је од праве p удаљена за h, тада је једначина праве кроз M, паралелне са p: $x\cos\beta + y\sin\beta - (p+h) = 0$. Одавде је: $h = |x_0\cos\beta + y_0\sin\beta - p|$ или

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{(растојање тачке од праве)}$$

Користећи се чињеницом да су тачке симетрале угла једнако удаљене од кракова, добијамо једначине симетрала углова, одређених правим $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ (две симетрале):

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} \pm \frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}} = 0 \quad \text{(симетрале угла)}$$

△ **711.** Дате једначине правих свести на нормални облик:
а) $5x-12y+26=0$; *б)* $4x+3y-5=0$; *в)* $6x-8y+15=0$;
г) $x+3y-4=0$; *д)* $7x+y-8=0$; *ђ)* $x-y+6=0$.

△ **712.** Дата је тачка P и вектор $\vec{n}$. Написати једначину праве која садржи тачку P и нормална је на $\vec{n}$, ако је:
а) $P(0,-2)$, $\vec{n}=(-1,2)$; *б)* $P(2,2)$, $\vec{n}=(1,4)$; *в)* $P(3,-3)$, $\vec{n}=(0,2)$.

△ **713.** Написати једначину праве n, кроз дату тачку N, паралелну са датом правом p, ако је
а) $N(3,-1)$, p: $2x+3y+1=0$; *б)* $N(0,2)$, p: $x-2y+7=0$.

△ **714.** Израчунати растојање од координатног почетка до дате праве:
а) $3x+4y-10=0$; *б)* $x+y+4=0$; *в)* $2x+y-5=0$.

△ **715.** Наћи растојање дате тачке од дате праве:
а) $A(2,5)$, p: $6x+8y+3=0$; *б)* $B(3,2)$, q: $x-2y-4=0$;
в) $V(4,2)$, r: $4x-3y+10=0$; *г)* $G(0,-3)$, s: $5x-12y-23=0$.

△ **716.** Одредити праву, која пролази кроз тачку $A(-4,3)$, на растојању 5 од координатног почетка.

△ **717.** Кроз тачку A поставити праву p, која је од тачке B удаљена за 2, ако је:
а) $A(1,0)$, $B(-1,1)$; *б)* $A(-1,-1)$, $B(2,1)$.

△ **718.** Дате су једначине страница паралелограма: $x-y+1=0$, $x-y-3=0$, $3x-4y+6=0$, $3x-4y-7=0$. Израчунати дужине висина.

△ **719.** Наћи растојање између паралелних правих:
а) $3x+4y-12=0$ и $3x+4y+13=0$; *б)* $9x-3y+10=0$ и $9x-3y+5=0$;
в) $x+7y-5=0$ и $x+7y+10=0$; *г)* $5x-12y+26=0$ и $5x-12y-13=0$.

$\triangle$ **720.** Дата је права $4x+3y+1=0$. Наћи једначину праве која је паралелна са датом, на растојању 3 од ње.

721. Написати једначину праве, која је једнако удаљена од две дате праве:

а) $3x-4y+5=0$ и $6x-8y-25=0$; *б)* $2x-y+8=0$ и $4x-2y-1=0$.

$\triangle$ **722.** Наћи симетрале углова одређених датим правим:

а) $12x+9y-17=0$ и $3x+4y+11=0$; *б)* $4x+2y+7=0$ и $2x-4y+15=0$;
в) $x-3y+4=0$ и $3x+y-18=0$; *г)* $x-y+5=0$ и $y=7-x$;
д) $2x-y+1=0$ и $x+2y-12=0$; *ђ)* $x+y-6=0$ и $x-y-4=0$.

$\triangle$ **723.** На оси Ox одредити тачку једнако удаљену од правих $x+3y+6=0$ и $3x+y+2=0$.

$\triangle$ **724.** Написати једначину симетрале угла ACB троугла ABC, ако је: $A(0,0)$, $B(3,-1)$, $C(4,7)$.

725. Написати једначину симетрале најмањег угла у троуглу ABC, ако је: $A(3,4)$, $B(4,1)$, $C(1,2)$.

726. Одредити угао између правих које пролазе кроз тачку $A(7,1)$, на растојању 5 од координатног почетка.

727. Наћи једначину праве која је удаљена за 5 од координатног почетка и садржи пресечну тачку правих: $x+2y-11=0$ и $2x-y-2=0$.

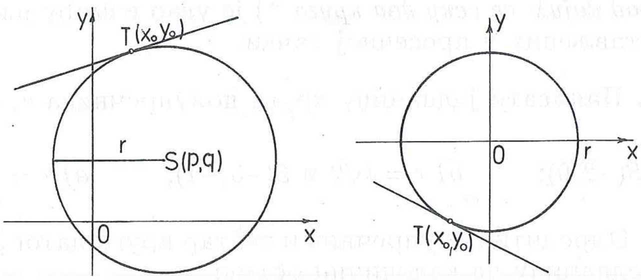
728. На правој $x+3y=0$ одредити тачку која је од координатног почетка удаљена колико и од праве $x-3y-10=0$.

729. Одредити тачку која је од праве $2x+y-3=0$ удаљена за $\sqrt{5}$, а једнако је удаљена и од тачака $A(4,-3)$ и $B(2,-1)$.

730. Једна страница квадрата је $x+3y-5=0$. Центар квадрата је $S(-1,0)$. Одредити једначине осталих страница квадрата.

6.3 КРУГ. КРУГ И ПРАВА

Круг са центром $S(p,q)$ и полупречником r има једначину:
$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ (једначина круга)



Ако је центар круга координатни почетак (слика горе десно) једначина круга има једноставан облик

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \text{(једначина круга)}$$

Тачка $P(x_1, y_1)$ је *у кругу* ако је $x_1^2 + y_1^2 < r^2$, односно ако је $(x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 < r^2$, а *ван круга* ако је $x_1^2 + y_1^2 > r^2$, односно ако је $(x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 > r^2$.

Горње две једначине су у тзв. каноничном облику. Општа једначина круга има облик:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \qquad \text{(општа једначина круга)}$$

који се лако своди на канонични облик.

Тангента круга је права која са кругом има тачно једну заједничку тачку. Ако је њена једначина облика $y = kx + n$, тада параметри k, n, p, q, r задовољавају следећи услов:

$$r^2(k^2 + 1) = (kp - q + n)^2 \qquad \text{(услов додира праве и круга)}$$

У случају $x^2 + y^2 = r^2$, тј. кад је $p = q = 0$, имамо:

$$r^2(k^2 + 1) = n^2 \qquad \text{(услов додира, ако је } p = q = 0\text{)}$$

Ако је $T(x_0, y_0)$ додирна тачка круга и тангенте, тада једначина тангенте има облик:

$$(x_0 - p)(x - p) + (y_0 - q)(y - q) = r^2 \qquad \text{(тангента круга у тачки } T(x_0, y_0)\text{)}$$

или $x_0 x + y_0 y = r^2$

Ако тангенте t_1 и t_2 круга, са додирним тачкама T_1 и T_2, имају заједничку тачку A, онда се тај круг из тачке A *види под углом* $\varphi = \sphericalangle T_1 A T_2$.

Угао под којим се секу нека права p и круг јесте угао између праве p и тангенте t датог круга, постављеној у тачки пресека.

Угао под којим се секу два круга *) је угао између њихових тангенти, постављених у пресечној тачки.

△ **731.** Написати једначину круга полупречника r, са центром S, ако је
а) $r = 3$ и $S(-2, 0)$; *б)* $r = 3\sqrt{2}$ и $S(-5, -1)$; *в)* $r = \frac{2}{3}$ и $S(0, 2)$.

△ **732.** Одредити полупречник и центар круга датог једначином и свести једначину на канонични облик:
а) $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$; *б)* $x^2 + y^2 + x - 2y - 1 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0$; *г)* $9x^2 + 9y^2 - 6x + 12y - 31 = 0$;
д) $x^2 + y^2 + 10y = 144$; *ђ)* $x^2 + y^2 = 0$.

△ **733.** У каквом је положају свака од датих тачака у односу на круг $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$: $A(2, 5)$, $B(4, 6)$, $C(3, 5)$, $D(-1, -2)$, $E(1, 2)$, $F(0, 2)$, $G(2, 4)$?

△ **734.** Дат је круг: $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$ и праве: p: $2x - y + 6 = 0$, q: $3x - 4y - 6 = 0$ и r: $3x + 2y + 7 = 0$. Утврдити положаје правих p, q, r, према датом кругу.

△ **735.** Одредити међусобни положај два дата круга:
а) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 16$ и $(x+3)^2 + (y+5)^2 = 10$;
б) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$ и $(x+5)^2 + (y-4)^2 = 16$;
в) $x^2 + y^2 = 25$ и $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$;
г) $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$ и $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$.

△ **736.** Написати једначину круга коме је дат центар S и тачка M (на кругу), ако је:
а) $S(2, 4)$, $M(4, -1)$; *б)* $S(0, 0)$, $M(-1, 7)$; *в)* $S(1, -3)$, $M(0, 0)$.

△ **737.** Написати једначину круга чији је пречник дата дуж AB:
а) $A(-5, 2)$, $B(1, 4)$; *б)* $A(1, -1)$, $B(-1, -5)$.

△ **738.** Одредити круг полупречника 3, који садржи тачку $A(0, 2)$ и додирује осу Oy.

△ **739.** Написати једначину круга који у координатном почетку:
а) додирује осу Ox и пролази кроз тачку $N(0, 10)$;
б) додирује осу Oy и пролази кроз тачку $M(-12, 0)$.

△ **740.** Одредити једначину круга који додирује дати круг k, ако му је дат центар S, ако је:
а) k: $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ и $S(5, 4)$; *б)* k: $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ и $S(2, 4)$;
в) k: $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 39 = 0$ и $S(2, -1)$.

*) Тако се дефинише и угао између било које две криве.

△ **741.** Наћи једначину круга са центром C, који додирује дату праву p:
а) $C(3,2)$, p: $3x+y-4=0$; *б)* $C(-4,2)$, p: $3x+4y-16=0$;
в) $C(0,0)$, p: $4x-2y+5=0$; *г)* $C(2,2)$, p: $y=2x+3$.

△ **742.** Одредити једначину круга полупречника 2, са центром на правој $y=2x$, који додирује осу Ox.

743. Написати једначину круга полупречника 5, који садржи тачку $A(2,-1)$ и на оси Ox одсеца тетиву дужине 8.

744. Написати једначину круга уписаног у троугао, чија је једна страница на оси Ox, друга је на правој $3x-4y+36=0$, а трећа је симетрична другој у односу на осу Oy.

△ **745.** Како изгледа једначина круга који садржи тачке A и B, а центар му је на датој правој, ако:
а) $A(1,3)$, $B(3,5)$, дата права је оса Oy;
б) $A(0,-2)$, $B(1,1)$, дата права је оса Ox;
в) $A(1,6)$, $B(3,-2)$, дата права је $x-y+3=0$;
г) $A(0,0)$, $B(-1,-1)$, дата права је $x-y+1=0$?

746. Написати једначину круга описаног око троугла ABC:
а) $A(0,1)$, $B(2,0)$, $C(3,-1)$; *б)* $A(2,1)$, $B(2,-3)$, $C(5,0)$;
в) $A(2,5)$, $B(-6,1)$, $C(3,-2)$; *г)* $A(2,2)$, $B(4,6)$, $C(8,8)$.

747. Дате су једначине страница троугла: $2x+y-1=0$, затим: $x-2y+7=0$ и $3x-y+11=0$. Одредити једначину описаног круга.

748. Написати једначину круга који у тачки $T(2,1)$ додирује праву $2x+y-5=0$ и додирује праву $2x+y+15=0$.

749. Круг додирује праву $x+y-2=0$ у тачки $T(1,1)$ и садржи тачку $A(4,0)$. Како гласи једначина овог круга?

750. Одредити једначину круга који додирује праву $5x+12y-10=0$, а центар му је заједничка тачка правих $3x-4y+11=0$ и $5x+7y-50=0$.

751. Круг са центром $S(3,-1)$ одсеца на правој $2x-5y+18=0$ тетиву дужине 6. Наћи једначину овог круга.

752. Дата је права $3x-4y+24=0$. Одредити на оси Ox центар круга, који има полупречник $r=5\sqrt{10}$ и на датој правој одсеца тетиву дужине 10.

∗ **753.** Кроз тачку $M(6,1)$ постављена је нормала на праву $y=$

$7x+9$. Подножје нормале је тачка N. Наћи једначину круга који садржи тачке M и N и додирује осу Ox.

△ **754.** Наћи координате пресечне тачке праве и круга, односно двају кругова:
а) $y=2x+2$ и $(x-1)^2+(y-2)^2=8$;
б) $x-y-1=0$ и $(x-2)^2+(y-2)^2=13$;
в) $(x-8)^2+(y-10)^2=49$ и $(x+4)^2+(y-5)^2=36$;
г) $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ и $(x-5)^2+(y+1)^2=16$.

755. Права $3x+y-4=0$ одсеца од круга са центром $S(7,3)$ лук са централним углом од $120°$. Наћи једначину овог круга.

756. Из тачке $A(15,-5)$ повући сечицу на круг $x^2+y^2=50$, тако да се добије тетива дужине 10. Написати једначину сечице.

△ **757.** Наћи једначину тетиве датог круга k, која је датом тачком N преполовљена, ако је:
а) k: $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ и $N(3,0)$; *б)* k: $x^2+y^2=9$ и $N(2,1)$.

△ **758.** Написати једначину тангенте круга у датој тачки:
а) $x^2+y^2=25$ и $T(3,4)$; *б)* $x^2+y^2=10$ и $T(3,y>0)$;
в) $x^2+y^2-4x-2y=20$ и $T(x,5)$, $x<0$.

△ **759.** Дат је круг k и права p. Наћи једначину тангенте t ако:
а) k: $(x-2)^2+(y-4)^2=5$, p: $y=2x-3$ и $t \parallel p$;
б) k: $x^2+y^2+10x-2y+6=0$, p: $4x+2y-3=0$ и $t \parallel p$;
в) k: $(x-1)^2+(y+2)^2=5$, p: $3x-6y+5=0$ и $t \perp p$.

△ **760.** На датом кругу одредити тачку A најближу и тачку B најудаљенију од дате праве, ако је дато:
а) $(x-3)^2+(y+4)^2=5$ и $4x-2y-5=0$;
б) $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ и $3x+4y+34=0$.

△ **761.** Дат је круг k и права p. Наћи тангенте датог круга, које са правом p одређују угао од $45°$:
а) k: $x^2+y^2=13$ и p: $5x-y+2=0$;
б) k: $x^2+y^2=5$ и p: $x+2y+3=0$.

△ **762.** Одредити угао под којим се секу:
а) права $y=3x-1$ и круг $x^2+y^2-4x-1=0$;
б) кругови $x^2+y^2-6x-2y+2=0$ и $x^2+y^2-4x+4y+6=0$.

△ **763.** Наћи тангенте из дате тачке A на дати круг k. Под којим се углом види круг k из тачке A?
а) $A(0,0)$, k: $x^2+y^2-10x+2y+25=0$;

б) $A(-8,0)$, k: $x^2+y^2=16$; *в)* $A(8,8)$, k: $x^2+y^2=32$.

$\triangle$ **764.** *) Из дате тачке A повучене су тангенте на круг k. Наћи координате додирних тачака не одређујући тангенте, ако је:
а) $A(4,-1)$ и k: $x^2+y^2-2x-4=0$; *б)* $A(1,1)$ и k: $x^2+y^2+2y=0$;
в) $A(-2,6)$ и k: $x^2+y^2-2x-2y=0$.

$\triangle$ **765.** Дискутовати положај праве p у односу на дати круг, у зависности од вредности реалног параметра (k или n), ако је:
а) p: $y=kx$ и $x^2+y^2-10x+16=0$; *б)* p: $y=kx$ и $(x-3)^2+y^2=1$;
в) p: $y=x+n$ и $x^2+y^2-2x-2y+1=0$.

766. Из тачке $A(6,-8)$ повући тангенте на круг $x^2+y^2=25$. Израчунати растојање тачке A од оне тетиве круга која спаја додирне тачке M и N тангенти.

767. Одредити једначину круга који пролази кроз координатни почетак, а праве $3x-4y+8=0$ и $3x+4y+8=0$ су му тангенте.

768. Из које се тачке праве $x-y-4=0$ види круг $x^2+y^2=5$ под правим углом?

$*$ **769.** Кроз тачку $A(14,2)$ поставити праву p, која круг $(x-1)^2+(y-2)^2=13$ сече под углом од $45°$.

$*$ **770.** У тачки $A(1,0)$ круга $x^2+y^2=1$ постављена је тангента. Одредити на тој тангенти тачку T, тако да површина трапеза, образованог осама Ox и Oy, тангентом у тачки A и тангентом из тачке T, буде једнака k?

6.4 ЕЛИПСА. ЕЛИПСА И ПРАВА

Једначина елипсе (слика лево) је:

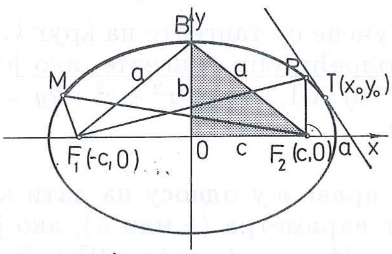
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ или } b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2. \quad \text{(једначина централне елипсе)}$$

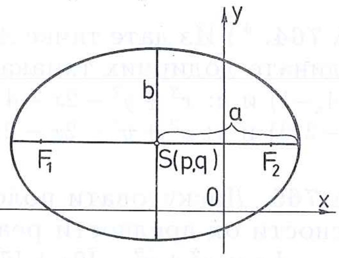
са центром симетрије $O(0,0)$. (Овде ће бити речи углавном о централној елипси, па реч „централна“ нећемо посебно истицати.) Ако је центар елипсе тачка $C(p,q)$ (слика десно), једначина елипсе гласи:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1 \qquad \text{(канонични облик једначине елипсе)}$$

*) Примена скаларног производа два вектора.

где су a и b полуосе елипсе. *) Полуоса a је паралелна оси Ox.





Тетива која садржи центар назива се *пречником* елипсе.

Тачке F_1 и F_2 су *жиже* елипсе. Жиже су на већој оси. За било коју тачку M елипсе важи једнакост: $F_1M + F_2M = 2a$. (Користимо и ознаке: $\rho_1 + \rho_2 = 2a$.)

Дуж која спаја жижу са произвољном тачком елипсе је *радијус* те тачке. Из осенченог троугла добијамо везу:

$$c^2 = a^2 - b^2 \qquad \text{(координате жижа елипсе)}$$

Истичемо још једну величину:

$$e = \frac{c}{a} \qquad \text{(ексцентрицитет елипсе)}$$

Ако је права $y = kx + n$ тангента елипсе, тада важи:

$$a^2k^2 + b^2 = n^2 \qquad \text{(услов додира праве и централне елипсе)}$$

Ако је права t тангента елипсе у тачки $T(x_0, y_0)$ која је на елипси, тада је једначина те тангенте:

$$\frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1 \qquad \text{(тангента у тачки } T(x_0, y_0) \text{ елипсе)}$$

Права кроз тачку $T(x_0, y_0)$, нормална на тангенту је нормала елипсе у тачки $T(x_0, y_0)$.

Угао под којим права сече елипсу је угао који та права одређује са тангентом у пресечној тачки.

Угао под којим се секу две елипсе је угао између њихових тангенти у једној пресечној тачки.

Тачка $M(x_1, y_1)$ је у елипси ако је $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} < 1$, а ако је $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} > 1$, тада је тачка M ван елипсе.

△ **771.** Одредити полуосе, жиже и ексцентрицитет елипсе:

а) $16x^2 + 9y^2 = 144$; *б)* $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; *в)* $x^2 + 16y^2 = 16$;
г) $25x^2 + 16y^2 = 1$; *д)* $4x^2 + 9y^2 = 144$; *ђ)* $x^2 + 4y^2 = 100$.

---

*) Већа оса се назива *фокалном*, због тога што су на њој жиже (фокуси).

△ **772.** Одредити центар, полуосе, жиже и ексцентрицитет елипсе:
а) $3x^2+4y^2-18x-40y+115=0$; *б)* $x^2+4y^2-4x-12=0$;
в) $9x^2+4y^2+54x-40y+145=0$; *г)* $4x^2+5y^2-24x+20y+36=0$.

△ **773.** Дата је елипса $x^2+4y^2=16$. Одредити положаје тачака $A(-1,4)$, $B(2,3)$, $C(0,5)$, $D\left(3,\dfrac{-\sqrt{7}}{2}\right)$, $E(2,-\sqrt{3})$, $F(2,-1)$ у односу на дату елипсу.

△ **774.** Дужина половине тетиве елипсе, која садржи жижу, нормална на већу полуосу, назива се *параметром* елипсе. Означава се са p. Израчунати параметар елипсе $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ (на сл. лево PF_2).

△ **775.** Написати једначину централне елипсе, ако је дато:
а) полуосе: $a=6$, $b=4$; *б)* $2c=10$ и већа оса $2a=16$ *);
в) $2c=10$, мања оса $2b=8$; *г)* $e=\dfrac{1}{2}$ и већа полуоса $a=12$;
д) $e=0,6$ и мања полуоса $b=8$; *ђ)* $a-b=1,5$ и $c=3\sqrt{2}$;
е) $b=5$ и $F_1(0,-4)$; *ж)* $e=0,8$ и $F_2(6,0)$;
з) $F_1(-3,0)$ и $e=0,6$; *и)* $p=4$ и $F_1M+F_2M=18$, M тачка елипсе.

△ **776.** Написати једначину елипсе, дате жиже и полуосе:
а) $F_1(-3,5)$, $F_2(3,5)$, већа полуоса 5;
б) $F_1(10,-8)$, $F_2(10,8)$, мања полуоса 6;
в) $F_1(6,5)$, $F_2(6,1)$, већа полуоса 2,5.

△ **777.** Елипса са жижом на оси Ox има ексцентрицитет $e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ и садржи тачку $A(3,-2\sqrt{3})$. Написати њену једначину.

△ **778.** Наћи једначину елипсе која додирује осу Oy у координатном почетку, са центром $S(5,0)$ и ексцентрицитетом $e=\dfrac{3}{5}$.

△ **779.** Одредити једначину елипсе која садржи две дате тачке:
а) $A(0,7)$ и $B(8,0)$; *б)* $M(5,-\sqrt{15})$ и $N(-\sqrt{10},3\sqrt{2})$.

△ **780.** Одредити координате пресечних тачака дате праве и дате елипсе.
а) $3x+2y-20=0$ и $x^2+4y^2=40$; *б)* $x+2y-7=0$ и $x^2+4y^2=25$;
в) $2x+y-10=0$ и $4x^2+9y^2=36$; *г)* $3x+10y-15\sqrt{5}=0$ и $9x^2+25y^2=225$.

△ **781.** Израчунати дужину тетиве коју дата права одсеца на датој елипси:
а) $3x-4y-12=0$ и $9x^2+16y^2=144$; *б)* $x-2y-4=0$ и $x^2+4y^2=16$.

△ **782.** Наћи тачке пресека елипса:
а) $2x^2+3y^2=12$, $3x^2+2y^2=12$; *б)* $x^2+12y^2=36$ и $x^2+3y^2=12$.

783. Кроз дату тачку A поставити тетиву дате елипсе, тако да A буде средиште тетиве, ако је:
а) $A(-2,-1)$ и $x^2+4y^2=12$; *б)* $A(1,1)$ и $5x^2+6y^2=30$.

784. Наћи темена и површину квадрата уписаног у елипсу:
а) $x^2+a^2y^2=a^2$; *б)* $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.

785. У елипсу $x^2+4y^2=4$ је уписан једнакостраничан троугао, чије је једно теме десни крај велике осе елипсе. Одредити координате остала два темена.

△ **786.** Написати једначину тангенте дате елипсе у датој тачки:
а) $A(2,-1)$ и $x^2+2y^2=6$; *б)* $B(-1,3)$ и $6x^2+y^2=48$;
в) $M(3,0)$ и $4x^2+9y^2=36$; *г)* $N(0,-5)$ и $2x^2+y^2=25$.

787. Тангенте елипсе, конструисане у крајевима једног пречника, паралелне су међу собом. Доказати.

△ **788.** Написати једначине тангенти дате елипсе, постављене из дате тачке:
а) $A(2,7)$ и $x^2+4y=100$; *б)* $B(6,1)$ и $3x^2+4y^2=48$;
в) $M(-16,9)$ и $25x^2+24y^2=600$; *г)* $N(-6,-1)$ и $x^2+4y^2=20$;

△ **789.** Наћи тангенте дате елипсе, паралелне правој p:
а) $x^2+4y^2=100$ и p: $2x-3y+1=0$; *б)* $4x^2+5y^2=120$ и p: $4x-2y+3=0$;
в) $x^2+9y^2=9$ и p: $x-3y-2=0$; *г)* $x^2+4y^2=1$ и p: $x+y-2=0$.

△ **790.** Наћи тангенте дате елипсе, нормалне на правој n:
а) $9x^2+16y^2=144$ и n: $x-y+3=0$; *б)* $x^2+20y^2=20$ и $x+2y-3=0$.

791. Дате су елипса $x^2+4y^2=20$ и права $x+y-n=0$. Одредити реалан параметар n, тако да дата права:
а) додирује дату елипсу; *б)* сече дату елипсу;
в) нема заједничких тачака са датом елипсом.

792. Датој правој p наћи најближу и најдаљу тачку на датој елипси, ако је:
а) p: $x+y+7=0$ и $x^2+4y^2=20$; *б)* p: $2x-3y+15=0$ и $4x^2+9y^2=72$.

793. Одредити угао под којим се секу:
а) права $2x-y+5=0$ и елипса $x^2+6y^2=10$;
б) елипсе $x^2+2y^2=2$ и $2x^2+y^2=2$.

794. Наћи заједничке тангенте елипси:

а) $x^2 + y^2 = 8$ и $x^2 + 3y^2 = 12$; *б)* $4x^2 + 5y^2 = 20$ и $5x^2 + 4y^2 = 20$;
в) $3x^2 + 4y^2 = 12$ и $5x^2 + 2y^2 = 10$.

795. Написати једначину централне елипсе која
а) додирује праву $x + y - 5 = 0$ и има велику осу $2a = 8$;
б) додирује праву $x + 4y - 10 = 0$ у тачки $A(2, 2)$;
в) додирује праве $x + y - 8 = 0$ и $x + 3y + 16 = 0$;
г) додирује праве $x + 6y - 20 = 0$ и $3x - 2y - 20 = 0$.

796. Права, која на координатним осама одређује једнаке сегменте, је тангента елипсе:
а) $9x^2 + 16y^2 = 144$; *б)* $11x^2 + 10y^2 = 440$.
Одредити једначину те праве.

797. Наћи тангенту елипсе $4x^2 + 9y^2 = 288$ која у првом квадранту са координатним осама одређује троугао површине 48.

798. Одредити ону тангенту елипсе $x^2 + 4y^2 = 20$ чији је одсечак између координатних оса преполовљен тачком додира.

799. Права $2x - y + C = 0$ је нормала елипсе $3x^2 + 4y^2 = 48$. Одредити параметар C.

∗ **800.** Дата је елипса $3x^2 + 4y^2 = 12$
а) Око елипсе описан је једнакостраничан троугао, тако да му једно теме припада позитивном делу осе Ox. Одредити једначине страница троугла.
б) У тачки $T(-1, y > 0)$ елипсе је постављена тангента. Њен одсечак међу вертикалним тангентама (повученим у теменима елипсе) је пречник круга. Показати да овај круг пролази кроз жиже елипсе.

6.5 ХИПЕРБОЛА. ХИПЕРБОЛА И ПРАВА

Хипербола на слици доле лево има једначину:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ или } b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{(једначина централне хиперболе)}$$

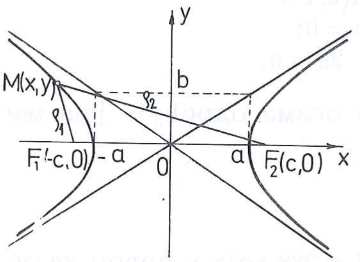
Њен центар је координатни почетак. Ако је центар хиперболе тачка $C(p, q)$, слика десно, тада имамо:

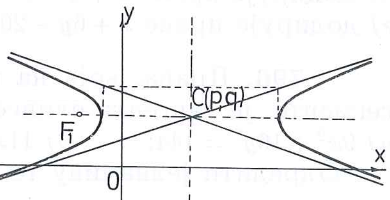
$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(канонични облик једначине хиперболе)}$$

Полуоса a, испред које је у горњој једначини знак „+“, је *реална,* док је b *имагинарна* полуоса. На реалној полуоси су жиже F_1 и F_2.

За жиже важи услов:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{(координате жижа хиперболе)}$$





Ако је $a = b$, имамо *равнострану* хиперболу: $x^2 - y^2 = a^2$.
Слично елипси уочавамо:

$$e = \frac{c}{a} \qquad \text{(ексцентрицитет хиперболе)}$$

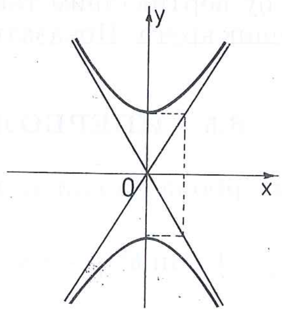
Хипербола има две асимптоте. Код централне хиперболе:

$$y = \pm\frac{b}{a}x \qquad \text{(једначина асимптота централне хиперболе)}$$

$$y - q = \pm\frac{b}{a}(x - p) \qquad \text{(једначина асимптота хиперболе)}$$

Једначина $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ такође представља хиперболу, коју треба записати као

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (слика десно)}$$



У овом случају је $e = \dfrac{c}{b}$, јер је b реална, а a имагинарна полуоса.

За сваку тачку M хиперболе, ако је a реална полуоса, важи:

$$|\rho_1 - \rho_2| = |F_1M - F_2M| = 2a$$

Овом особином се хипербола дефинише као скуп тачака.
Ако је права $y = kx + n$ *тангента* хиперболе, тада је:

$$a^2k^2 - b^2 = n^2 \qquad \text{(услов додира праве и хиперболе)}$$

Ако је $T(x_0, y_0)$ тачка на хиперболи тада је:

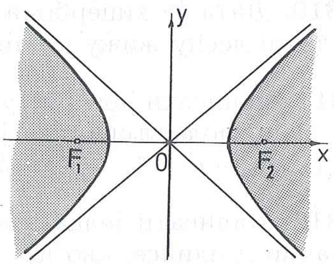
$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \quad \text{(тангента у тачки } T(x_0, y_0) \text{ на хиперболи)}$$

Права која садржи тачку T хиперболе, а нормална је на тангенти у тој тачки, представља *нормалу* хиперболе.

Угао под којим права или крива сече хиперболу одређује се као код круга и елипсе.

$\triangle$ **801.** Одредити полуосе, жиже, ексцентрицитет и асимптоте хиперболе:
а) $x^2 - 16y^2 = 16$; *б)* $25x^2 - 36y^2 = 900$; *в)* $2x^2 - 3y^2 = 6$;
г) $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = 1$; *д)* $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{17} = -1$; *ђ)* $4x^2 - 25y^2 - 100 = 0$.
е) $3x^2 - 5y^2 + 6x + 20y - 92 = 0$; *ж)* $4x^2 - 4y^2 - 8x + 8y - 100 = 0$;
з) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y - 31 = 0$.

$\triangle$ **802.** Ако је $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ дата хипербола, тада тачка $A(x_0, y_0)$ лежи *на хиперболи,* ако је $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$. Ако је, пак: $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 > a^2b^2$, тада кажемо да је тачка A *ван хиперболе.* Тада тачка A припада оном делу равни, који садржи жиже хиперболе, на слици десно – осенчено. Ако је $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 < a^2b^2$, тачка A је *у хиперболи,* на слици неосенчени део.



Ако је дата хипербола $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{4} = 1$, одредити у каквом су положају, у односу на хиперболу, тачке: $A(5, 0)$, $B(5\sqrt{2}, -2)$, $C(-6, 1)$, $D(2, -3)$, $E(-5\sqrt{3}, 2\sqrt{2})$?

$\triangle$ **803.** Саставити једначину хиперболе чији је центар симетрије тачка S, ако је дато:
а) $S(0, 0)$, $a = 5$, $e = 1{,}4$;
б) $S(0, 0)$ и тачке хиперболе: $A(8, -\sqrt{7})$ и $B(-10, -4)$;
в) $S(0, 0)$ и тачке хиперболе: $M\left(-\sqrt{\dfrac{5}{3}}, 3\right)$ и $N\left(3, \sqrt{\dfrac{309}{5}}\right)$;
г) жиже $F_1(-5, 6)$, $F_2(5, 6)$ и ексцентрицитет $e = \dfrac{5}{4}$;
д) жиже $F_1(2, 8)$, $F_2(22, 8)$ и имагинарна оса је 12.

$\triangle$ **804.** Написати једначину хиперболе која садржи тачку $A(-3, 1)$, чије асимптоте секу осу Ox под углом од $30°$.

△ **805.** Одредити једначину хиперболе, ако су дате жиже и асимптоте:
а) $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$, $y = \pm x$; *б)* $(0, \pm 3)$, $y = \pm 2x$.

△ **806.** Хипербола са центром $S(0,0)$ пролази кроз тачку $B(20,-9)$, а једна њена асимптота садржи тачку $A(-8,-6)$. Одредити једначину хиперболе.

△ **807.** Наћи координате пресечних тачака дате праве p са датом хиперболом:
а) p: $2x-y-8=0$ и $3x^2-5y^2=28$; *б)* p: $2x-y+1=0$ и $4x^2-9y^2=36$;
в) p: $2x-y-10=0$ и $5x^2-20y^2=100$; *г)* p: $4y-5\sqrt{3}x=0$ и $25x^2-4y^2=100$.

△ **808.** Одредити темена квадрата уписаног у хиперболу:
а) $3x^2 - y^2 = 8$; *б)* $25x^2 - 16y^2 = 400$.

△ **809.** Израчунати растојање жижа хиперболе $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$ од њених асимптота.

△ **810.** Дата је хипербола $5x^2 - 4y^2 = 20$. Наћи дужину тетиве која садржи десну жижу и паралелна је правој $x + y = 1$.

△ **811.** Написати једначину тетиве дате хиперболе, која је датом тачком M преполовљена, ако је:
а) $M(2,1)$ и $x^2 - y^2 = 1$; *б)* $M(5,1)$ и $4x^2 - 9y^2 = 36$.

△ **812.** Написати једначине тангенте и нормале дате елипсе у датој тачки A елипсе, ако је:
а) $2x^2 - y^2 = 2$ и $A(\sqrt{2}, y > 0)$; *б)* $4x^2 - y^2 = 32$ и $A(x < 0, 2)$.

△ **813.** Израчунати дужину p половине тетиве, која садржи жижу и нормална је на реалну осу хиперболе: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ (*параметар* хиперболе).

△ **814.** Наћи оне тангенте дате хиперболе, које су паралелне датој правој p, ако је:
а) p: $x - y + 7 = 0$ и $5x^2 - 9y^2 = 45$; *б)* p: $2x - y + 1 = 0$ и $9x^2 - 4y^2 = 36$;
в) p: $10x - 3y + 10 = 0$ и $4x^2 - y^2 = 64$.

△ **815.** Написати једначине тангенти дате хиперболе, које са датом правом p одређују угао φ, ако је:
а) $\varphi = 90°$, p: $3x - y + 1 = 0$ и $8x^2 - 81y^2 = 648$;
б) $\varphi = 90°$, p: $4x + 3y = 0$ и $x^2 - 4y^2 = 20$;
в) $\varphi = 45°$, p: $2x - y + 3 = 0$ и $17x^2 - 9y^2 = 153$;
г) $\varphi = 90°$, p: $x + y - 3 = 0$ и $x^2 - 2y^2 = 4$.

$\triangle$ **816.** Наћи тангенте хиперболе $x^2 - 5y^2 = 20$, које су повучене из тачке $M(-3, 1)$.

817. Одредити једначину хиперболе која је задата тангентом t и асимптотама, ако је:

а) t: $5x - 6y - 8 = 0$ и $y = \pm\dfrac{x}{2}$; *б)* t: $x - y - 2\sqrt{2} = 0$ и $y = \pm x\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\triangle$ **818.** Одредити једначину централне хиперболе која:

а) додирује праве $x - y - 1 = 0$ и $5x - 7y - 1 = 0$;
б) додирује праву $x + y + 4 = 0$ и $a - b = 2$;
в) додирује праву $x - y - 2 = 0$ у тачки $T(4, 2)$.

819. Одсечак који на произвољној тангенти хиперболе одређују асимптоте, преполовљен је додирном тачком. Доказати.

820. Доказати да је површина P троугла, образованог асимптотама хиперболе $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ и произвољном тангентом те хиперболе, стална величина и $P = ab$.

6.6 ПАРАБОЛА. ПАРАБОЛА И ПРАВА

Са једном врстом параболе смо се срели претходне године, у оквиру теме: КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА. Радило се о параболи $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, или у каноничном облику: $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$, са теменом $T(\alpha, \beta)$. За $\alpha = \beta = 0$ имали смо $y = ax^2$.

Парабола је скуп тачака, које су једнако удаљене од дате праве (директрисе) и дате тачке (жиже), при чему жижа не припада директриси. При одговарајућем избору координатног система, парабола изгледа као на слици лево и има једначину:

$$y^2 = 2px, \ p > 0 \qquad \text{(једначина параболе)}$$

а изгледа као на слици у средини ако је $p < 0$.

Ако је теме параболе ван координатног почетка, слика десно, тада једначина има облик:

$$(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha),\ p \neq 0 \qquad \text{(канонична једначина параболе)}$$

У првом и другом случају је жижа тачка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а директриса је права $x + \frac{p}{2} = 0$.

У прва два случаја оса Ox је оса симетрије параболе, а у трећем случају то је права $y = \beta$.

Услов да права $y = kx + n$ додирује параболу $y^2 = 2px$ је:

$$p = 2kn \qquad \text{(услов додира праве и параболе)}$$

Ако је тачка $M(x_0, y_0)$ на параболи, тада је једначина тангенте у тој тачки:

$$y_0 y = p(x + x_0) \qquad \text{(тангента у тачки на параболи)}$$

Угао под којим нека права сече параболу је угао између те праве и тангенте параболе у пресечној тачки.

△ **821.** Одредити координате темена T, жиже F, једначину директрисе и једначину осе симетрије параболе:
а) $y^2 = 2x$; *б)* $y^2 = -6x$; *в)* $x^2 = 4y$; *г)* $x^2 = -3y$;
д) $y^2 + x = 0$; *ђ)* $3x - y^2 = 0$; *е)* $y^2 = 6x - 12$; *ж)* $y = x^2 + 5$;
з) $y = 12 - x^2$; *и)* $y = x^2 + 2x - 3$; *ј)* $x = y^2 + 8y + 9$; *к)* $x = y^2 - 6y + 10$.

△ **822.** Написати једначину параболе чије је теме координатни почетак, ако је дата жижа F или директриса d.
а) $F(3, 0)$; *б)* $F(-2, 0)$; *в)* $F(0, 4)$; *г)* $F\left(0, -\frac{1}{4}\right)$;
д) d: $x - 2 = 0$; *ђ)* d: $x + 5 = 0$; *е)* d: $y - 3 = 0$; *ж)* d: $y + 2 = 0$.

△ **823.** Израчунати дужину радијус вектора дате тачке M на датој параболи:
а) $y^2 = 36x$, $M(4, y > 0)$; *б)* $y^2 = 2px$, $M(4, 4)$.

824. Парабола, чија је оса паралелна са осом Ox, садржи тачке $A(-2, 3)$ и $B(1, 5)$. Наћи једначину параболе, ако јој је жижа $F(-2, 1)$.

△ **825.** У координатној равни одредити скуп тачака, који задовољава услов:
а) $y^2 - 8x > 0$; *б)* $2x + y^2 > 0$; *в)* $y^2 - 6x < 0$;
г) $y^2 + 4x > 0$ и $x^2 + y^2 - 4 < 0$; *д)* $y^2 + 4x < 0$ и $4x^2 + y^2 - 4 < 0$.

△ **826.** Кроз жижу параболе $y^2 = 4x$, нормално на праву $y = 2x$, постављена је тетива. Одредити координате средишта ове тетиве.

△ **827.** Одредити координате пресечних тачака дате праве и дате параболе:
а) $x - y + 1 = 0$ и $y^2 = 4x$; *б)* $5x - y - 15 = 0$ и $y^2 = -5x$;
в) $x - y + 3 = 0$ и $y^2 = 16x$; *г)* $2x - y - 4 = 0$ и $y^2 = 4x$.

828. Дата је парабола и тачка S. Написати једначину тетиве дате параболе, која је тачком S преполовљена:
а) $y^2 = 20x$, $S(2,5)$; *б)* $y^2 = 4x$, $S(1,1)$; *в)* $y^2 = 4x$, $S(3,1)$.

△ **829.** Написати једначину тангенте и нормале дате параболе у њеној тачки T, ако је:
а) $y^2 = 16x$, $T(1, y > 0)$; *б)* $x^2 = 9y$ и $T(x < 0, 1)$;
в) $(y+1)^2 = 4(x+2)$ и $T(2, y < 0)$.

△ **830.** Написати једначине тангенти дате параболе у пресечним тачкама са датом правом, ако је:
а) $y^2 = 4x$ и $2x - 5y + 12 = 0$; *б)* $y^2 = 4x$ и $2x - 3y + 4 = 0$.

△ **831.** Одредити једначину тангенте дате параболе, која је паралелна са датом правом:
а) $y^2 = 8x$, $2x + 2y - 5 = 0$; *б)* $y^2 = 16x$, $4x + y - 3 = 0$;
в) $y^2 = 3x$, $3x - y - 4 = 0$; *г)* $y^2 = 12x$, $4x - 2y - 7 = 0$.

△ **832.** Одредити једначину тангенте дате параболе, која је нормална на дату праву:
а) $y^2 = 32x$, $6x - 8y + 5 = 0$; *б)* $y^2 = 12x$, $6x - 2y - 1 = 0$.

△ **833.** Написати једначине тангенти параболе $y^2 = 4x$, које секу праву $2x - y - 1 = 0$ под углом од $45°$.

△ **834.** Поставити тангенте из дате тачке M на дату параболу:
а) $M(1,7)$ и $y^2 = 24x$; *б)* $M(5,-7)$ и $y^2 = 8x$.

△ **835.** Наћи заједничке тангенте парабола $y^2 = x$ и $y = x^2$.

△ **836.** Под којим углом права $2x + y - 12 = 0$ сече параболу $y^2 = 4x$?

△ **837.** Написати једначину параболе чија је оса симетрије x оса, ако је дата њена тангента:
а) $x - y + 3 = 0$; *б)* $2x + y - 5 = 0$.

△ **838.** На параболи $y^2 = 4x$ наћи тачку која је најближа правој $4x + 3y + 12 = 0$.

839. У параболу $y^2 = 2x$ уписан је једнакостраничан троугао OAB, где је O координатни почетак. Одредити тачке A и B.

$*$ **840.** Дата је парабола $y = x^2$. За $|x_0| > \sqrt{2}$, кроз тачку $A(x_0, x_0^2)$ параболе пролазе две њене нормале, чија су подножја B и C различита од A. Доказати да права BC сече осу параболе у фиксираној тачки која не зависи од x_0.

6.7 КРИВЕ ДРУГОГ РЕДА

У претходним одељцима смо упознали криве другог реда (круг, елипса, хипербола и парабола), као и разне положаје праве у односу на њих. Зна се да свака од ових кривих у координатном систему има једначину другог степена, чији најопштији облик је:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Ми смо проучавали елипсе, хиперболе и параболе, само у случајевима кад су им осе симетрија паралелне координатним осама, а тада је у општој једначини криве $B = 0$. Дакле, сретали смо се са једначинама општег облика:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

У овом одељку ћемо се позабавити комбинованим проблемима: заједничке тангенте, пресеци кривих, формирање једначина кривих, које представљају скупове тачака са датим особинама (тзв. геометријска места тачака) и сл.

$\triangle$ **841.** Написати једначине заједничких тангенти датих кривих:
а) $x^2+y^2=4$ и $x^2+(y-2)^2=1$; *б)* $x^2+y^2=45$ и $x^2+y^2-20x-25=0$;
в) $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ и $x^2+y^2+4x+2y-4=0$;
г) $x^2+9y=9$ и $3x^2+2y^2=12$; *д)* $x^2+y^2+6x-23=0$ и $9x^2+16y=144$;
ђ) $2x^2+2y^2=1$ и $3x^2-4y^2=12$; *е)* $25x^2+100y^2=4$ и $x^2-3y^2=1$;
ж) $x^2+y^2=2$ и $y^2=8x$.

$\triangle$ **842.** Под којим углом се секу криве:
а) $x^2+y^2-4x-6=0$ и $y^2=3x$; *б)* $x^2+y^2=5$ и $x^2+y^2-8x+3=0$;
в) $x^2+y^2=4$ и $3x^2+4y^2=13$?

843. Одредити p тако да парабола $y^2=2px$ сече круг $x^2+y^2+6x-63=0$ под правим углом.

844. Написати једначину круга са центром на оси Oy, који у тачки $T(2,3)$ додирује хиперболу $3x^2-y^2=3$.

845. Одредити полуосе хиперболе $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, која садржи тачку $A(4\sqrt{2}, 3)$, ако се њене жиже поклапају са жижама елипсе $2x^2 + 7y^2 = 70$.

846. Дата је хипербола $9x^2 - 16y^2 = 144$. Одредити једначину елипсе, чија се темена поклапају са жижама дате хиперболе, а жиже се поклапају са теменима дате хиперболе.

847. Теме параболе је координатни почетак. Њена директриса пролази кроз жиже елипсе: $x^2 + 3y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$. Како изгледа једначина те параболе?

848. Круг и парабола $y^2 = 12x$ у тачки $T(3,6)$ имају заједничку тангенту. Одредити центар и полупречник круга, знајући да он додирује осу Ox.

849. Кроз жиже елипсе $16x^2 + 25y^2 = 400$ пролази парабола, чије се теме поклапа с једним теменом елипсе. Одредити једначину параболе.

850. На кругу $x^2 + y^2 = r^2$ уочимо тачку $A(r, 0)$. Одредити скуп свих средишта тетива датог круга, које полазе из тачке A.

851. У равни xOy одредити скуп тачака $M(x, y)$, које имају својство: растојање од тачке $A(1,0)$ је два пута веће од растојања до тачке $B(-2, 0)$.

852. Лењир дужине 3 наслоњен је крајем A на позитивни део осе Ox, а истовремено други крај B је наслоњен на позитивни део осе Oy. Какву линију описује:
а) средиште S лењира AB; *б)* тачка M лењира, за коју је $MB = 1$?

853. Одредити скуп тачака $M(x, y)$ из којих се елипса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ види под правим углом.

854. Одредити скуп тачака $M(x, y)$ које су једнако удаљене од тачке $A(2, 0)$ и круга $x^2 + y^2 + 4x = 0$.

855. Шта представља скуп центара кругова који споља додирују два дата круга: $x^2 + y^2 = 4$ и $x^2 + y^2 - 6x = 0$?

856. Одредити једначину скупа центара $M(x, y)$ свих кругова који додирују осу Oy и круг $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

857. Какву линију описују центри свих кругова који додирују праву $y + 4 = 0$ и круг $x^2 + y^2 = 4$?

858. Одредити скуп средишта оних тетива параболе $y^2 = 12x$, које су паралелне правој $3x - 4y + 1 = 0$.

859. Одредити скуп средишта оних тетива хиперболе $x^2 - 4y^2 = 16$, које са осом Ox граде угао од $45°$.

$*$ **860.** Тачка A се креће по оси Oy и тачка B по оси Ox, тако да је $AB = k$. Какву линију описује тачка $M(x, y)$ дужи AB, при чему је $AM : MB = \lambda$?

861. Одредити геометријско место (скуп) тачака $M(x, y)$ из којих се круг $x^2 + y^2 = r^2$ види под правим углом.

862. Одредити криву чије су тачке $M(x, y)$ такве да њихово растојање од праве $x = 2$ износи $\frac{1}{2}MA$, где је $A(8, 0)$.

863. Одредити скуп центара свих кругова који садрже тачку $A(4, 0)$ и додирују осу Oy.

864. Какав скуп одређују тачке којим су ординате тачака круга $x^2 + y^2 = 25$ подељене у размери $3 : 2$?

865. Одредити скуп тачака $M(x, y)$ које су једнако удаљене од осе Oy и круга $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$.

866. Шта представља скуп центара кругова који додирују два дата круга: $x^2 + y^2 = 16$ и $x^2 + y^2 - 4x = 0$?

867. Одредити скуп тачака из којих се парабола $y^2 = 2px$ види под правим углом.

$*$ **868.** Одредити скуп тачака $M(x, y)$ за које важи једнакост: $AM^2 + BM^2 + CM^2 = 3a^2$, где је $A(-a, 0)$, $B(0, a)$ и $C(a, 0)$.

$*$ **869.** Права која пролази кроз координатни почетак сече праве $x + y - 1 = 0$ и $x - y - 1 = 0$ у тачкама A и B. Одредити скуп средишта дужи AB.

$*$ **870.** Права p, паралелна оси Oy, сече елипсу $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ у тачкама M и N. Нека су $A(-a, 0)$ и $B(a, 0)$ темена елипсе. Одредити скуп пресечних тачака P правих AM и BN и скуп пресечних тачака Q правих AN и BM, за све праве p.

СЕДМА ГЛАВА

7 СИСТЕМИ НЕЈЕДНАЧИНА

Под неједначином с две непознате подразумевамо неједначину облика

$$f(x,y) \leqslant 0$$

(уместо релације $\leqslant$ могу стајати и $<$, $\geqslant$ или $>$), где функција f зависи од промењљивих x и y. Решење неједначине је сваки уређен пар (a,b), такав да је $f(a,b) \leqslant 0$. Како сваки уређен пар (a,b) има геометријску интерпретацију – тачку $M(a,b)$ из равни у којој је уведен Декартов правоугли координатни систем, то се под решењем неједначине подразумева и тачка чије координате задовољавају неједначину.

Решење система неједначина са две непознате

$$f_1(x,y) \leqslant 0,\ f_2(x,y) \leqslant 0, \ldots, f_k(x,y) \leqslant 0$$

је сваки уређен пар чији елементи (или свака тачка из равни чије координате) задовољавају све неједначине система.

Скуп свих решења система неједначина је пресек скупова решења сваке неједначине посебно.

7.1 СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ НЕЈЕДНАЧИНА С ДВЕ НЕПОЗНАТЕ

Решење линеарне неједначине $Ax + By + C \leqslant 0$ ($\geqslant 0$, > 0, < 0) $|A|+|B| \neq 0$ је свака тачка полуравни (у прва два случаја затворене а у друга два отворене) одређене правом $Ax + By + C = 0$. Испитивање која полураван, одређена правом, представља скуп решења линеарне неједначине, врши се тако што се за једну тачку полуравни проверава да ли је решење неједначине, или тако што се неједначина реши по промењљивој y (у случају да је $B \neq 0$), па ако се добије неједначина $y \geqslant kx + n$ ($y > kx + n$), скуп свих решења је затворена (отворена) полураван изнад праве $y = kx + n$, а ако се добије неједначина $y \leqslant kx+n$ $(y < kx+n)$, скуп решења је полураван испод праве.

Скуп свих решења система линеарних неједначина је пресек полуравни, које су скупови решења сваке неједначине посебно. (Решење овог система неједначина је конвексан скуп).

У овом делу све неједначине су неједначине са две реалне непознате x и y.

△ **871.** Решити неједначине:

а) $y \geqslant 3$; *б)* $y < 2$; *в)* $x > 0$; *г)* $x \leqslant -3$.

△ **872.** У зависности од реалног параметра a решити неједначине:

а) $ax - 3 \geqslant 0$; *б)* $ay - 2 < 0$.

△ **873.** Решити неједначине:

а) $3x + 2y \geqslant 2$; *б)* $2x - y \leqslant 3$; *в)* $x + y < 3$; *г)* $y - x > 1$.

△ **874.** Решити системе неједначина:

а) $\begin{matrix} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{matrix}$; *б)* $\begin{matrix} x - 3 \leqslant 0 \\ y - 2 > 0 \end{matrix}$; *в)* $\begin{matrix} 3x-5 \leqslant 0 \\ -2x-1 < 0 \\ y \leqslant 3 \end{matrix}$.

△ **875.** Решити системе неједначина:

а) $\begin{matrix} y-x-1 < 0 \\ 3x+y-6 \geqslant 0 \end{matrix}$; *б)* $\begin{matrix} 2x+y-2 \geqslant 0 \\ x-2y+2 < 0 \end{matrix}$; *в)* $\begin{matrix} x+y+1 > 0 \\ 2x+2y-3 \leqslant 0 \end{matrix}$; *г)* $\begin{matrix} 2x+y > 0 \\ 4x+2y+1 < 0 \end{matrix}$.

△ **876.** Решити системе неједначина:

а) $\begin{matrix} y-3 \leqslant 0 \\ 3x+y-3 \geqslant 0 \\ 2x-y-2 < 0 \end{matrix}$; *б)* $\begin{matrix} x-y \geqslant 0 \\ y-1 < 0 \\ x+y \geqslant 0 \end{matrix}$; *в)* $\begin{matrix} x-2y+2 \geqslant 0 \\ 2x-y-2 \leqslant 0 \\ x+y-m \geqslant 0 \end{matrix}$, $m \in R$.

877. Решити неједначине:

а) $|x| < 1$; *б)* $|x| \geqslant -1$; *в)* $|y| \leqslant -3$; *г)* $|y| \geqslant 2$;
д) $|x-3|+|y+2| \leqslant 0$; *ђ)* $|x+y| < 1$; *е)* $|x|+|y| \leqslant 1$; *ж)* $x^2 - y^2 > 0$;
з) $\sqrt{x^2+2x+1} - \sqrt{y^2-2y+1} \leqslant 0$.

878. Решити систем једначина и неједначина:

а) $\begin{matrix} x+y = -2 \\ x-y = 0 \\ x+y+1 < 0 \end{matrix}$; *б)* $\begin{matrix} x+2y=3 \\ 2x+4y=1 \\ x-y<a \end{matrix}$, $a \in R$; *в)* $\begin{matrix} x-y=0 \\ x+3y \geqslant 3 \end{matrix}$; *г)* $\begin{matrix} 2x-y=1 \\ x^2-y^2 \leqslant 0 \end{matrix}$

879. Наћи сва целобројна решења система неједначина:

$4x^2 - y^2 > 0$ и $\left| x - \dfrac{1}{2} \right| \leqslant \dfrac{3}{2}$.

△ **880.** За које вредности реалних бројева x и y постоји (као реалан број) израз:

а) $\sqrt{2x+y-4}$; *б)* $\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y-2}}$; *в)* $\ln\dfrac{x-y}{x+y-2}$; *г)* $\arcsin(2x+y)$.

7.2 ЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ

Проблем линеарног програмирања састоји се у одређивању најмање или највеће вредности израза (функције циља)

$$F = c_1x + c_2y,$$

на скупу (допустивих решења) свих уређених парова (x, y) реалних бројева таквих да је

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0$$
$$a_{i1}x + a_{i2}y \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.\ ^{*)}$$

(Допустива – дозвољена решења су искључиво ненегативне вредности променљивих x и y.)

Проблем ћемо решавати тако што одредимо скуп допустивих решења, на основу датог система неједначина, а затим одредимо за које $c \in R$ права $p\ :\ c_1x + c_2y = c$ има заједничких тачака са скупом допустивих решења. Најмање или највеће такво c (ако постоји) биће најмања или највећа вредност функције циља, а свака заједничка тачка допустивог скупа и праве p (за такво c) биће решење проблема линеарног програмирања.

Треба уочити и запамтити следеће особине:

Уколико је допустив скуп ограничен, односно ако представља многоугао, проблем линеарног програмирања има решење, које мора бити теме тог многоугла. Ако су темена A и B решења проблема, онда је и свака тачка дужи AB решење.

881. Наћи највећу и најмању вредност израза $F = 7x + 5y$ на области: $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ и $2x + y \leqslant 13$ и $x \leqslant 6$ и $y \leqslant 5$. За које x и y ће F узети те вредности?

882. Наћи решења система неједначина: $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ и $2x - y \geqslant 0$ и $|x - y| \leqslant 1$ за које израз $F = x + 2y$ достиже своју најмању и највећу вредност.

883. Наћи најмању и највећу вредност израза $F = x - y$ на области: $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ и $5x - y + 1 \geqslant 0$ и $3x - y + 3 \geqslant 0$.

---

*) Нећемо посматрати општи случај када проблем зависи од више од две непознате.

884. Наћи највећу и најмању вредност израза $F = x + y$ на области:

а) $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ и $2x + y \leqslant 6$ и $x - y - 3 \geqslant 0$;
б) $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ и $x + y - 1 \leqslant 0$ и $x - y + 6 \leqslant 0$.

885. Наћи највећу и најмању вредност израза $F = 83 - x - y$ при ограничењима $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ и $x + y \geqslant 2$ и $x - y \leqslant 4$ и $x + y \leqslant 8$. У којим тачкама израз узима те вредности?

$*$ **886.** Минимизиразти израз $F = -2x - y$ при ограничењима: $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ и $x + 2y \leqslant 6$ и $x + y \geqslant 2$ и $x - y \geqslant 3$. Резултат проверити Фурије – Моцкиновим методом искључивања.

$*$ **887.** Минимизирати $F = y$ при ограничењима $x + y \geqslant 2$ и $x + 2y \leqslant 6$ и $-x + 4y \geqslant 0$ и $-x + y \geqslant 2$ и $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Резултат проверити методом искључивања.

888. На две њиве, од 15 и 10 хектара, сељак треба да посеје пшеницу и кукуруз. Познато је да је принос пшенице са прве њиве 3, а са друге 4, док је принос кукуруза са прве 6 а са друге 9 тона по хектару. Сељак је унапред уговорио да задрузи испоручи најмање 12 тона пшенице и најмање 72 тоне кукуруза. Како треба засејати њиве да би зарада била највећа, ако су цене пшенице и кукуруза (у хиљадама динара по тони):

а) 5 и 2; *б)* 11 и 5; *в)* 3 и 2; *г)* 4 и 2; *д)* 9 и 4.

889. Посластичар располаже са 2880 грама брашна, 720 грама шећера и 20 јаја, од којих хоће да прави тулумбе и принцес-крофне. За прављење једне тулумбе потроши 18 грама брашна, 6 грама шећера и $\frac{1}{20}$ јајета, а за прављење једне принцес-крофне 24 грама брашна, 4 грама шећера и $\frac{1}{5}$ јајета. Колико којих колача треба направити да би зарада била највећа, ако тулумбе и принцес-крофне продаје по цени (у динарима):

а) 1 и 5; *б)* 2 и 4; *в)* 1 и 1; *г)* 2 и 1; *д)* 3 и 4.

890. У магацину M_1 налази се 6, а у M_2 4 тоне шећера који треба превести у три продавнице, и то: у P_1 2, у P_2 3 а у P_3 5 тона. Колико треба превести шећера из сваког магацина у сваку продавницу да би трошкови превоза били најмањи, ако је цена превоза једне тоне шећера из магацина у продавнице (у динарима) дата табелом:

$$a)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 9 & 10 \\ 13 & 9 \end{pmatrix} \end{array};\quad б)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 20 & 12 \\ 15 & 10 \\ 13 & 9 \end{pmatrix} \end{array};\quad в)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 17 & 12 \\ 16 & 10 \\ 13 & 9 \end{pmatrix} \end{array};$$

$$г)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 16 & 10 \\ 13 & 9 \end{pmatrix} \end{array};\quad д)\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 21 & 12 \\ 8 & 10 \\ 13 & 9 \end{pmatrix} \end{array}.$$

7.3 НЕЛИНЕАРНЕ НЕЈЕДНАЧИНЕ С ДВЕ НЕПОЗНАТЕ

Решења неједначина $(x-p)^2+(y-q)^2<r^2$и $(x-p)^2+(y-q)^2>r^2$ су тачке унутар и ван круга $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$. Ако неједнакости нису строге онда решењу треба додати и тачке на кругу.

Решења неједначина $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<1$ и $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}>1$ су тачке унутар и ван елипсе $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Решења неједначина $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}<1$ и $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}>1$ су тачке између грана, односно са стране од грана хиперболе $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Решења неједначина $y^2<2px$ и $y^2>2px$, за $p>0$, су тачке десно и лево (за $p<0$ обрнуто) од параболе $y^2=2px$. (Видети решења задатка 825.)

△ **891.** Решити неједначине:

а) $x^2+y^2-2x-4y<0$; *б)* $x^2+y^2-2x-4y\geqslant 0$; *в)* $4x^2+y^2<4$.

△ **892.** Решити неједначине:

а) $2x^2-y^2\leqslant 2$; *б)* $x^2-y^2>1$; *в)* $x^2-y^2<0$.

△ **893.** Решити неједначине:

а) $y^2\leqslant x$; *б)* $x^2>y$; *в)* $y^2<1$.

894. Решити неједначину: $2\cos(x+y^2)\geqslant y^2+2$.

△ **895.** Решити системе неједначина:

а) $\begin{array}{l} x^2+y^2\leqslant 1 \\ x-y+3>0 \end{array}$; *б)* $\begin{array}{l} x^2+y^2+6x+2y\leqslant 0 \\ x+y\geqslant 0 \end{array}$; *в)* $\begin{array}{l} x^2+y^2-25\leqslant 0 \\ x^2+y^2-6x+5>0. \end{array}$

△ **896.** Решити системе неједначина:

а) $\begin{array}{l} x^2 - y^2 \geqslant 1 \\ 9x^2 + 16y^2 < 16; \end{array}$ *б)* $\begin{array}{l} y^2 - x^2 > 4 \\ y^2 \leqslant 5x \\ y > 1 \end{array}$; *в)* $\begin{array}{l} x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 + 4y^2 \leqslant 4 \\ x + y \geqslant 0. \end{array}$

897. За које вредности реалног параметра a постоји решење система неједначина:

а) $\begin{array}{l} x^2 + y^2 \leqslant a^2 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 \leqslant 1 \end{array}$; *б)* $\begin{array}{l} x - y + a < 0 \\ y^2 \leqslant 2x \end{array}$; *в)* $\begin{array}{l} x^2 - y^2 \leqslant 16 \\ (x-5)^2 + y^2 \leqslant a^2. \end{array}$

898. За које вредности реалних бројева x и y постоји (као реалан број) израз:

а) $\sqrt{\dfrac{4 - x^2 - y^2}{(x-4)^2 + y^2 - 9}}$; *б)* $\ln(x^2 + xy + y^2)$; *в)* $\arccos(x^2 + y^2 - 2)$.

$*$ **899.** Наћи најмању и највећу вредност израза $F = y - x$ на области:

а) $x^2 + y^2 \leqslant 1$; *б)* $x + y^2 \leqslant 0$.

$*$ **900.** Наћи најмању и највећу вредност израза $F = (x-3)^2 + y^2$ на области:

а) $x^2 + y^2 \leqslant 1$; *б)* $y^2 - x^2 \geqslant 1$.

ОСМА ГЛАВА

8 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА. НИЗОВИ

У овој глави решавамо проблеме у вези са дељивошћу бројева (прости и сложени бројеви, конгруенције по модулу), доказивање математичком индукцијом и елементарне особине бројних низова.

8.1 ДЕЉИВОСТ БРОЈЕВА

Цео број a је дељив целим бројем b ако је $b \neq 0$ и постоји цео број c, такав да је $a = b \cdot c$. Пишемо и $b|a$ („b дели a" или „a је дељиво са b"). (Ако је $c \neq 0$, онда је a дељиво и са c.)

Број b је делилац броја a.

Ако је $a = m_1 \cdot m_2 \cdots m_k$, где је $m_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, тада су бројеви m_i чиниоци (делиоци) броја a.

Сваки цео број a, већи од 1, има најмање два делиоца: број 1 и број a.

Цео број већи од 1, који има тачно два делиоца је *прост број*.

Цео број који има више од два различита делиоца је *сложен број*.

Сваки сложен број n се на јединствен начин може представити у облику:

$$n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k},$$

где су $p_1, p_2, \ldots, p_k$ прости бројеви, а $m_1, m_2, \ldots, m_k$ природни бројеви. Кажемо: сваки сложен број се на јединствен начин *разлаже на просте чиниоце.* *)

Највећи цео број d, којим су истовремено дељиви цели бројеви a и b, је *највећи заједнички делилац* бројева a и b:

$$d = D(a, b).$$

Ако је $D(a, b) = 1$, тада су бројеви a и b *узајамно прости.*

---

*) Читаоцима се предлаже да обнове критеријуме дељивости бројева (MATHEMATISKOP 3, стр. 67).

Најмањи цео број s, који је истовремено дељив целим бројевима a и b, $a\cdot b \neq 0$ је *најмањи заједнички садржалац* за a и b:

$$s = S(a,b).$$

Између d и s постоји веза: $s = \dfrac{a\cdot b}{d}$. Одавде закључујемо: ако су a и b узајамно прости бројеви, онда је $s = a\cdot b$.

Ако цео број a није дељив целим бројем b, $b \neq 0$, тада постоје јединствени бројеви q и r, $r \geqslant 0$, такви да је:

$$a = b\cdot q + r, \qquad 0 \leqslant r < |b|.$$

Број q је *количник*, а r *остатак* дељења целог броја a целим бројем b. Ако је $r = 0$, тада је број a дељив бројем b.

Ако цели бројеви a и b имају исти остатак при дељењу са целим бројем m, $m \neq 0$, тада је број $(a-b)$ дељив са m. Тада кажемо да су бројеви a и b *конгруентни по модулу* m, што записујемо са:

$$a \equiv b \pmod{m}, \text{ или } (a-b) \equiv 0 \pmod{m}, \text{ или } a - b = km,$$

где је k цео број.

Тада, нпр. запис $a \equiv -2 \pmod{m}$, означава да броју a „недостаје 2“ да би био дељив са m, тј. да је $a = km - 2$, k је цео број.

Ако је $a \equiv b \pmod{m}$, онда је и: $a^k \equiv b^k \pmod{m}$ и $ac \equiv bc \pmod{m}$, где је k природни а c цео број.

Ако је $a \equiv r \pmod{m}$ и $b \equiv s \pmod{m}$, тада је и: $a + b \equiv r + s \pmod{m}$, $a - b \equiv r - s \pmod{m}$ и $ab \equiv rs \pmod{m}$.

Треба запамтити и следеће особине:

Ако је a дељив са b, онда је и је a^k дељиво са b^k.

Ако су a и b дељиви са d, онда је $a + b$ дељиво са d и $a - b$ је дељиво са d.

Ако је $d = D(a,b)$ онда је $d|(a-b)$.

Дирихлеов принцип: Ако $(n+1)$ предмета треба распоредити у n кутија, тада бар у једну кутију морамо ставити најмање два предмета.

△ **901.** Одредити све природне бројеве n за које је број $10^{2n} - 1$ дељив са 3^3.

△ **902.** Комад даске облика правоугаоника, димензија 1638 mm и 882 mm, треба исећи на највеће могуће квадратне плоче. Колико се таквих квадрата добија?

△ **903.** Одредити највећи троцифрен број који при дељењу са 4 даје остатак 1, при дељењу са 5 даје остатак 2, при дељењу са 8 даје остатак 5 и при дељењу са 12 даје остатак 9.

△ **904.** Ако се произвољном троцифреном броју допише тај исти број, добијени шестоцифрени број је дељив са 7, 11 и 13. Доказати.

∗ **905.** Број n добијамо тако што дописујемо редом природне бројеве од 1 до 111. Доказати да је n сложен број, али да он не представља квадрат неког природног броја.

∗ **906.** Наћи целобројна решења једначине:
$(x^2-7x+10)(x^2-7x+12)=7920.$

△ **907.** Ако је p прост број доказати да је број $p^{1998}+p^{1999}$ сложен.

△ **908.** Одредити све природне бројеве којима је производ цифара једнак 1170.

909. Наћи најмањи четвороцифрен број, такав да му је производ цифара једнак 168. Колико цифара има највећи број којем је производ цифара једнак 168?

∗ **910.** Одредити најмањи четвороцифрени број дељив са 9, који има производ цифара 180.

△ **911.** Наћи најмањи природан број, који помножен са 2376 даје квадрат неког природног броја.

∗ **912.** Ако су све цифре простог броја јединице, доказати да је збир цифара тог броја такође прост број. Да ли важи и обрнуто?

913. Доказати да постоји 20 узастопних сложених бројева. Да ли постоји 100 узастопних сложених бројева?

914. У једном паковању има тачно 2000 бомбона, које треба да се поделе између 64 детета. Доказати да ће, у сваком случају, бар два детета добити исти број бомбона.

915. Доказати да се између 1001 различитих природних бројева мањих од 2000 могу изабрати три таква броја, да је један од њих једнак збиру друга два.

△ **916.** Колики је остатак дељења $5^{555}:13$?

△ **917.** Који од датих израза су дељиви са 10:
а) $7^{10}-1$; *б)* $7^{7^7}-3$; *в)* $5^{1998}+5^{1999}$; *г)* $3^{1999}-3^{2000}$?

918. Колики се остатак добија кад се збир $1^{1999}+2^{1999}+3^{1999}+\dots+1997^{1999}+1998^{1999}$ подели са 10?

$*$ **919.** Доказати да $5^{2n-1}-1$ није дељиво са 4^n-1, где је $n \in N$.

$*$ **920.** Одредити природан број n, тако да $3^{2n}-1$ буде дељиво са $2^{2n}-1$.

$*$ **921.** Можемо ли скуп бројева: $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{1998}, 2^{1999}$ поделити на два дисјунктна подскупа, тако да је збир бројева у једном подскупу једнак збиру бројева у другом подскупу.

$*$ **922.** Доказати да су бројеви $2^{2^n}+1$ и $2^{2^{n+1}}+1$ узајамно прости за сваки природан број n.

$*$ **923.** Одредити све природне бројеве n за које је број $3(n^2+n)+7$ дељив са 5.

924. Ако је p прост број и цео број a није дељив са p, онда је разлика $a^{p-1}-1$ дељива са p. Доказати. (Мала Фермаова теорема.)

925. Ако је p прост број и $p>5$, онда је број, који у декадном запису има само јединице, и то тачно $(p-1)$ јединицу, дељив са p. Доказати.

$\triangle$ **926.** Ако је n природан број онда је n^5+29n дељиво са 30. Доказати.

927. Ако су m и n цели бројеви и $m^2+3mn+n^2$ је дељиво са 25, доказати да су m и n дељиви са 5.

928. Доказати да полином $P(m)=m^2+m+4$ није дељив ни са 9 ни са 25 за сваки природан број m.

$*$ **929.** Ако су a, b, c, d, x цели бројеви и ако се разломак $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ може скратити целим бројем k, доказати да је $ad-bc$ дељиво са k.

$*$ **930.** Ако су a, b, c и d цели бројеви, такви да је $ad-bc=1$, доказати да се разломак $\dfrac{a^2+b^2}{ac+bd}$ не може скратити.

8.2 МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА

Математичка индукција се користи за доказивање тачности тврђења која зависе од целог броја n, у ознаци T_n. Основни *принцип математичке индукције* гласи:

> Ако је тачно тврђење T_1 и ако из тачности тврђења T_n следи тачност тврђења T_{n+1}, онда је тврђење T_n тачно за све природне бројеве n.

Наводимо још две варијанте математичке индукције.

1° Ако је тачно тврђење T_k, где је k цео број, и ако из тачности тврђења T_n, где је n цео број и $n \geqslant k$, следи тачност тврђења T_{n+1}, онда је тврђење T_n тачно за све целе бројеве $n \geqslant k$.

2° Ако је тачно тврђење T_k где је k цео број, и ако из тачности тврђење $T_k, T_{k+1}, \ldots, T_{n-1}, T_n$ следи тачност тврђења T_{n+1}, онда је тврђење T_n тачно за све целе бројеве $n \geqslant k$.

△ **931.** Зна се да се на челу неке колоне налази дечак, а такође, да се непосредно иза сваког дечака у колони налази дечак. Шта се може закључити о саставу те колоне?

△ **932.** Користећи математичку индукцију доказати да је $n^3 + 11n^2 + 38n + 42 > 0$ за сваки цео број $n \geqslant -2$.

933. Сваки природни број $n \geqslant 2$ може се написати као производ броја 1 и простих бројева. Доказати.

△ **934.** Доказати применом математичке индукције да за све природне бројеве n важи:

а) $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$; *б)* $1 + 3 + 5 \cdots + (2n-1) = n^2$;

в) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; *г)* $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

д) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+1)}{4}$;

ђ) $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

е) $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

ж) $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$;

з) $1\cdot 3 + 2\cdot 4 + \cdots + n(n+2) = \dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$;

и) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{2n(2n+1)} = \dfrac{2n}{2n+1}$;

ј) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$;

к) $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$;

л) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$;

љ) $1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\dfrac{1-q^n}{1-q},\ q\neq 1$;

$*$ *м)* $1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}=\dfrac{1-(n+2)q^n+nq^{n+1}}{(1-q)^2},\ q\neq 1$;

$*$ *н)* $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$;

$*$ *њ)* $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{6}+\cdots+\dfrac{1}{3n-1}+\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{2}{3n}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{3n}$;

$*$ *о)* $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$;

п) $1+1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!$;

р) $1+\dfrac{1\cdot 1!!}{2}+\dfrac{3\cdot 3!!}{2^2}+\cdots+\dfrac{(2n-1)(2n-1)!!}{2^n}=\dfrac{(2n+1)!!}{2^n}$, $((2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1))$.

935. Доказати применом математичке индукције да за све целе бројеве n наведене у задатку важи:

а) $(2n-1)!!=\dfrac{(2n)!}{2^n\cdot n!},\ n\geqslant 1$; *б)* $n!=\dfrac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)},\ n\geqslant 0$;

в) $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n},\ n\geqslant 2$;

г) $\left(1-\dfrac{9}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{9}{5^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{9}{(3n-1)^2}\right)=\dfrac{-(3n+2)}{2(3n-1)},\ n\geqslant 1$;

д) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})=\dfrac{1-x^{2^n}}{1-x},\ n\geqslant 1,\ x\neq 1$.

936. Применом математичке индукције доказати да за све наведене целобројне n важе неједнакости

а) $2^n>n^2,\ n\geqslant 5$; *б)* $2^n>n^3,\ n\geqslant 10$; *в)* $n!>2^n,\ n\geqslant 4$; *г)* $n!>3^n,\ n\geqslant 7$;

д) $n!<n^{n-1},\ n\geqslant 3$; *ђ)* $n!<n^{n-2},\ n\geqslant 4$; *е)* $\dfrac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}>\dfrac{1}{n+1},\ n\geqslant 2$;

ж) $\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}>\dfrac{1}{2\sqrt{n}},\ n\geqslant 2$; $*$ *з)* $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n},\ n\geqslant 2$;

и) $\dfrac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}},\ n\geqslant 1$; $*$ *ј)* $(n+1)^n<n^{n+1},\ n>2$;

$*$ *к)* $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{3n+1}>1,\ n\geqslant 1$;

л) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{1}{2},\ n\geqslant 2$;

љ) $\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+2}+\cdots+\dfrac{1}{3n}>\dfrac{1}{3},\ n\geqslant 2$;

м) $\dfrac{n}{2}<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}<n,\ n\geqslant 2$;

н) $(1+h)^n > 1+nh,\ n \geqslant 2,\ h > -1,\ h \neq 0$ (Бернулијева неједнакост);

њ) $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ корена}} < 2,\ n \geqslant 1;$

о) $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n} > \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-1},\ n \geqslant 2.$

△ **937.** Доказати да за све целе бројеве $n \geqslant 0$:

а) $2|n^2+3n$; *б)* $6|n^3+17n$; *в)* $6|4^{n+1}+n^3-n+2$;
г) $133|11^{n+2}+12^{2n+1}$; *д)* $5|7^n+2^{n+2}$; *ђ)* $9|(3n+2)\cdot 4^{n+1}+1$;
е) $11|9^{n+1}+2^{6n+1}$; *ж)* $7|8^n(2^n+1)-9^n-1$; *з)* $10|2^{2^{n+2}}+4$;
$*$ *и)* $2^{n+3}|3^{2^{n+1}}-1$; $*$ *ј)* $15|2^{2^n}-1,\ n \geqslant 2$; $*$ *к)* $168|4^{2n}-3^{2n}-7$;
$*$ *л)* $59|5^{n+2}+26\cdot 5^n+8^{2n+1}$.

938. Применом математичке индукције доказати тврђења:

а) Ако је $a_1=1$ и $a_{n+1}=2a_n+3,\ n\in N$, онда је $a_n=2^{n+1}-3$.

б) Ако је $a_1=2$ и $a_{n+1}=3a_n+n,\ n\in N$, онда је $a_n=\dfrac{11}{12}3^n-\dfrac{2n+1}{4}$.

в) Ако је $a_1=2,\ a_2=3$ и $a_{n+2}=3\cdot a_{n+1}-2\cdot a_n,\ n\in N$, онда је $a_n=1+2^{n+1}$.

г) Ако је $a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=2,\ a_4=3,\ a_5=5,\ldots$ (сваки члан једнак је збиру претходна два члана))*, онда је

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],\ n\in N.$$

д) Ако је $a_1=1$ и $a_2=2$ и $a_{n+2}=(n+1)(a_{n+1}+a_n),\ n\in N$, онда је $a_n=n!$.

ђ) Ако је $a_1=7$ и $a_2=16$ и $a_{n+2}=4(a_{n+1}-2-a_n)+n,\ n\in N$, онда је $a_n=(n+1)\cdot 2^n+n+2$.

△ **939.** Користећи математичку индукцију доказати:

а) $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdots\cos 2^{n-1}x=\dfrac{\sin 2^n x}{2^n\sin x},\ n\in N,\ x\neq k\pi,\ k\in Z;$

б) $\sin x+\sin 3x+\cdots+\sin(2n-1)x=\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x},\ n\in N,\ x\neq k\pi,\ k\in Z;$

в) $\cos x+\cos 3x+\cdots+\cos(2n-1)x=\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x},\ n\in N,\ x\neq k\pi,\ k\in Z;$

г) $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}\cdot\sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}},\ n\in N,\ x\neq 2k\pi,\ k\in Z;$

д) $\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\dfrac{\cos\dfrac{n+1}{2}\cdot\sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}},\ n\in N,\ x\neq 2k\pi,\ k\in Z;$

$*$ *ђ)* $\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}+\cdots+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n^2+n+1}=\operatorname{arctg}(n+1),\ n\in N.$

*) Овај низ се назива Фибоначијевим низом.

940. Доказати следећа тврђења:

а) Коначан број правих у равни дели раван на (ограничена и неограничена) поља. Тада се раван може обојити са две боје тако да свако поље буде обојено једном бојом и да се два поља исте боје додирују теменима, а не страницама.

б) n правих у равни међу којима нема паралелних и не постоје три праве које садрже исту тачку, деле ту раван на $1+\dfrac{n(n+1)}{2}$ делова.

8.3 БРОЈНИ НИЗОВИ

Нека је S непразан скуп. Под низом елемената скупа S подразумевамо функцију која пресликава скуп природних бројева у скуп S. У случају $S \subset R$ ради се о низу реалних бројева, односно о *бројном низу.*

Ако је a_1 слика броја 1, a_2 слика броја 1, итд. онда се низ означава са:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \text{ или } (a_n).$$

Број a_n је тзв. *општи члан* низа.

Низ (a_n) је *ограничен* ако постоји M, $M > 0$, такво да је $|a_n| \leqslant M$ за све $n \in N$.

Ако за свако $n \in N$ важи: $a_{n+1} \geqslant a_n$, $a_{n+1} > a_n$, $a_{n+1} \leqslant a_n$ или $a_{n+1} < a_n$, кажемо да је низ (a_n) *монотон,* и то редом *растући, строго растући, опадајући* или *строго опадајући.*

Ако постоји природан број n_0, такав да је тврђење T_n тачно за све n, $n > n_0$, кажемо да је T_n тачно *за довољно велико* n.

Ако постоји природан број k, $k > 1$, такав да за сваки природан број n и сваки природан број i, $i \leqslant k$, важи једнакост $a_{nk+i} = a_i$, тада кажемо да је низ (a_n) *периодичан.*

△ **941.** Написати првих пет чланова низа чији је општи члан:

а) $a_n = 1$; *б)* $a_n = (-1)^n$; *в)* $a_n = 1 + (-1)^n$; *г)* $a_n = \dfrac{n+1}{n}$;

д) $a_n = (-1)^{(n-1)!}$; *ђ)* $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$; *е)* $a_n = \cos\dfrac{n\pi}{4}$; *ж)* $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$.

△ **942.** Написати следећа три члана низа, уочавајући нека правила на основу којих се ређају дати чланови: *)

а) $(1, -2, 3, -4, \ldots)$; *б)* $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots\right)$; *в)* $\left(1, \dfrac{1}{3}, 9, \dfrac{1}{27}, 81, \ldots\right)$;

г) $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{\sqrt{4}}, \ldots\right)$; *д)* $(0, 2, 0, 4, \ldots)$; *ђ)* M, Ƨ2, Ɛ3, ᔭ4, …

па написати опште чланове низова *а) – д)* (у случају *ђ)* је у питању низ симбола).

*) Могуће је на разне начине продужити низ, јер се на основу неколико чланова не може гарантовати јединствено правило.

△ **943.** Испитати монотоност и ограниченост низа чији је општи члан

а) $a_n = n + 1$; *б)* $a_n = \dfrac{n+1}{n}$; *в)* $a_n = (-1)^n$;

г) $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$; *д)* $a_n = 2n + (-1)^n$; *ђ)* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

△ **944.** Дат је низ $a_n = n^2 + 5(-1)^n$. Да ли је дати низ монотоно растући? Да ли је $a_{n+1} > a_n$ за довољно велико n?

△ **945.** Испитати монотоност и ограниченост низа $a_n = \dfrac{b^n}{n!}$, где је $b > 1$.

$*$ **946.** Доказати да је:

$$\frac{2}{0!+1!+2!} + \frac{3}{1!+2!+3!} + \cdots + \frac{n+1}{(n-1)!+n!+(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!},\ n \in N.$$

$*$ **947.** Доказати да у низу који је дефинисан рекурентном формулом: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 5$ за $n \geqslant 1$, има бесконачно много природних бројева.

$*$ **948.** Низ (a_n) је дефинисан формулом $a_{n+2} \cdot a_n = a_{n+1}^2 + 8$, уз почетне услове: $a_1 = 4$, $a_2 = 6$. Доказати да је израз $9a_n^2 - 128$ квадрат рационалног броја.

$*$ **949.** Низ је задат на следећи начин: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + \sqrt{8a_n^2 + 1}$, за $n \geqslant 1$. Доказати да су чланови овог низа природни бројеви.

$*$ **950.** Нека је a_0 произвољан реалан број и $a_{n+1} = a_n^2 + (a_n - 1)^2$, $n \geqslant 0$. Одредити a_n.

$*$ **951.** Нека је $a_1 = \dfrac{1}{2}$ и $a_n = \dfrac{2n-3}{2n} \cdot a_{n-1}$, $n \geqslant 2$. Доказати да је: $s = a_1 + a_1 + a_3 + \cdots + a_n < 1$, за сваки природан број n.

$*$ **952.** Нека је $x_1 = 1$, $x_2 = 2 + 3$, $x_3 = 4 + 5 + 6$, $x_4 = 7 + 8 + 9 + 10$, ... Израчунати x_n.

$*$ **953.** Низ (a_n) задат је на следећи начин: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$, $n > 1$. Доказати да је $a_{100} > 14$.

$*$ **954.** Нека су a, b, x реални бројеви, различити од нуле. Низ (t_n) је дефинисан на следећи начин: $t_0 = a$, $t_1 = b$, $t_n = xt_{n-1}t_{n+1}$, $n \in N$. Доказати да је овај низ периодичан.

$*$ **955.** Дат је низ: $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_{n+2} = \dfrac{1 + a_{n+1}}{a_n}$, $n \geqslant 1$, где је $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq -1$, $b \neq -1$ и $a + b \neq -1$. Израчунати a_{1999}.

8.4 НЕКИ СПЕЦИЈАЛНИ НИЗОВИ

У овом одељку ћемо размотрити два специјална низа позната као аритметички низ и геометријски низ.

8.4.1 АРИТМЕТИЧКИ НИЗ

Нека су a_1 и d, $d \neq 0$, реални бројеви. Низ (a_n) чији су чланови:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \ldots, a_1 + (n-1)d + \cdots$$

назива се *аритметичким низом.* *)

Општи члан аритметичког низа је

$$a_n = a_1 + (n+1) \cdot d.$$

Број d је *разлика* или *диференција* аритметичке прогресије. Важи једнакост: $a_n - a_{n-1} = d$, за сваки $n \in N$.

За одређивање аритметичког низа треба наћи разлику и први члан (или било који одређен члан).

За три узастопна члана аритметичког низа важи:

$$a_{r-1} + a_{r+1} = 2a_r$$

(средњи члан је аритметичка средина својих суседних чланова).

Слично за „симетричне“ чланове важи:

$$a_{n-r} + a_{n+r} = 2a_n.$$

Користећи се овом особином добијамо формулу за збир првих n чланова аритметичког низа:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

или ако заменимо општи члан:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d).$$

Примећујемо такође да је: $S_n - S_{n-1} = a_n$.

*) Аритметички низ се назива и *аритметичком прогресијом.*

△ **956.** Написати првих пет чланова аритметичког низа, ако је:
а) $a_1 = -3,\ d = 4$; *б)* $a_1 = 2,\ a_{13} = -22$; *в)* $a_n = 5n - 1$;
г) $a_5 = \frac{2}{3},\ a_9 = \frac{26}{9}$; *д)* $d = -3,\ a_3 + a_5 + a_7 = 48$.

△ **957.** Одредити аритметички низ (тј. одредити a_1 и d) ако је:
а) $a_3 = 7,\ S_{12} = 210$; *б)* $a_9 = 13,\ a_2 : a_6 = -2$.

△ **958.** Одредити аритметички низ ако је $a_1 + a_2 + \cdots + 25 + 28 = 105$.

△ **959.** Решити једначину: $7 + 3 - 1 - \cdots - x = -180$, где је лева страна једначине збир узастопних чланова аритметичког низа.

△ **960.** Одредити аритметички низ код којег је збир прва три члана 9, а збир следећа три 72.

∗ **961.** Одредити аритметички низ ако је: $a_2 - a_6 + a_4 + 7 = 0$ и $a_8 - a_7 - 2a_4 = 0$.

△ **962.** Колико чланова аритметичког низа: 20, 16, 12, ... треба сабрати, да би збир био једнак нули?

△ **963.** Одредити аритметички низ ако је:
а) $a_1 + a_5 = 18$ и $a_2 \cdot a_4 = 65$; *б)* $a_2 + a_3 = 28$ и $a_2^2 - a_3^2 = 56$;
в) $a_1 \cdot a_4 = 4$ и $a_2 \cdot a_3 = 6$; *г)* $a_1 + a_3 + a_5 = -12$ и $a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 = 80$;
д) $a_1 + a_2 + a_3 = 6$ и $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 62$; *ђ)* $a_2 + a_4 + a_6 = 3$ и $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_6} = \frac{3}{4}$.

∗ **964.** У аритметичком низу је $a_n = m$ и $a_m = n$, $m \neq n$. Наћи a_p.

∗ **965.** Одредити аритметичку прогресију ако је:
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$ и $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3 = 0,1$.

966. Доказати да за сваки аритметички низ важи једнакост: $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$.

967. Израчунати збир: $1 + \frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \cdots + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $x \in R$.

△ **968.** Између −2 и 63 уметнути 12 бројева, тако да сви заједно чине аритметички низ.

△ **969.** Ако је $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 + 2n$, доказати да је дати низ аритметички.

△ **970.** Одредити аритметичку прогресију која има збир: $S_n = 2n^2 + 3n$.

971. Ако су реални бројеви a, b и c три узастопна члана аритметичког низа, доказати да су решења једначине $ax^2+2bx+c=0$ реална.

$*$ **972.** Ако за аритметички низ важи $S_m = S_n$, $m \neq n$, онда је $S_{m+n} = 0$. Доказати.

$*$ **973.** Могу ли $\sqrt{5}$ и 5 бити чланови аритметичког низа чији је први члан $a_1 = 2$?

974. Дата је функција $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Доказати да разлике: $f(x+1) - f(x)$, $f(x+2) - f(x+1)$ и $f(x+3) - f(x+2), \ldots$ одређују аритметичку прогресију. Коју вредност узима променљива x ако је збир првих пет чланова низа једнак 60?

$\triangle$ **975.** Бројеви $2x-3$, $3x+4$ и $5x+1$ су прва три члана аритметичког низа. Израчунати збир првих x чланова.

$*$ **976.** Наћи све аритметичке низове којима је збир првих n чланова једнак n^2?

$*$ **977.** Одредити све аритметичке прогресије чија је разлика $d = 2$, а однос $S_{3n} : S_n$ не зависи од n.

978. Ако за збир аритметичке прогресије важи услов: $\dfrac{S_m}{S_n} = \dfrac{m^2}{n^2}$, доказати да је $\dfrac{a_m}{a_n} = \dfrac{2m-1}{2n-1}$, за $m \neq n$.

$\triangle$ **979.** Доказати да су $(a+b)^2$, a^2+b^2 и $(a-b)^2$ три узастопна члана једне аритметичке прогресије.

$\triangle$ **980.** Ако су a^2, b^2 и c^2 три узастопна члана аритметичке прогресије, тада су и разломци $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{a+c}$ и $\dfrac{1}{a+b}$ узастопни чланови неке аритметичке прогресије.

981. Ако су позитивни бројеви a_1, a_2, a_3 прва три члана аритметичког низа, тада су и бројеви $\dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}$ узастопни чланови једног аритметичког низа.

982. Ако бројеви a, b и c представљају три узастопна члана аритметичког низа, онда су и бројеви: a^2+ab+b^2, a^2+ac+c^2 и b^2+bc+c^2 узастопни чланови неког аритметичког низа. Доказати.

$*$ **983.** Које услове морају испуњавати реални бројеви a, b, c, да би постојала аритметичка прогресија, таква да је за свако n збир њених првих n чланова једнак $S_n = an^2 + bn + c$?

$*$ **984.** Нека позитивни бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ чине аритметичку прогресију. Доказати да је:

$$\frac{1}{a_1a_n}+\frac{1}{a_2a_{n-1}}+\cdots+\frac{1}{a_na_1}=\frac{2}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right).$$

$*$ **985.** Доказати тврђење: да би бројеви $x_1, x_2, \ldots, x_n$, различити од нуле, чинили аритметичку прогресију, потребно је и довољно да за сваки природан број n, $n \geqslant 2$, буде испуњена једнакост:

$$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\cdots+\frac{1}{x_{n-1}x_n}=\frac{n-1}{x_1x_n}.$$

8.4.2 ГЕОМЕТРИЈСКИ НИЗ

Нека су b_1 и q реални бројеви, $b_1 \neq 0$, $q \neq 1$ и $q \neq 0$. Тада низ бројева (b_n), чији су чланови:

$$b_1,\, b_1q,\, b_1q^2, \ldots, b_1q^{n-1}, \ldots$$

називамо *геометријским низом* (геометријском прогресијом).

Општи члан геометријског низа је

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Број q је *количник* геометријског низа и:

$$q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{b_3}{b_2}=\cdots=\frac{b_{n-1}}{b_n}=\cdots$$

Геометријски низ је одређен првим чланом b_1 и количником q.

За три узастопна члана геометријског низа важи:

$$b_{r-1} \cdot b_{r+1} = b_r^2.$$

(Ако су чланови низа позитивни, средњи члан је геометријска средина својих суседних чланова.)

Збир првих n чланова геометријског низа је:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \cdots + b_1q^{n-1} = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}.$$

$\triangle$ **986.** Одредити геометријски низ (одредити b_1 и q) ако је:

а) $b_1 = -3$ и $b_6 = 96$; *б)* $b_3 = 3$ и $b_6 = 54$;

в) $q = \dfrac{1}{2}$ и $b_4 = 3$; *г)* $b_4 - b_3 = 60$ и $b_5 + b_6 = 80$.

△ **987.** У геометријском низу је $q = 2$ и $S_7 = 635$. Израчунати b_7.

△ **988.** У геометријском низу је $b_1 + b_5 = 51$ и $b_2 + b_6 = 102$. Колико првих чланова низа треба сабрати да би збир био 3069?

△ **989.** Наћи четири броја која образују геометријску прогресију, при чему је трећи већи од првог за 9, а други од четвртог за 18.

△ **990.** Између 1 и 256 уметнути три броја, тако да сви заједно чине геометријски низ.

△ **991.** Производ прва три члана геометријске прогресије је 1728, а њихов збир је 63. Наћи пети члан.

△ **992.** Збир три узастопна члана геометријске прогресије је 62, а збир њихових декадних логаритама је 3. Који су то бројеви?

△ **993.** Збир првих пет чланова геометријског низа, чији је количник 2, износи 93. Одредити шести члан.

994. Одредити три узастопна члана геометријског низа, ако је њихов збир 21, а збир њихових реципрочних вредности је $\dfrac{7}{12}$.

△ **995.** Разлика између другог и првог члана геометријског низа је 18, а између четвртог и трећег је 162. Наћи пети члан.

△ **996.** Број 195 написати у облику збира три броја који чине геометријску прогресију, при чему је трећи за 120 већи од првог.

△ **997.** Ако бројеви $\log m$, $\log n$ и $\log p$ чине геометријски низ, доказати да и $\log_m x$, $\log_n x$ и $\log_p x$ чине геометријску прогресију. ($x > 0$, $m, n, p > 0$ и $m, n, p \neq 1$).

$*$ **998.** Одредити све геометријске прогресије код којих је збир првих 2000 чланова једнак 0, а збир првих 2001 чланова једнак 1.

$*$ **999.** Наћи геометријску прогресију у којој су само првих 10 чланова цели бројеви.

$*$ **1000.** Нека је $\overline{aaa\ldots a}$ број чије су све цифре a, где је $a \neq 0$. Израчунати: $S = \overline{a} + \overline{aa} + \overline{aaa} + \cdots + \overline{aaa\ldots aa}$, збир n таквих бројева.

△ **1001.** Геометријска прогресија се састоји од шест чланова. Збир чланова на непарним местима је 455, а збир чланова на парним местима је 1365. Одредити ову прогресију.

$*$ **1002.** Збир првих n чланова геометријске прогресије је s, а збир њихових реципрочних вредности је t. Изразити производ p тих n чланова преко s, t и n.

1003. Могу ли бројеви 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ бити чланови једног геометријског низа?

1004. Ако бројеви ab, b^2 и c^2 образују аритметичку прогресију, доказати да бројеви b, c и $2b-a$ образују геометријску прогресију.

$*$ **1005.** Збир прва три члана геометријског низа је 91. Ако тим члановима додамо редом, 25, 27 и 1, добићемо три броја који чине аритметички низ. Одредити седми члан датог геометријског низа.

1006. Наћи четири броја, од којих прва три одређују геометријску прогресију, а задња три аритметичку прогресију. Сем тога, збир крајњих бројева је 32, а збир остала два је 24.

1007. Ако бројеви a, b и c образују геометријску прогресију, доказати да $\frac{1}{\log_a N}, \frac{1}{\log_b N}, \frac{1}{\log_c N}$ образују аритметичку прогресију, при чему су a, b, c, N позитивни бројеви, различити од 1.

$\triangle$ **1008.** Аритметички и геометријски низ имају заједнички први члан, број 2, и заједнички трећи члан. Други чланови им се разликују за 4. Одредити ова три броја.

$\triangle$ **1009.** Три позитивна броја образују геометријску прогресију. Ако другом броју додамо 8 добићемо аритметичку прогресију. Ако сад трећем броју додамо 64, поново ћемо добити геометријску прогресију. Одредити ова три броја.

$\triangle$ **1010.** Први, трећи и седми члан једног аритметичког низа образују прва три члана геометријског низа. Колики је количник овог геометријског низа? Које место у аритметичком низу заузима четврти члан геометријског низа?

$\triangle$ **1011.** Први и трећи члан аритметичког низа једнаки су првом и трећем члану геометријског низа. Други члан аритметичког низа је за 2 већи од другог члана геометријског низа, а четврти члан аритметичког низа је за 14 мањи од четвртог члана геометријског. Одредити ова два низа.

1012. Збир прва три члана аритметичког низа је 21. Ако другом члану додамо 2 и трећем 16, добијемо прва три члана једног геометријског низа. Одредити аритметички низ.

1013. У некој аритметичкој прогресији други члан је геометријска средина првог и четвртог. Доказати да четврти, шести и девети члан ове прогресије образују геометријску прогресију. Колики је количник ове геометријске прогресије?

$*$ **1014.** Дата су два аритметичка низа: $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ Познато је да је $a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3$ и да бројеви a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3 чине геометријски низ. Доказати да је $a_1 = b_3$, $a_2 = b_2$ и $a_3 = b_1$.

$*$ **1015.** Бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ чине аритметички низ са разликом d, $d \neq 0$, а бројеви $b_1, b_2, \ldots, b_n$ чине геометијски низ са количником q, $q \neq 1$. Израчунати збир: $S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$.

$*$ 8.4.3 ДИФЕРЕНЦНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Под диференцном једначином k-тог реда подразумевамо једначину:

$$a_{n+k} = F(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}).$$

Решење је сваки низ (a_n) чији чланови задовољавају једначину. Првих k вредности: $a_1, a_2, \ldots, a_k$, једнозначно одређују решење a_n.

1016. Доказати да је низ (a_n) решење једначине, ако су низ и једначина дати са:

а) $a_n = n+1$ и $a_{n+1} = a_n + 1$; *б)* $a_n = 2^{n+3}$; и $a_{n+1} = 2\cdot a_n$;

в) $a_n = \dfrac{1}{2}\cdot 3^{n-1}$ и $a_{n+1} = a_n + 3^{n-1}$; *г)* $a_n = n!$ и $a_{n+1} = (n+1)\cdot a_n$;

д) $a_n = 2^n$ и $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$; *ђ)* $a_n = 3^n$ и $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$;

е) $a_n = \dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}\cdot\sin(n-1)\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$ и $a_{n+1} = a_n + \sin nx$, $x \neq 2k\pi$;

ж) $a_n = \dfrac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}$ и $a_{n+1} = a_n\cdot\cos 2^n x$, $x \neq k\pi$.

1017. Решити диференцне једначине:

а) $a_{n+1} = a_n + d$; *б)* $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{n(n+1)}$; *в)* $a_{n+1} = a_n + n^2$;

г) $a_{n+1} = a_n + b_n$, где је (b_n) дати низ.

1018. Решити диференцне једначине:

а) $a_{n+1} = a_n\cdot q$, $q \neq 0$ и $q \neq 1$; *б)* $a_{n+1} = na_n$ *в)* $a_{n+1} = a_n\cdot 2^n$;

г) $a_{n+1} = a_n\cdot b_n$, где је (b_n) дати низ, $b_n \neq 0$ за све n.

$*$ **1019.** Наћи оно решење диференцне једначине које задовољава дати почетни услов:

а) $a_{n+1} = a_n^3$, $a_1 = 2$; *б)* $a_{n+1} = a_n(2 - t\cdot a_n)$, $t \neq 0$, $a_1 = 1$.

1020. Решити диференцне једначине:
а) $a_{n+1} = 2a_n + 3$; *б)* $a_{n+1} = x \cdot a_n + n$;
в) $a_{n+1} = x \cdot a_n + b_n$, где је (b_n) дати низ.

1021. Решити диференцне једначине:
а) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$; *б)* $a_{n+2} = -4a_{n+1} - 4a_n$;
в) $a_{n+2} = 2pa_{n+1} - p^2 a_n$, $p \neq 0$; *г)* $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + a_n}{2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$.

1022. Решити диференцне једначине:
а) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$; *б)* $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$;
в) $a_{n+2} = (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha \cdot \beta \cdot a_n$, $\alpha \cdot \beta \neq 0$ и $\alpha \neq \beta$.

1023. Решити диференцну једначину: $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + 1$. Наћи оно решење које задовољава почетни услов: $a_1 = 3$, $a_2 = 5$.

1024. Наћи оно решење диференцне једначине $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, које задовољава почетни услов: $a_1 = a_2 = 1$.

1025. Наћи оно решење диференцне једначине $a_{n+2} = 2\sqrt{2}a_{n+1} - 2a_n$, које задовољава почетни услов: $a_1 = a_2 = 1$.

8.5 ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НИЗА

Нека је дат низ (a_n). Ако постоји реалан број a, такав да за сваки позитиван број ε, у интервалу $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ има бесконачно много чланова низа, тада је a *тачка нагомилавања* низа (a_n).

Број a је *гранична вредност* низа (a_n), у ознаци $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, ако и само ако за сваки позитиван број ε постоји природан број n_0, такав да је $|a_n - a| < \varepsilon$ за сваки $n > n_0$. Ако има граничну вредност низ је *конвергентан,* иначе је *дивергентан.*

Низ чија је гранична вредност нула назива се *нула низ.*

Важне су следеће теореме:

Монотон и ограничен низ је конвергентан.

Ако су (a_n), (b_n), (c_n) низови такви да за довољно велико n важи: $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ и при томе је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, тада је $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, онда је:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b \qquad \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \text{ (уз услов: } b_n \neq 0 \text{ и } b \neq 0).$$

Затим је:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \overset{\text{def}}{\iff} (\forall A \in R)(\exists n_0 \in N) \text{ такав да је } a_n > A \text{ за } \forall n > n_0.$$

Слично се дефинише $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Познат је низ $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Он је монотон и ограничен, конвергентан је, а гранична вредност овог низа је позната као број e, и $e = 2,7182\ldots$ је ирационалан број.

△ **1026.** Дат је низ $a_n = \dfrac{n+1}{n}$. По дефиницији доказати:

а) (a_n) није нула низ; *б)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

△ **1027.** По дефиницији доказати да је:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+4}{5n+6}=\dfrac{3}{5}$; *б)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$; *в)* $\lim\limits_{n\to\infty}10^{10-n}=0$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n+4}{n^2+2n+3}=2$; *д)* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=1$; *ђ)* $\lim\limits_{n\to\infty}3^n=+\infty$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\log n=+\infty$; *ж)* $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\cdot n=\infty$;*) *з)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n^2}=0$.

△ **1028.** Лако можемо доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c}{a_n}=0$, ако је $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ и c је константа. Користећи се овим и сличним особинама израчунати следеће граничне вредности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$; *б)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^3}\right)$; *в)* $\lim\limits_{n\to\infty}(n-100)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3-n^2-20)$; *д)* $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^5+100n^4-n+1)$; *ђ)* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{2n+3}$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+5}{n^2+1}$; *ж)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n^2+1}{-n^2+1}$; *з)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+3n^2+1}{3n^3+5}$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-3}$; *ј)* $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$.

△ **1029.** Израчунати: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_pn^p+a_{p-1}n^{p-1}+\cdots+a_1n+a_0}{b_qn^q+b_{q-1}n^{q-1}+\cdots+b_1n+b_0}$, где је $a_p\cdot b_q\neq 0$, $p,q\in N$.

△ **1030.** Наћи граничне вредности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$; *б)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{(n+1)^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3+1}$; *г)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)}{n^2(1\cdot3+2\cdot4+\cdots+n(n+2))}$;

ђ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$;

*) $a_n\to\infty$ значи: за довољно велико n је $|a_n|>M$ за свако M. Овде није дефинисан „знак (+ или −) за ∞“.

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

$*$ **1031.** Доказати да је:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}}=1$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2-2^2+3^3-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2}{(-1)^{n-1}n^2}=\dfrac{1}{2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!}{(n+1)!}=1$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{1}{2}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\dfrac{4^3-1}{4^3+1}\cdots\dfrac{(n-1)^3-1}{(n-1)^3+1}\cdot\dfrac{n^3-1}{n^3+1}=\dfrac{2}{3}$.

1032. Израчунати граничне вредности:

$\triangle$ *а)* $\lim\limits_{n\to\infty}q^n$, $q\in R$; $\triangle$ *б)* $\lim\limits_{n\to\infty}(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})$, $q\in R$;

$\triangle$ *в)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2\cdot 4^n}{3\cdot 3^n+2^{2n+3}}$; *г)* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$, $a>0$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$;

ђ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n!}{n}$; *е)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!}$; *ж)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}$.

$*$ **1033.** Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\cdots+\dfrac{n}{3^n}\right)$.

1034. Доказати да је дати низ (a_n) монотон и ограничен, па користећи ту чињеницу наћи његову граничну вредност.

$\triangle$ *а)* $a_n=\dfrac{1}{n!}$; $\triangle$ *б)* $a_n=\dfrac{c^n}{n!}$, $c>0$;

в) $a_n=\dfrac{n^n}{3^n\cdot n!}$; *г)* $a_n=\dfrac{15}{3}\cdot\dfrac{16}{5}\cdots\dfrac{n+14}{2n+1}$;

д) $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ (у изразу има n корена).

$*$ **1035.** Доказати да је дати низ (a_n) конвергентан, па наћи његову граничну вредност:

$*$ *а)* $0<a_n<1$ и $a_{n+1}(1-a_n)\geqslant\dfrac{1}{4}$; *б)* $a_1>0$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{c}{a_n}\right)$, $c>0$;

$*$ *в)* $c > 0$, $a_1 > 0$ и $a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2a_n + \frac{c}{a_n^2}\right)$, $n \geqslant 1$;

г) $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)a_n + \frac{c}{a_n^{k-1}}\right)$, $c > 0$, $k \in N$;

д) $0 < a_1 < 1$, $a_{n+1} = a_n(2 - a_n)$; *ђ)* $0 < a_1 < \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n - 2a_n^2$;

е) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 2}$; *ж)* $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n - 4}{a_n + 5}$;

з) $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{2a_n - 4}{a_n + 6}$; *и)* $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n + 3}$;

$*$ *ј)* $a_1 < 0$, $a_{n+1} = \frac{3a_n - 1}{3 - a_n}$.

8.5.1 ГЕОМЕТРИЈСКИ РЕД

Посматрајмо збир:

$$S = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \cdots + b_1q^{n-1} + \cdots = b_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} b_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = \lim_{n\to\infty} b_1\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Према решењу задатка 1032 *б)*, збир конвергира за $|q| < 1$ и:

$$S = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \cdots = \frac{b_1}{1-q}.$$

Ово је тзв. *геометријски ред*. Ако је $|q| \geqslant 1$ геометријски ред дивергира.

$\triangle$ **1036.** Испитати конвергенцију следећих сума. За конвергентне редове одредити збир.

а) $2+1+\frac{1}{2}+\cdots$; *б)* $12-6+3-\cdots$; *в)* $1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}+\cdots$;

г) $2^x\cdot 2^{3x^2}\cdot 2^{9x^3}\cdots$; *д)* $\frac{x}{y}-\frac{x^2}{y^2}+\frac{x^3}{y^3}-\cdots$, $y\neq 0$; *ђ)* $\log_2\left(2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdots\right)$.

$\triangle$ **1037.** Збир бесконачне опадајуће геометријске прогресије износи 6. Одредити ову прогресију ако је $q = \frac{2}{3}$.

$\triangle$ **1038.** Одредити геометријску прогресију: $3 + b_2 + b_3 + \cdots = 2$.

$\triangle$ **1039.** Одредити x из услова: $\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[3x]{a^2}\cdot\sqrt[9x]{a^4}\cdots = a^{3x}$, $a > 0$, $x \in N$.

$\triangle$ **1040.** Одредити x из услова:

$$1 + \log_2\cos x + \log_2^2\cos x + \log_2^3\cos x + \cdots = \frac{2}{3},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

1041. Код бесконачне опадајуће геометријске прогресије збир свих чланова са непарним редним бројем износи 36, а збир осталих је 12. Написати ову геометријску прогресију.

1042. Збир S бесконачне геометријске прогресије је за 2 већи од збира прва три члана. Збир првих шест чланова те прогресије је 3. Наћи S.

1043. Саставити геометријску прогресију, такву да је сваки њен члан два пута већи од збира свих чланова који следе за њим. Познато је да пети члан прогресије износи 16.

1044. Одредити количник геометријске прогресије, којој збир првих шест чланова представља $\frac{7}{8}$ вредности збира свих чланова (има их бесконачно много).

1045. Збир првих осам чланова геометријске прогресије је 15 пута већи од збира свих осталих чланова (има их бесконачно много). Одредити количник.

1046. Збир свих чланова опадајуће геометријске прогресије износи 56, а збир квадрата чланова те прогресије износи 448. Одредити ту прогресију.

1047. Хипотенуза једнакокраког правоуглог троугла има дужину 1. Његова катета је хипотенуза новог једнакокраког правоуглог троугла. Затим је на исти начин над катетом другог конструисан трећи правоугли једнакокраки троугао, итд. Израчунати збир површина свих, бесконачно много оваквих троуглова.

1048. У квадрат странице a је уписан нов квадрат, чија су темена средишта страница датог квадрата. Затим је у други квадрат на исти начин уписан трећи, итд. Наћи збир обима и збир површина свих бесконачно много овако добијених квадрата.

1049. На свакој страници квадрата, дужине a, почев од једног темена и у истом смеру контуре се одређују тачке, које деле странице у односу $2:1$. Те тачке су темена другог квадрата. Из другог се на исти начин добије трећи, итд. Наћи збир површина свих тако добијених квадрата.

1050. У круг полупречника r уписан је квадрат. У тај квадрат уписан круг, па у круг поново квадрат, и тако до бесконачности. Израчунати збир свих полупречника кругова и збир површина тих кругова.

1051. У једнакостранични троугао странице a је уписан круг. У овај круг је уписан једнакостраничан троугао. Затим је у нови троугао уписан круг, итд. до бесконачности. Израчунати збир обима и збир површина ових кругова.

$*$ **1052.** У праву кружну купу полупречника основе r и висине H, уписан је низ сфера на следећи начин. Прва додирује основу и додирује омотач по кружној линији. Следећа сфера додирује споља прву сферу и омотач купе по кружној линији, итд. Израчунати збир запремина свих лопти.

1053. У праву правилну четворострану призму је уписана друга призма, чија су темена основа средишта основних ивица прве призме. На исти начин се у другу призму упише трећа, итд до бесконачности. Основна ивица дате призме је a и висина је H. Израчунати збир запремина свих тако добијених призми.

1054. Дата је коцка ивице a и у њу уписана лопта. Затим је у ту лопту уписана коцка, па у коцку лопта, итд. Израчунати збир запремина свих лопти.

1055. Израчунати: $s=\sqrt{a\sqrt[5]{a\sqrt{a\sqrt[5]{a\dots}}}}$, $a>0$.

$*$ **1056.** Израчунати збир:

$$\frac{1}{1\cdot5\cdot8}+\frac{1}{5\cdot8\cdot11}+\cdots+\frac{1}{(2+3n)(5+3n)(8+3n)}+\cdots$$

$*$ **1057.** Нека је $|q|<1$. Израчунати $T_n=1+3q+5q^2+\cdots+(2n+1)^2q^n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$.

$*$ **1058.** Нека је $|q|<1$. Израчунати $S_n=1+2^2q+\cdots+(n+1)^2q$ и $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

$*$ **1059.** Нека је S_n збир бесконачне опадајуће геометријске прогресије са првим чланом a^n и количником $q=r^n$. Одредити збир: $\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\cdots$, ако је $|r|<1$ и $|a|>1$.

$*$ **1060.** Нека је $s=1+q+q^2+\cdots$ $|q|<1$, и $\sigma=1+Q+Q^2+\cdots$, $|Q|<1$. Израчунати у функцији s и σ збир: $1+qQ+q^2Q^2+\cdots$.

ДЕВЕТА ГЛАВА

9 КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ

Са комплексним бројевима смо се упознали прошле године. То су бројеви облика $a+bi$, где су a и b реални бројеви а i имагинарана јединица, дефинисана једнакошћу: $i^2 = -1$. Бројеви a и b су *реални* и *имагинарни* делови комплексног броја $z = a + bi$, што означавамо са: $a = \operatorname{Re} z$ и $b = \operatorname{Im} z$.

Подсетимо се: ако су z_1 и z_1 комплексни бројеви, $z_1, z_2 \in K$, и $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$, тада:

$z_1 = z_2 \iff a = c \wedge b = d$,

$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$,

$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$,

Број $\bar{z} = a - bi$ је *конјуговани* број броја $z = a + bi$.

Важне следеће једнакости:

$z + \bar{z} = 2a$, одакле је $\operatorname{Re} z = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z})$.

$z - \bar{z} = 2bi$, одакле је $\operatorname{Im} z = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$. Број $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ је *апсолутна вредност* или *модуо* комплексног броја и $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

9.1 КОМПЛЕКСНА РАВАН

Комплексна раван је координатна раван у којој је сваки комплексан број $z_1 = a + bi$ представљен тачком $M(a, b)$. Збир комплексних бројева z_1 и z_2, представљених тачкама M и N, представљен је тачком P, таквом да је $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$. Комплексни бројеви z и $\bar{z}$ представљени су тачкама симетричним у односу на Ox осу, а z и $-z$ тачкама симетричним у односу на координатни почетак.

Оса Ox је *реална.* а оса Oy *имагинарна.*

Уочимо комплексан број $z = a + bi$ и јединични вектор осе Ox, тј вектор $\vec{i}$.

Нека је $\alpha = \sphericalangle(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$, где је $M(a, b)$. Аргумент комплексног броја $z = a + bi \neq 0$ једнак је

$$\arg z = \begin{cases} \alpha, & \text{ако се } M \text{ налази у затвореном I или II квадранту,} \\ -\alpha, & \text{у осталим случајевима.} \end{cases}$$

$\arg(0) = \arg(0 + 0 \cdot i)$ се не дефинише.

1061. Дати су комплексни бројеви $z_1 = 3 + i$ и $z_2 = 2 - i$. Израчунати и представити у комплексној равни бројеве:

а) $z_1 + z_2$; *б)* $z_1 - 2z_2$; *в)* $|z_1|$; *г)* $|z_1| \cdot z_2$; *д)* $\dfrac{z_1}{z_2}$; *ђ)* $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

1062. Израчунати:

а) i^{1998}; *б)* i^{-15}; *в)* $(1+i)^2$; *г)* $(1+i)^{17}$;
д) $(1+i\sqrt{3})^2$; *ђ)* $(1+i\sqrt{3})^3$; *е)* $(1+i\sqrt{3})^{1998}$.

1063. Израчунати $z_n = \dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$.

$*$ **1064.** Одредити све целе бројеве m, тако да је $(1+i)^m = (1-i)^m$.

$*$ **1065.** Нека је $\omega = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Доказати де је:
$(a + b + c)(a + b\omega + c\omega^2) \cdot (a + b\omega^2 + c\omega) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

1066. Решити једначине.

а) $z^2 = i$; *б)* $z^2 = 3 - 4i$; *в)* $z^2 - (2 - i)z - 1 + 7i = 0$;
г) $|z| - \bar{z} = 1 + 2i$; *д)* $|z| + z = 2 + i$; *ђ)* $|z| = 2$.

$*$ **1067.** Доказати да систем једначина: $\begin{matrix} z + \bar{z} = 4 \\ |z| = 1 \end{matrix}$, нема решења.

1068. У комплексној равни представити све комплексне бројеве z, такве да је:

а) $|z| < 1$; *б)* $|z - i| \leqslant 2$; *в)* $|z + 1| \leqslant 2$ и $|z - 1 - i| \leqslant \sqrt{2}$;
г) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z}{1+i}\right) < 1$; *д)* $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z}{\bar{z}}\right) \geqslant 1$; *ђ)* $\dfrac{|z| - 1}{|z - 1| - 1} \leqslant 0$.

1069. Одредити аргумент комплексног броја z ако је:

а) $z = 3$; *б)* $z = 2i$; *в)* $z = -3$;
г) $z = -i$; *д)* $z = 1 + i$; *ђ)* $z = -1 - i$;
е) $z = -1 + i\sqrt{3}$; *ж)* $z = 1 - i\sqrt{3}$; *з)* $z = 0$.

1070. Међу свим комплексним бројевима z таквим да је $|z| \leqslant 2$ и $\operatorname{Re}(z(1+i)) \leqslant 0$, наћи онај код ког је:

а) $\operatorname{Re} z$ највеће; *б)* $\operatorname{Re} z$ најмање; *в)* $\operatorname{Im} z$ највеће; *г)* $\operatorname{Im} z$ најмање.

1071. Ако је $S = \left\{ z \in K : |z - 1 - i| \leqslant \frac{1}{2} \right\}$, наћи:

а) $\max|z|,\ z \in S$; *б)* $\min|z|,\ z \in S$; *в)* $\max(\arg z),\ z \in S$; *г)* $\min(\arg z),\ z \in S$.

1072. Ако је $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$, наћи $\arg z$.

$*$ **1073.** Ако су z_1 и z_2 комплексни бројеви, такви да је $|z_1| = |z_2| = 1$ и $z_1 \cdot z_2 \neq -1$, онда је $z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ реалан број. Доказати.

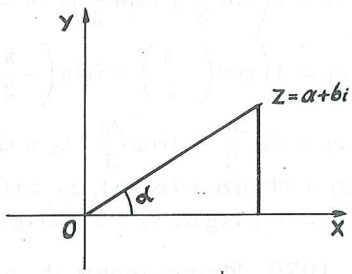
$*$ **1074.** Нека су z_1, z_2, z_3 комплексни бројеви једнаких модула и нека одређују темена једнакостраничног троугла. Доказати да бројеви: $z_1 z_2$, $z_2 z_3$ и $z_3 z_1$ такође одређују темена једнакостраничног троугла.

$*$ **1075.** Дати су комплексни бројеви z_1 и z_2, такви да је $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$ и $\operatorname{Im} z_2 \neq 0$. Доказати да су бројеви $z_1 + z_2$ и $z_1 \cdot z_2$ истовремено реални ако и само ако је $z_1 = \bar{z}_2$.

9.2 СТЕПЕНОВАЊЕ И КОРЕНОВАЊЕ КОМПЛЕКСНИХ БРОЈЕВА

Нека је $z = a + bi \neq 0$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z + 2k\pi$ где је $k \in Z$. Тада се комплексан број може представити у *тригонометријском облику* (видети слику: $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$):

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad r > 0$$



Величине r и φ једнозначно одређују реалан и имагинаран део комплексног броја z: $a = r\cos\varphi$ и $b = r\sin\varphi$. Апсолутна вредност $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ једнозначно је одређена, али величина φ није. Она се одређује из услова: $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$. Када је $a \neq 0$ може се израчунати $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$ и тада је

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arcctg} \dfrac{b}{a} & \text{за } a > 0 \\ \operatorname{arcctg} \dfrac{b}{a} + \pi & \text{за } a < 0. \end{cases}$$

Ако су $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ тригонометријски облици комплексних бројева z и z_1 тада је:

$$z = z_1 \iff r = r_1 \wedge \varphi = \varphi_1 + 2k\pi,\ k \in Z$$

$$z\cdot z_1 = r\cdot r_1\Big(\cos(\varphi+\varphi_1)+i\sin(\varphi+\varphi_1)\Big)$$
$$\frac{z}{z_1}=\frac{r}{r_1}\Big(\cos(\varphi-\varphi_1)+i\sin(\varphi-\varphi_1)\Big)$$
$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi,\ n\in N \text{ (Муаврова формула)}$$
$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),\ n\in N$$
$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\Big),\ k\in\{0,1,\dots,n-1\}.$$

Напомена: Под $\sqrt[n]{z}$ подразумевамо све комплексне бројеве z_i такве да је $z_i^n=z$ а не, као у случају реалних бројева, највише један (највећи).

1076. Написати у тригонометријском облику бројеве:

а) 3; *б)* -2; *в)* $2i$; *г)* $-i$; *д)* $1+i$;
ђ) $-1-i$; *е)* $2\sqrt{3}+2i$; *ж)* $1+2i$; *з)* $-2+i$.

1077. Написати за свако $\alpha\in R$ у тригонометријском облику комплексне бројеве:

а) $\sin\alpha+i\cos\alpha$; *б)* $\cos\alpha-i\sin\alpha$; *в)* $\sin\alpha-i\cos\alpha$;
г) $1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$; *д)* $1+\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{7}$; *ђ)* $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$.

1078. Израчунати производ и количник комплексних бројева z_1 и z_2 представљајући их у тригонометријском облику, ако је:

а) $z_1=2\Big(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\Big)$, $z_2=3\Big(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\Big)$;

б) $z_1=4\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{3}\Big)+i\sin\Big(-\frac{\pi}{3}\Big)\Big)$, $z_2=2\Big(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\Big)$;

в) $z_1=\sin\frac{2\pi}{3}+i\cos\frac{2\pi}{3}$, $z_2=\sin\frac{\pi}{3}-i\cos\frac{\pi}{3}$;

г) $z_1=r(\sin\alpha+i\cos\alpha)$, $z_2=r(\cos\alpha-i\sin\alpha)$;

д) $z_1=1+i\operatorname{tg}\alpha$, $z_2=1+i\operatorname{ctg}\alpha$, $\alpha\in(0,\pi)$.

1079. Израчунати z^n, ако је:

а) $n=2$, $z=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$; *б)* $n=2$, $z=-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$;

в) $n=3$, $z=\cos 0+i\sin 0$; *г)* $n=3$, $z=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$;

д) $n=3$, $z=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$; *ђ)* $n=1998$, $z=\sqrt{3}+i$;

е) $n=1997$, $z=\sqrt{3}-i$; *ж)* $n=7$, $z=\sin\frac{\pi}{7}+i\cos\frac{\pi}{7}$;

з) $n=1988$, $z=1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

1080. Доказати следећа тврђења:

а) Ако је $z = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$, $r > 0$ и $n \in N$, онда је $z^n = r^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)$.
б) Ако је $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$ и $n \in Z$, онда је $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.
в) Ако је $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r \in R$, $n \in Z$ и $r > 0$ за $n \leqslant 0$, онда је $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

$*$ **1081.** Доказати да је $\left(\dfrac{1 + i\operatorname{tg}\alpha}{1 - i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n = \dfrac{1 + i\operatorname{tg} n\alpha}{1 - i\operatorname{tg} n\alpha}$, $n \in N$, $\cos\alpha \neq 0$.

1082. Израчунати $(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n$, $n \in N$.

$*$ **1083.** Ако је $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\alpha$, $\alpha \in R$ и $n \in N$, онда је $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos n\alpha$.

1084. Израчунати

а) $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$; *б)* $\left(1 - \dfrac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{24}$; *в)* $\dfrac{(-1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1 - i)^{20}} + \dfrac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{20}}$.

1085. Користећи формулу за збир првих n чланова геометријске прогресије и Муаврову формулу израчунати суме:

а) $\cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{4\pi}{5}$; *б)* $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$;
в) $\cos\dfrac{2\pi}{9} + \cos\dfrac{4\pi}{9} + \cos\dfrac{6\pi}{9} + \cos\dfrac{8\pi}{9}$; *г)* $\cos\dfrac{\pi}{5} + \cos\dfrac{3\pi}{5}$;
д) $\cos\dfrac{\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} + \cos\dfrac{5\pi}{7}$; *ђ)* $\cos\dfrac{\pi}{9} + \cos\dfrac{3\pi}{9} + \cos\dfrac{5\pi}{9} + \cos\dfrac{7\pi}{9}$.

1086. Израчунати суме:

а) $S_1 = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$; *б)* $S_2 = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$; $x \neq 2k\pi$;
$*$ *в)* $S_3 = 1 + 2\cos x + 2^2\cos 2x + \cdots + 2^n\cos nx$, x је реалан број.

1087. Користећи Муаврову формулу преко $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ изразити:

а) $\cos 2\alpha$ и $\sin 2\alpha$; *б)* $\cos 3\alpha$ и $\sin 3\alpha$; *в)* $\cos 4\alpha$ и $\sin 4\alpha$.

1088. Израчунати:

а) $\sqrt{i}$; *б)* $\sqrt[3]{i}$; *в)* $\sqrt[3]{2 - 2i}$; *г)* $\sqrt[4]{-4}$; *д)* $\sqrt[6]{1}$; *ђ)* $\sqrt[6]{-27}$.

1089. Израчунати:

а) $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; *б)* $\sqrt[8]{\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$; *в)* $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$;

г) $\sqrt[6]{\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^7}{(1-i)^4+4i\sqrt{3}}}$; *д)* $\sqrt[4]{\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^5}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right)^{10}-1}}$.

1090. Доказати да су за свако $n \in N$ сви $\sqrt[n]{1}$ степени једног од њих.

1091. Израчунати: $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$, где је $z=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$.

1092. Доказати следећа тврђења:

а) збир свих n-тих корена из 1 једнак је 0;
б) производ свих n-тих корена из 1 једнак је $(-1)^{n-1}$.

1093. Решити једначину: $\dfrac{16}{(\bar{z}-1)^3}-1+i\sqrt{3}=0$.

1094. Решити једначину: $\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} = -1$.

1095. Нека је $z_1 \neq 0$. Сва решења једначине $z^n = z_1$ су темена правилног n-тоугла у комплексној равни. Доказати.

1096. Доказати да је $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2+z_1^2)(2+z_2^2)(2+z_3^2)$, где су z_1, z_2, z_3 међусобно различита решења једначине $z^3=1$.

1097. Одредити све комплексне бројеве z, тако да бројеви z, $\dfrac{1}{z}$, и $1-z$ имају једнаке модуле, па за тако нађено z израчунати: $\sqrt[3]{\left(z+\dfrac{1}{z}+i\right)^5}$.

1098. Решити једначину: $1+z+z^2+z^3+z^4=0$, па затим израчунати $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ и $\cos\dfrac{\pi}{5}$.

1099. Решити једначину: $\bar{z}=z^5$.

1000. Решити једначине:

а) $(z+1)^8=(z-1)^8$; *б)* $(z+i)^8=(z-i)^8$.

ДЕСЕТА ГЛАВА

10 ПОЛИНОМИ

У првом разреду средње школе срели смо се са појмом полинома над пољем реалних бројева. У овој глави посматраћемо полиноме који зависе од комплексне променљиве, а чији су коефицијенти комплексни и реални бројеви. Многи ставово о ралним полиномима преносе се и на комплексне.

10.1 ПОЛИНОМИ НАД ПОЉЕМ КОМПЛЕКСНИХ БРОЈЕВА

Под полиномом n-тог степена над пољем комплексних бројева подразумеваћемо израз облика

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

где је z комплексна променљива, коефицијенти $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ комплексни бројеви, $a_n \neq 0$ и $n \in N_0 = N \cup \{0\}$.

Два полинома су једнака ако имају исте степене и ако су им коефицијенти уз исте степене једнаки. Такође полиноми $P(z)$ и $Q(z)$ су једнаки акко је за свако $z \in C$ комплексан број $P(z)$ једнак комплексном броју $Q(z)$.

Два полинома над пољем комплексних бројева се сабирају, одузимају и множе исто као и полиноми над пољем реалних бројева.

Ако су $P(z)$ и $Q(z)$ два полинома при чему $Q(z)$ није нула и ако постоји полином $S(z)$ такав да је $P(z) = Q(z) \cdot S(z)$, онда кажемо да је полином $P(z)$ дељив полиномом $Q(z)$ при чему је $S(z)$ количник полинома $P(z)$ и $Q(z)$.

Комплексан број a такав да је $P(a) = 0$ назива се нулом или кореном полинома $P(z)$.

Ако су $P(z)$ и $Q(z)$ полиноми, при чему је $Q(z)$ различит од нуле, онда постоје тачно по један полином $S(z)$ и $R(z)$, такви да је $P(z) = Q(z)S(z) + R(z)$ и да је степен полинома $R(z)$ мањи од степена полинома $Q(z)$. $S(z)$ је количник, а $R(z)$ остатак при дељењу полинома $P(z)$ полиномом $Q(z)$.

Остатак при дељењу полинома $P(z)$ полиномом $(z-a)$ једнак је $P(a)$ (Безуова теорема).

Полином $P(z)$ дељив је полиномом $(z-a)$ акко је $P(a) = 0$.

Највећи заједнички делилац полинома $P(z)$ и $Q(z)$, различитих од нуле, је полином $S(z)$ нејвећег степена међу делиоцима полинома $P(z)$ и $Q(z)$.

Најмањи заједнички садржалац полинома $P(z)$ и $Q(z)$ је полином $T(z)$ најмањег степена међу полиномима различитим од нуле дељивим са $P(z)$ и $Q(z)$.

Основни став алгебре: Сваки полином над пољем комплексних бројева, степена $n \geqslant 1$, има бар једну нулу.

Сваки полином $P_n(z)$, $n \geqslant 1$, има n нула: $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и може се раставити на линеарне чиниоце (факторе):

$$P_n(z) = a_n(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n),$$

где је a_n коефицијент уз z^n. Ако се чинилац $z - z_1$ појављује k пута, онда кажемо да је комплексан број z_1 нула k-тог реда.

Полином $P(z)$ дељив је полиномом $Q(z)$ акко је свака нула k-тог ($k \geqslant 1$) реда полинома $Q(z)$ истовремено нула полинома $P(z)$ реда не мањег од k.

△ **1101.** Наћи збир разлику и производ полинома $P(z)$ и $Q(z)$ ако је:
а) $P(z) = 2z^4 - z^3 + z^2 + z + 1$, $Q(z) = z^2 - 3z + 1$;
б) $P(z) = z^3 + z^2 - z - 1$, $Q(z) = z^2 - 2z - 1$;
в) $P(z) = z^2 + 1$, $Q(z) = iz^2 + (2+i)z + 1$;
г) $P(z) = (1+i)\cdot z + 2 - i$, $Q(z) = z + 3i$.

△ **1102.** Наћи количник и остатак при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $Q(x)$ ако је:
а) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$, $Q(x) = x^2 - 3x + 1$;
б) $P(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$, $Q(x) = 3x^2 - 2x - 1$;
в) $P(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x$, $Q(x) = x + 3$;
г) $P(x) = 4x^3 + x^2$, $Q(x) = x + 1 + i$;
д) $P(x) = x^4 + (2+i)x^3 + ix^2 + 1$, $Q(x) = x^2 + ix$.

△ **1103.** Количник полинома $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ и полинома $(x-a)$ је полином $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0$, а остатак је R. Изразити коефицијенте полинома $Q(x)$ и остатак R преко коефицијената полинома $P(x)$ и броја a. (Тражи се заправо тзв. Хорнерова шема.)

△ **1104.** Користећи Хорнерову шему наћи количник и остатак при дељењу:
а) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ са $x - 1$;
б) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ са $x + 1$;
в) $x^3 - x^2 - x$ са $x + 1 - 2i$;
г) $x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7$ са $x + 2 + i$.

△ **1105.** Користећи Хорнерову шему полином $P(x)$ написати у облику збира степена бинома $x - \alpha$, ако је:
а) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x + 1$, $\alpha = -1$; *б)* $P(x) = x^5$, $\alpha = 1$;
в) $P(x) = x^4 + 2ix^3 - (1 + i)x^2 - 3x + 7 + i$, $\alpha = -i$;
г) $P(x) = x^4 + (3 - 8i)x^3 + (21 + 18i)x^2 - (33 + 20i)x + 7 + 18i$, $\alpha = -1 + 2i$.

△ **1106.** Испитати:
а) Да ли је $x = 2$ корен полинома $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ и ког је реда;
б) Да ли је $x = -1 - i$ корен полинома $x^3 + (3 + 2i)x^2 + (2 + 4i)x + 2i$ и ког је реда.

△ **1107.** *а)* Ако полином $P(x)$ са комплексним коефицијентима при дељењу са $x - 1$ даје остатак 2, а при дељењу са $x - 2$ даје остатак 3, колики остатак даје при дељењу са $(x - 1)(x - 2)$?
б) Наћи све такве полиноме $P(x)$ првог и другог степена.

△ **1108.** Полином $P(x)$ са комплексним коефицијентима при дељењу са $x - i$ даје остатак $2i$, а при дељењу са $x + 1 - i$ даје остатак i. Наћи остатак при дељењу са $(x - i)(x + 1 - i)$.

△ **1109.** Наћи остатак дељења полинома $P(x)$ са $(x - 1)(x^2 + 1)$ ако је остатак дељења полинома $P(x)$ са $x - 1$ једнак 1, а са $x^2 + 1$ једнак $x + 2$.

1110. Наћи остатак при дељењу полинома $P(x) = x^{1998} + 3x^{100} + x + 1$ полиномом $Q(x)$ ако је
а) $Q(x) = x^2 - 1$; *б)* $Q(x) = x^2 + 1$; *в)* $Q(x) = x^2 + 2x + 2$;
г) $Q(x) = x^7 + 1$.

△ **1111.** Одредити комплексне бројеве A и B такве да полином $P(x) = Ax^4 + Bx^3 + 1$ буде дељив са: *а)* $(x - 1)^2$; *б)* $(x - 1)^2$; *в)* $(x - 1 - i)^2$.

1112. Одредити комплексне бројеве A и B такве да полином $P(x) = Ax^{n+1} + Bx^n + 1$, $n \in N$, буде дељив са $x^2 - 2x + 1$.

1113. *а)* Нека је $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ са комплексним коефицијентима дељив са $x - a$. Полином $P(x)$ је дељив са $(x - a)^2$ ако је полином $P'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1$

дељив са $x-a$. Доказати;
б) користећи резултат под *а)* решити претходна два задатка;
в) наћи све вишеструке нуле полинома $P(x)=x^4+x^3-7x+5$;
г) за које $a \in C$ полином $P(x)=x^5-ax^2-ax+1$ има вишеструку нулу $x=-1$.

1114. Под којим условима полином $P(x) = x^5 + Ax^3 + B$ са комплексним коефицијентима има вишеструки корен (нулу)?

△ **1115.** Наћи НЗД и НЗС полинома $P(x)$ и $Q(x)$ ако је
а) $P(x)=(x-1)^3(x-2)^2$, $Q(x)=(x+1)(x-1)^2(x-2)^4$;
б) $P(x)=(x-i)^3(x+1)$, $Q(x)=(x^2+1)^2(x+1)^2$.

△ **1116.** Доказати да је полином $P(x)=x^3+(3+i)x^2+(2+3i)x+6$ дељив полиномом $Q(x) = x^2+ix+2$, а да није дељив полиномом $R(x)=x^2+1$.

1117. Доказати да је за свако $m,n,p \in N_0$ полином $P(x) = x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ дељив са x^2+x+1.

1118. За које је природне бројеве m ,n и p полином $P(x) = x^{3m}-x^{3n+1}+x^{3p+2}$ дељив полиномом $Q(x)=x^2-x+1$?

1119. За које је природне бројеве m ,n и p полином $P(x) = x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ дељив са x^4+x^2+1?

1120. За које $m \in N$ је полином $P(x) = x^{2m}-x^m+1$ дељив полиномом x^2+x+1?

1121. За које је $m \in N$ полином $P(x)$ дељив полиномом $Q(x)$ ако је:
а) $P(x)=(x+1)^m-x^m-1$, $Q(x)=x^2+x+1$;
б) $P(x)=(x+1)^m+x^m+1$, $Q(x)=x^2+x+1$;
в) $P(x)=(x+1)^m-x^m-1$, $Q(x)=(x^2+x+1)^2$;
a) $P(x)=(x+1)^m+x^m+1$, $Q(x)=(x^2+x+1)^2$?

$*$ **1122.** Једначина $x^n = 1$ у скупу комплексних бројева има n решења. Једно решење је 1, а остала означимо са $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$. Доказати да је: $(1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdots(1-a_{n-1})=n$.

1123. Раставити на линеарне чиниоце полином:
а) x^4+4; *б)* x^4+x^2+1; *в)* $x^{12}+1$; *г)* $x^{12}+2x^6+1$;
д) $x^6+(2-2i)x^3-2i$; *ђ)* $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$, $n \geqslant 2$;
е) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

1124. Ако два полинома не већег од n-тог степена имају једнаке вредности за више од n међусобно различитих комплексних бројева, онда су они једнаки. Доказати.

1125. Наћи све полиноме $P(x)$ такве да је за свако комплексно x испуњено: $xP(x-i) = (x-4i)P(x)$.

$*$ **1126.** Дати су полиноми са комплексним коефицијентима $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$ са нулама $x_1, x_2, \ldots x_n$ и $Q(x) = x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_n$ са нулама $x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2$. Ако су $a_1 + a_3 + \cdots$ и $a_2 + a_4 + \cdots$ реални бројеви, доказати да је $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ такође реалан број.

$*$ **1127.** Ако полином n-тог степена узима целобројне вредности за вредности k, $k+1, \ldots$, $k+n$ променљиве x, где је k цео број, онда тај полином узима целобројну вредност за сваки цео број x. Доказати.

10.2 ВИЈЕТОВЕ ФОРМУЛЕ

За корене $x_1, x_2, \ldots, x_n$ полинома $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$ важи

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1x_2 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

$\triangle$ **1128.** Написати Вијетове формуле за полиноме:
а) $ax + b$; *б)* $ax^2 + bx + c$; *в)* $ax^3 + bx^2 + cx + d$; *г)* $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

$\triangle$ **1129.** Ако су x_1, x_2 и x_3 нуле полинома $2x^3 + 3x^2 + 5x + 7$ израчунати:
а) $x_1 + x_2 + x_3$; *б)* $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$; *в)* $x_1x_2x_3$;
г) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$; *д)* $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}$; *ђ)* $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$;
е) $x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2$.

$\triangle$ **1130.** Израчунати производ свих решења једначине $x^3 + ax + b = 0$, ако су $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ њена решења.

$\triangle$ **1131.** Ако су x_1, x_2, x_3 решења једначине $8x^3 - 125 = 0$, израчунати $x_1 + x_2 + x_3 - x_1x_2x_3$.

△ **1132.** Ако су x_1, x_2, x_3 решења једначине $x^3+2x^2+3x+4=0$, написати једначину чија су решења

а) $\dfrac{1}{x_1}, \dfrac{1}{x_2}, \dfrac{1}{x_3}$; *б)* $x_1+x_2,\ x_2+x_3,\ x_3+x_1$.

△ **1133.** Одредити комплексан број λ, такав да једно решење једначине $x^3+7x+\lambda$ буде једнако двоструком другом решењу.

1134. За које $\lambda \in C$ је збир два решења једначине $2x^3-x^2-7x+\lambda=0$ једнак 1?

△ **1135.** Ако су x_1, x_2, x_3, x_4 решења једначине $x^4+2x^3+3x^2+4x+5=0$, израчунати:

а) $x_1+x_2+x_3+x_4$; *б)* $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$;

в) $x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4$; *г)* $x_1x_2x_3x_4$;

д) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}$; *ђ)* $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

1136. За које $\alpha, \beta \in C$ решења једначине $x^4-4x^3+x^2+\alpha x+\beta=0$ задовољавају услове: $x_1+x_2=1$, $x_3 \cdot x_4=2$?

1137. Одредити $a \in C$ такво да једначина $x^4-(3+i)x^3+(4+3i)x^2+ax+4=0$ има два решења чији је производ једнак 2, па за такво a решити дату једначину.

* **1138.** Ако су x_1, x_2, x_3 решења једначине x^3+px+q, $p,q \in C$, доказати да је $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3x_1x_2x_3$.

* **1139.** Наћи вредности параметра p за које једначина

$$x^4-(3p+2)x^3+p^2=0$$

има четири реална решења која образују аритметичку прогресију.

* **1140.** Ако за реалне бројеве a, b, c важи $a+b+c>0$, $ab+bc+c>0$, $abc>0$, доказати да су ти бројеви позитивни.

1141. Одредити $p \in C$, такво да решења једначине $P(x)=0$ буду чланови аритметичке прогресије, где је $P(x)=x^3-3px^2+x+p$.

1142. Решења x_1, x_2, x_3 једначине $x^3+px+q=0$ задовољавају једнакост $x_3=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ акко је $q=x_3=0$ или $p=-1-q^2$. Доказати.

1143. Одредити $a, b, c \in C$, ако се зна да су они нуле полинома $P(x)=x^3-ax^2+bx-c$.

* **1144.** Дат је полином $ax^4-ax^3+cx^2-16bx+b$, где су a, b, c реални

бројеви и $a \neq 0$. Ако су сви његови корени реални и позитивни, доказати да су они међусобно једнаки.

$*$ **1145.** Једначина $x^3 + qx + r = 0$ $(r \neq 0)$ има решења u, v, w. Изразити решења једначине $r^2x^3 + q^3x + q^3 = 0$ помоћу u, v и w.

1146. Доказати да полином $P(x)$ нема сва три реална корена ако је
а) $P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 7$; *б)* $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$;
в) $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$; *г)* $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

$*$ **1147.** Одредити све полиноме облика $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$, чији су коефицијенти једнаки 1 или -1, а који имају само реалне нуле.

$*$ **1148.** Ако полином са реалним коефицијентима $P(x) = x^3 - ax^2 + bx - 1$ има сва три реална позитивна корена наћи минималну вредност збира $a + b$.

$*$ **1149.** У свесци је ученик записао једначину једанаестог степена. Међутим, просуо је мастило и може да види само $x^{11} - 6x^{10} + 5x^9 + \cdots = 0$. Ако је познато да решења једначине чине аритметичку прогресију, наћи збир коефицијената једначине.

10.3 ПОЛИНОМИ СА РЕАЛНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА

Ако је $z = a + ib$ нула полинома са реалним коефицијентима, онда је $\bar{z} = a - ib$ такође његова нула.

Полином са реалним коефицијентима може да се представи као производ линеарних и квадратних чинилаца са реалним коефицијентима.

Нека је $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ полином са целобројним коефицијентима. Тада важи:

1) Ако је $x = p$ његова целобројна нула, онда је a_0 дељиво са p.
2) Ако је $x = \dfrac{p}{q}$ његова рационална нула, где су p и q цели узајамно прости бројеви, онда је a_0 дељиво са p, а a_n са q.

$\triangle$ **1150.** Решити једначине:
а) $3x^3 + 11x^2 + 16x + 10 = 0$; *б)* $x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 10x + 4 = 0$;
в) $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4 = 0$;
ако се зна да је $x_1 = -1 + i$ једно њено решење.

$\triangle$ **1151.** Решити једначину $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 = 0$, ако се зна има једно решење код кога су реални и имагинарни делови једнаки.

△ **1152.** Раставити на линеарне и квадратне, који се не могу раставити на линеарне, чиниоце са реалним коефицијентима полиноме:
а) x^4+4; *б)* x^6+27; *в)* x^7-1; *г)* $x^{2n+1}-1$, $n\in N$;
д) $x^4+4x^3+4x^2+1$; *ђ)* $x^4+6x^3+9x^2+100$; *е)* $x^4+2x^2-24x+72=0$.

△ **1153.** Наћи све целобројне корене полинома $P(x)$:
а) $x^3-6x^2+15x-14$; *б)* $x^4-2x^3-8x^2+13x-24$;
в) $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12$; *г)* $24x^5+10x^4-x^3-19x^2-5x+6$;
д) $x^4+4x^3-2x^2-12x+9$; *ђ)* $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$.

△ **1154.** Одредити ред целобројних корена из претходног задатка.

△ **1155.** Наћи рационалне нуле полинома $P(x)$:
а) $2x^3+3x^2+6x-4$; *б)* $4x^4+7x^2-5x-1$; *в)* $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12$.

△ **1156.** Решити једначине:
а) $x^4+2x^3-4x^2-5x-6=0$; *б)* $x^4-3x^3+5x^2-5x+2=0$; *в)* $2x^3+3x^2+16x-4=0$.

△ **1157.** Наћи све комплексне бројеве z_1, z_2, z_3 који задовољавају услове $z_1+z_2+z_3=0$, $z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=1$, $z_1z_2z_3=2$.

1158. Ако комплексни бројеви x_1, x_2, x_3, x_4 задовољавају услове: $x_1+x_2+x_3+x_4=2-a$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=a^2-8$, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=2-\frac{a}{5}$, $x_1x_2x_3x_4=-5$, $a\in Z$, онда су бар два од њих међусобно једнаки цели бројеви. Доказати. За које $a\in Z$ међу њима постоје три једнака? Могу ли бити сва четири једнака?

1159. Наћи једну рационалну нулу полинома $P(t)=2t^3+7t^2+22t-13$, па на основу тога наћи $\{x,y,z\}$, где су x, y, z међусобно различити комплексни бројеви такви да је $x+y+z=-\frac{7}{2}$, $xy+xz+yz=11$, $xyz=\frac{13}{2}$.

1160. Наћи једну рационалну нулу полинома $P(t)=3t^3-8t^2+t+2$, па на основу тога решити систем једначина: $x+y+z=\frac{8}{3}$, $x^2+y^2+z^2=\frac{58}{9}$, $x^2y^2z+x^2yz^2+xy^2z^2=\frac{-2}{9}$.

$*$ **1161.** Одредити све полиноме $P(x)$ са целобројним коефицијентима такве да за сваки реалан број x важи $16P(x^2)=\left[P(2x)\right]^2$.

$*$ **1162.** Наћи све полиноме $P_n(x)$ облика

$$P_n(x) = n!x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + (-1)^n n(n+1)$$

са целобројним коефицијентима за чије корене $x_1, x_2, \ldots, x_n$ важи: $x_k \in [k, k+1]$, за $k = 1, 2, \ldots, n$.

$*$ **1163.** Нека је $P(x)$ полином седмог степена са целим коефицијентима, такав да за седам различитих целих бројева има вредности у скупу $\{-1, 1\}$. Доказати да се $P(x)$ не може представити у облику производа два полинома са целим коефицијентима, тако да ниједан од њих није константа.

$*$ **1164.** Нека је полином $P(x)$ са реалним коефицијентима такав да за свако реално x важи $P(x) \geqslant 0$. Доказати да постоје полиноми $Q(x)$ и $R(x)$ са реалним коефицијентима, такви да за свако реално x важи

$$P(x) = a^2(x) + R^2(x).$$

$*$ **1165.** Нека су P и Q реални полиноми и нека је за сваки реални број a број $P(a)$ решење једначине: $x^3 + Q(a)x^2 + (a^4+1)x + a^3 + a = 0$. Одредити све полиноме P и Q са траженим особинама.

$*$ **1166.** Да ли постоји полином P са реалним коефицијентима, такав да је $P(\cos x) = \sin x$?

$*$ **1167.** Низ полинома $P_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ дефинисан је релацијама: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x, \ldots, P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$ $n \geqslant 1$. Доказати да важи: $P_n(2\cos\varepsilon) = \dfrac{\sin(n+1)\varepsilon}{\sin\varepsilon}$, $\varepsilon \neq k\pi$, k је цео број, за свако $n = 0, 1, 2, \ldots$

$*$ **1168.** Ако једначине $x^3 + px + q = 0$ и $x^3 + p_1x + q_1 = 0$ имају заједнички корен, онда је $(pq_1 - qp_1)(p - p_1)^2 = (q - q_1)^3$. Доказати.

$*$ **1169.** Ако је $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ полином са целобројним коефицијентима и ако су $P(0)$ и $P(1)$ цели непарни бројеви, доказати да полином P нема целобројних нула.

$*$ **1170.** Ако полином са реалним коефицијентима $x^3 + ax^2 + bx + c$ има сва три реална корена, онда је $a^2 \geqslant 3b$, при чему једнакост важи акко су сва три корена једнака. Доказати.

10.4 СИСТЕМИ АЛГЕБАРСКИХ ЈЕДНАЧИНА ВИШЕГ РЕДА

△ **1171.** Решити систем једначина $x^3+y^3=19$, $x^2y+xy^2=-6$ у скупу реалних бројева.

△ **1172.** Наћи реална решења система једначина $x^2+y^4=20$, $x^4+y^2=20$.

△ **1173.** Решити систем једначина $x^6+y^6=65$, $x^4-x^2y^2+y^4=13$.

∗ **1174.** Наћи сва реална решења система једначина $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$, $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1,\ldots,$ $x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n=1$, $n\geqslant 2$.

∗ **1175.** Нека су m и n позитивни бројеви. Доказати да је $x_1=x_3=x_5=\cdots=x_{99}=m$, $x_2=x_4=\cdots=x_{100}=n$, једино решење система једначина

$$nx_1=x_2x_3=x_4x_5=\cdots=x_{98}x_{99}=mx_{100},$$

$$x_1+x_2=x_3+x_4=x_5+x_6=\cdots=x_{99}+x_{100}=m+n$$

у скупу позитивних реалних бројева

∗ **1176.** Наћи сва решења система

$$\begin{aligned} ax+by&=(x-y)^2\\ by+cz&=(y-z)^2\\ cz+ax&=(z-x)^2, \end{aligned}$$

где су a, b, c дати позитивни реални бројеви

∗ **1177.** Одредити све тројке реалних бројева (x,y,z) за које важи $2x+x^2y=y$, $2y+y^2z=z$, $2z+z^2x=x$.

1178. Решити системе једначина у скупу реалних бројева

а) $\begin{aligned} x+y+z&=0\\ x^2+y^2-z^2&=20\\ x^2+y^2-z^2&=560 \end{aligned}$; *б)* $\begin{aligned} x^4+y^4&=17(x+y)^2\\ xy&=2(x+y) \end{aligned}$; *в)* $\begin{aligned} x^3+y^3-z^3-xyz&=-4\\ x^3-y^3+z^3-xyz&=8\\ -x^3+y^3+z^3-xyz&=-2. \end{aligned}$

1179. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned} x^8+y^6-4x^4+2y^3+5&=0\\ z^3-2x^4+6yz^2+10z&=0. \end{aligned}$$

1180. Наћи све реалне бројеве a, такве да за свако реално b систем једначина

$$\begin{aligned} (x^2+1)^a+(b^2+1)^y&=2\\ a+bxy+x^2y&=1 \end{aligned}$$

има бар једно реално решење.

ЈЕДАНАЕСТА ГЛАВА

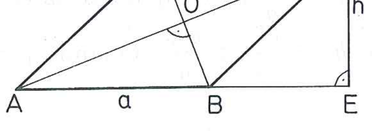
11 РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

1. Из $a^2 + b^2 = d^2$ израчунамо непознату, итд.
а) $P = 168$ cm^2, $2s = 62$ cm^2; *б)* $P = 18$ и $2s = 18$.

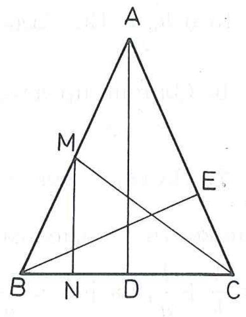
2. *а)* Дијагонале деле ромб на четири једнака правоугла троугла са хипотенузом a, сл. 1. Површина је $P = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 = 120$ cm^2, а страницу налазимо Питагорином теоремом: $a^2 = \left(\frac{1}{2}d_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}d_2\right)^2$. Одавде је $a =$ 13 cm, па из $P = a \cdot h$, добијамо $r = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}\frac{P}{a} = \frac{60}{13}$ cm.

б) $\left(\frac{1}{2}d_2\right)^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}d_1\right)^2$, итд, $d_2 = 20$ cm, па је $P = 990$ cm^2 и $r \approx 9,8$ cm.

в) У правоуглом троуглу ACE на сл. 1 је $AE^2 = d^2 - h^2$, одакле је $AE = 32$ cm. Затим, у троуглу BCE је: $BC^2 - BE^2 = CE^2$, односно: $a^2 - (32 - a)^2 = 24^2$, итд. $P = 600$ cm^2 и $r = 12$ cm.



Сл. 1.



Сл. 2.

г) Из $d_1 : d_2 = 3 : 4$ и $a = 1,5$ налазимо $d_1 = 1,8$ dm и $d_2 = 2,4$ dm, па је $P = 2,16$ dm^2 и $r = 0,72$ dm.

3. *а)* Из једнакости $\left(\frac{1}{2}d_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}d_2\right)^2 = a^2 = 26^2$, добијамо једнакост: $d_1^2 + d_2^2 = 2704$. Из површине добијамо $\frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 = 480$, односно $2d_1d_2 = 1920$. Сада саберемо, па одузмемо ове две једнакости и добијемо $d_1^2+2d_1d_1+d_2^2 = 4624$, односно $(d_1+d_2)^2 = 68^2$, одакле је $d_1+d_2 = 68$ и слично $d_1-d_2 = \pm 28$. Решавањем система линеарних једначина добијемо $d_1 = 48$, $d_2 = 20$ (или $d_1 = 20$, $d_2 = 48$).
б) Из $a \cdot 2r = P$, добијамо $a = 20$ cm, па даље, као у претходном задатку. Решења су: $d_1 = 32$ m и $d_2 = 24$ m.

4. На сл. 2 су AD и BE висине једнакокраког троугла ABC. Тачке M и N су средишта дужи AB и BD.
а) Из троугла ABD је $h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, итд, $P = 120$.
б) Слично претходном задатку, израчунавамо: $\frac{a}{2} = 4,8$, па је $P = 6,72$.
в) У правоуглом троуглу BCE је: $CE^2 = a^2 - h_b^2 = 100$, па је $CE = 10$. Сада из троугла ABE имамо: $b^2 - (b-10)^2 = h_b^2$, одакле је $b = 10,5125$, па је $P = 55,190625$.
г) Из $a : b = h_b : h_a$, добијамо: $b = \frac{5}{6}a$, итд. $P = \frac{675}{4}$ cm^2.
д) У правоуглом троуглу CMN, сл. 2, је $CM = t_b$, $MN = \frac{1}{2}h_a$ и $CN = \frac{3}{4}a$, итд. $P = 360$ cm^2.
ђ) $P = 160$ cm^2.

5. *а)* Најпре израчунамо $h_a = 5$. Даље, из $P = 60 = \frac{1}{2}bh_b$, добијамо $h_b = \frac{120}{13}$.
б) Из $b^2 - h_a^2 = 81$, односно $(b-h_a)(b+h_a) = 81$, заменом $b - h_a = 3$, добијамо $b + h_a = 27$. Сада из система једначина $b - h_a = 3$, $b + h_a = 27$, налазимо $b = 15$ и $h_a = 12$. Сада из $a : b = h_b : h_a$, следи $h_b = 14,4$.

6. Слично претходном задатку. $P = \frac{1}{2}a \cdot b = \frac{1}{8k^2}(k^4 - c^4)$.

7. Из $ch_c = bh_b$ и $ch_c = ah_a$ је $h_b = \frac{ch_c}{b}$ и $h_a = \frac{ch_c}{a}$. Сабирањем ових једнакости и заменом $h_a + h_b = h_c$, добијамо: $h_c = \frac{ch_c}{b} + \frac{ch_c}{a}$. Одавде је $\frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$, па је $c = \frac{ab}{a+b}$.

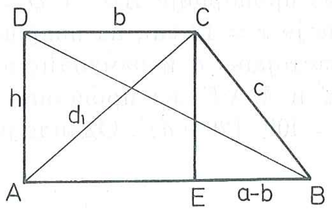
8. Нека је MN тражени одсечак. Троуглови ABC и MNC су слични, па важи пропорција $P : P_1 = AB^2 : MN^2$, односно $2 : 1 = ab^2 : MN^2$.

Одавде је $MN = 8\sqrt{2}$.

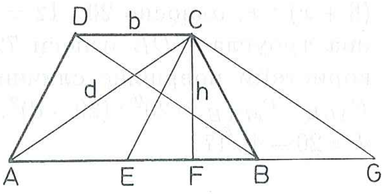
9. Користимо сл. 2. Површине троуглова BCE и ABE односе се као $1:3$, па је: $\frac{1}{2}CE\cdot BE : \frac{1}{2}AE\cdot BE = 1:3$. Следи да је $CE : AE = 1:3$, па је $AC = 4CE$. Троуглови BCE и ACD су слични, па је $BC : CE = AD : CD$, тј. $48 : CE = 4CE : 24$. Дакле: $CE^2 = 288$. Даље из правоуглог троугла ABE израчунавамо: $BE^2 = AB^2 - AE^2 = 16CE^2 - 9CE^2 = 7CE^2$, односно $BE = CE\sqrt{7}$. Тражена површина је $P = \frac{1}{2}BE\cdot CE = \frac{1}{2}CE^2\sqrt{7} = 144\sqrt{7}$.

10. Дијагонала дели паралелограм на два једнака троугла, чије површине израчунавамо коришћењем Хероновог обрасца. Површина је $504\,\mathrm{cm}^2$. Угао добијамо из везе: $P = ab\sin\alpha$, тј. $504 = 15\cdot 34\cdot\sin\alpha$. Одавде је $\alpha = \arcsin\dfrac{84}{85} \approx 81^\circ$.

11. *а)* У правоуглом троуглу BCE, сл. 3, катете су $CE = h$ и $BE = a-b$, па помоћу Питагорине теореме израчунамо: $h = 24$. Дакле: $P = 432$.
б) Слично претходном задатку израчунамо: $a-b = BE = 20$, итд. $P = 378$.
в) Из правоуглог троугла ABD израчунамо: $h = 12$. Затим, као у претходном задатку израчунамо $a-b = 5$, итд. $P = 78$.



Сл. 3.



Сл. 4.

г) Користимо правоугле троуглове ACE и BCE. $P = 600$.

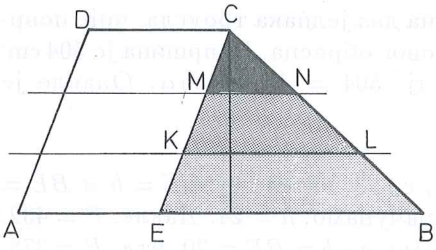
12. *а)* Најпре из правоуглог троугла BCF, сл. 4, израчунамо $BF = 60$, па је $a-b = 120$, итд, и $P = 841,5$.
б) $AF = 20$, па из троугла ACF израчунамо h, итд, $P = 420$.
в) Уведимо ознаку $EF = BF = x$. Из правоуглих троуглова BCF и ACF израчунамо x, па h. Површина је $P = 960$.
г) Из троугла ACF је $AF = 16$. Међутим,, $AF = \dfrac{a+b}{2}$, па је $P = 1008$.

13. *а)* Висину троугла BCE, а то је и висина трапеза, израчунавамо користећи Херонов образац. Решење: $h = 45$, $P = 2002$.
б) $P = 330$. *в)* $P = 204$ (слично задатку 12 *г)*).

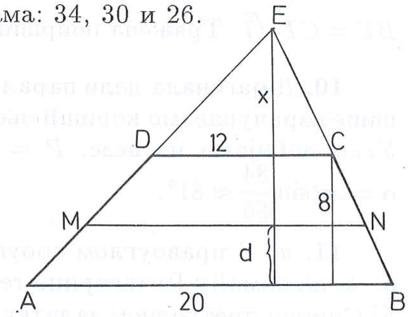
14. Обратимо пажњу на троугао BCE са сл. 4. Резултати су:

а) 60 dm. *б)* 47 m. *в)* 46 cm. *г)* 58.

15. Нека је $CE \parallel AD$, сл.5. Паралелограм $AECD$ је подељен на три једнака дела, са површинама 24 cm^2. Треба израчунати површине P_1, P_2, P_3, троуглова редом: BCE, CKL, CMN. Знамо одмах: $P_1 = 18\ \text{cm}^2$. Висине ових троуглова стоје у размери $3:2:1$, па добијамо размеру $P_1 : P_2 : P_3 = 9 : 4 : 1 = 18 : 8 : 2$. Дакле, $P_2 = 8\ \text{cm}^2$ и $P_3 = 2\ \text{cm}^2$. Дати трапез је подељен на делове са површинама: 34, 30 и 26.



Сл. 5.



Сл. 6.

16. Дати трапез има површину 128 cm^2. Продужимо краке BC и AD до пресека E, сл. 6. Висину x троугла CDE израчунаћемо на основу сличности троуглова ABE и DCE, тј. из пропорције $AB : CD = (8+x) : x$, односно $20 : 12 = (8+x) : x$. Одавде је $x = 12$ cm, па површина троугла CDE износи 72 cm^2. Тражено растојање d израчунаћемо користећи површине сличних троуглова ABE и MNE, из пропорције $P_{ABE} : P_{MNE} = 20^2 : (20-d)^2$, односно $200 : 136 = 400 : (20-d)^2$. Одавде је $d = 20 - 4\sqrt{17}$.

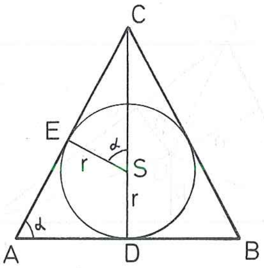
17. Ако је a страница датог квадрата, тада из правоуглог троугла AMN добијамо: $AM^2 + AN^2 = MN^2$, тј. $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 = 1$. Одавде је $a^2 = P = \dfrac{36}{25}$.

18. Према сл. 4 је $AG = a + b$, па је површина једнакокраког троугла AGC једнака површини трапеза: $P = \dfrac{1}{2} AG \cdot h = h^2$. Следи да је $AG = 2h$, па је AGC правоугли једнакокраки троугао, са правим углом ACG, а то је угао између дијагонала.

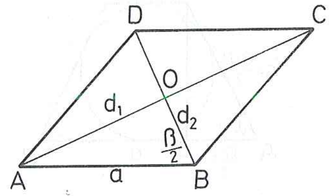
19. Четвороугао $MNPQ$ је ромб, са оштрим углом од $60°$. Његова већа дијагонала је $MP = a - 2\left(a - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right) = a(\sqrt{3}-1)$. Израчунамо мању дијагоналу: $NQ = \dfrac{MP}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3}$. Површина ромба $MNPQ$ је $P =$

$\frac{1}{2}MP \cdot NQ = \frac{a^2}{3}(2\sqrt{3} - 3)$.

20. Према сл. 7 је $CS = k$ и $\sphericalangle CSE = \sphericalangle CAB = \alpha$ и $SE = SD = r$. Даље је $r = k\cos\alpha$ и $AD = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, односно $AB = 2r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, па је $AB = 2k\cos\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.



Сл. 7.

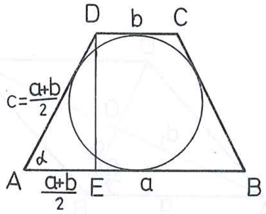


Сл. 8.

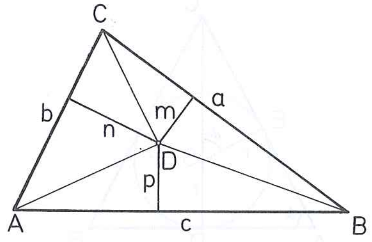
21. Из правоуглог троугла ABO, сл. 8, израчунавамо $\frac{d_1}{2} = a\sin\frac{\beta}{2}$ и $\frac{d_2}{2} = a\cos\frac{\beta}{2}$, односно $d_1 = 2a\sin\frac{\beta}{2}$ и $d_2 = 2a\sin\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right)$. Даље је $d_1 - d_2 = d = 2a\left(\left(\sin\frac{\beta}{2} - \sin\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right)\right)\right) = 4a\cos 45^\circ \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2} - 45^\circ\right)$, одакле је $a = \dfrac{d\sqrt{2}}{4\sin\left(\frac{\beta}{2} - 45^\circ\right)}$. За $\beta = 150^\circ$ и $d = 10$ је $a = \frac{10\sqrt{2}}{4 \cdot \sin 30^\circ} = 5\sqrt{2}$.

22. Нека су a, b, c странице трапеза. На основу особина четвороугла описаног око круга (тангентног) је $a + b = 2c$, па, према сл. 9, израчунавамо: $\frac{a-b}{2} = c \cdot \cos\alpha = \frac{a+b}{2} \cdot \cos\alpha$. Одавде је $b = a\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = a\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. Обим трапеза је $2s = 2(a+b) = 2a\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{2a}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. Висина трапеза је $CE = h = \frac{a+b}{2} \cdot \sin\alpha = \dfrac{a}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, па је $P = \frac{a^2}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\right)$. Ако је $\alpha = \frac{\pi}{6}$, тада је $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = 2 - \sqrt{3}$, па је $2s = 8a(2-\sqrt{3})$, $h = a(2-\sqrt{3})$ и $P = s \cdot h = 4a^2(2-\sqrt{3})^2 = 4a^2(7 - 4\sqrt{3})$.

23. Површина P троугла ABC је једнака збиру површина троуглова BCD, CAD и ABD, сл 10: $P = \frac{1}{2}am + \frac{1}{2}bn + \frac{1}{2}cn$. Стављајући: $a = \frac{2p}{h_a}$, $b = \frac{2p}{h_b}$ и $c = \frac{2p}{h_c}$, добијамо: $P = P\cdot\frac{m}{h_a} + P\cdot\frac{n}{h_b} + P\cdot\frac{p}{h_c}$. Скратимо једнакост са P и добијемо $\frac{m}{h_a} + \frac{n}{h_b} + \frac{p}{h_c} = 1$.



Сл. 9.



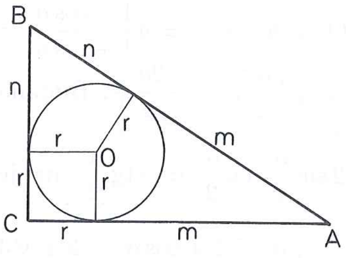
Сл. 10.

24. Тражена тачка M је тежиште троугла ABC.

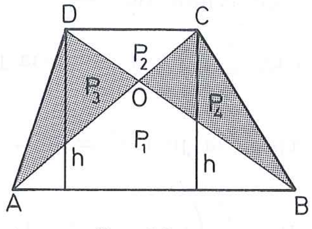
25. На основу једнакости тангентних дужи, повучених из једне тачке на круг, лако се доказује да одсечци m, n и p имају дужине: $s-a$, $s-b$ и $s-c$ и да је $s = m+n+p$. Заменимо то у Херонов образац.

26. Према претходном задатку и према сл. 11 је: $s = m+n+r = c+r = 2R+r$, јер је $c = 2R$. Даље је: $P = r\cdot s = r(2R+r)$.

27. Користићемо формуле: $P = r\cdot s$ и $2P = a\cdot b$. Према сл. 11 имамо: $a = n+r$, $b = m+r$, и $s = m+n+r$. Даље је: $2P = (n+r)\cdot(m+r) = mn + (mr+nr+r^2) = mn + r(m+n+r) = mn + rs$, односно $2P = mn + P$, па је $P = mn$.



Сл. 11.



Сл. 12.

28. Нека су P_1, P_2, P_3 и P_4 површине добијених четвороуглова, као на сл. 12. Видимо да троуглови ABD и ABC имају једнаке површине (заједничка основица AB и једнаке висине). Они имају заједнички део

ABO, па следи да је $P_3 = P_4$. Уочимо да троуглови ABO и ADO имају заједничку висину из темена A, рецимо дужи x, па је $P_1 = \frac{1}{2}BO\cdot x$ и $P_3 = \frac{1}{2}DO\cdot x$. Одатле је $P_1 : P_3 = BO : DO$. Слично се докаже да је $P_4 : P_2 = BO : DO$, па је $P_3 : P_2 = BO : DO$ (због $P_4 = P_3$). Дакле: $P_1 : P_3 = P_3 : P_2$, па је $P_3^2 = P_1\cdot P_2$, односно $P_3 = \sqrt{P_1P_2}$. Површина трапеза је: $P = P_1 + P_2 + 2P_3 = P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1P_2} = \left(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}\right)^2$.

29. На сл. 13, са P_1 и P_2 смо означили два пара једнаких површина (троуглови са једнаким основицама и заједничким висинама). Очигледно, површина четвороугла $MNPQ$ једнака је половини површине четвороугао $ANCQ$. Уочимо да троугао ADQ има три пута мању површину од троугла ACD и троугао BCN има три пута мању површину од троугла ABC. Због тога је збир површина троуглова ADQ и BCN једнак трећини површине датог четвороугла. Дакле, четвороугао $ANCQ$ има површину $2\ \mathrm{dm}^2$, па површина четвороугла $MNPQ$ износи $1\ \mathrm{dm}^2$.

30. Знамо да је $P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}bc$. Из косинусне теореме добијамо: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\frac{\pi}{3}$, одакле је $bc = b^2 + c^2 - a^2$, па је $-2bc = 2a^2 - 2b^2 - 2c^2$. Даље је: $P = \frac{\sqrt{3}}{4}(b^2 + c^2 - a^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}(b^2 + c^2 - a^2 + 2bc - 2bc) = \frac{\sqrt{3}}{4}(b^2 + c^2 - a^2 + 2bc + 2a^2 - 2b^2 - 2c^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - (b-c)^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}(a - b + c)(a + b - c) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2s - 2b)(2s - 2c) = \sqrt{3}(s - b)(s - c)$.

31. Површина троугла је $P = \frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}bc$. Из косинусне теореме добијамо: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\frac{\pi}{3}$, односно $21 = b^2 + c^2 - bc = (b + c)^2 - 3bc$. Одавде је $21 = 81 - 3bc$, па је $bc = 20$ и $P = 5\sqrt{3}$.

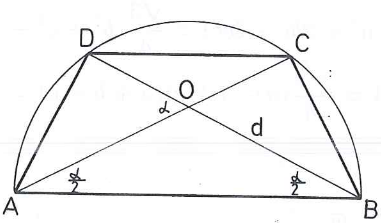
32. Према сл. 4, троугао ACG, чија је површина једнака површини трапеза, има странице 3 cm, 4 cm, 5 cm. Површина трапеза, дакле, износи $6\ \mathrm{cm}^2$.

33. Слично претходном задатку. Троугао ACG је правоугли па је $P = 2$.

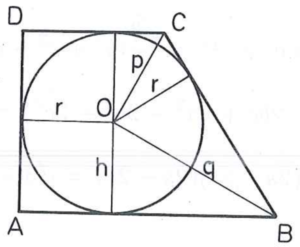
34. Уочимо висину CF једнакокраког троугла ACG, сл. 4. Имамо: $CF = d\sin\alpha$ и $AE = d\cos\alpha$. Површина трапеза је $P = AF\cdot CF = \frac{1}{2}d^2\sin 2\alpha$. За $d = 10$ и $\alpha = \frac{\pi}{3}$ је $P = 25\sqrt{3}$.

35. Према сл. 4 је висина $CF = h = BC \cdot \sin\alpha = k\sin\alpha$. Троугао AGC је правоугли једнакокраки, па је $d = AC = h\sqrt{2} = k\sqrt{2}\sin\alpha$. Површина трапеза (и троугла AGC) је: $P = \frac{1}{2}d^2 = k^2\sin^2\alpha$.

36. Како су углови ADB и ACB прави, то круг пречника AB садржи тачке C и D. Сваки трапез уписан у круг је једнакокрак, па је и троугао ABO једнакокрак, сл. 13. Угао $\alpha = \sphericalangle AMD$ је спољашњи у троуглу ABO, па су углови између дијагонала и веће основице трапеза једнаки $\frac{\alpha}{2}$. Сада из правоуглог троугла ABC добијамо $d = a\cos\frac{\alpha}{2}$. Применимо на троуглове ABO, CDO, BMO и ADO формулу за површину троугла, водећи рачуна да је $\sin(\pi - \alpha) = \alpha$, па добијамо површину трапеза, као збир површина ових троуглова: $P = \frac{1}{2}AM \cdot BM \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}CM \cdot DM \sin\alpha + 2 \cdot \frac{1}{2}AM \cdot DM \sin\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha(AM \cdot BM + CM \cdot DM + 2AM \cdot DM) = \frac{1}{2}\sin\alpha(AM + CM)(BM + DM) = \frac{1}{2}d^2\sin\alpha$. $(AM + CM = d = BM + DM)$. Даље је $P = \frac{1}{2}a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha = \frac{1}{4}a^2\sin\alpha(1+\cos\alpha)$.



Сл. 13.

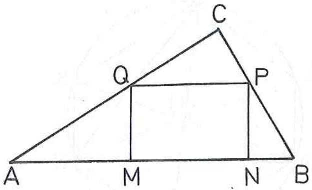


Сл. 14.

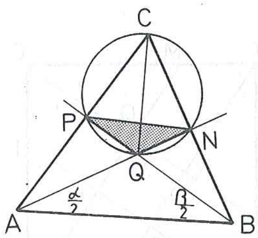
37. Праве OB и OC су симетрале суплементних углова, па је $\sphericalangle BOC = 90°$, сл. 14. Користећи се површином правоуглог троугла BOC, добијамо везу: $r \cdot BC = pq$. Како је $BC = \sqrt{p^2+q^2}$, добијамо: $r = \frac{pq}{\sqrt{p^2+q^2}}$. Трапез је тангентан четвороугао, па је $AB + CD = BC + AD = \sqrt{p^2+q^2} + \frac{2pq}{\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{p^2+q^2+2pq}{\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{(p+q)^2}{\sqrt{p^2+q^2}}$. Висина AD је пречник описаног круга, па је, коначно, површина трапеза: $P = \frac{1}{2}(AB+CD) \cdot AD = \frac{(p+q)^2}{2\sqrt{p^2+q^2}} \cdot \frac{2pq}{\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{pq(p+q)^2}{p^2+q^2}$. За $p = 2$, $q = 4$ је $P = 144,4\ \mathrm{cm}^2$.

38. Подножја висине деле већу основицу на делове: $h\sqrt{3}$, b и h, где је h тражена висина и b мања основица. Следи да је $b = 5 - h\sqrt{3} - h$. Из површине добијамо $P = \dfrac{a+b}{2}\cdot h = \dfrac{5+5-h\sqrt{3}-h}{2}\cdot h = 4\sqrt{3}-4$. Одавде добијамо квадратну једначину: $h^2(\sqrt{3}+1)-10h+8(\sqrt{3}-1)=0$, чија су решења: $h=\sqrt{3}+1$ или $h=4(\sqrt{3}+1)$.

39. Троуглови AQM и PBN, сл 15, слични су са датим троуглом ABC. Нека је $MQ = m$. Тада је $AM = \dfrac{3}{4}m$ и $BN = \dfrac{4}{3}m$, па како је хипотенуза датог троугла $AB = 5$ cm, биће: $MN = AB - AM - BN = 5-\dfrac{25}{12}m$. Из површине правоугаоника, $P = MN\cdot MQ$, добијамо једначину: $\dfrac{5}{3} = m\left(5-\dfrac{25}{12}m\right)$, односно $5m^2-12m+4=0$, која има решења: $m=2$ или $m=\dfrac{2}{5}$. Дакле, имамо два тражена правоугаоника: један има странице дужина 2 и $\dfrac{5}{6}$, а други $\dfrac{2}{5}$ и и $\dfrac{25}{6}$.



Сл. 15.

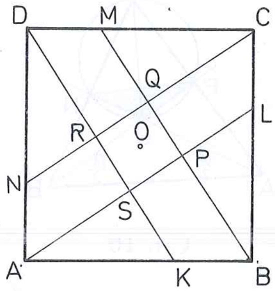


Сл. 16.

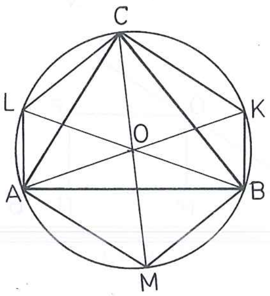
40. Из троугла ABQ, сл. 16, добијамо: $\sphericalangle AQB = 180^\circ - \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2} = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2} - \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2} = 90^\circ + \dfrac{\gamma}{2}$, па је $\sphericalangle PQN = 90^\circ + \dfrac{\gamma}{2}$. Четвороугао $CPQN$ је тетиван, па је $\gamma + \sphericalangle PQN = 180^\circ$, тј. $\gamma + 90^\circ + \dfrac{\gamma}{2} = 180^\circ$. Одавде следи да је $\gamma = 60^\circ$. Тачка Q је пресечна тачка симетрала, па је $\sphericalangle NCQ = \sphericalangle PCQ = 30^\circ$. Следи и да је $\sphericalangle PNQ = 30^\circ$ и $\sphericalangle NPQ = 30^\circ$ (углови над истим луковима). Дакле, NPQ је једнакокраки троугао са угловима од 30° на основици $NP = k$, па је тражена површина $P = \dfrac{k^2\sqrt{3}}{12}$.

41. Из $P = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \dfrac{1}{4}(a^2+b^2)$, добијамо: $\sin\gamma = \dfrac{a^2+b^2}{2ab} \geqslant 1$, јер, по познатој Кошијевој неједнакости, за позитивне бројеве a и b важи неједнакост: $a^2+b^2 \geqslant 2ab$. Знак једнакости важи само ако је $a=b$. Како синус не може бити већи од 1, то закључујемо да је $\sin\gamma = 1$, па је $\gamma = 90^\circ$. Према допунском услову Кошијеве неједнакости, је $a=b$. Дакле, дати троугао је правоугли и још једнакокрак, па су му углови: $\alpha = \beta = 45^\circ$ и $\gamma = 90^\circ$.

42. Нека је $PQRS$ четвороугао чију површину израчунавамо, сл. 17. Очигледно је то паралелограм. (Нпр. $PQ \parallel RS$, јер је четвороугао $KBMD$ паралелограм.) Лако се доказује да је $\triangle AKS \cong \triangle CMQ$ и $\triangle BLP \cong \triangle DNR$. Ротацијом квадрата око центра O за прав угао, тачка A се преслика у B, затим B у C и C у D. Притом се L преслика у M. Дакле, том ротацијом се дуж AL преслика у BM, па је $\sphericalangle BPL = 90^\circ$. Отуда следи да је $PQRS$ правоугаоник, па су троуглови AKS, CMQ, BLP и DNR правоугли и подударни. Због тога је четвороугао $PQRS$ квадрат, а његова страница је мања висина паралелограма $ALCN$. (Друга, већа висина је AB.) Из површине паралелограма $ALCN$ добијамо услов: $PQ \cdot AL = AN \cdot AB$, одакле је: $PQ = \dfrac{(AD-1)\cdot AB}{\sqrt{AB^2+1}} = \dfrac{(\sqrt{S}-1)\cdot\sqrt{S}}{\sqrt{S+1}}$. Тражена површина је $P = pQ^2 = \dfrac{S(S+1-2\sqrt{5})}{S+1}$.



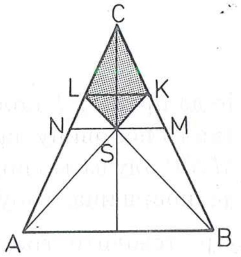
Сл. 17.



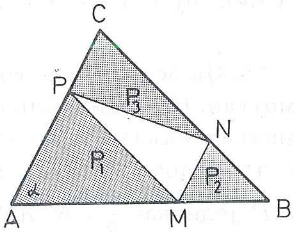
Сл. 18.

43. Лако доказујемо да су четвороуглови $AMBK$ и $KCLA$ подударни, сл. 18. (Имају једнаке и паралелне одговарајуће странице и једнаке одговарајуће углове.) Упоредићемо површину четвороугла $AMBK$ са површином троугла ABC. Због једнаке странице и заједничке одговарајуће висине, следећи троуглови имају, два и два, једнаке површине: AOC и AOM, затим AOB и OBK, као и COB и BOM. Површи прва три троугла (AOC, AOB и COB) представљају троугао ABC, а друга три четвороугао $AMBK$. Следи да је површина четвороугла $AMBK$ једнака S, па је површина шестоугла $AMBKCL$ једнака $2S$.

44. Права кроз S, паралелна са AB, садржи средњу линију MN. Како је троугао ABS једнакокрак, то је $\sphericalangle CAS = \sphericalangle CBS$, па су троуглови ACK и BCL подударни, сл. 19. Следи да је $CL = CK$, па је KL паралелно са AB и паралелно са MN. Троуглови KLS и KLN имају заједничку основицу KL и једнаке висине, па су им једнаке површине. Због тога је површина четвороугла $SKCL$ једнака површини троугла KCN. Због $AC = 2CN$ је површина троугла AKC једнака $2P_1$, где је P_1 тражена површина. Како је S средиште висине h_c, то је површина троугла ABS једнака $\frac{P}{2}$. Подударни троуглови AKL и BLC имају заједнички део – тражени четвороугао, па је збир површина ова два троугла једнак $4P_1$ и једнак $\frac{P}{2}+P_1$. Тражену површину добијамо из једнакости $4P_1 = \frac{P}{2}+P_1$, и то $P_1 = \frac{P}{6}$.



Сл. 19.



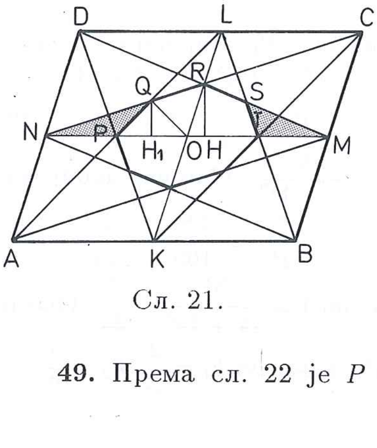
Сл. 20.

45. Нека је $AM = x$, $MB = y$, сл. 20. Троуглови AMP и MBN су слични троуглу ABC, па, ако са P означимо површину датог троугла, имамо: $\frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} = \frac{x}{x+y}$ и $\frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = \frac{y}{x+y}$. Сабирањем добијамо: $\frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} + \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = \frac{x+y}{x+y} = 1$, па је $\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2} = \sqrt{P}$, односно $P = \left(\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}\right)^2$. Тражена површина P_3 је половина површине паралелограма $MNCP$: $P_3 = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}\right)^2 - P_1 - p_2\right)$, тј. $P_3 = \sqrt{P_1 \cdot P_2}$.

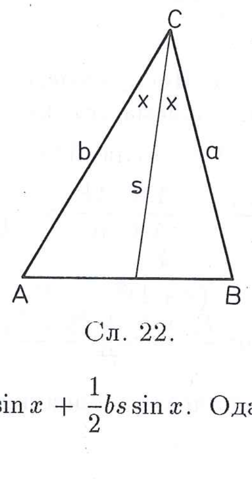
46. Послужићемо се сликом 20. Означимо са P_4 површину троугла MNP. Према услову је $AM = k\cdot MB$, $BN = k\cdot NC$ и $CP = k\cdot PA$. Површина P троугла ABC је: $P = \frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot \sin\alpha$, а $P_1 = \frac{1}{2}AM\cdot AP\cdot \sin\alpha$, па је $\frac{P_1}{P} = \frac{AM\cdot AP}{AB\cdot AC} = \frac{k\cdot MB\cdot AP}{(k+1)MB\cdot (k+1)AP} = \frac{k}{(k+1)^2}$. Слично добијемо: $\frac{P_2}{P} = \frac{k}{(k+1)^2} = \frac{P_3}{P}$. Узимајући у обзир да је $\frac{P_4}{P} = \frac{28}{100} = \frac{7}{25}$, добијамо: $\frac{P_1+P_2+P_3+P_4}{P} = \frac{3k}{(k+1)^2} + \frac{7}{25}$, односно $1 = \frac{3k}{(k+1)^2} + \frac{7}{25}$. Ово је еквивалентно једначини: $6k^2 - 13k + 6 = 0$. Решења су: $k_1 = \frac{2}{3}$, $k_2 = \frac{3}{2}$.

47. Користићемо решење претходног задатка и сл. 20. Из $\dfrac{AM}{AB}=k$, следи $AM=k\cdot AB$, па је $MB=AB-AM=(1-k)AB$. Због тога је $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{k}{1-k}$. Сада је, према решењу претходног задатка:
$\dfrac{P_4}{P}=1-3\cdot\dfrac{\dfrac{3k}{1-k}}{\left(\dfrac{k}{1-k}+1\right)^2}=1-9k(1-k)=9k^2-9k+1$. Ако је P_4 минимално, онда је минимално и $\dfrac{P_4}{P}$, односно квадратна функција $\dfrac{P_4}{P}=9k^2-9k+1$ има минимум, а то је за $k=-\dfrac{-9}{2\cdot 9}=\dfrac{1}{2}$.

48. На основу симетрије паралелограма, јасно је да права PT полови осмоугао. Површина многоугла $PQRST$, који представља половину нашег осмоугла, налазимо тако што од површине троугла MNP одузмемо површине троуглова MPQ и NST, сл. 21. Очигледно је површина троугла MNP једнака: $\frac{1}{2}MN\cdot RH=\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{4}h=\frac{S}{8}$. Тачка Q је тежиште троугла OLM, па је $MQ=\frac{2}{3}MN$. Због тога је висина QH_1 троугла MPQ једнака $\frac{2}{3}$ висине RH. Како је $MP=\frac{1}{2}MO$, то је површина троугла MPQ једнака: $\frac{1}{2}MP\cdot QH_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MO\cdot\frac{2}{3}RH=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}MO\cdot RH\right)$, а то је трећина површине троугла MOR. Слично доказујемо да је површина троугла NST једнака трећини површине троугла ONR. Следи да је површина многоугла $PQRST$ једнака $\frac{2}{3}$ површине троугла MNR. Отуда следи да је тражена површина P осмоугла: $P=2\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{S}{8}\right)=\frac{S}{6}$.



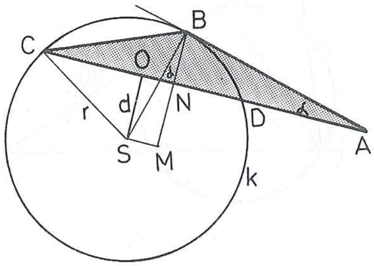
Сл. 21.



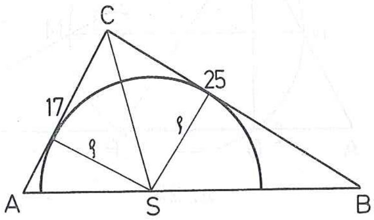
Сл. 22.

49. Према сл. 22 је $P=\frac{1}{2}ab\sin 2x=\frac{1}{2}as\sin x+\frac{1}{2}bs\sin x$. Одавде је $2ab\sin x\cos x = s(a+b)\sin x$, па је $\cos x = \dfrac{s(a+b)}{2ab}$. Тада је $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \dfrac{1}{2ab}\sqrt{4a^2b^2 - s^2(a+b)^2}$.

50. Конструишимо из S и B нормале SO и BN на сечицу, сл. 23, и правоугаоник $SONM$. Површина троугла ABC је $P = \frac{1}{2}AC\cdot BN$ Како је $\sphericalangle MBS = \sphericalangle BAC = \alpha$, (углови с нормалним крацима), то је $BN = BM - MN = r\cos\alpha - d$. Затим: $AC = AN + NO + OC = BN\operatorname{ctg}\alpha + SM + \sqrt{r^2-d^2} = (r\cos\alpha - d)\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + r\sin\alpha + \sqrt{r^2-d^2} = \dfrac{r - d\cos\alpha}{\sin\alpha} + \sqrt{r^2-d^2}$.
Тражена површина је $P = \dfrac{r\cos\alpha - d}{2\sin\alpha}\left(r - d\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{r^2-d^2}\right)$.



Сл. 23.



Сл. 24.

51. При једном обртају точка аутобус пређе пут једнак обиму точка: $O = 8\pi$ dm $= 25,12$ dm $= 2,512$ m. Цео пут износи 91060 m. Точак се обрнуо $91060 : 2,512$ тј. 36250 пута.

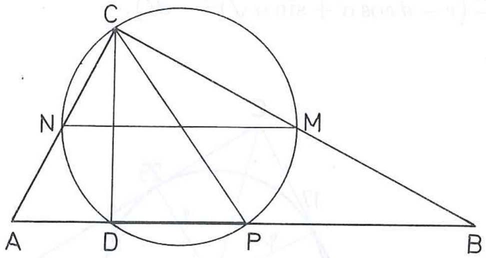
52. Нека је $2r$ пречник изрезаног дела. Тада имамо једнакост $6^2\pi - r^2\pi = 110$. Сменимо $\pi = \dfrac{22}{7}$ и добијемо $r = 1$ cm. Пречник је 2 cm.

53. Означимо ширину прстена са d. Тада су полупречници кругова k_1 и k_2 једнаки $3r$ и $3r+d$, па из површине прстена добијамо једначину: $(3r+d)^2\pi - (3r)^2\pi = 7r^2\pi$. Одавде је: $d^2 + 6rd - 7r^2 = 0$, па су решења $d = r$ или $d = -7r$. Важи само: $d = r$.

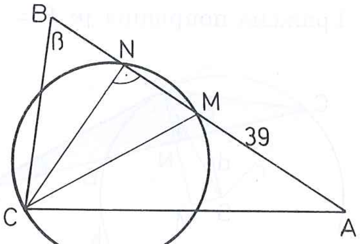
54. Хероновим обрасцем израчунавамо површину троугла: $P = 84\ \mathrm{cm}^2$. Затим: $r = \dfrac{P}{s} = \dfrac{84}{21} = 4$ cm и $R = \dfrac{abc}{4P} = \dfrac{65}{8}$. Резултат: 157,05 cm^2.

55. Површина троугла је 210 cm^2 (Херонов образац). Према сл. 24, површина троугла ABC је збир површина троуглова ACS и BCS. Висине ових двају троуглова су полупречници ρ траженог полукруга, па је $210 = \frac{1}{2}AC\cdot\rho + \frac{1}{2}BC\cdot\rho$. Одавде је $210 = 21\rho$, дакле: $\rho = 10$ cm, а површина полукруга је 50π cm^2.

56. Угао над пречником је прав, па круг пречника MN садржи теме C правог угла и подножје D хипотенузине висине, сл. 25. Тражи се дужина тетиве DP. Дуж CP је пречник, јер је $\sphericalangle CDP = 90^c$. Треба да израчунамо висину CD и $CP = MN = \frac{1}{2}AB$. Хипотенуза је 100 cm (Питагорина теорема). Из површине $P = \frac{1}{2}AC\cdot BC = \frac{1}{2}AC\cdot CD$, добијемо: $60\cdot 80 = 100\cdot CD$, одакле је $CD = 48$. Сада је $DP^2 = CP^2 - CD^2 = 50^2 - 48^2 = 196$. Дакле: $DP = 14$ cm.



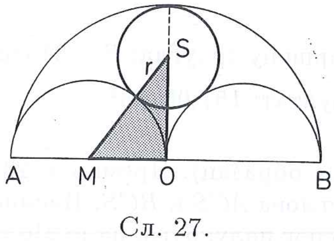
Сл. 25.



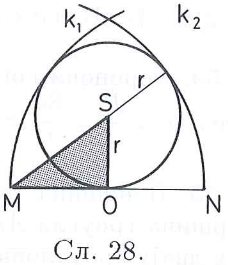
Сл. 26.

57. Из косинусне теореме налазимо да је $\cos\beta > 0$, па је дати троугао оштроугли и тачка N је између B и M, сл, 26. Угао MNC је прав, па је дуж CM пречник. Слично претходном задатку израчунамо висину $CN = 48$ cm. Користећи Питагорину теорему израчунамо $BN = 14$ cm, па је $MN = 39 - 14 = 25$ cm. Сада је $CM^2 = CN^2 + MN^2 = 2929$. Површина круга је $P = \left(\frac{1}{2}CM\right)^2\pi = \frac{2929}{4}\pi$ cm^2.

58. Из $P_i = \frac{r\cdot l}{2}$, тј. из $12\pi = \frac{r\cdot 4\pi}{2}$, добијамо $r = 6$ cm. Затим, из $l = \frac{r\pi\alpha}{180}$, добијамо $\alpha = 120°$. Периферијски угао је $\beta = \frac{1}{2}\alpha = 60°$.



Сл. 27.



Сл. 28.

59. Из правоуглог троугла OSM, сл. 27, добијамо: $SM^2 = OM^2 + OS^2$, тј. $(3+r)^2 = 3^2 + (6-r)^2$. Одавде је $r = 2$ cm, па је $P = 12,56$ cm^2.

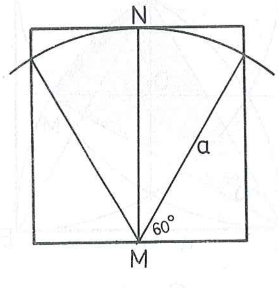
60. Из $OM^2 + OS^2 = MS^2$, тј. $4^2 + r^2 = (8-r)^2$, добијамо $r = 3$ cm, сл. 28. Резултат је $P = 28,26$ cm^2.

61. Тражена површина је разлика површине једнакостраничног троугла странице $2r$ и збира трију исечака са централним углом од $60°$. Резултат: $P = r^2\left(\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

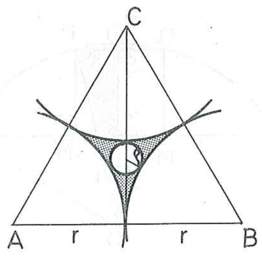
62. Круг полови друге две странице троугла. Од половине површине троугла треба одузети исечак круга са централним углом од $60°$. Резултат: $\dfrac{a^2}{24}(3\sqrt{3} - \pi)$.

63. Круг покрива део који је $\dfrac{1}{6}$ површине круга полупречника $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Резултат: 93%.

64. Круг покрива део који се може разложити на исечак од $60°$ и два правоугла троугла, који су половине једнакостраничног троугла странице a, сл. 29. Резултат: $0,956P$.



Сл. 29.



Сл. 30.

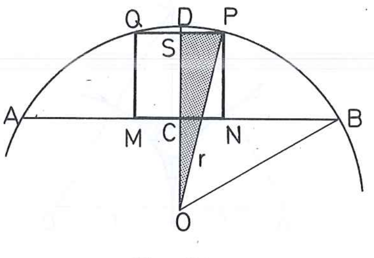
65. Од половине круга пречника AB, треба одузети одсечак већег круга (сл. б, ПРВА ГЛАВА). Резултат: $P = 2$ cm^2.

66. Један неосенчени део је разлика површине квадрата и четвртине круга полупречника a, а осенчена површина је разлика површине квадрата и збира два неосенчена дела. Резултат: $P = a^2\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)$.

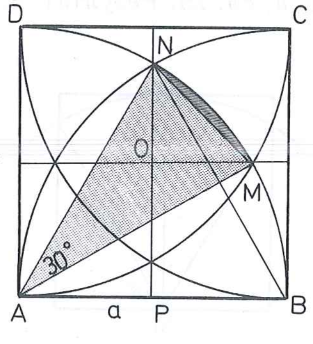
67. Тражена површина је трећина разлике између површине из задатка 61 и површине круга полупречника ρ, сл. 30. Видимо да $\rho = \dfrac{2}{3}h - r$, где је h висина једнакостраничног троугла ABC. Дакле $\rho = \frac{2}{3}r\sqrt{3} - r$. Резултат је: $P = \frac{r^2}{18}(6\sqrt{3} + 8\pi\sqrt{3} - 17\pi)$.

68. Према сл. 31, централни угао исечка је $\sphericalangle AOB = 90°$. Површина одсечка над основицом је: $P_1 = \frac{1}{4}r^2\pi - \frac{1}{2}OB\cdot OC = 28,5\ \mathrm{cm}^2$. За израчунавање површине P_2, одсечка над краком, потребно је наћи површину троугла ABC. Основица је $AB = 10\sqrt{2}$, а одговарајућа висина $CD = 10 + 5\sqrt{2}$. Дакле: $2P_2 = r^2\pi - \frac{1}{2}AB\cdot CD - P_1$, па је $P_2 = 82,5\ \mathrm{cm}^2$.

69. На сл. 31 уочавамо да је $\sphericalangle BOC = 30°$, па је $OC = OP = r$. Страницу a квадрата израчунаћемо помоћу правоуглог троугла OPS. Наиме, из $OS^2 + PS^2 = OM^2$, добијамо: $\left(\frac{r}{2} + a\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = r^2$, што даје једначину по непознатој страници: $50a^2 + 4ra - 3r^2 = 0$. Њено решење је: $a = \frac{1}{5}(-2+\sqrt{19})\cdot r$, па је $a = \frac{1}{5}(-2+\sqrt{19})(\sqrt{19}+2) = 3$. Површина квадрата је 9 cm^2.



Сл. 31.

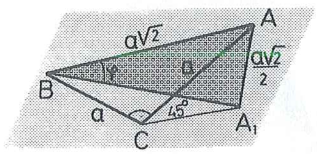


Сл. 32.

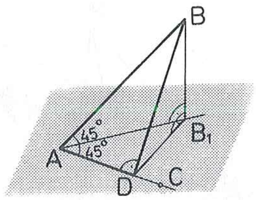
70. На сл. 32 је осенчена четвртина тражене фигуре. Уочимо да је троугао ABN једнакостраничан, па је $PN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, а $\sphericalangle BAN = \sphericalangle MAN = 30°$ и $AM = AN = a$. Површина троугла AMN је $P = \frac{1}{2}a^2 \sin 30° = \frac{1}{4}a^2$, па је површина одсечка над тетивом MN: $P_0 = \frac{1}{12}a^2\pi - \frac{1}{4}a^2$. Површина једнакокраког правоуглог троугла OMN износи: $P_2 = \frac{1}{2}OM\cdot ON = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{8}(\sqrt{3} - 1)^2$. Тражена површина је: $P = 4(P_0 + P_2) =$

$a^2\left(1+\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$ cm^2.

71. Странице датог троугла су a, a и $a\sqrt{2}$. Странице правоуглог троугла AA_1C, сл 33, имају дужине: a, $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ и $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Сада из правоуглог троугла AA_1B налазимо тражени угао: $\sin\varphi = \dfrac{AA_1}{AB} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$, па је $\varphi = 30°$.



Сл. 33.



Сл. 34.

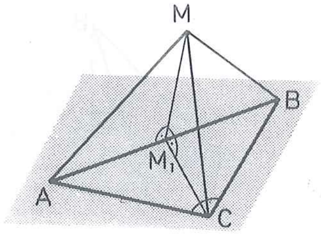
72. Користићемо сл. 33. Тражи се AA_1, а $AA_1 = AC\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Применимо Питагорину теорему на троугао ABC. Имамо: $AB^2 - AC^2 = BC^2 = 4$. Из $AB : AC = 3 : 1$, следи $AB = 3AC$, па је $9AC^2 - AC^2 = 4$. Одавде је $AC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, па је $AA_1 = \dfrac{1}{2}$.

73. Слично претходном задатку. Користимо особине правоуглог троугла са угловима од $30°$ и $60°$. Резултат: пројекције дужи AB и BC су дужина $a\sqrt{3}$ и $a\sqrt{2}$.

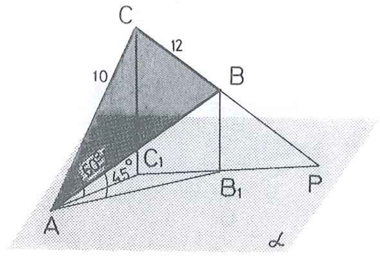
74. По услову, троугао ABB_1 је правоугли једнакокраки, сл. 34. Нека је $AB_1 = a$, тада је $BB_1 = a$ и $AB = a\sqrt{2}$. Одредимо тачку D на правој AC, тако да је $B_1D \perp AC$. По теореми о три нормале, следи да је и $BD \perp AC$. Из троугла AB_1D је $AD = AB_1\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, па је $\cos\varphi = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{1}{2}$, одакле је $\varphi = 60°$.

75. Нека је O пресечна тачка дијагонала. Означимо са C_1 и O_1 нормалне пројекције тачака C и O на раван. Тада су правоугли троуглови ACC_1 и AOO_1 слични, па је $CC_1 : OO_1 = AC : AO$, где је $CC_1 = 10$ cm и OO_1 је тражена дуж. Слични су и троуглови ABO и CDO, па је $AO : PO = AB : CD$, тј. $AO : OC = 3 : 1$. На основу особина пропорција, одавде добијамо $(AO+OC) : AO = (3+1) : 3$, тј. $AC : AO = 4 : 3$. Коначно, из $10 : OO_1 = 4 : 3$, добијамо: $OO_1 = 7,5$ cm.

76. Нека је M_1 подножје нормале из M на раван троугла ABC. Тада су правоугли троуглови AMM_1, BMM_1 и CMM_1 подударни (заједничка катета и једнаке хипотенузе). Одатле следи да је $AM_1 = BM_1 = CM_1$, тј. M_1 је центар описаног круга правоуглог троугла ABC, а то је, као што знамо, средиште хипотенузе AB, сл. 35. Сада, користећи Питагорину теорему, израчунамо најпре хипотенузу, $AB = 20$ cm (из троугла AMM_1, а онда, користећи дати услов $AC : BC = 3 : 4$, добијамо $AC = 12$ cm, $BC = 16$ cm.



Сл. 35.



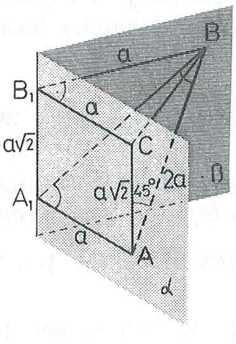
Сл. 36.

77. Праве BC и B_1C_1 се секу у тачки P, сл. 36. У правоуглом троуглу ACC_1, са углом $\sphericalangle CAC_1 = 60°$ и катетом $AC_1 = 5$, израчунамо: $AC = 10 = AB$ и $CC_1 = 5\sqrt{3}$. Сада из правоуглог троугла ABB_1 са углом $\sphericalangle BAB_1 = 45°$, на основу податка $AB = 10$, израчунамо: $BB_1 = 5\sqrt{2}$. Даље, троуглови BB_1P и CC_1P су слични, па из: $BB_1 : CC_1 = BP : CP$, тј. из $5\sqrt{2} : 5\sqrt{3} = 12(2+\sqrt{6}) : CP$, израчунамо $CP = 12\sqrt{6} + 36$. Дакле: $BC = CP - BP = 12$. Даље се лако израчунава површина троугла ABC: $P = 48$.

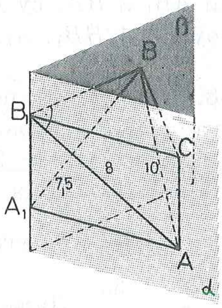
78. Означимо са B подножје нормале из A на ивицу диедра и са C подножје нормале из A на другу страну. Троугао ABC је правоугли, са углом од 45° и хипотенузом $AB = a$. Тражи се катета: $AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

79. Слично претходном задатку. Овде је $AB = 3AC$, па угао диедра, тј. $\varphi = \sphericalangle ABC$, одређујемо из: $\sin\varphi = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{3}$. Угао диедра је $\varphi = \arcsin\dfrac{1}{3}$.

80. Нека је C тачка стране α, таква да је четвороугао AA_1B_1C паралелограм, заправо правоугаоник, сл 37. Тражени углови су $\sphericalangle BAC$ (између праве AB и ивице) и $\sphericalangle ABA_1$ (између праве AB и стране β). Нека је $AA_1 = a = BB_1$. Тада је $A_1B_1 = AC = a\sqrt{2}$ и $B_1C = a$. У правоуглом троуглу BB_1C је хипотенуза BC и $BC = a\sqrt{2}$. По теореми о три нормале је $BC \perp AC$, па су катете троугла ABC једнаке $(a\sqrt{2})$ и $\sphericalangle BAC = 45°$ – то је угао између AB и ивице. Како је $AA_1 \perp \beta$, то је $\sphericalangle AA_1B = 90°$. Хипотенуза троугла AA_1B је дуж AB и истовремено је хипотенуза једнакокраког троугла ABC, па је $AB = a\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2a$. Дакле, у троуглу AA_1B је катета AA_1 половина хипотенузе, па је тражени угао $\sphericalangle ABA_1 = 30^\circ$.



Сл. 37.



Сл. 38.

81. Означимо са A_1 нормалну пројекцију тачке A на другу страну диедра и са N подножје нормале из A на ивицу. Троугао AA_1N је правоугли, са правим углом AA_1N и $\sphericalangle ANA_1 = 60^\circ$. Тражено растојање је $d = AN = \dfrac{2h}{\sqrt{3}} = \dfrac{2h\sqrt{3}}{3}$.

82. Слично претходном задатку. Тачка D припада симетријској равни диедра. Резултат је: $\dfrac{d}{2}$.

83. Слика која одговара задатку је слична са сл. 37. Треба само узети у обзир да је $AA_1 = BB_1 = 1$ cm $= B_1C$, па је троугао BB_1C једнакостраничан и $BC = 1$. Сада имамо правоугли троугао ABC са хипотенузом $AB = \sqrt{2}$ и катетом $BC = 1$. Следи да је и друга катета $AC = 1$. Дакле четвороугао AA_1BC је квадрат странице 1 cm, па је тражена дуж AB_1 његова дијагонала и $AB_1 = \sqrt{2}$ cm.

84. Поново користимо слику као 37, са димензијама $AA_1 = 5$ cm $=$ B_1C, $A_1B_1 = 8$ cm $= AC$ и $AB = 10$ cm. Сада у правоуглом троуглу ABC налазимо катету BC, Питагорином теоремом: $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 36$. Троугао BB_1C је са страницама $BB_1 = BC = 6$ cm и $B_1C = 5$ cm, а тражени угао је $\sphericalangle BB_1C = \arccos\dfrac{5}{12}$.

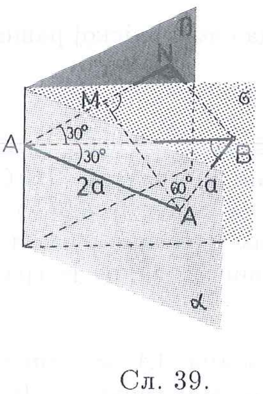
85. Слично задатку 82. Резултат: $\dfrac{2d\sqrt{3}}{3}$ cm.

86. Слично задатку 82. Нека је h тражено одстојање. Имамо $h = 6\sin 15^\circ = 6\cdot\sqrt{\dfrac{1-\cos 30^\circ}{2}} = 3\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 1,55$ cm.

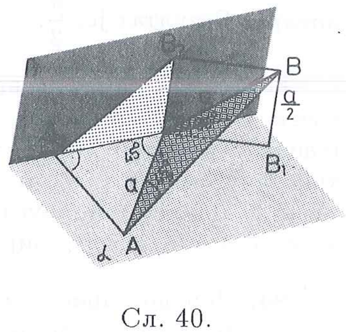
87. Нека је B_1 подножје нормале из B на ивицу, сл. 38. Диедар је правоугли, па је $BB_1 \perp \alpha$, због чега су троуглови ABB_1 и A_1BB_1 правоугли. Из првог налазимо: $BB_1^2 = AB^2 - AB_1^2 = 10^2 - 8^2 = 36$, па је $BB_1 = 6$. (Дужи AB_1 и BA_1 су дате пројекције дужи AB на стране диедра.) Даље из троугла A_1BB_1: $A_1B_1^2 = A_1B^2 - BB_1^2 = 20,25$, па је $A_1B_1 = 4,5$ cm.

88. Нека је A_1 подножје нормале из A на ивицу диедра, сл. 39. Троугао AA_1B је правоугли са угловима $\sphericalangle AA_1B = 30°$ и $\sphericalangle ABA_1 = 90°$. Због тога је $AA_1 = 2a$ и $A_1B = a\sqrt{3}$. Нека су, даље, M и N пројекције тачака A и B на раван β. Права MN садржи тачку A_1. Правоугли троугао A_1BN има угао од $30°$ код темена A_1, па је $BN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ и $A_1N = A_1B \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a}{2}$. Даље, троугао AA_1M је правоугли, са углом диедра $\sphericalangle AA_1N = 60°$, па је $A_1M = \dfrac{1}{2}AA_1 = a$. Тражена пројекција дужи AB је: $MN = AN - AM = \dfrac{a}{2}$.

Напомена. Тачке A, A_1, B, M и N припадају једној равни, која је нормална на ивицу диедра.



Сл. 39.

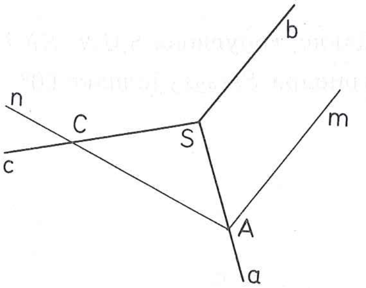


Сл. 40.

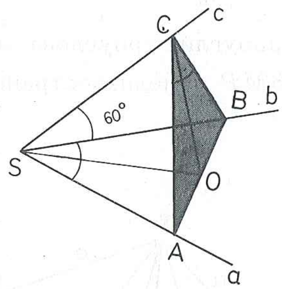
89. Према сл. 37 је $AA_1 = 24$ cm $= B_1C$ и $BB_1 = 32$ cm, па из правоуглог троугла BB_1C налазимо хипотенузу: $BC = 40$ cm. Тражена дуж је хипотенуза правоуглог троугла ABC, са катетама BC и $AC = A_1B_1 = 42$ cm. Резултат: $AB = 58$ cm.

90. Нека је $AC = BC = a$, сл. 40. У правоуглом троугла BCB_1 је $\sphericalangle BCB_1 = 30°$, па је $BB_1 = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a}{2}$. Тражимо површину троугла A_2B_2C, који има прав угао $\sphericalangle A_2CB_2$. Четвороугао BB_1CB_2 је правоугаоник, па је $B_2C = BB_1 = \dfrac{a}{2}$. Троугао AA_2C је једнакокраки, правоугли, са хипотенузом $AC = a$, због чега је $A_2C = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, па је тражена површина $S = \frac{1}{2}\frac{a}{2}\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{8}$. Како је површина датог троугла ABC: $P = \frac{a^2}{2}$, то је $S = \frac{P\sqrt{2}}{4}$.

91. Нека је $Sa \perp Sb$ и $Sc \perp Sb$. Нека је A тачка ивице Sa, различита од S, сл. 41. Конструишимо полуправу Am која припада страни Sab, нормалну на a. Како је и $Sb \perp a$, то су Sb и Am паралелне. Затим, уочимо полуправу An, која сече Sc у C и нормална је на a. Угао Amn је угао диедра са ивицом a. Како је права b нормална на a и c, она је нормална и на раван одређену овим правим, са тачком продора S. Како је $SA \perp Am$, то је, према теореми о три нормале, и $CA \perp Am$. Дакле угао диедра са ивицом a је прав. Слично се доказује да је и угао диедра са ивицом c прав.



Сл. 41.



Сл. 42.

92. Сводимо на претходни задатак.

93. Троуглови SAB, SBC, SCD и SDA су једнакостранични, па је четвороугао $ABCD$ ромб или квадрат. Слично задатку 76 доказујемо да се око овог четвороугла може описати круг, што значи да је реч о квадрату. Значи, две стране нашег триедра су по $60°$ и једна је прав угао.

94. Троуглови SAB, SBC и SCA су једнакокраки правоугли, а троугао ABC је једнакостраничан. Дакле, триедар са врхом A има две стране по $45°$ и једну од $60°$.

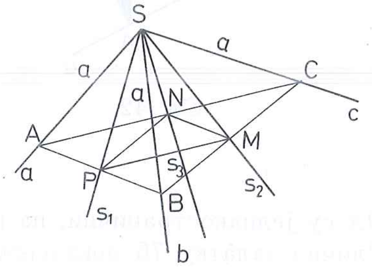
95. Одредимо на ивицама a, b, c, тачке A, B, C, такве да је $SA = SB = SC$, сл. 42. Троуглови SAC и SBC је једнакостранични, па је $CA = CB = SA = SB$. Следи да су троуглови SAB и CAB подударни (став ССС), правоугли једнакокраки. Према задатку 76, подножје нормале из S на раван ABC је средиште O хипотенузе AB, троугла SAB. Дакле $CO \perp SO$

и троугао SOC је једнакокрак, па је тражени угао $\sphericalangle CSO = \frac{\pi}{4}$.

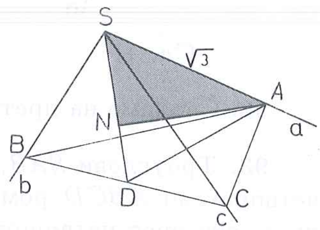
96. Троуглови SBC и SAC су правоугли једнакокраки па су две стране триедра са врхом C углови од $\frac{\pi}{4}$. Трећа страна је угао код врха једнакокраког троугла ABC, са страницама $AC = BC = AB\sqrt{2}$. Користећи се косинусном теоремом налазимо да је $\sphericalangle ACB = \arccos\frac{3}{4}$.

97. Видети сл. 42. Резултати: у тачки S су стране 60°, 60° и 90°, у тачки A су 60°, 45° и 45°, као и у тачки B , а у тачки C као у тачки S.

98. Изаберимо тачке A, B, C, на ивицама датог рогља, тако да је $SA = SB = SC = a$. Троуглови SAB, SBC и SCA су правоугли једнакокраки, а троугао ABC је једнакостраничан, са страницом $a\sqrt{2}$, сл. 43. Симетрале страна рогља полове дужи AB, BC, CA, и све имају дужину $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Сем тога и дужи SM, SN, SP, као висине једнакокраких правоуглих троуглова, имају дужине $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Дакле, троуглови SMN, SNP и SMP су једнакостранични, па су стране триедра $Ss_1s_2s_3$ једнаке 60°.



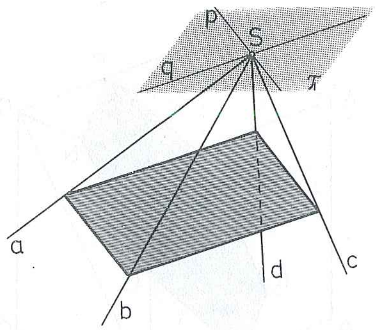
Сл. 43.



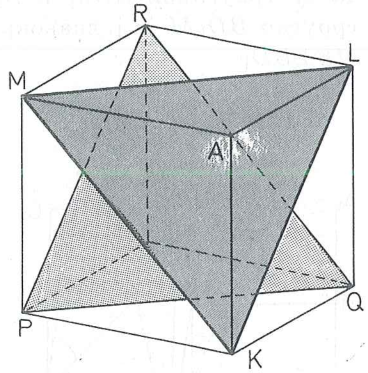
Сл. 44.

99. Нека су B и C тачке ивица b и c, такве да је $SB = SC = \sqrt{3}$. Тада су троуглови ABC, SAB, SBC, SAC једнакостранични, па подножје нормале из A на страну Sbc је центар описаног круга троугла SBC. Због тога је $SN = \frac{2}{3}SD = \frac{2}{3}\frac{SB\sqrt{3}}{2} = 1$, па је $AN^2 = SA^2 - SN^2 = 2$, тј. $AN = \sqrt{2}$.

100. Нека су Sa и Sc несуседне ивице рогља. Раван одређена правим a и b сече раван одређену правим c и d (јер имају заједничку тачку S). Нека је p њихова пресечна права, сл. 45. Означимо са q праву по којој се сече раван одређена правим b и c, са равни одређеном правим a и d. Праве p и q одређују једну раван, назовимо је π. Свака раван која је паралелна са π и сече ивице рогља, одредиће у пресеку темена паралелограма. (Пресечне праве са странама рогља су две паралелне са p и две паралелне са q.)



Сл. 45.



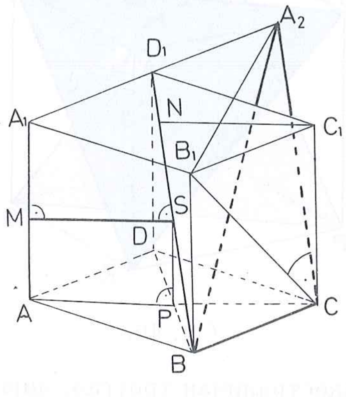
Сл. 46.

101. *а)* и *б)* У оба случаја пресек је једнакостраничан троугао, чија је страница дијагонала странице коцке: $d = a\sqrt{2}$, сл. 46. Површине ових пресека су $P = \dfrac{d^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\ \mathrm{cm}^2$.

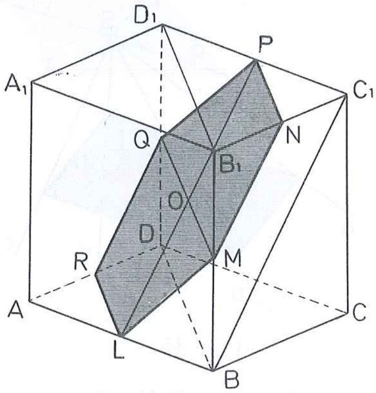
102. Пресек је правоугаоник, чија је једна страница $AD = a$. Другу страницу израчунавамо из правоуглог троугла ABM. Наиме, $BM = \dfrac{3}{4}a$, па је $AM^2 = AB^2 + BM^2 = \dfrac{25}{16}a^2$, одакле је $AM = \dfrac{5}{4}a$. Површина пресека је $P = \dfrac{5}{4}a^2$.

103. Нека је A_2 тачка, таква да је D_1 средиште дужи A_1A_2, сл. 47. Четвороугао BCA_2D_1 је паралелограм, па је дуж CA_2 паралелна и једнака са BD_1. Тражи се угао A_2CB_1. Знамо да је $CB_1 = a\sqrt{2}$ и $CA_2 = BD_1 = a\sqrt{3}$. Из правоуглог троугла $A_1B_1A_2$ налазимо: $A_2B_1^2 = A_1B_1^2 + A_1A_2^2 = 5a^2$. Дакле, у троуглу A_2B_1C важи релација: $A_2B_1^2 = A_2C^2 + B_1C^2 = 5a^2$, па на основу обрнуте Питагорине теореме следи да је $\sphericalangle A_2CB_1 = 90^\circ$.

104. Најкраће растојање између две мимоилазне праве је одсечак њихове заједничке нормале. Уочимо дијагоналу BD_1 и ивицу AA_1. Нека је P пресечна тачка дијагонала квадрата $ABCD$, сл. 47. Нормала из P на раван квадрата сече дијагоналу BD_1 коцке у тачки S, која је средиште дијагонале. (Дуж PS је средња линија троугла BDD_1.) Дуж SM, паралелна са AP је тражено најкраће растојање. Како је то половина дијагонале стране, закључујемо да је $SM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Докажимо још да је $SM \perp AA_1$ и $SM \perp BD_1$. По конструкцији четвороугао $APSM$ је правоугаоник, па је $SM \perp AA_1$. Сем тога, закључујемо да је M средиште дужи AA_1. Следи да су троуглови ABM и A_1D_1M подударни, па је $AM = D_1M$. Значи, троугао BD_1M је једнакокрак. Дуж MS је, дакле, висина на основицу и $MS \perp BD_1$.



Сл. 47.

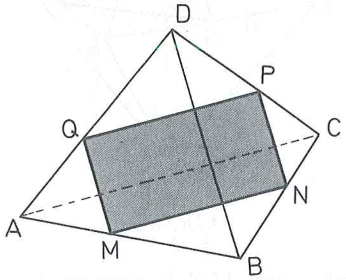


Сл. 48.

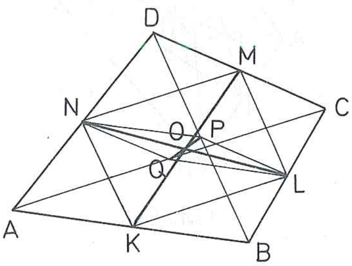
105. Према сл. 47, четвороугао ABC_1D_1 је правоугаоник, а његова дијагонала BD_1 је и дијагонала коцке. Одстојање $h = C_1N$, темена C_1 од дијагонале, је висина правоуглог троугла BC_1D_1. Ову висину ћемо израчунати из површине троугла: $\frac{1}{2}BC_1 \cdot C_1D_1 = \frac{1}{2}BD_1 \cdot h$. Одавде је $h = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

106. Доказаћемо најпре да ова раван полови још ивице: AB, C_1D_1, и DD_1. Четвороугао BB_1D_1D је паралелограм, па је BD паралелно и једнако са B_1D_1. У троуглу $B_1C_1D_1$ је дуж NP средња линија, па је $NP \parallel B_1D_1$ и $NP = \frac{1}{2}B_1D_1$. Слично се докаже да је $RL \parallel BD$ и $RL = \frac{1}{2}BD$. Следи да је $NP \parallel RL$ и $NP = RL$, па је четвороугао $NPRL$ паралелограм, а дужи PL и NR се полове. Слично се докаже да и дуж MQ има тачку O за средиште, сл. 48. Одавде следи да су тачке L, M, N, P, Q, R у једној равни и да је шестоугао $LMNPQR$ пресек равни и коцке, са једнаким и паралелним наспрамним страницама. Докажимо да је, на пример троугао OPQ једнакостраничан. Очигледно је $PQ = \frac{1}{2}C_1D_1 = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, затим $OQ = \frac{1}{2}QM = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ и $OP = \frac{1}{2}PL = \frac{1}{2}BC_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Дакле, шестоугао је дијагоналама подељен на 6 једнакостраничних троуглова, па је он правилан. Његова површина је $P = \frac{3}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\sqrt{3} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

107. Нека је $ABCD$ дати тетраедар, сл. 49. Како је пресечна раван паралелна ивици BD, то су њени пресеци NP са равни BCD и MQ са равни ABD, паралелни са BD, па је $NP \parallel MQ$. Слично се доказује и да је $MN \parallel PQ$, па је $MNPQ$ паралелограм.



Сл. 49.



Сл. 50.

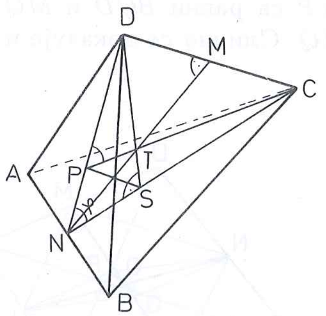
108. Дуж KL је средња линија троугла ABC, па је паралелна са AC и једнака половини дужи AC, сл. 50. Слично закључујемо да је дуж MN паралелна са AC и једнака половини AC, па је четвороугао $KLMN$ паралелограм и дужи KM и LN се полове. Слично се докаже да је четвороугао $LPNQ$ паралелограм, па је тачка O заједничко средиште дужи KM, LN и PQ.

109. Висине троуглова ABC и ABD, дужи CN и DN, одређују угао диедра. Нека је S подножје нормале из D на раван ABC, сл. 51. Тачка S је центар описаног круга троугла ABC, па је $SN = \frac{1}{3}CN = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Како је $DN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, то је $\cos\varphi = \frac{SN}{DN} = \frac{1}{3}$, па је $\varphi = \arccos\frac{1}{3} \approx 70°32'$.

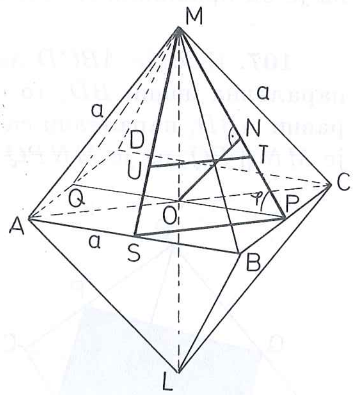
Нагиб странице одредићемо из троугла CDS и то: $\cos\theta = \frac{CS}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, па је $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 54°44'$.

110. Из троугла DNS, сл. 51, налазимо $H^2 = DN^2 - SN^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{6a^2}{9}$, па је $H = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

111. Тачке A, B_1, C и D_1 су темена правилног тетраедра, који има ивицу дужине $d = a\sqrt{2}$ cm. (Видети на сл. 46 тетраедар $APQR$.) Тражено одстојање је висина тетраедра, па, према претходном задатку, то износи: $\dfrac{a\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{3} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ cm.



Сл. 51.



Сл. 52.

112. Нека је M средиште ивице CD, сл. 51. Дуж MN је висина једнакокраког троугла CDN, па је $MN \perp CD$. Како је $AB \perp CN$ и $AB \perp DN$, то је $AB \perp MN$, па је MN заједничка нормала ивица AB и CD и представља тражено најкраће растојање. Из правоуглог троугла CMN налазимо: $MN^2 = CN^2 - CM^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 1 = 2$, па је $MN = \sqrt{2}$ cm.

113. Нека је CP висина тетраедра $ABCD$, сл. 51. Тачка P је центар описаног круга једнакостраничног троугла ABD, па тачка P припада дужи DN и $NP = \dfrac{1}{3}DN$. Дакле, висине DS и CP су у троуглу CDN, па се секу. Означимо са T њихову пресечну тачку. Како је и $NS = \dfrac{1}{3}NC$, то је $NP : ND = 1 : 3 = NS : NC$, па су троуглови NPS и NDC слични, па је $PS : CD = 1 : 3$ и $PS \parallel CD$. Према Талесовој теореми је: $PT : CT = \dfrac{1}{3} = ST : DT$.

Слично се доказује да се и остале висине секу у истој размери, одакле следи (две по две) да се њихове пресечне тачке поклапају.

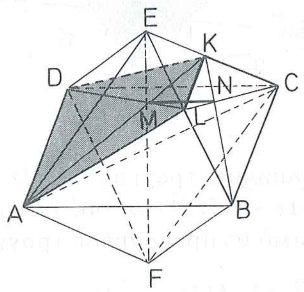
114. Четвороугао $ABCD$ је квадрат, сл. 52. Нека је ивица октаедра дужине a. Висина MP троугла MBC и права PQ паралелна са AB, одређују половину угла диедра. Висина MO је нормална на PQ, па из правоуглог троугла MPO налазимо: $\dfrac{OP}{MP} = \cos\varphi = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, па је

$\varphi = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 54°44'$, а угао диедра је $2\varphi = 2\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 109°28'$.

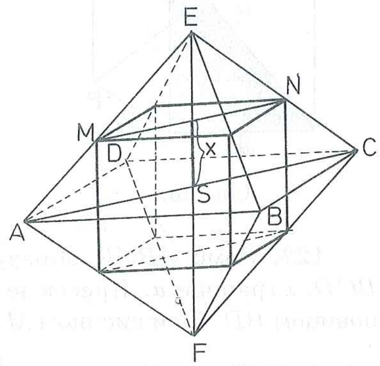
115. Половина траженог растојања једнака је нормали ON из центра O октаедра на страну BCM, сл. 52, а то је половина висине која одговара краку једнакокраког троугла MPQ. Странице овог троугла су: a, $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ и $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Из његове површине налазимо висину, а то је тражено растојање: $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ cm.

116. Центри наспрамних страна коцке (три пара) одређују три једнаке дужи, од којих је свака симетрала преосталим, итд.

117. Нека су MP и MS тежишне линије троуглова MBC и MAB (видети сл. 52). Нека су T и U тежишта ових троглова. Тада је $TU = \dfrac{2}{3}PS = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. Како је $PS \parallel AC$ то је и $TU \parallel AC$. Даље се на сличан начин докаже да тежишта троуглова MAB, MBC, MCD и MDA представљају темена квадрата, коме су странице паралелне са AC и BC. Резонујући слично докаже се да су све стране полиедра, чија су темена осам тежишта, исти такви квадрати.



Сл. 53.



Сл. 54.

118. Познато је, ако се секу две равни које садрже две паралелне праве, онда је њихова пресечна права паралелна са те две праве. Због тога је пресек KL равни ADK и BCK паралелан са AD и BC, а четвороуглови $ADKL$ и $BCKL$ су трапези, сл. 53.

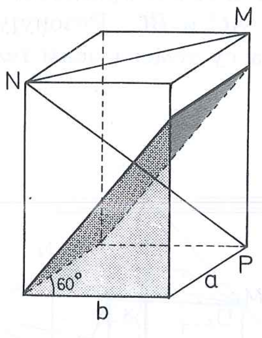
Права MN је пресек равни ABH и CDG, па је $MN \parallel AB$ и $MN \parallel CD$.

119. Према сл. 54, троуглови AEC и MNE су слични, па важи: $AC : MN = ES : (ES - x)$, односно $a\sqrt{2} : 2x\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - x\right)$. Одавде је $x = \frac{1}{2}a(2-\sqrt{2})$, па је ивица коцке: $2x = a(2-\sqrt{2})$.

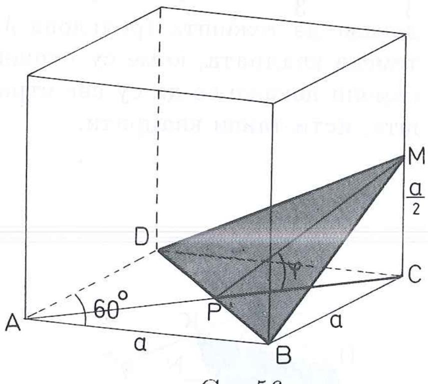
120. *а)* На описани начин испод сваког темена додекаедра добија се један једнакостраничан троугао. Ових троуглова има 20, по 5 полазе из сваког од 12 темена. Није тешко уверити се да су ови троуглови једнакостранични, а рогљеви правилни, што потврђује да је добијени полиедар очекивани икосаедар.

б) Обрнуто од *а)*, добијамо 12 подударних правилних петоуглова

121. Пресек је правоугаоник површине $2\cdot 6\cdot 8 = 96\ \text{cm}^2$, без обзира на то коју основну ивицу садржи пресечна раван. Ако раван садржи ивицу a, тада је једна страна пресека једнака a, а друга $2b$, сл. 55. (Осенчени троугао на слици је половина једнакостраничног троугла.)



Сл. 55.

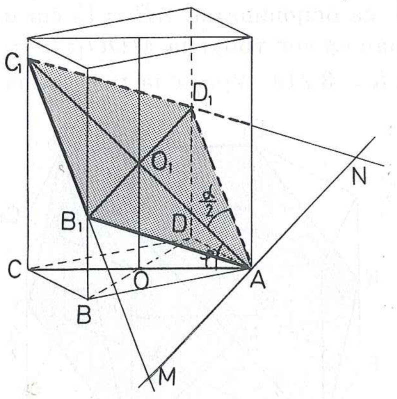


Сл. 56.

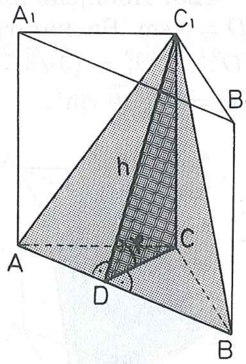
122. Ромб $ABCD$ образују два једнакостранична троугла: ABD и BCD, странице a. Пресек је једнакокраки троугао BMD, сл 56, са основицом $BD = a$ и висином MP. Висину израчунамо из правоуглог троугла CMP: $MP^2 = PC^2 + CM^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$, тј. $MP = a$. Површина пресека је $Q = \frac{a^2}{2}$. Нагибни угао је $\varphi = 30°$.

123. Уочимо на сл. 55 правоугли троугао MNP. Дијагоналу базе, дуж MN, израчунаћемо коришћењем косинусне теореме: $MN^2 = 7^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2\cdot 7\cdot 3\sqrt{2}\cdot \cos 135° = 25$. Дакле, $MN = 5$, па из $NP^2 = MP^2 + MN^2 = 12^2 + 5^2$, добијамо дијагоналу $NP = 13$ cm.

124. Нека је $ABCD$ база, а $AB_1C_1D_1$ пресек. Означимо са O и O_1 центар базе и центар ромба, сл. 57. Због $AB = AD$ и $AB_1 = AD_1$, правоугли троуглови ABB_1 и ADD_1 су подударни, па је $BB_1 = DD_1$, односно $B_1D_1 \parallel BD$. Због тога је пресечна права равни ромба са равни базе права паралелна са BD (на слици права MN), а нормална на AC и AC_1. Према томе, тражи се $\sphericalangle CAC_1$. Нека је $OB = OD = O_1D_1 = x = AO$. Из правоуглог троугла AD_1O_1 налазимо: $\dfrac{O_1D_1}{AO_1} = \dfrac{x}{AO_1} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. Одавде је $AO_1 = \dfrac{x}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$. Тражени нагибни угао φ добијамо из $\cos\varphi = \dfrac{AO}{AO_1} = \dfrac{x}{\dfrac{x}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. Коначно: $\varphi = \arccos\left(\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)$.



Сл. 57.



Сл. 58.

125. Пресек је једнакокраки троугао са основицим $AC = a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ cm, сл. 56. Нека је N пресек равни са бочном ивицом BB_1. Тада из правоуглог троугла BPN, због $\sphericalangle BPN = 60^\circ$ и $BP = \dfrac{1}{2}a = 2$, добијамо: $PN = 4$ cm. Дакле, површина троугла ACN је $\dfrac{1}{2}AC\cdot PN = 8\sqrt{3}$ cm^2.

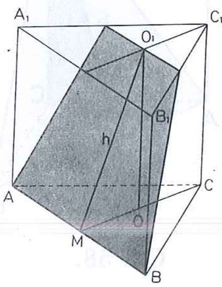
126. Раван π је одређена троуглом ABC_1, сл. 58. Нека је CD висина основе. Како је C_1C нормално на основу, по теореми о три нормале биће $C_1D \perp AB$, па је $\sphericalangle CDC_1$ тражени угао. Из правоуглог троугла ABC израчунамо висину $CD = 12$ cm. Сада у троуглу CC_1D имамо: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{CC_1}{CD} = \dfrac{12\sqrt{3}}{12} = \sqrt{3}$, па је $\varphi = 60^\circ$.

127. Користићемо се сл. 58. Троугао ABC је једнакостраничан, а пресечни троугао ABC_1 има висину h, коју налазимо из троугла CC_1D:

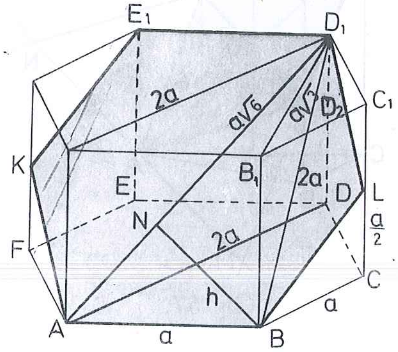
$\dfrac{CD}{h} = \cos\varphi$, где је $CD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Одавде је $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\cos\varphi}$, па је $Q = \dfrac{1}{2}AB\cdot CD = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\varphi}$.

128. Слично претходном задатку. Троугао CC_1D (сл. 58) је правоугли једнакокраки, па је $h = CD\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Површина пресека је $Q = \dfrac{1}{2}ah = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$. Међутим, из $B = \sqrt{50}$, тј. из $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{50}$, добијамо: $a^2 = \dfrac{4\sqrt{50}}{\sqrt{3}}$, па је $Q = \dfrac{4\sqrt{50}}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{4} = 10$.

129. Добијени пресек је трапез, сл. 59, са основицама: $AB = 12$ cm и $CD = 6$ cm. Висину трапеза налазимо из правоуглог троугла MOO_1: $h^2 = MO^2 + OO_1^2 = (3\sqrt{3})^2 + 12^2 = 171$, односно $h = 3\sqrt{19}$. Тражена површина је $Q = 27\sqrt{19}$ cm^2.



Сл. 59.



Сл. 60.

130. Можемо се послужити сликом 58. Ако означимо висину базе $CD = h$, тада у правоуглом троуглу CC_1D, са углом $CDC_1 = 60^\circ$, важе релације $C_1D = 2CD = 2h$ и $CC_1 = CD\sqrt{3} = h\sqrt{3}$. Површина основе је $B = \dfrac{1}{2}AB\cdot h$, а површина пресека је $Q = \dfrac{1}{2}AB\cdot C_1D = AB\cdot h = 2B$. Слично, површина стране ABB_1A_1 је $P = AB\cdot BB_1 = AB\cdot CC_1 = AB\cdot h\sqrt{3} = 2B\sqrt{3}$. Дакле, тражене површине су: $Q = 2B$ и $P = 2B\sqrt{3}$.

131. Бочна страна и дијагонални пресеци су три правоугаоника са заједничком висином, то је висина H призме. Основице су им: ивица a за бочну страну, дијагонала $d_1 = a\sqrt{3}$ за један и дијагонала $d_2 = 2a$ за други дијагонални пресек. Дакле: $S = aH$, па је $Q_1 = d_1\cdot H = \sqrt{3}\cdot aH = S\sqrt{3}$ и $Q_2 = d_2\cdot H = 2aH = 2S$.

132. Пресек је шестоугао, који је дијагоналом подељен на два подударна трапеза, сл. 60. То су трапези $ABLD_1$ и D_1E_1KA, са заједничком већом основицом AD_1. ($BL \parallel AD_1$ и $KE_1 \parallel AD_1$, јер су равни B_1BC и FEE_1 паралелне са равни ADD_1.) Због симетрије призме тачка L је средиште ивице CC_1, па је $BL^2 = BC^2 + CL^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, одакле је $BL = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Из правоуглог троугла ADD_1 налазимо $AD_1^2 = AD^2 + DD_1^2 = (2a)^2 + a^2 = 5a^2$, па је $AD_1 = a\sqrt{5}$. Да бисмо одредили висину BN трапеза, морамо израчунати дуж BD_1. Из правоуглог троугла BB_1D_1 видимо да је: $BD_1^2 = BB_1^2 + B_1D_1^2 = a^2 + (a\sqrt{3})^2 = 4a^2$, па је $BD_1 = 2a$. Троугао ABD_1 је правоугли, јер је $AB^2 + BD_1^2 = AD_1^2$. Сада из површине овог троугла израчунамо висину $BN = h$. Из једнакости: $AB \cdot BD_1 = AD_1 \cdot h$, тј. из $a \cdot 2a = a\sqrt{5} \cdot h$, добијамо: $h = \frac{2a}{\sqrt{5}}$. Коначно је површина пресека:

$$Q = 2 \cdot \frac{AD_1 + BL}{2} \cdot h = \left(a\sqrt{5} + \frac{a\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}} = 3a^2.$$

133. Обратимо пажњу на сл. 60. Решавамо слично претходном задатку, водећи рачуна о чињеници да је висина призме H, а не a, као у претходном задатку. Због тога је $BL = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + H^2}$ и $AD_1 = \sqrt{4a^2 + H^2}$, а висина трапеза $ABLD_1$ је $BN = \frac{a\sqrt{3a^2 + H^2}}{\sqrt{4a^2 + H^2}}$. Како је $BL = \frac{1}{2}AD_1$, то је површина трапеза $ABLD_1$ једнака: $Q = \frac{1}{2}\frac{AD_1 + BL_1}{2} \cdot BN =$

$$\frac{3}{2}AD_1 \cdot BN = \frac{3}{2}\sqrt{4a^2 + H^2} \cdot \frac{a\sqrt{3a^2 + H^2}}{\sqrt{4a^2 + H^2}} = \frac{3a}{2}\sqrt{3a^2 + H^2}.$$

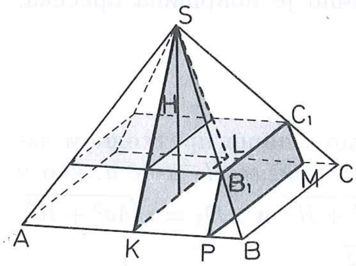
Други пресек одсеца од осовине дуж једнаку $\frac{1}{3}$ висине, а од DD_1, одсечак $DD_2 = \frac{2}{3}DD_1$. Добија се трапез једнаких кракова и висине. Већа основица је краћа за $\frac{1}{6}$, а мања основица за $\frac{1}{3}$ своје дужине. Стога је површина другог пресека: $P = \frac{\frac{5}{6}AD_1 + \frac{2}{3}BL_1}{2} \cdot BN = \frac{7}{6}AD_1 \cdot BN = \frac{7}{9}Q$.

134. Пресек је једнакокраки троугао који има основицу $DE = n$, а висина му је дуж $SD_2 = \frac{m}{4}$. (Троуглови SDD_2 и ADD_1 су слични, па је $SD_2 : AD_1 = SD : AD = 1 : 4$.) Површина пресека је: $Q = \frac{1}{2}DE \cdot SD_2 = \frac{mn}{8}$.

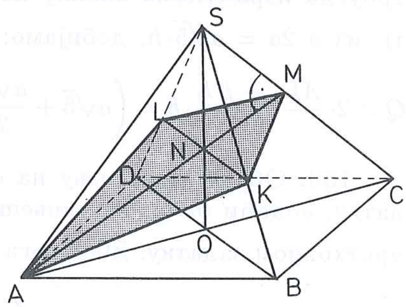
135. Пресек је једнакокраки трапез са основицама a и $\frac{a}{2}$ и висином $h = 25$ cm. Површина пресека је $Q = 525$ cm^2.

136. Симетрална раван одређује пресек који представља једнакокраки троугао, на сл. 61 троугао SKL, чија је површина: $Q = \frac{1}{2}aH$, где је a основна ивица, H висина дате пирамиде.

Други пресек је једнакокраки трапез B_1C_1MP. Према условима је $BP : PK = \frac{a}{6} : \frac{a}{2} = 1 : 3$. Због тога је и висина траженог трапеза једнака $\frac{H}{3}$. Из сличности троуглова SB_1C_1 и SBC налазимо дуж B_1C_1. Наиме: $B_1C_1 : BC = 2 : 3$, па је $B_1C_1 = \frac{2}{3}a$. Површина пресека B_1C_1MP је: $\frac{1}{2}(MP + B_1C_1)\cdot\frac{H}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}a + a\right)\cdot\frac{H}{3} = \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}aH = \frac{5}{9}Q$.



Сл. 61.

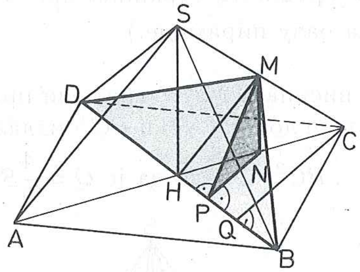


Сл. 62.

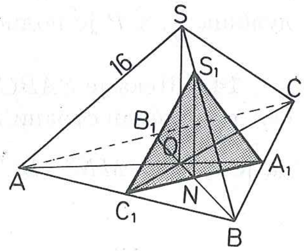
137. Из сличности пресека и основе, добијамо пропорцију $P : a^2 = \left(\frac{2}{3}H\right)^2 : H^2$, одакле је $P = 16\ \mathrm{cm}^2$. (Видети сл. 61.)

138. Из подударности троуглова SMK и SML следи да је $MK = ML$ и слично се утврди да је $AK = AL$, сл. 62. Дакле, пресек је делтоид, па је $Q = \frac{1}{2}AM\cdot KL$. Углови OAN и CSO су једнаки (са нормалним крацима), па је $\triangle AON \sim \triangle SOC$. Из сличности следи: $AO : ON = H : OC$, односно: $6 : ON = 8 : 6$, па је $ON = \frac{9}{2}$ cm. (Из правоуглог троугла SOC смо израчунали $OC^2 = s^2 - H^2 = 36$, итд.) Како је $SK = SL$, следи да је $KL \parallel BD$. Сада из сличних троуглова SKL и SBD добијамо: $KL : BD = SN : SO$, односно $KL : 12 = \frac{7}{2} : 8$, па је $KL = \frac{21}{4}$. Дијагонала AM пресека је висина једнакокраког троугла SAC, па је израчунавамо из површине троугла: $AM\cdot SC = AC\cdot SO$, односно $AM\cdot 10 = 12\cdot 8$. Дакле: $AM = \frac{48}{5}$, па је тражена површина пресека: $Q = \frac{1}{2}\cdot\frac{48}{5}\cdot\frac{21}{4} = \frac{126}{5}\ \mathrm{cm}^2$.

139. Нека је $ABCD$ основа пирамиде, чија је висина SH, а пресечна раван нека садржи дијагоналу BD. Пресек дате равни и равни SAC је права HM, паралелна са AS. Дакле, HM је средња линија троугла ACS, па је M средиште ивице CS, сл. 63. Подножје нормале из M на раван основе је средиште N дужи CH. Нека су P и Q подножја нормала из N и C на дијагоналу BD. Дуж NP је средња линија троугла CHQ, па је $NP = \frac{1}{2}CQ$. Троуглови BCQ и BDC су слични (правоугли троуглови са заједничким оштрим углом код B), па је $CQ : BC = CD : BD$, односно $CQ : 6 = 8 : 10$. (Дијагоналу $BD = 10$ правоугаоника $ABCD$ израчунали смо Питагорином теоремом.) Дакле: $CQ = \frac{24}{5}$, па је $NP = \frac{12}{5}$. Како је $MN = \frac{1}{2}SH = 1,8 = \frac{9}{5}$, то из правоуглог троугла MNP добијамо висину MP пресека: $MP^2 = MN^2 + NP^2 = 9$, односно $MP = 3$. Површина пресека је $Q = \frac{1}{2}BD \cdot MP = 15$. ($MP \perp BN$ на основу теореме о три нормале.)



Сл. 63.



Сл. 64.

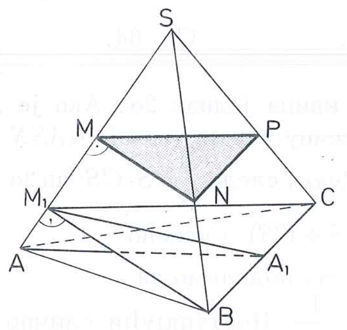
140. Нека је угао између наспрамних ивица једнак 2α. Ако је N тачка у којој висина пирамиде продире пресечну раван, тада је $\sphericalangle ASN = \sphericalangle NSC = \alpha$, па из једнакости $P_{ASC} = P_{ASN} + P_{NSC}$, следи: $\frac{1}{2}AS \cdot CS \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2}AS \cdot NS \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}NS \cdot CS \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}NS \sin\alpha(AS + CS)$, односно $2AS \cdot CS \sin\alpha\cos\alpha = NS \cdot \sin\alpha(AS + CS)$. Кад ово поделимо са $AS \cdot CS \cdot NS \cdot \sin\alpha$, добићемо: $\frac{2\cos\alpha}{NS} = \frac{1}{CS} + \frac{1}{AS}$. Поступајући слично у троуглу BDS, добијамо једнакост $\frac{2\cos\alpha}{NS} = \frac{1}{DS} + \frac{1}{BS}$. Из последње две једнакости следи тражени закључак.

141. Нека је SMP дијагонални пресек дате пирамиде $SMNPQ$. На страницама овог пресека су четири темена уписане коцке: AC припада дужи MP, A_1 је на SM и C_1 на SP. Нека је a ивица коцке. Тада је $AC = a\sqrt{2} = A_1C_1$ и $AA_1 = a = CC_1$. Троуглови SMP и SA_1C_1 су слични, па је $MP : A_1C_1 = H : (H - a)$. Како је $MP = 4\sqrt{2}$, добијамо: $4\sqrt{2} : a\sqrt{2} = 12 : (12 - a)$. Одавде је $a = 3$ cm.

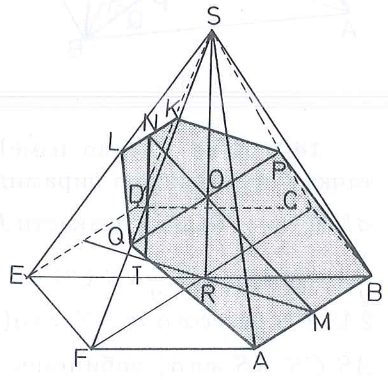
142. Нека су A_1, B_1, C_1 средишта основних ивица пирамиде $SABC$. Уочимо пресек $A_1C_1S_1$, сл. 64. Дуж $A_1C_1 = 12$ cm, као средња линија троугла ABC, а висину S_1N пресека израчунаћемо из сличних троуглова SOB и S_1NB. Најпре из правоуглог троугла AOS налазимо висину пирамиде: $SO^2 = AS^2 - AO^2 = 16^2 - \left(\frac{24\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 64$, тј. $SO = H = 8$ cm. Како је $BO = AO = 8\sqrt{3}$ и $BN = \frac{1}{2}BB_1 = 6\sqrt{3}$, из пропорције: $NS_1 : OS = BN : BO$, тј, из $NS_1 : 8 = 6\sqrt{3} : 8\sqrt{3}$, добијамо $NS_1 = 6$ cm. Површина пресека је $Q = 36$ cm^2.

143. Пресек је паралелограм са страницама $\frac{a}{2}$ и $\frac{s}{2}$. Користећи се теоремом о три нормале може се доказати да је пресек правоугаоник, па је $Q = \frac{as}{4}$. (Може се помоћу обрнуте Питагорине теореме доказати да је троугао MNP правоугли, где су M и N средишта страница пресека дужина $\frac{a}{2}$, а P је подножје нормале из N на базу пирамиде.)

144. Нека је $SABC$ дата пирамида, SO висина и MNP тражени пресек, паралелан страни BCS. Из сличности троуглова MNP и BCS излази да је $Q : S = MN^2 : BC^2$, тј $Q : S = \left(\frac{2}{3}BC\right)^2 : BC^2$. Следи да је $Q = \frac{4}{9}S$.



Сл. 65.



Сл. 66.

145. Уочимо пресек MNP симетралне равни ивице SA и пирамиде $SABC$, сл. 65. Углови AMN и AMP су прави. Нека је M_1 тачка ивице SA, таква да је и угао AM_1B прав. Троугао M_1BC сличан је троуглу MNP. Дуж BM_1 је висина једнакокраког троугла SAB, са страницама $SA = SB = 2AB = 2a$. Користећи се Питагорином теоремом рачунамо: $SB^2 - SM_1^2 = AB^2 - AM_1^2$, односно $(2a)^2 - (2a - AM_1)^2 = a^2 - AM_1^2$. Одавде добијамо: $AM_1 = \frac{a}{4}$, па из правоуглог троугла AA_1M_1 добијамо $A_1M_1 = \dfrac{a\sqrt{11}}{4}$. (Знамо да је $AA_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.) Површина троугла BCM_1 је $P_1 = \dfrac{1}{2}BC\cdot A_1M_1 = \dfrac{a^2\sqrt{11}}{8}$. Из сличних троуглова BCM_1 и NPM је: $P_1 : P = SM_1^2 : SM^2$, односно $\dfrac{a^2\sqrt{11}}{8} : 2\sqrt{11} = \left(\dfrac{7a}{4}\right)^2 : a^2$. Одавде је $a = 7$ cm.

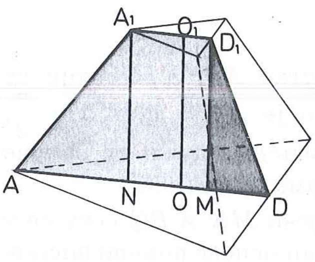
146. Троуглови SAB, SBC и SCA су правоугли, па користећи Питагорину теорему добијамо: $AB = \sqrt{a^2+b^2}$, $CB = \sqrt{b^2+c^2}$ и $AC = \sqrt{a^2+c^2}$. На троугао ABC применимо Херонов образац:
$B = \sqrt{s(s-AB)(s-BC)(s-AC)}$, где је $s = \dfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2})$,
$s-AB = \dfrac{1}{2}(\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2})$, $s-BC = \dfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{b^2+c^2})$ и $s-AC = \dfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}-\sqrt{a^2+c^2})$. Приметимо да је:
$4s(s-AB) = \Big((\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2})+\sqrt{a^2+b^2}\Big)\Big((\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}) - \sqrt{a^2+b^2}\Big) = (\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2})^2-(\sqrt{a^2+b^2})^2 = 2c^2+2\sqrt{(b^2+c^2)(a^2+c^2)}$.
Слично добијемо да је $4(s-BC)(s-AC) = 2\sqrt{(b^2+c^2)(a^2+c^2)}-2c^2$, па је даље:
$B = \dfrac{1}{4}\sqrt{4(\sqrt{(b^2+c^2)(a^2+c^2)}-c^2)(\sqrt{(b^2+c^2)(a^2+c^2)}-c^2)} =$
$\dfrac{1}{2}\sqrt{(b^2+c^2)(a^2+c^2)-c^4} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}$.

147. Слично задатку 132. Пресек је шестоугао $ABPKLQ$, који се састоји из два трапеза – $ABPQ$ и $PKLQ$. Како је $AB = a$, $KL = \dfrac{a}{2}$, треба израчунати дужи PQ, MO и ON. Две последње дужи су висине поменутих трапеза (на основу теореме о три нормале), сл. 66.

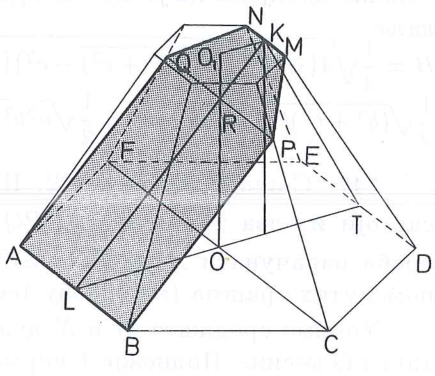
Уочимо средишта M и N дужи AB и KL. Дужи MN и PQ секу се у тачки O висине. Подножје T нормале из N на раван основе полови висину троугла DER, па је $MR : MT = 2 : 3$. Из сличних троуглова OMR и NMT даље зајључујемо да је $OR = \dfrac{2}{3}NT = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}H = \dfrac{H}{3}$, као и $ON = \dfrac{1}{2}OM$. Из сличних троуглова SCF и SPQ налазимо да је $PQ = \dfrac{2}{3}CF = \dfrac{4a}{3}$. Затим, из правоуглог троугла MOR добијамо $MO = \sqrt{MR^2+OR^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4}+\dfrac{H^2}{9}} = \dfrac{1}{6}\sqrt{27a^2+4H^2}$. Отуда закључујемо да је $ON = \dfrac{1}{12}\sqrt{27a^2+4H^2}$. Дакле, тражена површина пресека је:
$Q = \dfrac{1}{2}(AB+PQ)\cdot MO + \dfrac{1}{2}(PQ+KL)\cdot ON = \dfrac{13}{48}a\sqrt{27a^2+4H^2}$.

148. Слично задатку 138, сл 62. Тачка M на сл 62 у овом задатку представља средиште бочне ивице пирамиде, која се добија допуњавањем дате зарубљене пирамиде. (Ивице доње и горње основе односе се као 2 : 1.) Резултат је: $Q = \dfrac{2}{3}\,md$.

149. Поставимо пресечну раван кроз висину и једну бочну ивицу. Добијамо пресечни полигон у облику трапеза AA_1D_1D, сл 67. Тражи се висина D_1M. (Такође је $D_1M = H = O_1O = A_1N$, где су O и O_1 центри основа.) Дужи OD и O_1D су полупречници уписаних кругова основа, па је $OD = \dfrac{1}{3}AD = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{6\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ и $O_1D_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Правоугли троугао MDD_1 одређује нагибни угао бочне стране: $\sphericalangle MDD_1 = 60°$, па како је $MD = OD - O_1D_1 = \sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, а $MD_1 = MD\sqrt{3}$, то је тражена висина: $H = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3} = 2$ cm.



Сл. 67.



Сл. 68.

150. Користићемо сл. 67. Уочимо правоугли троугао AA_1N. Нагиб хипотенузе одређује нагибни угао бочне ивице према равни основе. Овде је, дакле, $\sphericalangle A_1AN = 45°$, па како је $AN = AO - A_1O_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} - \dfrac{b\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a-b}{\sqrt{3}}$, то је висина пирамиде и пресека: $H = A_1N = AN = \dfrac{a-b}{\sqrt{3}}$. Површина пресека је: $Q = \dfrac{1}{2}(AD + A_1D_1)\cdot H = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2} + \dfrac{b\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\dfrac{a-b}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{4}(a+b)(a-b) = \dfrac{a^2-b^2}{4}$.

151. Слично задацима 132 и 147. Пресек је шестоугао $ABPMNQ$, којег је дуж PQ поделила на два трапеза, сл. 68. Треба израчунати дужи PQ и LR (дата је дуж $KL = k$). Познато је: $AB = 3a$ и $MN = a$. Из сличних троуглова LOR и KO_1R добијамо: $LR : R = LO : KO_1 = 3 : 1$, па је $LR = \frac{3}{4}k$. Нека је S врх допунске пирамиде. Тада из сличних троуглова SCF и SPQ добијамо: $FC : PQ = SO : SR$, односно $6a : PQ = \frac{3}{2}H : \frac{3}{4}H$, па је $PQ = 3a$. Површина пресека је $Q = 3a\cdot \frac{3}{4}k + \frac{1}{2}(3a + a)\cdot \frac{k}{4} = \frac{11}{4}ak$.

152. Пресек је сличан основи, па ако површине основе и пресека означимо са B и Q, добијамо систем једначина с две непознате: $B - Q = k^2$ и $B : Q = h^2 : (h - m)^2$. Одавде је $Q = \dfrac{k^2(h-m)^2}{m(2h-m)}$.

153. Користећи се сличношћу пресека израчунамо да је висина допунске пирамиде једнака четвртини висине дате зарубљене пирамиде. Ако висину допуне означимо са H, онда је висина датог тела $4H$. Из сличности добијамо везу: $Q : a^2 = (3H)^2 : H^2$, одакле је $Q = 9a^2$.

154. Означимо са B површине једнаких многоуглова. Из сличности паралелних пресека, у случају мање пирамиде је: $B : Q_1 = \left(\dfrac{H}{4}\right)^2 : H^2$, одакле је $Q_1 = \dfrac{B}{16}$. Код веће пирамиде је: $B : Q^2 = \left(\dfrac{13}{4}H\right)^2 : (4H)^2$. Одавде је $Q_2 = \dfrac{169B}{256}$, па је $Q_2 : Q_1 = \dfrac{169B}{256} : \dfrac{B}{16} = 169 : 16$.

155. Висина допунске пирамиде представља трећину висине зарубљене пирамиде. (Слично задатку 153.) Дат је услов: $Q_1 + Q_2 + B_1 = k$, а тражи се већа основа B. Из сличности добијамо: $B : Q_1 = H^2 : \left(\dfrac{3}{4}H\right)^2$, одакле је $Q_1 = \dfrac{9}{16}B$. Слично из $B : Q_2 = H^2 : \left(\dfrac{H}{2}\right)^2$, добијамо: $Q_2 = \dfrac{B}{4}$ и из $B : B_1 = H^2 : \left(\dfrac{H}{4}\right)^2$, налазимо: $B_1 = \dfrac{B}{16}$. Добијене везе заменимо у дати услов и биће: $\dfrac{9B}{16} + \dfrac{B}{4} + \dfrac{B}{16} = k$, одакле је $B = \dfrac{8}{7}k$.

156. Из једнакости: $6a^2 = 6\cdot 12^2 + 6\cdot 5^2$, добијамо: $a^2 = 12^2 + 5^2 = 169$, па је $a = 13$ cm и тражена запремина је $V = 13^3 = 2197$ cm^3.

157. Већу дијагоналу основе израчунавамо коришћењем косинусне теореме: $d^2 = 1^2 + 4^2 - 2\cdot 1\cdot 4\cdot \cos 120^\circ = 21$. Висину призме налазимо Питагорином теоремом: $H^2 = D^2 - d^2 = 25 - 21 = 4$, па је $H = 2$ cm.

Запремина је $V = B\cdot H = 1\cdot 4\cdot \sin 60^\circ\cdot 2 = 4\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$.

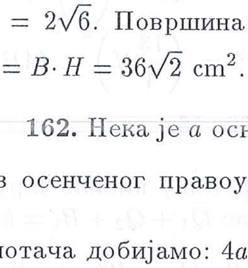
158. Дато је $Q_1 = d_1H$ и $Q_2 = d_2H$, одакле је $d_1 = \dfrac{Q_1}{H}$ и $d_2 = \dfrac{Q_2}{H}$. Страница ромба задовољава услов: $a^2 = \dfrac{d_1^2}{4} + \dfrac{d_2^2}{4}$, па је $a^2 = \dfrac{Q_1^2}{4H^2} + \dfrac{Q_2^2}{4H^2}$, одакле $a = \dfrac{\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}}{2H}$. Површина омотача је: $M = 4aH = 2\sqrt{Q_1^2+Q_2^2}$.

159. Из дијагоналног пресека налазимо висину призме и дијагоналу основе: $c = d = \sqrt{100} = 10$ dm. Затим, из $a : b = 3 : 4$, тј. $b = \dfrac{4}{3}a$ и $a^2 + b^2 = d^2 = 100$, добијамо основне ивице: $a = 6$ dm, $b = 8$ dm. Резултати: $P = 376\ \mathrm{dm}^2$, $V = 480\ \mathrm{dm}^3$.

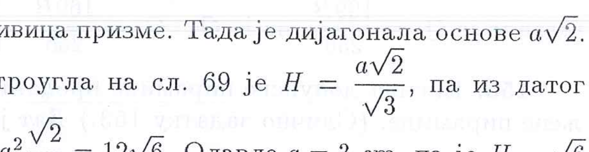
160. Дијагонала основе је $\sqrt{a^2+b^2}$ и она са висином и дијагоналом тела образује правоугли троугао са оштрим углом α. При томе је $H = \operatorname{tg}\alpha\cdot\sqrt{a^2+b^2}$, па је $V = ab\operatorname{tg}\alpha\sqrt{a^2+b^2}$.

161. Слично задатку 157, израчунамо дијагонале основе: $d_1^2 = 13$ и $d_2^2 = 37$. Мања дијагонала призме је је $D = d_2$ па како d_1, H и D образују правоугли троугао, добићемо: $H^2 = D^2 - d_1^2 = 37 - 13 = 24$, односно $H = 2\sqrt{6}$. Површина основе је $B = 3\cdot 4\sin\dfrac{2\pi}{3} = 6\sqrt{3}$, па је запремина: $V = B\cdot H = 36\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^2$.

162. Нека је a основна ивица призме. Тада је дијагонала основе $a\sqrt{2}$. Из осенченог правоуглог троугла на сл. 69 је $H = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, па из датог омотача добијамо: $4aH = 4a^2\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{6}$. Одавде $a = 3$ cm, па је $H = \sqrt{6}$ cm. Према томе: $P = 2a^2 + M = \left(18 + 12\sqrt{6}\right)\ \mathrm{cm}^2$ и $V = a^2H = 9\sqrt{6}\ \mathrm{cm}^3$.



Сл. 69.



Сл. 70.

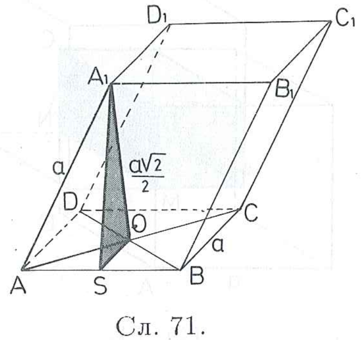
163. Дата дијагонала дели базу на два подударна троугла, којима израчунавамо површине користећи Херонов образац. Дакле: $B = 2P_\triangle =$

72 cm^2. Сада из површине добијемо: $P = 2B + M$, односно $334 = 144 + M$, одакле је $M = 190$ cm^2. Како је $M = (2a + 2b)H$, следи да је $H = 5$ cm, па је $V = B \cdot H = 360$ cm^3.

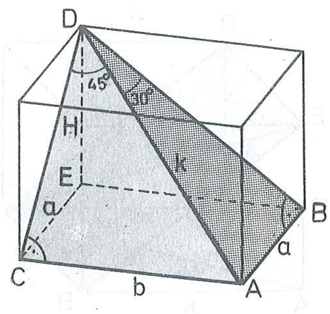
164. Из правоуглог троугла ABC, сл. 70, налазимо да је $AB = 1,2$ m. Ако је горња ширина насипа b m, тада из $V = B \cdot H = (b + 1,2) \cdot 0,64 \cdot 15 = 49,92$, добијамо: $b + 1,2 = 5,2$, тј. $b = 4$ m. Средња линија трапеза, дуж MN на слици, износи $5,2$ m. Треба израчунати запремину призме којој је база трапез $BMND$ висине $0,32$ m, а дужина (висина призме) је иста, тј. 15 m. То износи $27,84$ m^3.

165. Слично претходном задатку. Резултат: 30420000 литара.

166. Нека је O пресечна тачка дијагонала основе, сл. 71. Тада је $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, па је троугао AA_1O једнакокраки правоугли и висина призме је $H = OA_1 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Запремина призме је $V = a^2H = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. Треба још израчунати висину бочне стране. Уочимо средиште S основне ивице AB. Како је A_1O нормала на раван основе и OS нормално на AB, тада је, према теореми о три нормале, $A_1S \perp AB$, тј. дуж A_1S је бочна висина. Из троугла AA_1S налазимо: $A_1S^2 = a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$, па $A_1S = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Дакле, површина призме је: $P = 2B + M = 2a^2 + 4a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = 2a^2(1 + \sqrt{3})$. Нагиб бочне ивице је $\sphericalangle A_1AO = 45^\circ$.



Сл. 71.



Сл. 72.

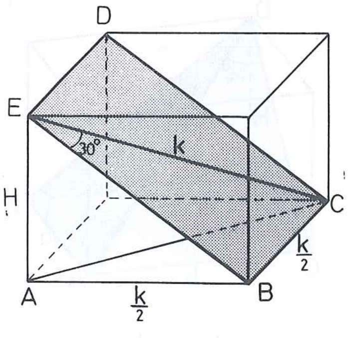
167. Из дијагоналног пресека је $c = \sqrt{Q}$. Даље је $a : b = m : n$, тј. $b = \dfrac{na}{m}$ и $a^2 + b^2 = c^2 = Q$. Одавде израчунавамо $a^2 = \dfrac{m^2Q}{m^2 + n^2}$ и $b^2 = \dfrac{n^2Q}{m^2 + n^2}$, па је запремина: $V = abc = \dfrac{mnQ\sqrt{Q}}{m^2 + n^2}$.

168. Слично задатку 12, израчунамо висину h и дијагоналу d трапеза: $h = 15$ cm и $d = 39$ cm. Дијагонала представља страницу ромба – дијагоналног пресека. Како је ромб нормалан на раван основе, његова висина ће бити истовремено и висина призме. С обзиром на оштар угао ромба, биће $H = \frac{39\sqrt{2}}{2}$. Запремина је $10530\sqrt{2}$ cm^3, односно, приближно $14,89$ dm^3.

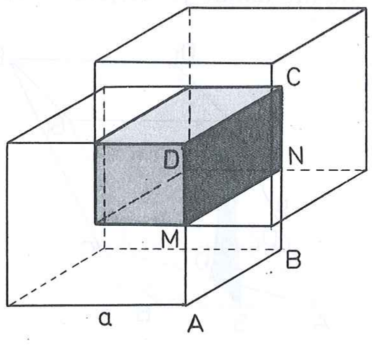
169. Дијагонала квадра, дијагонала основе и висина призме одређују правоугли троугао са оштрим углом од $60°$. Како је $d = \sqrt{a^2+b^2}$ и $H = d\sqrt{3} = \sqrt{3a^2+3b^2}$, то је запремина $V = ab\sqrt{3a^2+3b^2}$ и омотач $M = 2(a+b)\sqrt{3a^2+3b^2}$.

170. Из правоуглог троугла ABD израчунамо ивицу $AB = a = \frac{k}{2}$, сл. 72, а из троугла ACD је $b = \frac{k\sqrt{2}}{2}$. У правоуглом троуглу CDE су катете $CE = a = \frac{k}{2}$ и $DE = H$, а хипотенуза је $CD = b = \frac{k\sqrt{2}}{2}$, па је $H = \sqrt{CD^2 - CE^2} = \frac{k}{2}$. Дакле: $V = \frac{k^3\sqrt{2}}{8}$.

171. Видети сл. 72. У троуглу ABD је $BD = a\sqrt{3}$, па из правоуглог троугла BED налазимо: $H^2 = BD^2 - BE^2 = 2a^2$, односно $H = a\sqrt{2}$. Запремина је $V = a^3\sqrt{2}$.



Сл. 73.



Сл. 74.

172. Уочимо пресек, правоугаоник $BCDE$, сл. 73. У троуглу ABE је дуж BE хипотенуза, па је $BE > AB$, а отуда и $BE > BC$. Дакле $\sphericalangle BEC < \sphericalangle BCE$, што значи да је дати угао $\sphericalangle BEC = 30°$. Следи да је $BC = \frac{k}{2}$ и $BE = \frac{k\sqrt{3}}{2}$. Из правоуглог троугла ABE рачунамо висину призме: $AE = \dfrac{k\sqrt{2}}{2}$, па је површина призме: $P = k^2\left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$ и запремина $V = \dfrac{k^3\sqrt{2}}{8}$.

Нагиб дијагонале према равни основе је угао ACE. Како су странице троугла ACE дужина: $AC = \dfrac{k\sqrt{2}}{2} = AE$ и $CE = k$, то је $\sphericalangle ACE = 45^\circ$.

173. Користићемо се сл. 73. Дати су углови $\sphericalangle ACB = \alpha$ и $\sphericalangle BCE = \beta$ и дуж $AC = d$. Основне ивице су $BC = d\cos\alpha$ и $AB = d\sin\alpha$ (из троугла ABC), а дијагонала квадра $CE = \dfrac{BC}{\cos\beta} = \dfrac{d\cos\alpha}{\cos\beta}$ (из правоуглог троугла BCE). Сада из троугла ACE израчунамо висину квадра: $H = \sqrt{CE^2 - AC^2} = \sqrt{\dfrac{d^2\cos^2\alpha}{\cos^2\beta} - d^2} = \dfrac{d}{\cos\beta}\sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\beta} = \dfrac{d}{\cos\beta}\sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)(\cos\alpha + \cos\beta)} = \dfrac{d}{\cos\beta}\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}$. Површина омотача је $M = 2(AB + BC)H = \dfrac{2d^2(\sin\alpha + \cos\alpha)}{\cos\beta}\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)} = \dfrac{2\sqrt{2}d^2\cos(\alpha - 45^\circ)}{\cos\beta}\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta-\alpha)}$, $0 < \alpha < \beta < 90^\circ$.

174. Површина основе је $B = a\cdot b\sin 30^\circ = \dfrac{ab}{2}$, па је запремина $V = \dfrac{1}{2}abc$. Према датим условима је $\dfrac{ab}{2} = 4$, односно $ab = 8$, као и $ac = 6$ и $bc = 12$. Помножимо ове три једнакости и добијемо: $a^2b^2c^2 = 576$, а одавде је $abc = 24$, па је запремина: $V = \dfrac{abc}{2} = 12\ \mathrm{dm}^3$.

175. Висина основе представља најкраће растојање паралелних бочних страна. Нека је висина основе h, основне ивице a и b, $a \parallel b$ и висина призме H. Имамо: $V = \dfrac{(a+b)h}{2}\cdot H = \dfrac{aH + bH}{2}\cdot h$, што се и тврдило.

176. Да бисмо уочили међусобни положај двеју коцки, ротирамо другу коцку, ивице a, око средње линије MN стране $ABCD$, сл. 74. Заједнички део (појачане ивице на слици) има запремину: $V = \dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot a = \dfrac{a^3}{4}$.

177. Површина призме је $P = 6B$, где је B површина једног ромба: $B = a^2\sin\alpha$, дакле $P = 6a^2\sin\alpha$.

За израчунавање запремине треба одредити висину призме. То је дуж CD на сл. 75, која је уједно и висина троугла ABC. Најпре ћемо израчунати површину S троугла ABC (Херонов образац), па ће бити

$H = \dfrac{2S}{AB}$. Једна страница овог троугла је $AC = a$. Друга је $AB = \dfrac{d_2}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2\cos(180^\circ - \alpha)} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2a^2\cos\alpha} = a\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} = a\cos\dfrac{\alpha}{2}$. Трећа страница је дуж BC, која представља висину једнакостраничног троугла CEF, тј. $BC = \dfrac{d_1}{2}\sqrt{3}$. Дуж d_1 израчунамо помоћу косинусне теореме из троугла AEF (слично дијагонали d_2 основе), и добијемо: $d_1 = 2a\sin\dfrac{\alpha}{2}$. Дакле, $BC = a\sqrt{3}\sin\dfrac{\alpha}{2}$. Сада имамо:
$S = \sqrt{s(s-AB)(s-AC)(s-BC)}$, где је s полуобим троугла ABC, тј.
$s = \dfrac{a}{2}\left(1 + \cos\dfrac{\alpha}{2} + \sqrt{3}\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$, $s - AC = \dfrac{a}{2}\left(\sqrt{3}\sin\dfrac{\alpha}{2} - 1 + \cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$,
$s - AB = \dfrac{a}{2}\left(\sqrt{3}\sin\dfrac{\alpha}{2} + 1 - \cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$ и $s - BC = \dfrac{a}{2}\left(1 + \cos\dfrac{\alpha}{2} - \sqrt{3}\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Уочимо да је: $s(s-BC) = \dfrac{a^2}{4}\left(\left(1+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^2\right) =$
$\dfrac{a^2}{4}\left(1+2\cos\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-3\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{a^2}{4}\left(\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+2\cos\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-3\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)=$
$\dfrac{a^2}{4}\left(2\cos\dfrac{\alpha}{2} + 2\left(\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)\right) = \dfrac{a^2}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} + \cos\alpha\right) = a^2\cos\dfrac{\alpha}{4}\cdot\cos\dfrac{3\alpha}{4}$.

Слично добијемо да је $(s-AC)\cdot(s-AB) = a^2\sin\dfrac{\alpha}{4}\cdot\sin\dfrac{3\alpha}{4}$, па је
$S = a^2\sqrt{\sin\dfrac{\alpha}{4}\cos\dfrac{\alpha}{4}\sin\dfrac{3\alpha}{4}\cos\dfrac{3\alpha}{4}} = \dfrac{a^2}{2}\sqrt{\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{3\alpha}{2}}$.

Даље, добијамо висину призме: $H = \dfrac{2S}{AB} = \dfrac{a\sqrt{\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{3\alpha}{2}}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. Запремина је:

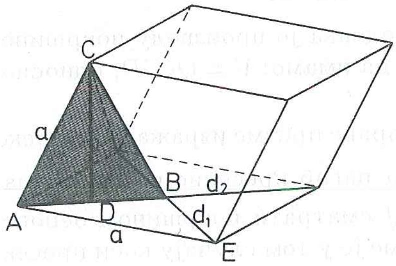
$$V = B\cdot H = \frac{a^3\sin\alpha\sqrt{\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{3\alpha}{2}}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} = 2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

Ако је $\alpha = 60^\circ$, добијамо: $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

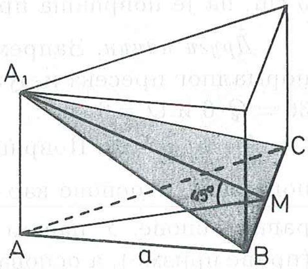
178. Из $aH = 125$, $bH = 85$ и $cH = 140$, добијамо основне ивице: $a = 25$ dm, $b = 17$ dm и $c = 28$ dm. Хероновим обрасцем израчунамо површину основе $B = 210$ dm^2, па је запремина призме: $V = 1050$ dm^3.

179. Из $V = B\cdot H = 120$, добијамо $B = 12$. Затим из $B = \dfrac{1}{2}b\cdot h_b$, тј. из $12 = \dfrac{5}{2}h_b$, добијамо $h_b = \dfrac{24}{5}$. Даље, примењујући два пута Питагорину теорему, добијамо основну ивицу $a = 6$. Површина призме је $P = 2B +$

$(a+2b)\cdot H = 184.$



Сл. 75.



Сл. 76.

180. Из услова $3aH = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ је $H = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, па је $V = \dfrac{a^3}{8}$.

181. Нека су M и N средишта основних ивица AB и A_1B_1 и O центар горње основе. Троугао MNO је правоугли са катетама H и r, где је $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Како је $\sphericalangle MOR = 60°$, то је $r = \dfrac{H}{\sqrt{3}}$, па је $\dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{H}{\sqrt{3}}$, тј. $a = 2H$. Резултати: $P = 2H^2(3+\sqrt{3})$, $V = H^3\sqrt{3}$.

182. *Дато је*: $aH = 9$, $bH = 10$ и $cH = 17$, па је $a : b : c = 9 : 10 : 17$. Основа је слична троуглу са страницама: 9 cm, 10 cm и 17 cm. Хероновим обрасцем налазимо површину сличног троугла: $B_1 = 36$. Сада из $B_1 : 4 = 9^2 : a^2$, тј. из $36 : 4 = 81 : a^2$, добијамо основну ивицу $a = 3$ cm, па је онда $H = 3$ cm. Запремина је $V = 12$ cm^3.

183. Изразићемо основну ивицу a и висину призме H преко Q. Површина пресека је $Q = \dfrac{1}{2}a\cdot A_1M$, сл. 76. Из правоуглог троугла AA_1M је $A_1M = AM\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}$. Сада добијамо везу: $Q = \dfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$, одакле је најпре $a^2 = \dfrac{4Q}{\sqrt{6}}$, а онда $a = \dfrac{2\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{6}}$. Затим: $H = AA_1 = AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3Q}}{\sqrt[4]{6}}$. Запремина је: $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H = \dfrac{Q\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\cdot\dfrac{\sqrt{3Q}}{\sqrt[4]{6}} = \dfrac{Q\sqrt{Q}\cdot\sqrt[4]{6}}{2}$.

184. Висина призме је $H = a\sin\alpha$, па је запремина $V = \dfrac{a^3}{2}\sin\alpha$.

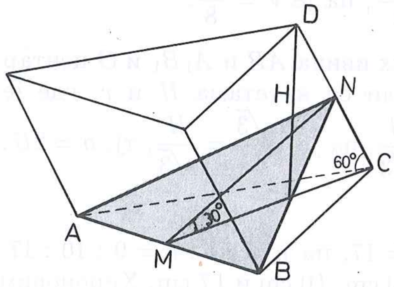
185. Бочна ивица и висина призме одређују правоугли троугао CDE, сл. 77, одакле налазимо: $H = 3\sqrt{3}$ cm, па је запремина $V = 36$ cm^3.

Нека је N подножје нормале из средишта M основне ивице AB на бочну ивицу CD. Троугао ABN је нормални пресек чију површину рачунамо.

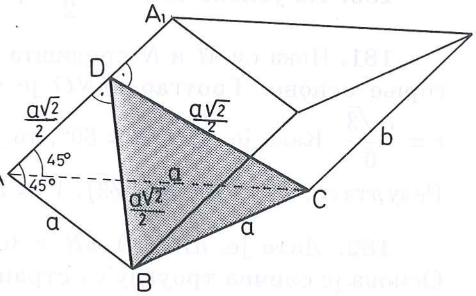
Из правоуглог троугла CMN, са углом од 60°, добијамо: $MN = MC\dfrac{\sqrt{3}}{2} =$ 3 cm, па је површина пресека: $Q = \dfrac{1}{2}AB\cdot MN = 6\ \mathrm{cm}^2$

Други начин. Запремина косе призме једнака је производу површине нормалног пресека и дужине бочне ивице, па имамо: $V = Q\cdot CD$, односно $36 = Q\cdot 6$ и $Q = 6\ \mathrm{cm}^2$.

Трећи начин. Површина косог пресека праве призме изражава се преко површине B основе као $Q = \dfrac{B}{\cos\alpha}$, где је α нагиб пресечне равни према равни основе. У нашем случају можемо Q сматрати површином основе (праве призме), а основа B наше косе призме је у том случају коси пресек са нагибом од 30°. Дакле, овде је $Q = B\cos 30^\circ$, тј. $Q = 4\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\ \mathrm{cm}^2$.



Сл. 77.



Сл. 78.

186. Тачка D је подножје нормала из B и C на ивицу AA_1, сл. 78. Очигледно су троуглови ABD, ACD и BCD подударни, правоугли једнакокраки. Троугао BCD је нормални пресек призме, па су дужи BD, CD и BC висине паралелограма који образују омотач. Дакле, површина призме је $P = 2\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + b(BD + CD + BC) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} + ab\sqrt{2} + ab$. Површина нормалног пресека је $Q = \dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^2}{4}$, па је запремина призме $V = Q\cdot b = \dfrac{a^2 b}{4}$. Висину добијамо из $V = B\cdot H$, односно $H = \dfrac{V}{B} = \dfrac{b\sqrt{3}}{3}$.

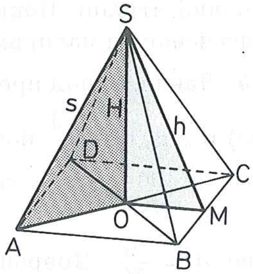
187. Бочне стране су правоугаоници, па имамо једнакости: $H^2 = d_1^2 - a^2 = d_2^2 - b^2 = d_3^2 - c^2$ и $a^2 + b^2 = c^2$, где су a, b, c основне ивице и H висина призме. Из $d_1^2 - a^2 = d_3^2 - c^2$, следи $c^2 - a^2 = d_3^2 - d_1^2$, односно: $b^2 = d_3^2 - d_1^2$. Слично добијемо: $a^2 = d_3^2 - d_2^2$. Даље имамо: $H^2 = d_1^2 - a^2 = d_1^2 + d_2^2 - d_3^2$. Запремина пирамиде је $V = \dfrac{1}{2}abH = \dfrac{1}{2}\sqrt{(d_3^2 - d_2^2)(d_3^2 - d_1^2)(d_1^2 + d_2^2 - d_3^2)}$.

188. Користимо сл. 76, сматрајући да је $\sphericalangle AMA_1 = \alpha$. Поступајући слично решавању задатка 183, добијамо: $a = \dfrac{2\sqrt{Q\cos\alpha}}{\sqrt[4]{3}}$, затим $A_1M = \sqrt{\dfrac{Q\sqrt{3}}{\cos\alpha}}$, $H = \sin\alpha\sqrt{\dfrac{Q\sqrt{3}}{\cos\alpha}}$. Површина основе призме је $B = Q\cos\alpha$ (видети решење задатка 185, трећи начин). Дакле: $V = B\cdot H = Q\sqrt{Q\sqrt{3}\cos\alpha\sin\alpha}$, а површина је $P = 2B + 3aH = 2Q(\cos\alpha + 3\sin\alpha)$. Специјално, за $\alpha = 30°$, имамо: $V = \sqrt{\dfrac{3Q^3}{8}}$ и $P = Q(3+\sqrt{3})$.

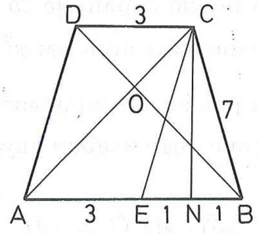
189. Запремину добијамо по формули $V = Q\cdot k$, где је $Q = \sqrt{s(s-m)(s-n)(s-p)}$ и $s = \dfrac{1}{2}(m+n+p)$, а са Q смо означили површину троугла који представља нормални пресек призме. За површину призме потребно је да израчунамо и површину основе: $B = \dfrac{Q}{\cos\alpha} = \dfrac{Qk}{H}$. (Висина и бочна ивица одређују нагибни угао пресека према равни основе, јер је висина нормална на раван основе, а бочна ивица је нормална на раван пресека.) Дакле: $P = \dfrac{2k}{H}\sqrt{s(s-m)(s-n)(s-p)} + k(m+n+p)$.

190. Нека је a основна ивица и H висина призме. Дата дијагонала призме, висина H и већа дијагонала основе, дужине $2a$, формирају правоугли троугао са углом од $30°$, па је $H = \dfrac{d\sqrt{3}}{2}$ и $a = \dfrac{d}{4}$. Запремина је $V = \dfrac{9d^3}{64}$.

191. Дати су услови: $a = \dfrac{3}{2}H$ и $2ah = 135$. Према сл. 79, $\dfrac{a}{2}$, h и H су странице правоуглог троугла SOM, па важи: $\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + H^2 = h^2$. Сменимо $H = \dfrac{2}{3}a$ и добијемо: $a^2 = \dfrac{36h^2}{25}$, односно $a = \dfrac{6}{5}h$. Даље из $2\cdot\dfrac{6}{5}h\cdot h = 135$ добијемо $h = \dfrac{15}{2}$, па је $a = 9$ и $H = 6$. Запремина је: $V = \dfrac{1}{3}a^2H = 162\ \text{cm}^3$.



Сл. 79.



Сл. 80.

192. Уочимо правоугли троугао SAO, сл. 79, који има следеће странице $AS = s$, $SO = H$ и $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Како је $a = H+1$, то из $AS^2 = AO^2+SO^2$ добијамо: $s^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (a-1)^2$, односно $81 = \dfrac{a^2}{2} + a^2 - 2a + 1$. Ова једначина је еквивалентна са $3a^2 - 4a - 160 = 0$, а њена решења су $a_1 = 8$ и $a_2 = -\dfrac{20}{3}$, Дакле, $a = 8$ cm, $H = 7$ cm, па је $V = \dfrac{448}{3}$ cm^3.

193. Из услова $\dfrac{a\cdot h}{2} = a^2$, добијамо $h = 2a$. Затим, уочимо троугао SOM на сл. 79, итд. Добијемо да је $a^2 = \dfrac{4H^2}{15}$. Површина пирамиде је $P = a^2 + 2ah = 5a^2 = \dfrac{4H^2}{3}$. Запремина је $V = \dfrac{1}{3}a^2H = \dfrac{4}{25}H^3$.

194. Треба израчунати одсечак AO дијагонале трапеза, сл. 80. Из троугла BCN налазимо: $CN^2 = 48$ и $CN = 4\sqrt{3}$ – то је висина трапеза. Затим, из троугла ACN рачунамо: $AC^2 = AN^2 + CN^2$, па је $AC = 8$ cm, дијагонала трапеза. Сада, на основу Талесове теореме важи: $AO : OC = AB : CD = 5 : 3$, па је $AO = 5$ cm. Ако је S врх пирамиде, тада из правоуглог троугла SAO добијамо $SO^2 = SA^2 + AD^2$, тј. $H^2 = 10^2 - 5^2 = 75$ и $H = 5\sqrt{3}$ cm. Запремина пирамиде је: $V = \dfrac{1}{3}\dfrac{AB+CD}{2}\cdot CN\cdot H = \dfrac{1}{3}\cdot 4\cdot 4\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3} = 80$ cm^3.

195. Према сл. 79, у правоуглом троуглу OMS је $\sphericalangle OMS = 60^\circ$, па је $h = 2OM = a$ и $H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Површина пирамиде је $P = 3a^2$ и запремина износи $V = \dfrac{1}{6}a^3\sqrt{3}$.

196. Пресек са супротном страном је дуж паралелна одговарајућој основној ивици, чиме је одређен троугао сличан бочној страни. Површина бочне стране је 25 cm^2, па висина x троугла одсеченог од наспрамне стране налазимо из: $x^2 : h^2 = 16 : 25$, односно $x = \dfrac{4}{5}h$. Дакле, испод пресечне равни имамо 9 cm^2 (од наспрамне бочне стране) и 2 пута по $\dfrac{1}{5}$ бочне стране, што износи укупно 19 cm^2. Тражена површина је $100-19 = 81$ cm^2.

197. Из $Q = \dfrac{1}{2}dH$, налазимо дијагоналу основе: $d = \dfrac{2Q}{H}$. Површина основе је $B = \dfrac{d^2}{2} = \dfrac{2Q^2}{H^2}$, па је запремина $V = \dfrac{2Q^2}{3H}$. За $Q = 60$ и $H = 8$ је $V = 300$.

198. Апотема је $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, па је површина $P = a^2(1+\sqrt{5})$.

199. Основа има површину $\dfrac{a^2}{2}$, па је запремина $V = \dfrac{1}{3}\dfrac{a^2}{2}\cdot a = \dfrac{a^3}{6}$. Из познате основне ивице $\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ и висине пирамиде (a) израчунамо апотему: $h = \dfrac{3}{4}a\sqrt{2}$, па је површина пирамиде: $P = 2a^2$.

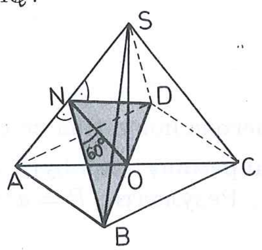
200. Добијено тело је октаедар ивице $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Његова површина се састоји од осам једнакостраничних троуглова, а запремину одређују две правилне једнакоивичне четворостране пирамиде. Резултати: $P = a^2\sqrt{3}$, $V = \dfrac{a^3}{6}$.

201. Слично задатку 119. Дијагонални пресек пирамиде са уписаном коцком представља једнакокраки троугао основице $12\sqrt{2}$ и крака $2\sqrt{34}$, пресечен паралелно основици, са паралелним одсечком дужине $x\sqrt{2}$. Са x смо означили ивицу коцке. Најпре се израчуна висина $H = 8$, па на основу сличности троуглова постави се пропорција $12\sqrt{2} : x\sqrt{2} = 8 : (8-x)$. Одавде је $x = \dfrac{24}{5}$ ивица коцке. Тражена запремина је $V_1 = \dfrac{1}{3}x^2\cdot(H-x) = \dfrac{3072}{125}$ cm^3

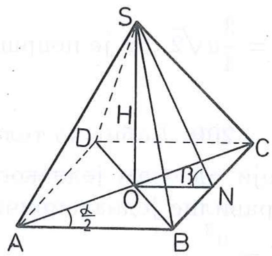
202. Пресечемо пирамиду са равни која садржи апотеме двеју несуседних бочних страна. Поступајући слично претходном задатку, добијамо: $a : x\sqrt{2} = H : (H-x)$. Одавде је $x = \dfrac{aH}{a+H\sqrt{2}}$. Међутим, из дате запремине добијамо: $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6} = \dfrac{1}{3}a^2H$, одакле је $H = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Коначно је $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

203. Нека је a ивица октаедра. Тада је, према задатку 117, ивица уписане коцке: $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. Запремина октаедра је $V = \dfrac{1}{3}a^2\cdot a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$, а запремина коцке износи: $V_1 = \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{3}\right)^3 = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{27}$. Дакле: $V : V_1 = 9 : 2$.

204. Нека је SAC дијагонални пресек и ON нормала из подножја висине на бочну ивицу SA, сл. 81. Права BO је нормална на дијагонални пресек, па како је $ON \perp SA$, по теореми о три нормале је $BN \perp AS$ и $DN \perp AS$. Троугао BDN је висином ON подељен на два правоугла троугла са углом од 60° и $ON = \dfrac{BN}{2} = \dfrac{DN}{2}$. Како је површина троугла AOS, који представља половину дијагоналног пресека, једнака $\frac{1}{2}ON\cdot SA$, то је $Q = ON\cdot SA$. Површина једне бочне стране, нпр. стране SAB, једнака је $\frac{1}{2}AS\cdot BN = \frac{1}{2}AS\cdot 2ON = AS\cdot ON = Q$. Површина омотача једнака је $4Q$.



Сл. 81.



Сл. 82.

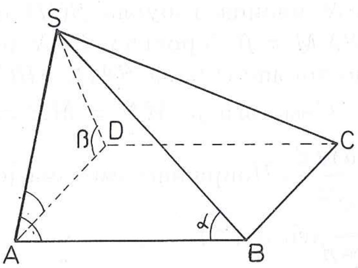
205. Дијагонала основе је $d = s\sqrt{2}$, а висина пирамиде $H = \dfrac{s\sqrt{2}}{2}$, па је запремина $V = \frac{1}{3}d^2 \sin 30^\circ \cdot H = \dfrac{s^3\sqrt{2}}{6}$.

206. Уочимо најпре троугао BDN, сл. 81. Дијагонала основе је $BD = 8\sqrt{2}$, па је $ON = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ и $BN = \dfrac{48\sqrt{6}}{3}$. Сада у правоуглом троуглу AOS имамо катету $AD = 4\sqrt{2}$ и хипотенузину висину $ON = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$. Користећи познате ставове о правоуглом троуглу (сличност, Питагорина теорема, Еуклидов став) израчунамо остале странице: $AS = 4\sqrt{3}$ и $OS = 4$. Површина омотача је: $M = 2\cdot AS\cdot BN = 64\sqrt{2}$ (видети решење задатка 204), па је површина пирамиде: $P = 64\big(1+\sqrt{2}\big)$ и запремина $V = \dfrac{256}{3}$.

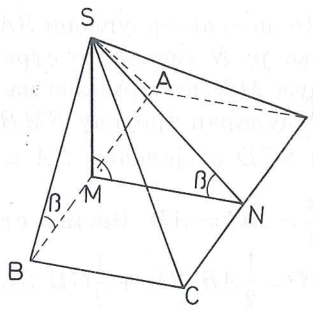
207. Дужи ON и SN су нормалне на BC, па је $\sphericalangle ONS = \beta$, сл. 82. Тада је $SN = \dfrac{ON}{\cos\beta}$, а површина бочне стране SBC је $\dfrac{BC\cdot ON}{2\cos\beta} = \dfrac{P_1}{\cos\beta}$, где је P_1 површина троугла OBC. Слично важи и за остале бочне стране, па је омотач пирамиде $M = \dfrac{B}{\cos\beta}$. Површина пирамиде је $P = B + \dfrac{B}{\cos\beta}$. Одредићемо B у функцији од d и α. У правоуглом троуглу AOB је $AO = OB\cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, па је $AC = 2OB\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = d\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. Површина основе је $B = \dfrac{1}{2}AC\cdot BD = \dfrac{1}{2}d^2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. Коначно је површина пирамиде:

$P = \dfrac{1}{2}d^2 \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\left(1+\dfrac{1}{\cos\beta}\right).$

208. Равни SAB, SAD и $ABCD$ су две по две нормалне, па су ивице SA, AB и AD нормалне на одговарајуће стране, сл. 83. Четвороугао $ABCD$ је правоугаоник, па из $SA\perp(ABCD)$ и $AB\perp BC$, следи $SB\perp BC$ (по теореми о три нормале), па је $\sphericalangle ABS = \alpha$. Слично се доказује да је $\sphericalangle ADS = \beta$. Изразићемо висину SA преко датих елемената: $AB = SA\cdot \operatorname{ctg}\alpha$ (из троугла SAB) и $AD = SA\operatorname{ctg}\beta$. Дакле, површина основе је: $B = AB\cdot AD = SA^2 \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$, па је $SA = \sqrt{B \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$. Запремина пирамиде је $V = \dfrac{B}{3}\sqrt{B \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$.



Сл. 83.



Сл. 84.

209. Површина пирамиде је $P = B + M = B + \dfrac{B}{\cos\beta} = B\left(1+\dfrac{1}{\cos\beta}\right)$. (Видети решење задатка 207.) Даље је $P = a^2\dfrac{1+\cos\beta}{\cos\beta} = \dfrac{2a^2\cos^2\dfrac{\beta}{2}}{\cos\beta}$, па је $a = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\beta}{2}}\sqrt{\dfrac{P\cos\beta}{2}}$. Из троугла SON, сл. 82, налазимо: $H = \dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\beta$, па је запремина:

$$V = \frac{1}{3}\cdot a^2 H = \frac{1}{3}\frac{P\cos\beta}{2\cos\dfrac{\beta}{2}}\cdot\frac{1}{2\cos\dfrac{\beta}{2}}\sqrt{\frac{P\cos\beta}{2}}\cdot\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}{6\cos\dfrac{\beta}{2}}\sqrt{\frac{P^3\cos\beta}{2}}.$$

210. Ако је $\sphericalangle BSC = \alpha$, тада је $h = SN = \dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, сл. 82, па је $M = 2ah = a^2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. За израчунавање запремине потребна је висина H. Из троугла SON је $H^2 = SN^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{4}\left(\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2} - 1\right) = \dfrac{a^2\left(\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}} =$

$\dfrac{a^2\cos\alpha}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$, па је запремина: $V = \dfrac{1}{3}a^2H = \dfrac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

211. Према сл. 82 дато је $SA = s$ и $\sphericalangle SAO = \alpha$. Троугао SOA је правоугли, па је $H = SO = s\sin\alpha$ и $AO = s\cos\alpha$. Троугао AOB је једнакокраки правоугли, па је $a = AB = AO\sqrt{2} = s\sqrt{2}\cos\alpha$. Према томе, запремина је: $V = \dfrac{1}{3}a^2H = \dfrac{1}{3}s^3\sin 2\alpha\cos\alpha$.

212. Нека је SM висина пирамиде, сл. 84. Како је $MB\perp BC$, то је, по теореми о три нормале, и $SB\perp BC$, па је $\sphericalangle SBA = \beta$. Слично се закључује да је и $\sphericalangle SAB = \beta$, па је троугао SAB једнакокрак и $AM = BM = \dfrac{a}{2}$. Правоугли троуглови SAD и SBC су подударни, па је $SC = SD$. Дакле, ако је N средиште странице CD, тада је SN висина троугла SCD и дуж MN је нормална на CD. Према томе $\sphericalangle SNM = \beta$. Троугао SMN је подударан троуглу SMB. Према томе, бочне висине страна SAD, SBC и SCD су једнаке: $SA = SB = SN = \dfrac{a}{2\cos\beta}$. Сем тога је $MN = MB = \dfrac{a}{2} = BC = AD$. Висина стране SAB је $SM = \dfrac{a\operatorname{tg}\beta}{2}$. Површина омотача је $M = \dfrac{1}{2}AB\cdot SM + \dfrac{1}{2}CD\cdot SN + 2\cdot\dfrac{1}{2}BC\cdot SB = \dfrac{a^2}{4\cos\beta}(\sin\beta + 2)$.

213. Из датих података налазимо да је мањи кра̑к трапеза дужине 6 cm. Нека је O подножје висине SO пирамиде, а OM, ON, OP и OQ нормале из O на основне ивице. Тада су троуглови SOM, SON, SOP и SOQ подударни, па је $OM = ON = OP = OQ = r$ и апотеме свих бочних страна су једнаке. Следи да је тачка O центар круга уписаног у трапез. На основу особина тангентног четвороугла закључујемо да је обим трапеза једнак двоструком збиру кракова: $2s = 2(12+6)$ cm. Омотач пирамиде је: $M = s\cdot h = 18h$. Из услова $M = 90\text{ cm}^2$ добијамо $h = 5$ cm. Дужи h, r и H чине правоугли троугао у којем је $H^2 = h^2 - r^2$. Висина тангентног трапеза једнака је пречнику уписаног круга, па је $r = 3$ cm. Дакле, $H = 4$ cm. Површина тангентног четвороугла једнака је $s\cdot r$, па је $B = 54\text{ cm}^2$. Дакле, запремина пирамиде је 72 cm^3.

214. Слично задатку 205. Резултат: $V = \dfrac{1}{3}B\cdot H = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{d^2}{4}\sqrt{3}\cdot\dfrac{d\sqrt{3}}{4} = \dfrac{d^3}{24}$.

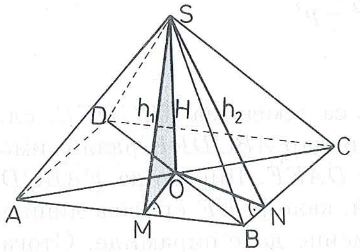
215. Слично задатку 197: $V = \dfrac{2}{3}Q\sqrt{Q}$.

216. Видети решење задатка 207. Тражена запремина је: $V = \dfrac{1}{3}B\cdot H = \dfrac{1}{3}M\cos\beta\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{M\cos\beta}\cdot\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin\beta}{6}\sqrt{M^3\cos\beta}$.

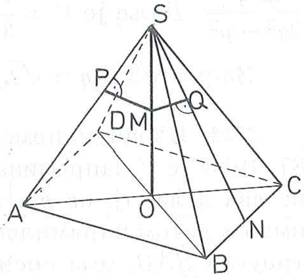
217. Видети задатак 207: $P = \dfrac{s^2}{2}(2+\sqrt{2})$, $V = \dfrac{s^3\sqrt{2}}{12}$.

218. Из услова $Q = B$, добијамо висину пирамиде: $H = a\sqrt{2}$, итд. Резултати: $P = 4a^2$, $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

219. Лако је доказати да су наспрамне бочне стране подударни троуглови. Висине основе добијамо из површине: $h_a = \dfrac{B}{a} = 9$ cm и $h_b = 5$ cm. Сада Питагорином теоремом израчунамо бочне висине. Из правоуглог троугла SOM, сл. 85, добијамо: $h_1^2 = SM^2 = H^2 + \left(\dfrac{1}{2}h_a\right)^2 = 36 + \dfrac{81}{4}$, односно $h_1 = \dfrac{15}{2}$. Слично из троугла SON израчунамо $h_2 = SN = \dfrac{13}{2}$, па је површина омотача: $M = 2\left(\dfrac{1}{2}ah_1 + \dfrac{1}{2}bh_2\right) = 192$ cm^2.



Сл. 85.



Сл. 86.

220. На основу разматрања услова у претходном задатку, закључујемо да и у овом случају пресечна тачка дијагонала основе је подножје висине пирамиде. Површину основе израчунамо као две површине троугла, уз примену Хероновог обрасца: $B = 60\sqrt{2}$. Другу дијагоналу основе рачунамо из познатог услова: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$ (који се лако добија Питагорином теоремом) и налазимо да је $d_2^2 = 241$, што значи да је $d_2 > d_1$. Сада висину пирамиде рачунамо из правоуглог троугла SAO, сл. 85: $H^2 = SA^2 - \left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{21}{2}\right)^2 + \dfrac{d_2^2}{4} = 50$, па је $H = 25\sqrt{2}$ и запремина је $V = 200$ cm^3.

221. Дијагонални пресек веће пирамиде је једнакостраничан троугао странице d, а пресек мање пирамиде је једнакокраки правоугли троугао хипотенузе d, итд. Резултати: $V = \dfrac{d^3}{12}(\sqrt{3}-1)$ и $P = \dfrac{d^2}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{3})$.

222. Видети решење задатка 138 и сл. 62. Троугао ACS је једнакостраничан, са страницом $a\sqrt{2}$. Висина пирамиде је $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Тачка N је тежиште троугла ACS, па је $ON = \dfrac{1}{3}SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$ и $SN = \dfrac{2}{3}SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Даље је $AM = SO$ и $KL = \dfrac{2}{3}BD = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$. Треба од запремине дате пирамиде одузети запремину пирамиде $SAKML$. Основа ове пирамиде је делтоид $AKML$, а висина је дуж $SM = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Резултат: $V = V_1 - V_2 = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$.

223. Користимо сличност троуглова , сл. 86, најпре SMP и SAO, онда SMQ и SNO. Добијамо пропорције: $SM : MP = SA : AO$, односно $\dfrac{H}{2} : p = \sqrt{H^2 + \dfrac{a^2}{2}} : \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ и $SM : MQ = SN : ON$, односно $\dfrac{H}{2} : q = \sqrt{H^2 + \dfrac{a^2}{4}} : \dfrac{a}{2}$. Из ове две једначине налазимо: $a^2 = \dfrac{8p^2q^2}{p^2 - q^2}$ и $H^2 = \dfrac{4p^2q^2}{2q^2 - p^2}$. Даље је $V = \dfrac{1}{3}a^2H = \dfrac{16p^3q^3}{3(p^2 - q^2)\sqrt{(2q^2 - p^2}}$.

За $p = \sqrt{3}$ и $q = \sqrt{2}$ је $V = 32\sqrt{6}$.

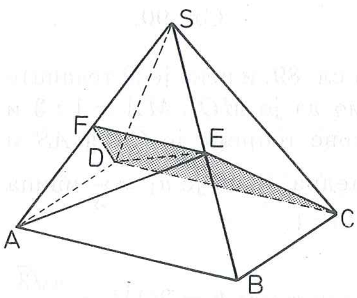
224. Израчунаћемо запремину полиедра са теменима $ABCDFE$, сл. 87. Нека је V запремина дате пирамиде. Полиедар $ABCDFE$ разложимо на два дела, тј. на две пирамиде: $EABCD$ и $DAEF$. Пирамида $EABCD$ има са датом пирамидом заједничку основу и, како је EF средња линија троугла SAB, има висину упола мању од висине дате пирамиде. Стога је запремина пирамиде $EABCD$ једнака $\dfrac{V}{2}$.

Како је E средиште дужи SB, то је површина троугла SAE једнака половини троугла SAB. Слично утврдимо да је површина троугла AEF једнака половини површине троугла SAE. Другим речима, површина троугла AEF је четвртина површине троугла SAB. Приметимо да две пирамиде са заједничким врхом D имају основе у истој равни, значи, имају једнаке висине. То су пирамиде $DAEF$ и $DABS$. Како је површина основе AEF прве четири пута мања од површине основе друге, то је запремина пирамиде $DAEF$ једнака четвртини запремине пирамиде $DABS$. Међутим, ова друга, заправо пирамида $SABD$, је половина дате пирамиде и њена је запремина $\dfrac{V}{2}$. Дакле, запремина пирамиде $DABS$ је $\dfrac{V}{8}$, па је запремина полиедра $ABCDFE$ једнака $\dfrac{V}{2} + \dfrac{V}{8} = \dfrac{5V}{8}$. Тражена размера запремина је $\dfrac{5V}{8} : \dfrac{3V}{8} = 5 : 3$.

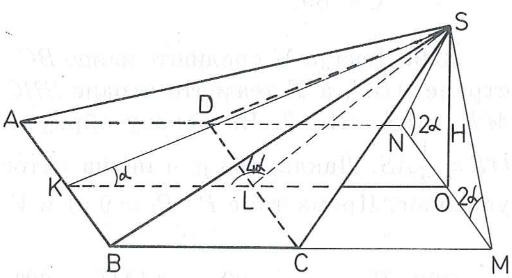
225. Обратимо пажњу на сл. 88. Нека је O подножје висине $SO = H$, а MN права кроз O, паралелна са AB. Како је $OK \perp AB$, по теореми о три нормале је и $SK \perp AB$, па је $\sphericalangle SKL$ нагиб бочне стране SAB. Означимо га са α. Слично се утврди да $\sphericalangle SMO = 2\alpha$, $\sphericalangle SLO = 4\alpha$ и $\sphericalangle SNO = 2\alpha$, остали нагибни углови. Разликоваћемо два случаја: кад је угао 4α туп, тј. $\frac{\pi}{2} < 4\alpha < \pi$, односно $\frac{\pi}{8} < \alpha < \frac{\pi}{4}$ и кад је угао 4α оштар, односно $0 < \alpha < \frac{\pi}{8}$.

За први случај имамо: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{KO}{H}$, $\operatorname{ctg} 4\alpha = -\frac{LO}{H}$ и $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{MO}{H} = \frac{a}{2H}$. Одавде добијамо: $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg} 4\alpha = \frac{KO - LO}{H} = \frac{a}{H} = 2\operatorname{ctg} 2\alpha$. Решавањем једначине: $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg} 4\alpha = 2\operatorname{ctg} 2\alpha$, добијамо: $\operatorname{ctg} 4\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{ctg} 2\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$, односно: $\frac{\sin(4\alpha - 2\alpha)}{\sin 4\alpha \cdot \sin 2\alpha} = \frac{\sin(2\alpha - \alpha)}{\sin 2\alpha \sin\alpha}$, итд. Добијамо решење $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Тражени углови су: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$.

Други случај, $0 < \alpha < \frac{\pi}{8}$, нема решења.



Сл. 87.



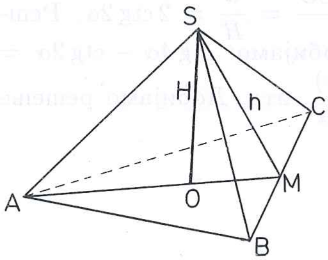
Сл. 88.

226. Израчунаћемо површину пирамиде преко основне ивице a. Треба прво израчунати бочну висину. Из правоуглог троугла SOM, сл. 89, добијамо $h^2 = H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = 4a^2 + \frac{3a^2}{36} = \frac{147a^2}{36} = \frac{7}{6}a\sqrt{3}$. Сада налазимо површину: $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2}a \cdot \frac{7a\sqrt{3}}{6} = 2a^2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$. Следи да је $a = 2$ и запремина је $V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

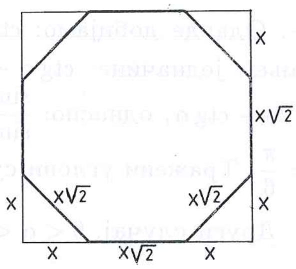
227. Према решењу задатка 110, висина тетраедра је $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, па је запремина: $V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Тетраедар AB_1CD_1 је правилан и има ивицу дужине $a\sqrt{2}$, дијагоналу наше дате коцке. Његова запремина је $V_1 = \dfrac{(a\sqrt{2})^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{a^3}{3}$. Како је запремина коцке $V = a^3$, то је $V : V_1 = 3 : 1$.

228. Видети решење претходног задатка: $a = \dfrac{H\sqrt{6}}{2}$, па је $P = a^2\sqrt{3} = \dfrac{3H^2\sqrt{3}}{2}$.



Сл. 89.



Сл. 90.

229. Нека је M средиште ивице BC, као на сл. 89, и нека је O тежиште стране ABC, а T тежиште стране SBC. Знамо да је $MO : MA = 1 : 3$ и $MT : MS = 1 : 3$. На основу обрнуте Талесове теореме је $OT \parallel AS$ и $OT = \dfrac{1}{3}AS$. Дакле, ако је a ивица датог тетраедра, онда је $a_1 = \dfrac{a}{3}$ ивица уписаног. Према томе $P : P_1 = 9 : 1$ и $V : V_1 = 27 : 1$.

230. Према сл. 89 је $\sphericalangle AMS = 60°$, па је апотема: $h = 2OM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Површина пирамиде је $P = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

231. Пирамида је права, па је подножје висине центар описаног круга основе. Полупречник овог круга је $R = \dfrac{abc}{4P} = \dfrac{6\cdot 3\sqrt{10}\cdot 3\sqrt{10}}{4\cdot 27} = 5$, па висину пирамиде добијамо из $H^2 = s^2 - R^2 = 13^2 - 5^2$. Дакле $H = 12$ cm, па је запремина: $V = 108$ cm^2.

232. Висина пирамиде је $H = \sqrt{h^2 - \left(\dfrac{v}{3}\right)^2} = \dfrac{1}{3}\sqrt{9h^2 - v^2}$. Основну ивицу добијамо из: $\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = h$, одакле је $a = \dfrac{2h\sqrt{3}}{3}$. Запремина пирамиде је $V = \dfrac{h^2}{27}\sqrt{27h^2 - 3v^2}$.

233. Стране пирамиде су два једнакостранична троугла странице s и два једнакокрака правоугла троугла катете s и хипотенузе $s\sqrt{2}$. Површина пирамиде је $P=\frac{s^2}{2}(2+\sqrt{3})$. Запремина је $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{s^2}{2}\cdot\frac{s\sqrt{2}}{2}=\frac{s^3\sqrt{2}}{12}$. (Видети решења задатака 76 и 95. Осмотрити слику 42.)

234. Основа пирамиде је једнакостраничан троугао странице $s\sqrt{2}$, где је s дужина бочне ивице. Резултат: $B:M=1:\sqrt{3}$.

235. Полупречник круга описаног око основе и висина пирамиде су катете правоуглог троугла са углом од $60°$ и $H=R\sqrt{3}$, где је $R=\frac{a\cdot a\cdot b}{4B}$. Дакле, запремина пирамиде је $V=\frac{1}{3}B\cdot H=\frac{a^2b\sqrt{3}}{12}$.

236. Слично претходном задатку. У овом случају је $H=r$, где је $r=\frac{B}{s}=\frac{B}{a+\frac{b}{2}}$. Према томе: $V=\frac{1}{3}B\cdot H=\frac{1}{3}\frac{B^2}{a+\frac{b}{2}}=\frac{1}{3}\left(\frac{b}{2}\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}\right)^2\cdot\frac{1}{a+\frac{b}{2}}=\frac{b^2}{24}(2a-b)$. (За $a=5$ cm, $b=6$ cm је $V=6\ \mathrm{cm}^3$.)

237. Означимо са x дужину одсеченог дела ивице код сваког темена, сл. 90. Тада је страница правилног осмоугла дужине $x\sqrt{2}$. Из $2x+x\sqrt{2}=a$, добијамо $x=\frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$. Запремину преосталог полиедра добијамо кад од запремине коцке одузмемо 8 тространих пирамида (одсечених), од којих свака има запремину $\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2}\cdot x\cdot x=\frac{x^3}{6}$. Тражена запремина је $V=\frac{7a^3}{3}(\sqrt{2}-1)$.

238. *а)* Нека је M произвољна тачка у тетраедру $SABC$. Конструишимо дужи MA, MB, MC и MS. Добијамо разлагање датог тетраедра на четири тетраедра чије су основе стране датог а тачка M заједнички врх. Нека су N, P, Q, R подножја нормала из M на стране тетраедра. Запремина датог тетраедра је једнака збиру запремина четири уписана, тј. $\frac{B\cdot H}{3}=\frac{B\cdot MN}{3}+\frac{B\cdot MP}{3}+\frac{B\cdot MQ}{3}+\frac{B\cdot MR}{3}$, одакле је $MN+MP+MQ+MR=H=\mathrm{const}$, где је H висина тетраедра, а $B=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ површина једне стране датог тетраедра.

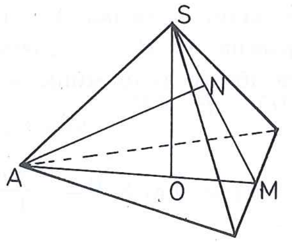
б) Користићемо сл. 94. Нека су M и N средишта ивица AB и CS. Очигледно су троуглови CMN и SMN подударни $\left(CM=SM=\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, па је $\sphericalangle MNC=\sphericalangle MNS=90°$, тј. $MN\perp CS$. Ако је α произвољна раван кроз MN, она сече дати тетраедар по неком многоуглу, који је заједничка основа добијених делова. Доказаћемо да су висине CP и SQ ових делова једнаке. По обрнутој теореми о три нормале, како је $CP \perp \alpha$ и $CN \perp MN$, то је и $PN \perp MN$. Слично се докаже да је $QN \perp MN$, па су тачке P, N и Q колинеарне. Следи да су троуглови CPN и SQN подударни, па је $CP = SQ$. Отуда следи тражени закључак.

239. Слично задатку 236. Површину основе израчунавамо Хероновим обрасцем: $B = 84\ \mathrm{cm}^2$. Даље је $r = 4$ cm, па је апотема $h = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$. Тражена површина је $P = 28(3 + 2\sqrt{3})\ \mathrm{cm}^2$.

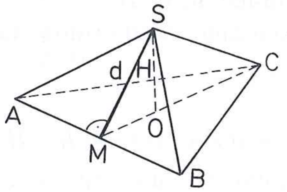
240. Добијени полиедар је тространа пирамида заједничке основе са призмом и са висином $H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Резултати: $V = \dfrac{a^3}{8}$ и $M = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

241. Према слици 91 израчунаћемо димензије пирамиде $S_1A_1B_1C$. Основа је четвртина основе дате пирамиде. На основу сличности троуглова SOC и S_1D_1C добијамо висину S_1D_1 одсечене пирамиде: $S_1D_1 = \dfrac{3}{4}SO = \dfrac{3}{4}OD$. Како је $OD = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, то је $S_1D_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{8}$, па је тражена запремина $V = \dfrac{a^3}{128}$.

242. Нека је $AN = h$ дато растојање тачке A сл. 91. Тада је $MN = \sqrt{AM^2 - AN^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - h^2}$. Троуглови AMN и SMO су слични и зато је $AN : NM = SO : OM$. Одавде је $SO = H = \dfrac{ah\sqrt{3}}{3\sqrt{3a^2 - 4h^2}}$, па је запремина $V = \dfrac{a^3h}{12\sqrt{3a^2 - 4h^2}}$.



Сл. 91.



Сл. 92.

243. Троугао SAB је једнакокраки правоугли, па је висина SM једнака половини основне ивице AB, сл. 92, а изводница је $SA = SM\sqrt{2}$. По услову је $CS \perp SA$ и $CS \perp SB$, па је CS нормална на раван SAB и због тога је $SM \perp CS$. Како је и $SM \perp AB$, следи да је SM заједничка нормала правих AB и SC и представља дату дуж, тј. $SM = d$. Дакле, $SA = SB = SC = d\sqrt{2}$, па је запремина $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} SA \cdot SB \cdot SC = \frac{d^3\sqrt{2}}{3}$.

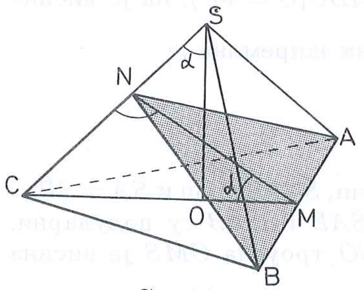
244. Нека је C теме правог угла једне основе. Тада је висина основе $CD = \frac{c\sqrt{3}}{4}$. Пресечна раван је одређена тачкама A, B и C_1. Троугао CC_1D је једнакокраки правоугли ($\sphericalangle CDC_1 = \sphericalangle DC_1C = 45°$), па је висина призме и пирамиде $CC_1 = CD = \frac{c\sqrt{3}}{4}$. Тражена запремина је
$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{c^2\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{c\sqrt{3}}{4} = \frac{c^3\sqrt{3}}{32}$.

245. Користићемо сл. 92. Нека је $AB = 4$ cm, $SC = 12$ cm и $SA = SB = AC = BC = 7$ cm. Једнакокраки троуглови SAB и CAB су подударни, са висинама $SM = CM = 3\sqrt{5}$ cm. Висина SO троугла CMS је висина пирамиде: $SO = \frac{12\sqrt{5}}{5}$ cm. Резултат: $V = 24$ cm^3.

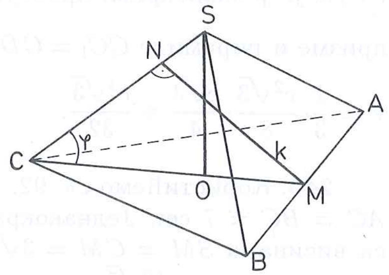
246. Висина SO пада у центар описаног круга основе, па је $CO = R$, сл. 93. Дуж MN је нормална на AB и на SC, па је $\alpha = \sphericalangle CMN = \sphericalangle CSO$ (углови са нормалним крацима). Из троугла SCO је $H = R \operatorname{ctg} \alpha$. Израчунаћемо R из запремине V. Уочимо да је $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB \cdot MN}{2} \cdot CN$. Из $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, добијамо: $a = AB = R\sqrt{3}$. Из правоуглог троугла CMN добијамо: $CM = \frac{3}{2}R$, $MN = CM \cos\alpha = \frac{3R}{2}\cos\alpha$ и $CN = CM \sin\alpha = \frac{3R}{2}\sin\alpha$. Заменимо ове величине у V и добијемо: $V = \frac{1}{6}R\sqrt{3} \cdot \frac{3R}{2}\cos\alpha \cdot \frac{3R}{2}\sin\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{16}R^3 \sin 2\alpha$. Отуда је $R = \sqrt[3]{\frac{16V}{3\sqrt{3}\sin 2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{2V}{\sin 2\alpha}}$, па је
$H = \frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{2V}{\sin 2\alpha}}$.

247. Није тешко уверити се да је основна ивица добијене правилне тростране пирамиде једнака $\frac{2}{3}a$. Висина призме представља $\frac{2}{3}$ висине правилног тетраедра, тј. $H = \frac{2a\sqrt{6}}{9}$. Тражена запремина је $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{54}$.

248. Из троугла CMN, сл. 94, налазимо: $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{k}{\sin\varphi}$, где је a основна ивица. Одавде је $a = \dfrac{2k\sqrt{3}}{3\sin\varphi}$. Како је полупречник R круга описаног око основе: $R = CO = \dfrac{2k}{3\sin\varphi}$, то из правоуглог троугла SCO добијамо висину пирамиде: $H = SO = R\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2k}{3\cos\varphi}$. Резултат: $V = \dfrac{4k^3\sqrt{3}}{27\sin\varphi\sin 2\varphi}$.

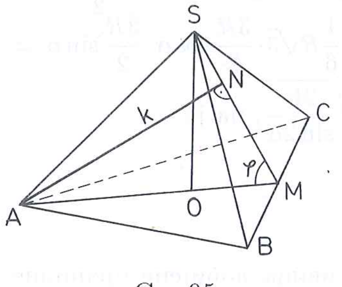


Сл. 93.

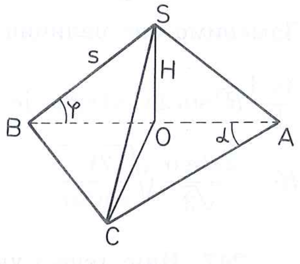


Сл. 94.

249. Нека је SM апотема и SO висина пирамиде, сл. 95. Подножје нормале из темена A на страну SBC је тачка N апотеме, $AN = k$ и $\sphericalangle AMN = \varphi$. Поступајући слично решавању претходног задатка, налазимо основну ивицу a и апотему h пирамиде: $a = \dfrac{2k\sqrt{3}}{3\sin\varphi}$ и $h = \dfrac{2k}{3\sin 2\varphi}$. Резултат: $M = \dfrac{2k^2\sqrt{3}}{3\sin\varphi\sin 2\varphi}$.



Сл. 95.



Сл. 96.

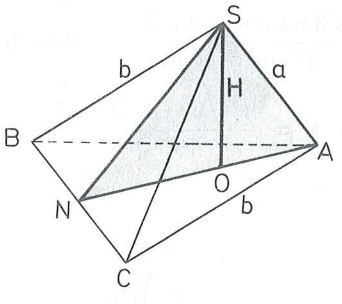
250. Дата је права пирамида, па је подножје висине средиште O хипотенузе основе, сл. 96. Према томе, имамо: $H = s\cdot\sin\varphi$, хипотенуза основе је $c = 2OB = 2s\cos\varphi$, катете основе су: $a = c\sin\alpha$ и $b = c\cos\alpha$. Према томе, запремина је: $V = \dfrac{1}{3}B\cdot H = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}c\sin\alpha\cdot c\cos\alpha\cdot a\sin\varphi = \dfrac{1}{12}c^2\sin 2\alpha\cdot s\sin\varphi =$

$\frac{s^3}{6}\sin 2\alpha \sin 2\varphi \cos\varphi$. За $\alpha = 30^\circ$ и $\varphi = 45^\circ$ је $V = \frac{s^3\sqrt{6}}{24}$.

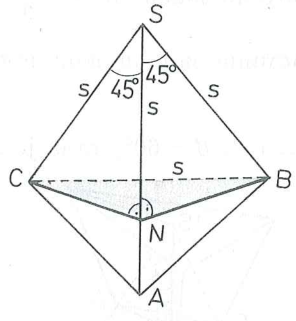
251. Основа пирамиде има углове α, $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ и $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Из синусне теореме налазимо полупречник круга описаног око основе: $\frac{b}{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = 2R$, односно $R = \frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. Затим, из $\frac{H}{R} = \operatorname{ctg}\varphi$, добијамо: $H = \frac{b\operatorname{ctg}\varphi}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. Резултат: $V = \frac{b^3}{6}\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\varphi$.

252. Бочне стране су правоугли троуглови са хипотенузама a, b и c, па је: $m^2+n^2 = a^2$, $n^2+p^2 = b^2$ и $m^2+p^2 = c^2$. Саберемо ове три једнакости: $m^2+n^2+p^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$, па је $m = \sqrt{\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)} = \sqrt{bc\cdot\cos\alpha}$ (на основу косинусне теореме). Слично је $n = \sqrt{ac\cos\beta}$ и $p = \sqrt{ab\cos\gamma}$, итд.

253. Ако страну површине P узмемо за основу пирамиде, тада је висина друге дате стране истовремено и висина пирамиде: $H = \frac{2Q}{s}$. Резултат: $V = \frac{2PQ}{3s}$.



Сл. 97.



Сл. 98.

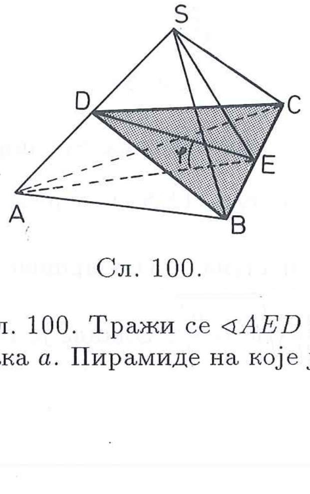
254. Висина SO пирамиде је истовремено и висина једнакокраког троугла ANS, где је $AN = SN = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$, сл. 97. Ову висину ћемо израчунати из површине троугла ANS, заправо из једнакости: $\frac{a}{2}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{H}{2}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$. Одавде је $H = \frac{a\sqrt{4b^2-2a^2}}{\sqrt{4b^2-a^2}}$. Површина основе пирамиде, тј.

површина троугла ABC је $B = \dfrac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}$, па је $V = \dfrac{a^2}{12}\sqrt{4b^2 - 2a^2}$. Између a и b важи релација: $a < b\sqrt{2}$, због услова $4b^2 - 2a^2 > 0$.

255. Нека су углови $\sphericalangle ASB = \sphericalangle ASC = 45°$ и $\sphericalangle BSC = 60°$, сл. 98. Уочимо тачку N, заједничко подножје нормала из B и C на $AS = s$. Троуглови SBN и SCN су подударни троуглу BCN, а бочна ивица SA је нормална на раван троугла BCN. Троугао BCN дели дату пирамиду на две нове, са основом BCN и висинама SN и NA, при чему је $SN + NA = SA = s$. Тражена запремина је: $V = \dfrac{1}{3}\dfrac{s^2}{4}\cdot s = \dfrac{s^3}{12}$, где је $\dfrac{s^2}{4}$ површина основе BCN.

256. Пресецима ивица одређена су темена једнакостраничног троугла ABC, сл. 99. Ако је површина овог троугла једнака B, онда је запремина заједничког дела датих пирамида: $V = \dfrac{B}{3}\cdot H$ (H је заједничка висина). Означимо са O тачку продора висине кроз раван ABC – то је центар круга описаног око овог троугла. Очигледно је $OS = AO\cdot \operatorname{ctg}\alpha = R\operatorname{ctg}\alpha$, а такође $OS_1 = R\operatorname{ctg}\beta$. Како је $H = OS + OS_1 = R(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$, то је $H = \dfrac{R\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$. Сем тога је $\dfrac{SS_1}{A_1S} = \cos\alpha$, одакле је $H = s\cos\alpha$, па је $s\cos\alpha = \dfrac{R\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$. Одавде је $R = \dfrac{s\sin 2\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. За једнакостраничан троугао важи: $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, тј. $a = R\sqrt{3}$, па је $B = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. Запремина заједничког дела је: $V = \dfrac{1}{3}B\cdot H = \dfrac{s^3\sqrt{3}\cos\alpha\sin^2 2\alpha\sin^2\beta}{16\sin^2(\alpha+\beta)}$. Ако је $\alpha = 75°$, $\beta = 60°$, тада је $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, па је $V = \dfrac{3l^3\sqrt{6-3\sqrt{3}}}{16}$.

Сл. 99.



Сл. 100.

257. Означимо са E средиште ивице BC, сл. 100. Тражи се $\sphericalangle AED = \varphi$. Нека је дужина ивице датог тетраедра једнака a. Пирамиде на које је дати тетраедар подељен имају заједничку страну BCD, па се висине из A и S на ту страну односе као $3:1$. Због тога је $AD:DS=1:3$, тј. $AD=\dfrac{a}{4}$. Знамо странице троугла SAE, јер је $SA=a$, $AE=SE=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, па, према косинусној теореми, ако је $\sphericalangle SAE=\alpha$, важи: $\cos\alpha=\dfrac{SA^2+AE^2-SE^2}{2SA\cdot EB}=\dfrac{SA}{2EB}=\dfrac{a}{a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Због тога је $DE^2=AD^2+AE^2-2AD\cdot AE\cos\alpha=\dfrac{9a^2}{16}$, па је $DE=\dfrac{3a}{4}$. Сада из троугла BDE налазимо угао φ: $\dfrac{DE}{\sin\alpha}=\dfrac{AD}{\sin\varphi}$, тј. $\sin\varphi=\dfrac{AD\sin\alpha}{DE}$. Коначно: $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$, односно $\varphi=\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{9}\approx 15^\circ 48'$. ($\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$).

258. Основа је једнакокраки троугао крака a и основице $AB=c=2a\sin\dfrac{\gamma}{2}$. Како је површина основе $B=\dfrac{1}{2}a^2\sin\alpha$, то је полупречник круга описаног око основе $R=\dfrac{a^2b}{4B}=\dfrac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. Сада је висина пирамиде

$$H=\sqrt{a^2-R^2}=\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}=\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)}=$$
$$\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+30^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-30^\circ\right)}.$$ Запремина је
$$V=\frac{a^3}{3}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+30^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-30^\circ\right)}.$$

259. Послужићемо се сл. 91. Пресек дате косе равни и равни SAM, где је M средиште ивице BC, је права AN, па је $AN\perp SM$, а $\sphericalangle MAN=30^\circ$. Тада је и $\sphericalangle MSO=30^\circ$ (углови са нормалним крацима). Из правоуглог троугла SMO, где је $SO=H$, налазимо: $SM=h=\dfrac{2H}{\sqrt{3}}$ и $OM=\dfrac{H}{\sqrt{3}}$. Означимо са a дужину основне ивице. Тада је $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}=\dfrac{H}{\sqrt{3}}$, па је $a=2H$. Резултат: $P=3H^2\sqrt{3}$.

260. Пет ивица имају дужину a, а шеста је $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Површину чине два дата троугла и два једнакокрака, са основицом $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ и крацима дужиме a. Резултат: $P=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}(2+\sqrt{5})$.

261. Означимо са m, n, p дужине бочних ивица. Тада је $mn = 2a^2$, $np = 2b^2$ и $mp = 2c^2$. Према резултату задатка 146, површина основе је $B = \frac{1}{2}\sqrt{m^2n^2 + n^2p^2 + m^2p^2}$, па је у датом случају $B = \sqrt{a^4 + b^4 + c^4}$.

262. Нека су m, n и p бочне ивице. Тада је $mn = 12$, $np = 8$ и $mp = 6$. Запремина пирамиде је $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{mn}{2}\cdot p = \frac{mnp}{6}$. Из претходних једнакости добијамо множењем: $m^2n^2p^2 = 12\cdot 8\cdot 6$. Одавде је $mnp = 24$, па је $V = 4\text{ cm}^3$. Сада лако налазимо: $m = \frac{mnp}{np} = \frac{24}{8} = 3$, $n = 4$ и $p = 2$, па су основне ивице: $a = \sqrt{m^2 + n^2} = 5\text{ cm}$, $b = 2\sqrt{5}\text{ cm}$ и $c = \sqrt{13}\text{ cm}$.

263. Према решењу задатка 146, површина наспрамне стране је $B = \frac{1}{2}\sqrt{70\cdot 99 + 99\cdot 126 + 70\cdot 126} = 84\text{ cm}^2$. Запремина пирамиде, према претходном задатку, износи $V = \frac{1}{6}\sqrt{70}\cdot\sqrt{99}\cdot\sqrt{126} = 21\sqrt{55}$. Сада из $V = \frac{1}{3}B\cdot H$, налазимо $H = \frac{3V}{B} = \frac{3}{4}\sqrt{55}\text{ cm}$.

264. *Први начин.* Према решењу задатка 262, запремина тетраедра је $V = \frac{abc}{6}$, а према решењу задатка 146 је $B = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}$. Из $H = \frac{3V}{B}$, добијамо: $H = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}{a^2b^2c^2}}}$,

или $H = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$. Одавде је $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{H}$. Квадрирањем последње једнакости, добијамо тражену везу.

Други начин. За произвољан правоугли троугао хипотенузе c, добијамо једнакост: $a\cdot b = c\cdot h_c$, односно $a^2b^2 = c^2h_c^2 = (a^2 + b^2)h_c^2$, тј. $a^2b^2 = a^2h_c^2 + b^2h_c^2$. Кад ову једнакост поделимо са $a^2b^2h_c^2$, добијамо: $\frac{1}{h_c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$. Применимо ово на правоугле троуглове SAD и SBC, где је D подножје нормале из S на BC и добијемо $\frac{1}{H^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{SD^2}$ и како је $\frac{1}{SD^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, следи: $\frac{1}{H^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

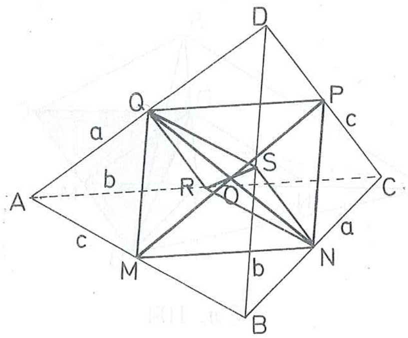
265. Означимо са M, N, P, Q, R, S редом средишта ивица тетраедра, редом: AB, BC, CD, DA, AC, DE, сл. 101. Према услову су наспрамне ивице једнаке па је $MN = NP = PQ = QM$, као средње линије троуглова са једнаким одговарајућим страницама. Следи да је четвороугао $MNPQ$ ромб, па је $PM \perp QN$. Слично докажемо да је $RS \perp MP$ и $RS \perp NQ$. Дакле, запремина октаедра је једнака шестини производа његових дијагонала:

$V = \dfrac{1}{6} MP \cdot NQ \cdot RS$. Израчунајмо дужине ових дијагонала из правоуглих троуглова OMS, OQS, OMQ, где је O заједничко средиште дијагонала:

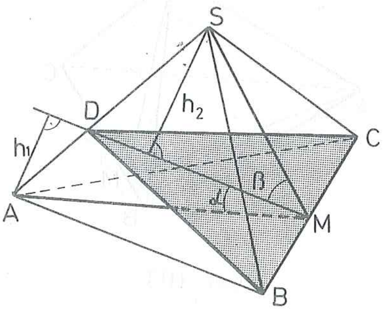
$$\frac{RS^2}{4} + \frac{NQ^2}{4} = \frac{c^2}{4}, \quad \frac{MP^2}{4} + \frac{RS^2}{4} = \frac{a^2}{4}, \quad \frac{NQ^2}{4} + \frac{MP^2}{4} = \frac{b^2}{4}.$$

Помножимо ове једнакости са 2 и саберемо их. Добијамо: $RS^2 + NQ^2 + MP^2 = \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$. Комбиновањем ове једнакости са три претходне, израчунавамо: $RS = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}}$, $MP = \sqrt{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}}$, $NQ = \sqrt{\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}}$.

Тражена запремина је: $V = \dfrac{1}{12}\sqrt{\dfrac{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}{2}}$.



Сл. 101.

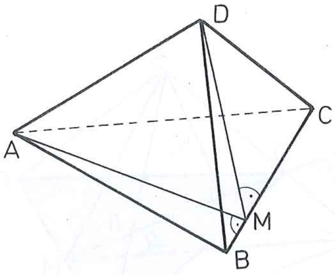


Сл. 102.

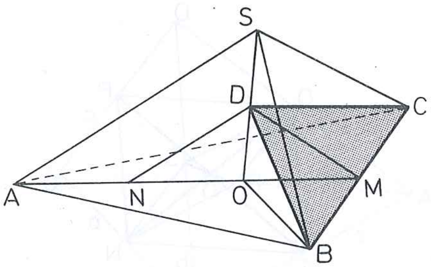
266. Видети решење задатка 252. Ако са m, n, p означимо удаљеност хеликоптера од темена троугла, добићемо: $m^2 = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$, $n^2 = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}$, и $p^2 = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$. Тражимо висину пирамиде, у чијем је врху хеликоптер. Висину H можемо израчунати користећи резултат задатка 264: $\dfrac{1}{H^2} = \dfrac{1}{m^2} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{p^2}$, односно $\dfrac{1}{H^2} = \dfrac{2}{b^2+c^2-a^2} + \dfrac{2}{a^2+c^2-b^2} + \dfrac{2}{a^2+b^2-c^2}$.

267. Слично задатку 257. Пирамиде чије се запремине односе као $3:5$ имају заједничку страну BCD, сл. 102, па је размера одговарајућих висина: $h_1 : h_2 = 3:5$. Како је $AM = MS$, то је $\sin\alpha : \sin\beta = \dfrac{h_1}{AM} : \dfrac{h_2}{SM} = 3:5$. Знамо и да је $\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{1}{3}$. (Видети решење задатка 109.) Дакле: $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{3}$. Нека је $\sin^2\alpha = x$. Тада је $\sin^2\beta = \dfrac{25}{9}x$. Заменимо косинусе преко синуса и добијамо једначину: $\sqrt{1-\frac{25x}{9}}\cdot\sqrt{1-x}=\frac{1}{3}+\frac{5x}{3}$. Решење је $x=\frac{2}{11}$, тј. $\sin^2\alpha=\frac{2}{11}$, па је $\sin^2\beta=\frac{50}{99}$. Сада лако одредимо: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$ и $\operatorname{tg}\beta=\frac{5\sqrt{2}}{7}$.

268. Нека је $AD\perp BC$, сл. 103. Раван која садржи AD и нормална је на BC одређује пресек ADM, при чему је $AM\perp BC$ и $DM\perp BC$. Сада, на основу Питагорине теореме имамо: $AB^2=AM^2+BM^2$, $AC^2=AM^2+CM^2$, $BD^2=DM^2+BM^2$ и $CD^2=CM^2+DM^2$. Одавде следи да је $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$. Слично се доказује и преостала једнакост.



Сл. 103.

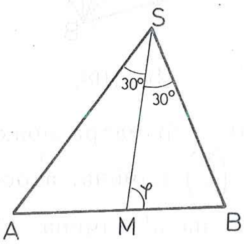


Сл. 104.

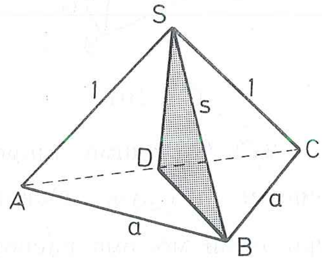
269. *Први начин.* Тачка O је тежиште основе, сл. 104. Ако је N средиште дужи AO, тада није тешко доказати да су троуглови DON и DOM подударни, па је $DN=DM$. Како је $DN=\frac{1}{2}SA$ (средња линија троугла), следи да је и $DM=\frac{1}{2}BC$. Али, дуж DM је тежишна линија троугла BCM, одакле закључујемо да је реч о правоуглом троуглу и $\sphericalangle BDC=90^\circ$. Слично се доказује и за остале основне ивице.

Други начин. Троугао OBD је правоугли и подударан троуглу OCD, па је $BD=CD$. Како је $OB=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, где је a ивица тетраедра и $OD=\frac{H}{2}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$ (према решењу задатка 110), то је $BD^2=OB^2+OD^2=\frac{a^2}{2}$. Дакле $BD=\frac{a\sqrt{2}}{2}=CD$, па је троугао BCD једнакокраки правоугли и $\sphericalangle BCD=90^\circ$.

270. Нека је SAB једна бочна страна пирамиде и SM симетрала угла од 60°. Означимо са φ угао SMB, сл. 105. Применом синусне теореме добијамо: $\dfrac{SA}{\sin(180^\circ-\varphi)} = \dfrac{AM}{\sin 30^\circ} = 2AM$ и $\dfrac{SB}{\sin\varphi} = \dfrac{BM}{\sin 30^\circ} = 2BM$. Сабирањем једнакости добијамо: $\dfrac{SA}{\sin\varphi} + \dfrac{SB}{\sin\varphi} = 2(AM+BM)$, односно $\dfrac{SA+SB}{\sin\varphi} = 2AB$. Одавде закључујемо да је $SA+SB \leqslant 2AB$ (јер је $\sin\varphi \leqslant 1$). Слично добијамо $SB+SC \leqslant 2BC$ и $SC+SA \leqslant 2AC$. Збир ове три неједнакости даје тражену неједнакост.



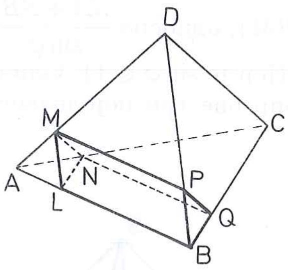
Сл. 105.



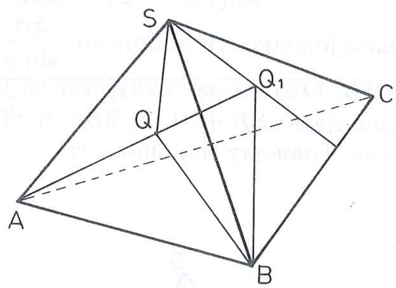
Сл. 106.

271. Троугао SAC је једнакостраничан, па је $AC=1$ и висина SD, која је уједно и висина пирамиде, износи $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, сл. 106. Троуглови SAB и SCB су подударни, па је $AB=BC=a$. Из правоуглог троугла BDS је $BD^2 = s^2 - \dfrac{3}{4}$. Троуглови ABD и BCD су такође правоугли, па имамо: $BD^2 = a^2 - \dfrac{1}{4}$. Применимо косинусну теорему на троугао ABS: $a^2 = s^2+1-2\cdot s\cdot 1\cdot\cos 60^\circ$, односно $a^2 = s^2 - s + 1$. Из претходне две једнакости имамо: $a^2 - \dfrac{1}{4} = s^2 - \dfrac{3}{4}$, односно $a^2 = s^2 - \dfrac{1}{2}$. Даљим комбиновањем једначина добијемо једначину: $s^2 - s + 1 = s^2 - \dfrac{1}{2}$, одакле је $s = \dfrac{3}{2}$. Сада налазимо $BD = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$, па је запремина пирамиде: $V = \dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

272. Нека је L тачка ивице AB, таква да је $\dfrac{AL}{AB} = k$. Тада су праве LM, LN и MN редом, паралелне са BD, BC и CD, сл. 107 (обрнута Талесова теорема), па је запремина тетраедра $ALMN$ једнака k^3V. Преостали део полиедра $AMNBPQ$ је тространа призма $LMNBPQ$. Њена основа BPQ има површину једнаку k^2B, где је B површина основе BCD датог тетраедра. Њена висина је једнака разлици висина тетраедра $ABCD$ и тетраедра $ALMN$ (оба са врхом A): $H_1 = (1-k)H$, где је H висина датог тетраедра. Дакле, запремина призме је $k^2B\cdot(1-k)H = k^2(1-k)BH = 3k^3(1-k)V$. Дакле $V_1 = k^3V + 3k^2(1-k)V = k^2(3-2k)V$, па је $V_1 : V = k^2(3-2k)$.



Сл. 107.



Сл. 108.

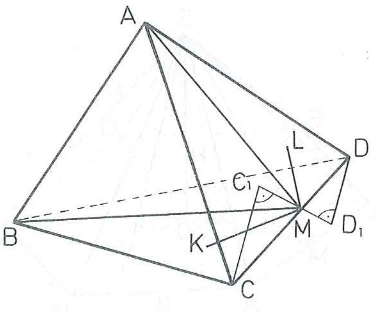
273. Одредимо најпре колико се неподударних тетраедара може начинити од 6 дужи. Основу можемо изабрати на $\binom{6}{3}$ начина, а остале три дужи можемо распоредити, као бочне ивице на 3! начина. (Узимамо у обзир распоређивање само са једне стране равни основе, јер су распореди са друге стране равански симетрични са првим.) Тетраедар има четири стране, па смо на овај начин сваки бројали по четири пута, што значи да се од 6 дужи може начинити $\frac{\binom{6}{3}\cdot 6}{4!} = 30$ неподударних тетраедара. Од n дужи може се начинити $\binom{n}{6}$ шесторки, па је укупан број неподударних тетраедара $\binom{n}{6}\cdot 30 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{24}$.

274. Слично задатку 265. Лако је, као у задатку 108, доказати да су средишта M, N, P, Q ивица AB, BC, CD, DA пирамиде $ABCD$, темена паралелограма. Према услову је $MP \perp QN$, па је четвороугао $MNPQ$ ромб, сл. 101. Дакле, $MN = NP$, одакле излази да је $AC = BD$. Тако се докаже да су и остали парови наспрамних ивица пирамиде једнаки. Због тога су све стране пирамиде подударни троуглови и у сваком рогљу се сустичу три различите ивице, које образују три различита угла, рецимо α, β и γ. Ово су три угла сваког од троуглова, па је њихов збир $180°$.

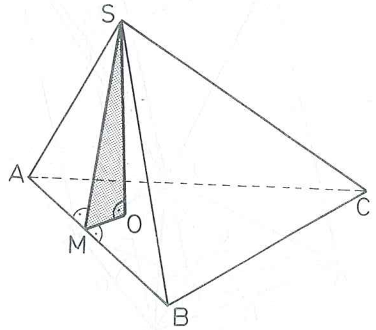
275. Нека је Q_1 продор праве AQ кроз раван троугла SBC, сл. 108. Тада је $\sphericalangle ABS + \sphericalangle SBC = \sphericalangle ABS + \sphericalangle SBQ_1 + \sphericalangle Q_1BC$. Међутим, на основу особина триедра, знамо да је $\sphericalangle ABS + \sphericalangle SBQ_1 > \sphericalangle ABQ_1$, па следи да је $\sphericalangle ABS + \sphericalangle SBC > \sphericalangle ABQ_1 + \sphericalangle Q_1BC$. Искористимо чињеницу да је: $\sphericalangle ABQ_1 = \sphericalangle ABQ + \sphericalangle QBQ_1$ и $\sphericalangle QBQ_1 + \sphericalangle Q_1BC > \sphericalangle QBC$ (опет триедар), па добијемо да је $\sphericalangle ABS + \sphericalangle SBC > \sphericalangle ABQ + \sphericalangle QBC$. Слично се докаже да је $\sphericalangle BCS + \sphericalangle SCA > \sphericalangle BCQ + \sphericalangle QCA$ и $\sphericalangle CAS + \sphericalangle SAB > \sphericalangle CAQ + \sphericalangle QAB$. Сабирањем ове три неједнакости добијамо: $\sphericalangle ABS + \sphericalangle SBC + \sphericalangle BCS + \sphericalangle SCA + \sphericalangle CAS + \sphericalangle SAB > \sphericalangle ABQ + \sphericalangle QBC + \sphericalangle BCQ + \sphericalangle QCA + \sphericalangle CAQ + \sphericalangle QAB$.

Из троугла BCS налазимо да је $\sphericalangle SBC + \sphericalangle BCS + 180^\circ - \sphericalangle BSC$. Слично је $\sphericalangle SCA + \sphericalangle CAS = 180^\circ - \sphericalangle CSA$ и $\sphericalangle SAB + \sphericalangle ABS = 180^\circ - \sphericalangle ASB$. С друге стране је: $\sphericalangle QBC + \sphericalangle BCQ = 180^\circ - \sphericalangle BQC$, затим $\sphericalangle QCA + \sphericalangle CAQ = 180^\circ - \sphericalangle CQA$ и $\sphericalangle QAB + \sphericalangle ABQ = 180^\circ - \sphericalangle AQB$. Заменимо у горњу неједнакост: $3 \cdot 180^\circ - (\sphericalangle BSC + \sphericalangle CSA + \sphericalangle ASB) > 3 \cdot 180^\circ - (\sphericalangle BQC + \sphericalangle CQA + \sphericalangle AQB)$, па одавде добијамо тражену неједнакост.

276. Нека су C_1 и D_1 нормалне пројекције тачака C и D на раван ABM, сл. 109. Из сличних троуглова MCC_1 и MDD_1 следи пропорција $MC : MD = CC_1 : DD_1$. Ако са Q означимо површину троугла ABM, а са V_1 и V_2 запремине пирамида $CABM$ и $DABM$, добићемо једнакости: $V_1 = \frac{1}{3}Q \cdot CC_1$ и $V_2 = \frac{1}{3}Q \cdot DD_1$. Према томе: $V_1 : V_2 = CC_1 : DD_1 = MC : MD$. Уочимо нормалне пројекције K и L тачке M на равни ABC и ABD. Како је M тачка бисекторне равни, то је $KM = LM$. Ове две дужи су висине пирамида $MABC$ и $MABD$, па је $V_1 = \frac{1}{3}S_1 \cdot KM$ и $V_2 = \frac{1}{3}S_2 \cdot LM$. Коначно је: $MC : MD = V_1 : V_2 = \frac{1}{3}S_1 \cdot KM : \frac{1}{3}S_2 \cdot LM = S_1 : S_2$



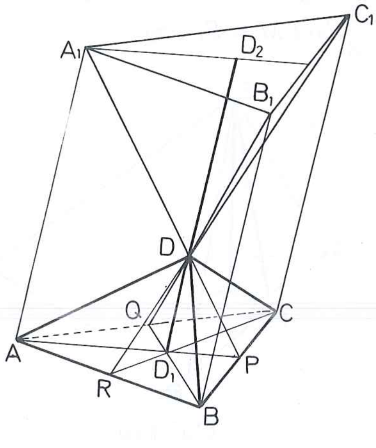
Сл. 109.



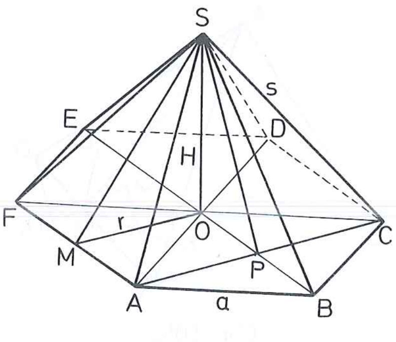
Сл. 110.

277. Нека је $SABC$ тетраедар у коме је ивица $SC > 1$, а остале ивице су мање од 1, или једнаке 1, сл. 110, са висином SO. Уочимо подножје M нормале из O на ивицу AB, мимоилазну са SC. Троугао SOM је правоугли и $SO \leqslant SM$. Како су странице троугла SAB мање или једнаке 1, то је висина $SM \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, јер је $\frac{\sqrt{3}}{2}$ висина највећег, једнакостраничног, троугла са страницама дужине 1. ($SM \perp AB$ на основу теореме о три нормале.) Дакле: $H = SO \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$. Како је и површина основе ABC мања или једнака $\frac{\sqrt{3}}{4}$, јер је од свих троуглова, са страницама мањим или једнаким 1, највећи једнакостранични са страницом једнаком 1, то за запремину тетраедра важи: $V = \frac{1}{3}B \cdot H \leqslant \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{8}$.

278. Послужићемо се сликом 89. Нека је O ортоцентар троугла ABC, а SO висина тетраедра. Доказаћемо да су све стране рогља код S прави углови. По претпоставци је AM висина основе, тј. $AM \perp BC$, па је по теореми о три нормале и $SM \perp BC$. Дакле, права BC је нормална на раван SAM, па је $BC \perp AS$. Како је, по претпоставци, $AS \perp SB$ и $AS \perp BC$, то је AS нормална на раван SBC, па је и $AS \perp SC$. Следи ја је $\sphericalangle ASC = 90°$. Слично се докаже и да је $\sphericalangle BSC = 90°$. Сада применимо Питагорину теорему на троуглове SAB, SBC и SAC. Добијамо: $AB^2 = SA^2 + SB^2$, $BC^2 = SB^2 + SC^2$, $AC^2 = SA^2 + SC^2$. Сабирањем ових једнакости добијамо: $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 2(SA^2 + SB^2 + SC^2)$. Према томе дата неједнакост је еквивалентна са: $(AB + BC + AC)^2 \leqslant 3(AB^2 + BC^2 + AC^2)$, а ово је еквивалентно са $2AB^2 + 2BC^2 + 2AC^2 - 2AB \cdot BC - 2BC \cdot AC - 2AB \cdot AC \geqslant 0$, односно са $(AB - BC)^2 + (BC - AC)^2 + (AC - AB)^2 \geqslant 0$, што је очигледно тачно. Јасно је да знак једнакости важи ако је $AB = BC = AC$. Тада је и $SA = SB = SC$.



Сл. 111.



Сл. 112.

279. Нека је D_2 тачка у којој права DD_1 продире раван $A_1B_1C_1$. Нека су P, Q, R средишта ивица BC, CA, AB, сл. 111. Уочимо троугао APA_1. Он је сличан троуглу D_1PD, па како је $AP = 3D_1P$, то је и $AA_1 = 3DD_1$. Слично се докаже и да је $BB_1 = 3DD_1 = CC_1$. Дакле, полиедар $ABCA_1B_1C_1$ је призма и троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ су подударни. При томе је $D_1D_2 = 3DD_1$, па је висина тетраедра $A_1B_1C_1D_1$ три пута већа од висине тетраедра $ABCD$. Отуда следи да је запремина тетраедра $ABCD$ три пута мања од запремине тетраедра $A_1B_1C_1D_1$.

Ако је D_1 произвољна тачка троугла ABC, тада раван $A_1B_1C_1$ није паралелна равни ABC. Нека се ове две равни секу под углом φ. Тада је и угао између висина тетраедара $ABCD_2$ и $A_1B_1C_1D_1$ једнак углу φ. Као и у решењу задатка 185 (II начин), ако је S површина основе ABC, тада је површина S_1 основе $A_1B_1C_1$ једнака $S_1 = \dfrac{S}{\cos\varphi}$. Међутим, однос висина ова два тетраедра је $H = H_1\cos\varphi$. Стога је запремина V_1 тетраедра $A_1B_1C_1D_1$ једнака: $V_1 = \dfrac{S}{\cos\varphi}\cdot\dfrac{H\cos\varphi}{3} = \dfrac{SH}{3} = V$. Треба још доказати да је висина тетраедра $ABCD_2$ три пута већа од висине датог тетраедра $ABCD$. Довољно је доказати да је $D_1D_2 = 3DD_1$. (Продор праве AD кроз раван BCC_1 је пресечна тачка дијагонала трапеза BCC_1B_1, а истовремено је средиште дужи PN, итд.) Дакле, исти закључак важи и за произвољну тачку D_1 троугла ABC.

280. Површина основе је $B = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$, па је омотач $M = 3ah = 6h = 18\sqrt{3}$. Дакле: $h = 3\sqrt{3}$. Бочна висина, висина пирамиде и полупречник r круга уписаног у основу чине правоугли троугао, па је $H^2 = h^2 - r^2$, сл. 112. Знамо да је $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, па је $H^2 = (3\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2 = 24$, односно $H = 2\sqrt{6}$. Резултати: $P = 24\sqrt{3}$, $V = 12\sqrt{2}$.

281. Из $(n-2)\cdot 180^\circ = 720^\circ$, налазимо да је $n = 6$, па се ради о шестостраној пирамиди. У троуглу SOC је $SC = s$ и $\sphericalangle CSO = 30^\circ$, па је $Os = a = \dfrac{s}{2}$ и $SO + H = \dfrac{s\sqrt{3}}{2}$. Дакле, $V = \dfrac{3s^3}{16}$.

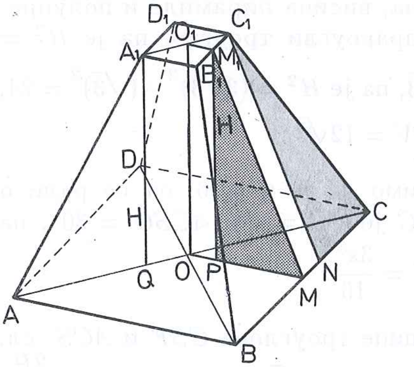
282. Према услову су једнаке површине троуглова CSF и ACS, сл. 112. Како је $CF = 2a$, $AC = a\sqrt{3}$, важи: $2aH = a\sqrt{3}\cdot SP$, па је $SP = \dfrac{2H}{\sqrt{3}}$. У правоуглом троуглу SOP је $OP = \dfrac{a}{2}$, па је $H^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = SP^2$, одакле је $H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Следи да је троугао SOM једнакокраки правоугли, па је $h = H\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Резултати: $V = \dfrac{3}{4}a^3$, $M = \dfrac{3a^2\sqrt{6}}{2}$.

283. На основу особина паралелних пресека израчунаћемо површину B основе: $B : 4,5 = 12^2 : 3^2$. Одавде је $B = 72$ dm^2, па је $V = 288$ dm^3.

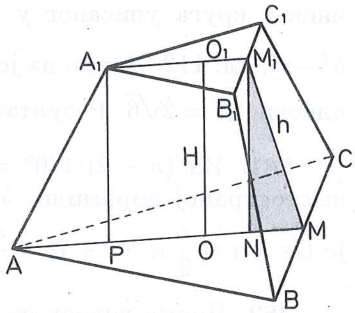
284. Према сл. 112, троугао ACS је правоугли једнакокраки па је $AC = s\sqrt{2}$. Како је $AC = a\sqrt{3}$, следи да је $a = \dfrac{s\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Даље је $H = \dfrac{s\sqrt{3}}{3}$, па је $V = \dfrac{s^3}{3}$.

285. Темена доње основе призме су центри 6 троуглова на које је основа дате пирамиде подељена великим дијагоналама. Отуда се лако израчуна да је висина H_1 добијене призме једнака трећини висине H дате пирамиде, а основна ивица призме је $a_1 = R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. ($R$ је полупречник круга описаног око једнакостраничног троугла.) Даље израчунавамо: $V_1 = \dfrac{3a_1^2\sqrt{3}}{2} \cdot H_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6} H = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} H = \dfrac{1}{3} V$.

286. Треба израчунати бочну висину h (из троугла CC_1N) и висину H пирамиде (из троугла MM_1P), сл. 113: $h^2 = s^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 = 10^2 - 6^2$, дакле $h = 8$ и $H^2 = h^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 = 28$, па је $H = 2\sqrt{7}$. Резултати: $P = 394\ \text{cm}^2$, $P = 122\sqrt{7}\ \text{cm}^3$.



Сл. 113.



Сл. 114.

287. Омотач је једнак збиру површина основа: $M = 180\ \text{cm}^2$. Сада лако израчунамо $h = 5$ cm, па $H = 4$ cm. Запремина је $V = 336\ \text{cm}^3$.

288. Према сл. 113 правоугли троугао MM_1P има оштар угао од $45°$, па је $M_1P = H = PM = \dfrac{1}{2}(3a - a) = a$ и бочна висина $h = MM_1 = a\sqrt{2}$ Резултати: $P = a^2(10 + 8\sqrt{2})$, $V = \dfrac{13a^3}{3}$.

289. Дијагонални пресек представља једнакокраки трапез, коме су основице d_1 и d_2, дијагонале основа зарубљене пирамиде, висина је H, висина пирамиде, а крак је бочна ивица s. Из његове површине, $P = \dfrac{d_1 + d_2}{2} H$, добијамо $d_1 + d_2 = 22$. Користећи се уобичајеним поступком за израчунавање висине помоћу крака и основица, добијамо везу: $\left(\dfrac{d_1 - d_2}{2}\right)^2 + H^2 = s^2$. Одавде је $d_1 - d_2 = 10$. Са претходним условом, $d_1 + d_2 = 22$, имамо систем једначина, из кога налазимо да је $d_1 = 16$ и $d_2 = 6$. Даље је $B_1 = \frac{1}{2}d_1^2 = 128$ и $B_2 = 18$, па је запремина $V = 776$.

290. Паралелни пресек је квадрат ивице b, коју добијамо из услова: $6 : b = 4 : 3$. Дакле, $b = 4,5$ dm. Бочна висина је крак једнакокраког трапеза са основицама 6 dm. и 4,5 dm ивисином $H = 1$ dm. Добијамо $h = 1,25$ dm, па је површина омотача 26,25 dm^2.

291. Висину израчунавамо из дијагоналног пресека: $H = \frac{a-b}{2}\sqrt{2}$. Запремина је $V = \frac{a^3-b^3}{6}\sqrt{2}$.

292. Тачка пресека дијагонала дели висину зарубљене пирамиде у размери одређеној основним ивицама, односно 6 : 3, па су висине делова 6 cm и 3 cm. Пресек је квадрат ивице 4 cm. Запремине делова су 152 cm^3 и 37 cm^3.

293. Можемо се користити сликом 113. Дијагонални пресек ACC_1A_1 има основице $2a\sqrt{2}$ и $a\sqrt{2}$, а краци са већом основом захватају углове од 60°. Из троугла AA_1Q одредимо висину: $H = \frac{d_1-d_2}{2}\sqrt{3} = (a-b)\frac{\sqrt{6}}{2}$. Сада из троугла MM_1P налазимо бочну висину $h^2 = H^2 + PM^2 = \frac{6}{4}(a-b)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 7\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, односно $h = \frac{a-b}{2}\cdot\sqrt{7}$. Површина омотача је $M = \sqrt{7}(a^2-b^2)$.

294. Уочимо правоугли троугао CA_1Q, сл. 113. Дата је дуж $CA_1 = 18$ cm, а знамо да је $CQ = 12\sqrt{2}$ cm, па је $H^2 = 18^2 = \left(12\sqrt{2}\right)^2 = 36$. Запремина је $V = 872$ cm^3.

295. На основу датих података добијамо једнакости: $B_1 : B_2 = 9 : 4$ и $38 = B_1 + \sqrt{B_1B_2} + B_2$. Одавде је $B_1 = 18$ и $B_2 = 8$, па је $a_1 = 3\sqrt{2}$ cm и $a_2 = 2\sqrt{2}$ cm, итд. Резултат: $M = 10\sqrt{19}$ cm^2.

296. Из услова $M = B_1 + B_2 = 10\sqrt{3} = 3\cdot\frac{a_1+a_2}{2}h = 12h$, добијамо $h = \frac{5\sqrt{3}}{6}$. Сада из правоуглог троугла MM_1N, сл. 114, добијамо висину H пирамиде. Најпре налазимо: $MN = OM - O_1M_1 = \frac{a_1\sqrt{3}}{6} - \frac{a_2\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, па је $H^2 = h^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$, итд. $H = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Коначно је $V = \frac{13}{2}$ dm^3.

297. Друга основа је троугао сличан датом. То даје пропорцију: $\sqrt{B_1} : \sqrt{B_2} = 108 : 72 = 3 : 2$, из које налазимо B_2. (Из Хероновог обрасца

$B_1 = 270$, па је $B_2 = 180$.) Запремина је $V = 1900\ \mathrm{cm}^3$.

298. Уочимо троугао APA_1 на сл. 114. По услову је $\sphericalangle PAA_1 = 30°$, па је $H = A_1P = \dfrac{AP}{\sqrt{3}}$. Како је $AP = OA - O_1A_1 = R - R_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} - \dfrac{b\sqrt{3}}{3}$, то је $H = \dfrac{a-b}{3}$. Запремина је $V = \dfrac{\sqrt{3}}{36}(a^3 - b^3)$.

299. Слично претходном задатку: $V = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{12}(a^3 - b^3)$.

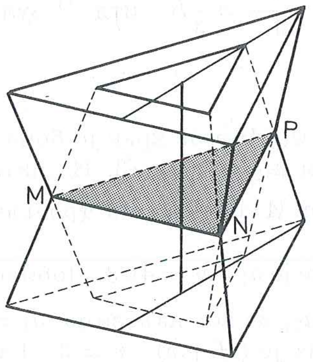
300. Према слици 114, правоугли троугао MM_1N је једнакокрак. Рачунамо слично решењу задатка 296. Резултат: $V = \dfrac{21a^3}{2}$.

301. Површина основе сваке од одсечених пирамида је $\dfrac{B_1}{4}$, па запремину преосталог дела добијамо кад од запремине дате зарубљене пирамиде одузмемо $3\cdot\dfrac{1}{3}\dfrac{B_1}{4}\cdot H = \dfrac{B_1H}{4}$. Резултат: $V = \dfrac{H}{12}(B_1 + 4\sqrt{B_1B_2} + 4B_2)$.

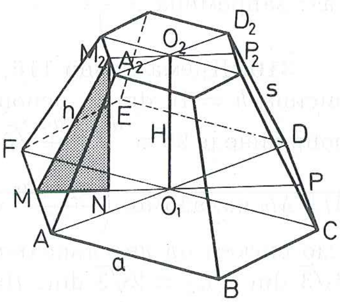
302. Већа основна ивица је два пута већа од ивице друге основе. Дата раван дели две бочне стране на паралелограм и троугао. Мањи део пресечене зарубљене пирамиде је обична тространа пирамида чија је основа троугао подударан мањој основи датог тела. Оба дела имају заједничку висину, па је запремина мањег дела: $V_1 = \dfrac{1}{3}B_2H = \dfrac{B_1H}{12}$, итд. Резултат: $V_1 : V_2 = 1 : 6$.

303. Мањи одсечак је призма чија основа је мања основа зарубљене пирамиде. Резултат: $V_1 : V_2 = 3 : 4$.

304. Пресечне тачке бочних ивица су средишта тих ивица, сл. 115. Заједнички део је тело које се састоји од две једнаке зарубљене пирамиде. Једна њена основа је B_2, а друга је троугао MNP, чија је ивица средња линија бочне стране дате зарубљене пирамиде: $MN = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$. Површина троугла MNP је: $B = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a_1+a_2}{2}\right)^2\sqrt{3} = \dfrac{1}{4}\left(B_1 + B_2 + 2\sqrt{B_1B_2}\right)$. Тражена запремина је $V = 2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{H}{2}\left(B_2 + \sqrt{BB_2} + B\right) = \dfrac{H}{12}\Big(B_1 + 5B_2 + 2\sqrt{B_1B_2} + 2\sqrt{B_1B_2 + B_2^2 + 2\sqrt{B_1B_2^3}}\Big)$.



Сл. 115.



Сл. 116.

305. Из особина паралелних пресека добијамо везу: $\sqrt{B_1} : \sqrt{B_2} = (H+v) : v$, одакле је $v = \dfrac{h\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}}$.

У датом случају најпре одредимо B_2 из једнакости: $V = \dfrac{H}{3}\big(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2\big)$, односно $76 = 36 + 6\sqrt{B_2} + B_2$. Стављајући $B_2 = x^2$, добијамо квадратну једначину: $x^2 + 6x - 40 = 0$, која даје једно позитивно решење: $x = 4$. Дакле, $B_2 = 16$, па је, према претходном резултату, висина допунске пирамиде: $v = \dfrac{3 \cdot 4}{6-4} = 6$. Тражена запремина је $V = 32 \text{ cm}^3$.

306. Из $B_1 : B_2 = a_1^2 : a_1^2$, тј. из $36 : B_2 = 9 : 4$, добијамо $B_2 = 16$, па је запремина $V = 304$.

307. Висину H зарубљене пирамиде израчунамо из дате запремине: $430\sqrt{3} = \dfrac{H}{3}\big(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2\big)$. Површине основа су: $B_1 = 216\sqrt{3}$ и $B_2 = 6\sqrt{3}$, па је $H = 5$ cm. Сада из правоуглог троугла MNM_2, сл. 116, израчунамо бочну висину: $h^2 = H^2 + MN^2$. Како је $MN = OM - O_2M_2 = 6\sqrt{3} - \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$, то је $h = 10$ cm. Омотач је $M = 420 \text{ cm}^2$.

308. ИЗ $B_1 : B_2 = 4 : 1$ добијамо $a_1 : a_2 = 2 : 1$, одакле се једноставно закључује да је висина H зарубљене пирамиде једнака висини допунске пирамиде, тј. $H = k$. Сада из правоуглог троугла MNM_2, сл 116, добијамо да је $MN = k\sqrt{3}$, односно $a_1 = 4k$ и $a_2 = 2k$. Резултати: $V = 14k^3\sqrt{3}$, $M = 36k^2$.

309. Заједнички део је правилна шестострана зарубљена пирамида, чије су основне ивице једнаке трећинама основних ивица дате зарубљене пирамиде. Површина основе шестостране зарубљене пирамиде је, на пример: $B = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} = \frac{3}{2}\left(\frac{a_1}{3}\right)^2\sqrt{3} = \frac{a_1^2\sqrt{3}}{6} = \frac{2}{3}\frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2}{3}B_1$, итд. Резултат: запремина је $\frac{2}{3}V$.

310. Према слици 116, дат је трапез MPP_2M_2. Његов крак је бочна висина $h = 10$ dm, а основице су $MN = a_1\sqrt{3}$ и $M_2N_2 = a_2\sqrt{3}$. Из дате површине је $96 = \frac{a_1 + a_2}{2}\sqrt{3}\cdot 8$, тј. $a_1 + a_2 = 8\sqrt{3}$ dm. Из правоуглог троугла MNM_2 налазимо: $\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\sqrt{3}\right)^2 = h^2 - H^2$, одакле је $a_1 - a_2 = 4\sqrt{3}$. Добили смо систем од две линеарне једначине по a_1 и a_2, из ког налазимо: $a_1 = 6\sqrt{3}$ dm и $a_2 = 2\sqrt{3}$ dm. Дакле $a_1 : a_2 = 3 : 1$, па је $(H + v) : v = 3 : 1$ и коначно је $v = 4$ dm.

311. Пресек је правоугаоник коме је једна страница висина, а друга пресечна тетива основе. Дужину тетиве израчунавамо Пирагорином теоремом: $\left(\frac{t}{2}\right)^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2$. Одавде је $t = r\sqrt{3} = \frac{H\sqrt{3}}{2}$. Површина пресека је $Q = \frac{H^2\sqrt{3}}{2}$.

312. Из дате размере $H : r = 5 : 2$ је $H = \frac{5r}{2}$. Заменом у површину добијамо: $2r^2\pi + 2r\pi H = 28\pi$, односно $2r^2 + 2r\cdot\frac{5r}{2} = 28$, па је $r^2 = 4$, а $r = 2$ и $H = 5$. Запремина је $V = r^2\pi H = 20\pi$.

313. Из $2r\pi = 20\pi$, добијамо $r = 10$, па из осног пресека следи: $2rH = 30$, тј. $20H = 30$. Висина је $H = \frac{3}{2}$. Резултати:$P = 230\pi$, $V = 150\pi$.

314. Дат је услов: $2r^2\pi + 2r\pi(H - k) = 2r\pi H$. Одавде је: $2r^2 - 2kr = 0$, па је $r = k$ и тражена запремина је $V = k^3\pi$.

315. Омотач ваљка има површину a^2, а обим основе је a. Сада из $2r\pi = a$ добијамо $r = \frac{a}{2\pi}$. Висина ваљка је $H = a$, па је капацитит лонца: $V = r^2\pi H = \frac{a^3}{4\pi}$ литара. За дно треба $r^2\pi = \frac{a^2}{4\pi}$ dm^2 лима. Специјално за $a = 2$, потребно је још $0,32$ dm^2 лима, а запремина лонца је $0,64$ литара.

316. Страница око које ротира правоугаоник је оса – висина, а друга страница је полупречник. Дакле, један цилиндар има димензије: $r_1 = a$, $H_1 = b$, па је: $M_1 = 2ab\pi$, $P_1 = 2a^2\pi + 2a\pi b = 2a\pi(a + b)$, $V_1 = a^2\pi b$. Код другог цилиндра је $r_2 = b$, $H_2 = a$, па је: $M_2 = 2ab\pi$, $P_2 = 2b\pi(a + b)$, $V_2 = b^2\pi a$. Добијамо размере: $M_1 : M_2 = 1 : 1$, $P_1 : P_2 = a : b = V_1 : V_2$.

317. Оба ваљка имају висине $H = a$ cm. Пречник описаног ваљка је дијагонала стране коцке, а пречник уписаног је ивица коцке. Резултат: $V = \frac{\pi a^3}{4}$ cm^3.

318. Пречници основа ових ваљака су дијагонале страна квадра, и то 10 cm, 17 cm и $3\sqrt{29}$ cm. У свим случајевима висина ваљка је ивица која је нормална на ову дијагоналу. Резултати: $M_1 : M_2 : M_3 = 25 : 17 : 4\sqrt{29}$ и $V_1 : V_2 : V_2 = 750 : 867 : 522$.

319. Слично претходном задатку: $V_u : V_o = 1 : 4$.

320. Слично задатку 318. Резултат $M_u : M_o = 32 : 65$.

321. Слично задатку 318. Спољашњи полупречник је 6 cm, а унутрашњи $3\sqrt{3}$ cm. Резултат: 1758,4 cm^3 материјала.

322. Осни пресек је правоугаоник са страницама $2r$ и H, па је $2rH = 120$ и $H^2 + 4r^2 = 289$. Прву једначину помножимо са 2 и са -2, па додамо другој. Добијамо: $(H + 2r)^2 = 529$ и $(H - 2r)^2 = 49$. Одавде добијамо два система линеарних једначина: ($H + 2r = 23$ и $H - 2r = 7$) и ($H + 2r = 23$ и $2r - H = 7$). Задатак има два решења: $H_1 = 15$ cm, $r_1 = 4$ cm, $P_1 = 152\pi$ cm^2 и $H_2 = 8$ cm, $r_2 = 7,5$ cm, $P_2 = 232,5$ cm^2.

323. Тражи се висина ваљка, а дат је полупречник, $r = 1,25$ mm и запремина: $V = 1000 : 8,9$. Резултат: 22,9 m.

324. Полупречник ваљка је $r = \sqrt{\frac{R}{\pi}}$, а висина $H = \frac{Q}{2r}$. Резултати: $P = 2R + \pi Q$ и $V = \frac{Q}{2}\sqrt{\pi R}$.

325. $\frac{4\pi V\sqrt{3}}{9}$.

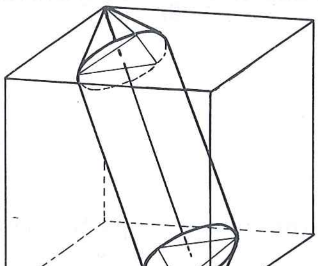
326. Полупречник ваљка је $r = \frac{d}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, а тетива по којој раван сече основу је $t = 2d\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Висину добијамо из површине пресека: $H = \frac{Q}{t} = \frac{Q\cos\frac{\alpha}{2}}{2d\sin\frac{\alpha}{2}}$. Резултат: $V = \frac{\pi dQ}{\sin\alpha}$.

327. Запремина испуњеног дела суда повећала се за запремину тетраедра: $V = \frac{6^3\sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2}$. Ако се ниво течности подигао за H, онда је

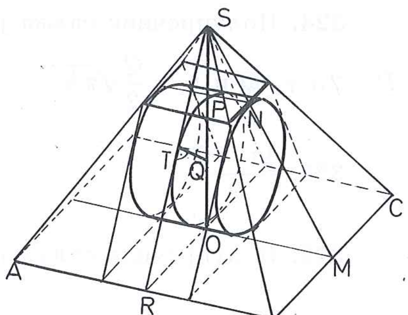
$r^2\pi H = 18\sqrt{2}$, односно $H = \dfrac{18\sqrt{2}}{16\pi} = 0,5$ cm.

328. Осни пресек је правоугаоник. Слично решењу задатка 322, израчунамо H и r. Висина призме је H, а како је основна ивица $a = r\sqrt{3}$, то је површина основе призме: $B = \dfrac{3r^2\sqrt{3}}{4}$. Имамо два решења. За $r_1 = 6$ cm и $H_1 = 5$ cm, запремина призме је $V_1 = 135\sqrt{3}$ cm^3. За $r_2 = 2,5$ cm и $H_2 = 12$ cm је $V_2 = \dfrac{225\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

329. Раван основе одсеца од коцке правилну тространу пирамиду, чије су бочне стране правоугли троуглови. Основа ваљка је круг уписан у основу ове пирамиде. Додирне тачке основе са странама коцке и теме коцке, врх поменуте пирамиде, представљају темена једног правилног тетраедра. (Видети решење задатка 98, сл. 43.) Висина овог тетраедра је $h = \dfrac{x\sqrt{6}}{3}$, где је x ивица тетраедра. Ако означимо са r полупречник основе ваљка, тада је $x = r\sqrt{3}$, па је $h = r\sqrt{2}$. Висина ваљка је разлика дужине дијагонале коцке, $a\sqrt{3}$, и двоструке висине тетраедра. По услову је висина H четири пута већа од r, па је $a\sqrt{3} - 2h = 4r$, сл. 117, тј. $a\sqrt{3} - 2r\sqrt{2} = 4r$. Одавде је $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{2})} = \dfrac{a\sqrt{3}(2-\sqrt{2})}{4}$, па је $H = a\sqrt{3}(2-\sqrt{2})$. Запремина је: $V = \dfrac{3a^3\pi\sqrt{3}}{8}(10 - 7\sqrt{2})$.



Сл. 117.

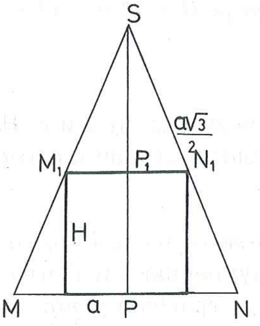


Сл. 118.

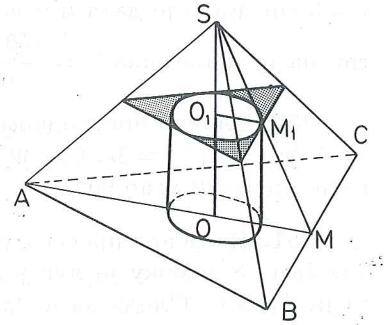
330. Раван основе ваљка је нормална на раван основе пирамиде, па је раван која садржи висину пирамиде и полови две наспрамне ивице паралелна основи ваљка, сл. 118. Ова раван сече ваљак по кругу подударном основном кругу ваљка, а пирамиду сече по једнакокраком троуглу у који је уписан пресечни круг. То нам омогућава да израчунамо полупречник основе. Најпре израчунамо бочну висину пирамиде: $h = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 5$. Затим, уочимо сличне троуглове SQT и SOR. Имамо везу: $QT : QS = OR : RS$, тј. $r : (4 - r) = 3 : 5$. Одавде је $r = \frac{3}{2}$. Висину H_1 ваљка израчунамо из сличних троуглова SOM и SPN, користећи се пропорцијом: $OM : SO = PN : SP$, односно $3 : 4 = \frac{H_1}{2} : 1$. (Дуж OP је пречник ваљка $2r = 3$.) Одавде је $H_1 = \frac{3}{2}$. Запремина ваљка је $V = \frac{27\pi}{8}$.

331. Слично претходном задатку: $r = 3$ cm, $H_1 = 5$ cm. Резултати: $P = 48\ \mathrm{cm}^2$, $V = 45\pi\ \mathrm{cm}^3$.

332. Осни пресек ваљка са равни која садржи средишта двеју основних ивица пирамиде је квадрат, који је уписан у једнакокраки троугао страница: a, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, сл. 119. Из сличних троуглова SMN и SM_1N_1 налазимо H: $MN : M_1N_1 = SP : SP_1$, односно $a : H = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - H\right)$. Одавде је: $H = a(\sqrt{2} - 1)$. Резултат: $P = \frac{3a^2\pi(3 - 2\sqrt{2})}{2}$.



Сл. 119.



Сл. 120.

333. Слично претходном задатку. У овом случају су тачке M_1 и N_1 на сл. 119 средишта дужи SM и SN. Дакле, полупречник ваљка је $r = \frac{a}{4}$. Висина ваљка је $H = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Резултат: $V_1 : V_2 = 32 : 3\pi$. (Октаедар је састављен од две правилне једнакоивичне пирамиде, па је $V_1 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.)

334. Тражени ваљак је описан око коцке из задатка 117 (видети реш-

$r_1 = r\sqrt{3}$. Тада је изводница купе $s = \sqrt{H^2 + r_1^2} = \sqrt{h^2 + 3r^2}$, па једнакост површина даје услов: $r_1^2\pi + r_1\pi s = 2r^2\pi + 2r\pi H$, односно $3r^2 + r\sqrt{3H^2 + 9r^2} = 2r^2 + 2rH$. Скратимо са r и средимо: $\sqrt{3H^2 + 9r^2} = 2H - r$. После квадрирања, уз услов $H > \frac{r}{2}$, добијамо једначину по r: $8r^2 + 4rH - H^2 = 0$, која има решење $r = \frac{H}{4}(\sqrt{3} - 1)$. Полупречник купе је $r_1 = \frac{H}{4}(3 - \sqrt{3})$.

348. Кад развијемо омотач у раван, добијемо кружни исечак површине M, полупречника s и централног угла од $36°$. Према формули за дужину лука овог исечка имамо: $\frac{\pi s \cdot 36}{180} = 2r\pi$, одакле је $s = 10r$. Сада из површине омотача следи једнакост: $M = r\pi s = 10\pi r^2$, па је $r^2 = \frac{M}{10\pi}$, односно $r = \sqrt{\frac{M}{10\pi}}$. Треба нам још висина. Израчунаћемо је из везе: $H^2 = s^2 - r^2$, односно $H = \sqrt{99r^2} = 3\sqrt{11r^2} = 3\sqrt{\frac{1,1M}{\pi}}$. Коначно добијамо: $V = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{1,1S^3}{\pi}}$.

349. Дужина лука исечка је обим основе купе: $\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 15\pi = 2r\pi$, па је $r = 5$ cm. Како је дата и изводница, $s = 15$ cm, то је $H = \sqrt{s^2 - r^2} = 10\sqrt{2}$ cm, па је запремина $V = \frac{250\pi\sqrt{2}}{3}$ cm^3.

350. Слично претходном задатку, налазимо везу између s и r. Наиме $s\pi = 2r\pi$, па је $s = 2r$. Следи да је осни пресек једнакостраничан троугао па је тражени угао $60°$.

351. Из осног пресека уочавамо везу $r = s\cdot \sin\alpha$, па је обим основе $2\pi s \sin\alpha$. У исечку је лук једнак производу полупречника и централног угла: $l = s\cdot\varphi$. Следи да је $2\pi s \sin\alpha = s\varphi$, одакле је тражени угао: $\varphi = 2\pi\sin\alpha$.

352. Одредимо полупречник r, као у задатку 349: $r = 3$ cm.

353. Као у задатку 350, нађемо везу између s и r, тј. из $2r\pi = \frac{s\pi\cdot 216}{180}$, добијамо $s = \frac{5r}{3}$. Затим из $H^2 + r^2 = s^2$, односно из $400 + r^2 = \frac{25r^2}{9}$, добијамо $r = 15$ cm, па је $s = 25$ cm. Површина купе је $P = 600\pi$ cm^2.

354. Из површине и централног угла исечка добијамо везу између полупречника и изводнице: $r\pi s = \frac{s^2\pi\cdot 72}{360}$, тј. $s = 5r$. Сада из омотача

$V = B \cdot H = a^3\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, а површина омотача је $M = 2a^2\pi$ (две трећине омотача првог и једна трећина омотача другог ваљка).

340. Висина ваљка је $H = a\sqrt{3}$, а полупречник је нормално растојање једног темена коцке од те дијагонале. Дакле: $r = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. (Видети решење задатка 105.) Запремина ваљка је $V = \frac{2a^3\pi\sqrt{3}}{3}$.

341. Из $P = r^2\pi + r\pi s$, односно $96\pi = r^2\pi + 10\pi r$, налазимо $r = 6$ cm. Затим, из $r^2 + H^2 = s^2$ добијамо $H = 8$ cm. Запремина је $V = 96\pi$ cm^3.

342. Услов је $r_1^2\sqrt{3} = 4r_2^2$, одакле је $r_2 = \frac{r_1\sqrt[4]{3}}{2}$. Даље је: $V_1 = \frac{1}{3}r_1^3\pi\sqrt{3}$, а $V_2 = 2r_2^3\pi = \frac{1}{4}r_1^3\pi\sqrt{3}\sqrt[4]{3}$, па је $V_1 : V_2 = 4 : 3\sqrt[4]{3}$.

343. Полупречник налазимо из једнакости: $r^2\sqrt{3} = Q$. Резултати: $P = Q\pi\sqrt{3}$ и $V = \frac{\pi Q\sqrt{Q}}{3\sqrt[4]{3}}$.

344. Из $r : H = 3 : 4$, следи $H = \frac{4r}{3}$, па из $s^2 = r^2 + H^2 = r^2 + \frac{16r^2}{9}$, добијамо $s = \frac{5r}{3}$. Сада из омотача налазимо: $r\pi s = 240\pi$, односно $\frac{5r^2}{3} = 240$, одакле је $r = 12$ cm. Висина је 16 cm, па је запремина $V = 768\pi$ cm^3.

345. Из омотача добијамо $rs = 260$, односно $r^2s^2 = 67600$. Затим из $s^2 = r^2 + H^2$, следи $s^2 = r^2 + 576$. Полупречник добијамо из једначине $r^2(r^2 + 576) = 67600$. Нека је $r^2 = t$. Тада имамо: $t^2 + 576t - 67600 = 0$. Решења ове једначине су $t_1 = 100$ и $t_2 = -676$, Дакле, $r^2 = 100$, односно $r = 10$. Запремина купе је $V = 800\pi$ cm^3.

346. Означимо са V_1 запремину најмањег дела, тј. запремину дела којем припада врх купе. На основу особина паралелних пресека, полупречник и висина овог дела су три пута мањи од полупречника и висине дате купе. Дакле: $V_1 : V = 1 : 3^3 = 1 : 27$, па је $V_1 = \frac{V}{27}$. Ако са V_2 означимо запремину купе која садржи V_1 и тражени одсечак, онда, резонујући као у претходном случају закључујемо да је $V_2 : V_1 = 2^3 : 1$, тј. $V_2 = 8V_1 = \frac{8V}{27}$. Тражена запремина је $V_2 - V_1$, тј. $\frac{7V}{27}$.

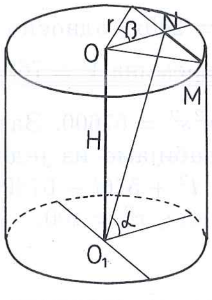
347. Одредићемо најпре полупречник r ваљка. Ако са r_1 означимо полупречник купе, тада из запремине добијамо: $\frac{r_1^2\pi H}{3} = r^2\pi H$, одакле је ење овог задатка). Полупречник ваљка је $r = \dfrac{a}{3}$ и висина $H = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$, па је $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{27}$.

335. Полупречник добијамо слично задатку 332: $r = \sqrt{2}$ cm.

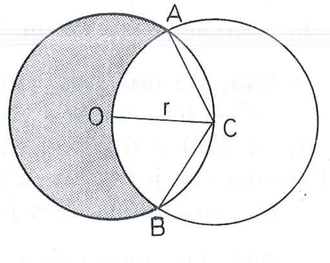
336. Слично задатку 332. Резултат: $V = \dfrac{\pi a^3}{2}(10 - 7\sqrt{2})$.

337. Раван која садржи горњу основу ваљка сече тетраедар по троуглу, чији уписани круг представља основу ваљка, сл. 120. Из сличности троуглова SOM и SO_1M_1, где је $O_1M_1 = r$ и $OO_1 = 2r$, израчунавамо димензије ваљка. Резултати: $P = a^2\pi(3 - 2\sqrt{2})$ и $V = \dfrac{a^3\pi\sqrt{6}}{18}(5\sqrt{2} - 7)$.

338. Из троуглова OMN и OO_1N израчунамо полупречник и висину преко датих елемената, сл. 121. Тако из $\dfrac{MN}{r} = \sin\beta$ добијамо: $r = \dfrac{t}{2\sin\beta}$ и $ON = \dfrac{t}{2}\operatorname{ctg}\beta$. Затим израчунамо висину: $H = \dfrac{t}{2}\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$, па је $V = \dfrac{\pi t^3 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta}{8\sin^2\beta}$.



Сл. 121.



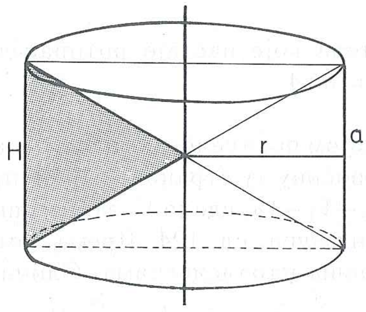
Сл. 122.

339. Постављени услов могуће је испунити само ако су полупречници оба ваљка једнаки међу собом. Неопходно је израчунати површину осенчене површи, сл. 122. То је основа траженог тела: $B = r^2\pi - \dfrac{r^2\pi}{3} - 2P_o$, где је $\dfrac{r^2\pi}{3}$ исечак AOB, са централним углом од 120°, а P_o површина одсечка тетиве AC, односно BC. Како је $\measuredangle AOC = 60°$, то је $P_o = \dfrac{r^2\pi}{6} - \dfrac{r^2\sqrt{3}}{4}$. Дакле: $B = r^2\pi - \dfrac{r^2\pi}{3} - 2\left(\dfrac{r^2\pi}{6} - \dfrac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = \dfrac{r^2\pi}{3} + \dfrac{r^2\sqrt{3}}{2}$. Запремина тела је

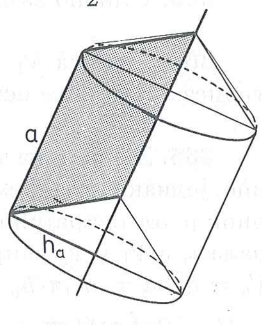
$r\pi s = 320\pi$, односно из $5r^2 = 320$, добијамо $r = 8$ cm и $s = 40$ cm. Висина је $H = \sqrt{s^2 - r^2} = 2r\sqrt{6} = 16\sqrt{6}$ cm, па је запремина: $V = \dfrac{1024\pi\sqrt{6}}{3}$ cm^3.

355. Слично претходном задатку: $V = \dfrac{r^3\pi\sqrt{15}}{3}$.

356. Добијамо ваљак висине a cm и полупречника $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ cm, из којег су извађене две купе које се додирују врховима, а основе им се поклапају са основама ваљка, сл. 123. Површина тела је збир омотача ваљка и двеју купа, а запремина се добија кад се од ваљка одузму две једнаке купе димензија: полупречник је висина датог троугла, $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ cm, изводница је a cm и висина је $\dfrac{a}{2}$ cm. Резултати: $P = 2a^2\pi\sqrt{3}$ cm^2, $V = \dfrac{a^3\pi}{2}$ cm^2.



Сл. 123.



Сл. 124.

357. *а)* Добијамо једнакостраничну купу полупречника $\dfrac{a}{2}$, па је $P = \dfrac{3}{4}a^2\pi$ cm^2 и $V = \dfrac{a^3}{24}\pi\sqrt{3}$ cm^3.

б) Добија се тзв. двојна купа (две купе са заједничком основом и заједничком осом): $P = a^2\pi\sqrt{3}$ cm^2, $V = \dfrac{a^3\pi}{4}$ cm^3.

358. Слично претходном задатку *б)*. Висина двојне купе је $H = 21$ dm, а полупречник је висина троугла која одговара најдужој страници. (Висину налазимо користећи Херонов образац.) Бочне ивице купе су остале две странице. Резултати: $P = 216\pi$ dm^2, $V = 448\pi$ dm^3.

359. У првом случају добијамо двоструку купу (слично претходном задатку), а у другум случају добијамо ваљак и две издубљене купе (слично задатку 356). У првом случају је $P_1 = 336\pi$ cm^2, а у другом случају површина је већа за омотач ваљка полупречника 12 cm и висине 4 cm, тј за 96π cm^2: $P_2 = P_1 + 96\pi$ cm$^2 = 432\pi$ cm^2. Запремина је у првом случају $V_1 = 192\pi$ cm^3, а у другум случају је $V_2 = 2V_1 = 384\pi$ cm^3.

360. Израчунајмо нпр. V_a. Добијено тело је двострука купа, као у задатку 358: $V_a = \frac{1}{3}h_a^2 \cdot a\pi = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot \frac{a\cdot h_a}{2}\cdot h_a\pi = \frac{2}{3}S\cdot h_a\pi$, где је $S = \frac{1}{2}ah_a$ површина датог троугла. Слично добијемо да је $V_b = \frac{2}{3}Sh_b\pi$ и $V_c = \frac{2}{3}Sh_c\pi$, па отуда следи тражени закључак.

361. Висина која одговара краку је $h_b = b\sin 2\beta$. Даље слично задатку 358. Резултат: $V = \frac{2}{3}b^3\pi\sin^2 2\beta$.

362. Слично задатку 360. Резултат: $V = \frac{4800}{13}\pi$ cm^3.

363. Слично задатку 357 *б)*. Резултат: $V = 144\pi$ cm^3.

364. Ако са V_1 означимо запремину тела које настаје ротирањем трапеза око мање основице, тада је: $V_1 : V_2 = 5 : 4$.

365. Запремина тела, које настаје ротацијом паралелограма око странице, једнака је запремини ваљка који има за висину ту страницу, а полупречник је одговарајућа висина. Наиме: $V = V_v + V_1 - V_2$, где је V_v запремина ваљка, а V_1 и V_2 запремине двеју подударних купа, сл. 124. Према томе $V_a = h_a^2\pi a = ah_a\pi\cdot h_a = S\pi h_a$, где је S површина паралелограма. Слично је $V_b = S\pi h_b$. Међутим, из $S = ah_a$, следи $h_a = \frac{S}{a}$, и слично $h_b = \frac{S}{b}$. Према томе: $V_a = \frac{S^2\pi}{a}$ и $V_b = \frac{S^2\pi}{b}$, па је $V_a : V_b = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} = b : a$.

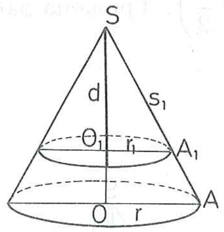
366. Угао између s и r је α. Из осног пресека изразимо s и H преко r. Имамо $s = \frac{r}{\cos\alpha}$ и $H = r\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Из површине купе је: $S = r^2\pi + r\pi s = \frac{\pi r^2(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{2\pi r^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. Одавде налазимо полупречник:
$r = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S\cos\alpha}{2\pi}}$. Тражена запремина је $V = \frac{1}{3}r^2\pi H = \frac{1}{3}r^3\pi\,\mathrm{tg}\,\alpha =$
$\frac{S\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\alpha}{6\cos^3\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S\cos\alpha}{2\pi}} = \frac{S\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{3\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S\cos\alpha}{2\pi}}$.

367. Према услову је $r = H - 1$ и $s = H + 1$. Из везе $r^2 + H^2 = s^2$, добијамо: $(H-1)^2 + H^2 = (H+1)^2$, односно $H^2 + 4H = 0$. Следи да је $H = 4$, $r = 3$, $s = 5$. Резултати: $P = 32\pi$, $V = 12\pi$.

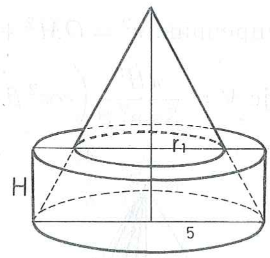
368. Из $r\pi s = r^2\pi + rH$ добијамо: $s = r + \dfrac{H}{\pi}$. Затим из $r^2 + H^2 = s^2 = \left(r + \dfrac{H}{\pi}\right)^2$, добијамо $H = \dfrac{2r\pi}{\pi^2 - 1}$, па је запремина $V = \dfrac{2r^3\pi^2}{3(\pi^2 - 1)}$.

369. Из осног пресека је $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{H}{r}$. Из датог услова за површину следи: $r^2\pi + r\pi s = 4rH$. Како је $s = \sqrt{r^2 + H^2}$, добијамо: $r\pi + \pi\sqrt{r^2 + H^2} = 4H$, односно $\pi\sqrt{r^2 + H^2} = 4H - r\pi$. После квадрирања остаје: $(16 - \pi^2)H^2 = 8r\pi H$, а одавде $\dfrac{H}{r} = \dfrac{8\pi}{16 - \pi^2}$. Дакле тражени угао је $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{8\pi}{16 - \pi^2}$.

370. Пресечна раван сече осни пресек купе по правој паралелној полупречнику основе, па имамо сличне троуглове SOA и SO_1A_1, сл. 125. Из ових троуглова добијамо: $r : r_1 = H : d$ и $s : s_1 = H : d$, а одавде је $r_1 = \dfrac{rd}{H}$ и $s_1 = \dfrac{sd}{H}$. Из услова о пресеку омотача добијамо једнакост: $r\pi s = 2r_1\pi s_1$, односно $r\pi s = 2r\pi s\dfrac{d^2}{H^2}$, Следи да је $d = H\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Сл. 125.



Сл. 126.

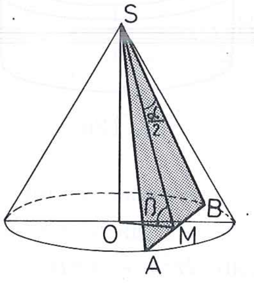
371. Из једнакости запремина $B \cdot H = \dfrac{1}{3}B \cdot H_1$, добијамо услов да је висина купе $H_1 = 3H$, где је H висина ваљка, сл. 126. Тада је изводница купе $s = \sqrt{9H^2 + 25}$. Из једнакости површина следи: $2r^2\pi + 2r\pi H = r^2\pi + r\pi\sqrt{9H^2 + 25}$, односно: $5 + 2H = \sqrt{9H^2 + 25}$. Одавде је $H = 4$ cm. Као што се види на сл. 126, тражена запремина је разлика запремина дате купе и купе која има за основу круг полупречника r_1. Полупречник r_1 налазимо из сличних троуглова: $r_1 = \dfrac{10}{3}$ cm. Висина дате купе је 12 cm, а мања купа има висину 8 cm. Резултат: $V = \dfrac{1900}{27}\pi$ cm^3.

372. Из нагиба изводнице налазимо да је $s = \dfrac{H}{\sin\alpha}$, па из размере омотача добијамо: $2r\pi H : r_1\pi\dfrac{H}{\sin\alpha} = m : n$, одакле је полупречник r_1

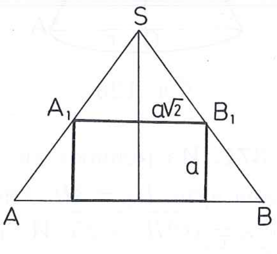
купе $r_1 = \dfrac{2nr\sin\alpha}{m}$. Онда је запремина купе $V_k = \dfrac{4n^2r^2\sin^2\alpha}{3m^2}\pi H$, па је $V_v : V_k = 3m^2 : 4n^2\sin^2\alpha$.

373. Ако је површина омотача подељена у размери 1:2, онда су обим основе и централни угао подељени у истој размери (као на сл. 122). Пресечној тетиви одговара централни угао 120°, па је тетива: $r\sqrt{3}$. Ова тетива са двема изводницама одређује правоугли једнакокраки троугао. Због тога је дужина изводнице: $s = \dfrac{r\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Остаје још да израчунамо висину купе: $H = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{\dfrac{3r^2}{2} - r^2} = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$, па је $V = \dfrac{1}{6}r^3\pi\sqrt{2}$.

374. Израчунаћемо полупречник. Према сл. 127 рачунамо из троугла SOM: $OM = \dfrac{H}{\operatorname{tg}\beta}$ и $SM = \dfrac{H}{\sin\beta}$. Затим, у троуглу SAM налазимо: $AM = SM\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{H\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\beta}$. Коначно, из правоуглог троугла OAM израчунавамо полупречник: $r^2 = OM^2 + AM^2 = \dfrac{H^2}{\sin^2\beta}\left(\cos^2\beta + \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$. Тражена запремина је $V = \dfrac{\pi H^3}{3\sin^2\beta}\left(\cos^2\beta + \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$.



Сл. 127.



Сл. 128.

375. Према сл. 127 је $Q = \dfrac{1}{2}s^2\sin\alpha$, па је $s = \sqrt{\dfrac{2Q}{\sin\alpha}}$. Како је $SM = s\cos\dfrac{\alpha}{2} = \cos\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\dfrac{2Q}{\sin\alpha}}$, то је висина купе $H = SM\sin\beta = \sin\beta\cos\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\dfrac{2Q}{\sin\alpha}}$.
Даље је $r = \sqrt{s^2 - H^2} = \sqrt{\dfrac{2Q}{\sin\alpha} - \sin^2\beta\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{2Q}{\sin\alpha}} = \sqrt{\dfrac{2Q}{\sin\alpha}\left(1 - \sin^2\beta\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.
Површина омотача је $M = r\pi s = \dfrac{2\pi Q}{\sin\alpha}\sqrt{1 - \sin^2\beta\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

376. Из $s+H=m$ је $s=m-H$. Такође је $r=H\operatorname{tg}\alpha$, па како је $s^2-h^2=r^2$, добијамо: $(m-h)^2-H^2=H^2\operatorname{tg}\alpha$. Одавде налазимо висину: $H=m\big(\sqrt{1+\operatorname{tg}\alpha}-1\big)$, па је $r=m\operatorname{tg}\alpha\big(\sqrt{1+\operatorname{tg}\alpha}-1\big)$. Запремина је $V=\dfrac{1}{3}r^2\pi H=\dfrac{m^3}{3}\operatorname{tg}^2\alpha\big(\sqrt{1+\operatorname{tg}\alpha}-1\big)^3$.

377. Нека је a полупречник основа. Тада је висина ваљка $2a$, а свака купа има висину a. Изводница купе је $a\sqrt{2}$. Према томе: $V_v:2V_k=2a^3\pi:2\cdot\dfrac{a^3\pi}{3}=3:1$ и $M_v:2M_k=4a^2\pi:2a^2\pi\sqrt{2}=\sqrt{2}:1$.

378. Запремине су пропорционалне квадратима полупречника основа (висина је заједничка), па како је $r_o=a$ и $r_u=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, где је a основна ивица пирамиде, биће $V_u:V_o=r_u^2:r_o^2=3:4$.

379. Ако је H висина купе, из осног пресека налазимо $r=H\sqrt{3}$ и $s=2H$, па из омотача: $r\pi s=3\pi\sqrt{3}$, добијамо: $H=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. Дакле, $r=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$. Како је основна ивица уписане шестостране пирамиде $a=r=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, то је тражена запремина $V=\dfrac{27\sqrt{2}}{8}$.

380. Површина произвољног многоугла описаног око круга једнака је $p\cdot r$, где је p полуобим. Дакле, запремина описане пирамиде је $V_p=\dfrac{1}{3}prH$, па је $V_k:V_p=r\pi:p$. Размера омотача је $M_k:M_p=r\pi s:ps=r\pi:p$, где је s изводница купе.

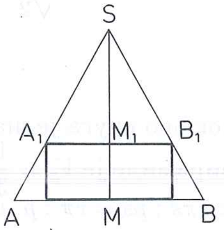
381. Бочне ивице пирамиде су једнаке изводници s купе, па су површине бочних страна: $\dfrac{as}{2}=97,5$, $\dfrac{bs}{2}=62,5$ и $\dfrac{cs}{2}=40$. Одатле добијамо $a:b:c=39:25:16$, тј. $a=39k$, $b=25k$, $c=16k$. Применимо Херонов образац на овај троугао и добијемо $B=120k^2$. Узимајући у обзир дату површину основе, закључујемо да је $k=1$. Полупречник основе купе је $r=\dfrac{B}{\frac{1}{2}(a+b+c)}=3$ cm. Из $\dfrac{c\cdot s}{2}=40$, добијамо изводницу $s=5$ cm, па је висина купе $H=4$ cm. Запремина купе је $V=12\pi$ cm^3.

382. Осни пресек купе који садржи дијагоналу основе коцке, сл. 128, послужиће да одредимо ивицу a коцке. Троуглови SAB и SA_1B_1 су слични па је $2r:a\sqrt{2}=H:(H-a)$. Одавде је $a=\dfrac{24}{3\sqrt{2}+4}$.

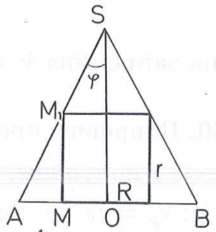
383. Из датих података одмах налазимо основну ивицу призме:

$a^2 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{33} = 54\sqrt{33}$, одакле је $a = 6$ cm. Бочна страна, која лежи у основи купе, је правоугаоник са страницама дужине 6 cm и $\frac{3}{2}\sqrt{33}$ cm, па му је дијагонала $\sqrt{6^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{33}\right)^2} = \frac{21}{2}$ cm. Осни пресек купе, који садржи ову дијагоналу, чине два слична троугла, као на сл. 128. Из пропорције: $2r : \frac{21}{2} = 24 : (24 - 6)$, добијамо полупречник купе $r = 7$ cm. Затим: $s = \sqrt{r^2 + H^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$ cm. Површина купе је $P = 224\pi$ cm^2.

384. Из дате површине и полупречника купе добијамо изводницу: $s = 20$, па израчунамо висину купе $H = 16$ cm. Осни пресек купе који садржи два темена призме, приказан је на сл. 129. Дуж $A_1B_1 = 15$ cm је висина призме, а дуж MM_1 је једнака висини основе призме. Ако са a означимо основну ивицу призме, онда је $MM_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Из $AB : A_1B_1 = SM : SM_1$, тј. из $24 : 15 = 16 : \left(16 - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, добијамо $a\sqrt{3} = 12$, одакле је $a = 4\sqrt{3}$ cm. Запремина призме је $V = 180\sqrt{3}$ cm^3.



Сл. 129.

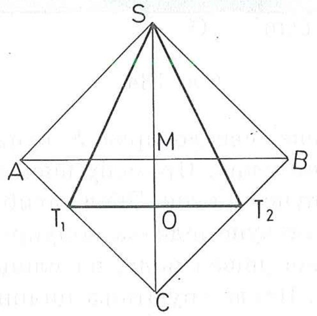


Сл. 130.

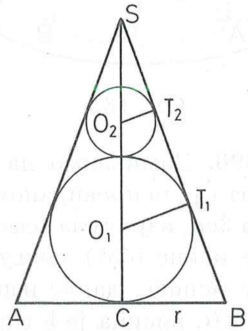
385. Димензије ћемо израчунати из осног пресека. Проблем се своди на одређивање димензија квадрата уписаног у једнакокраки правоугли троугао хипотенузе $2r$, где је r полупречник основе купе. (Поступамо слично претходном задатку.) Димензије купе су r и $H = r$, а код ваљка $R = \frac{r}{3}$ и $H = 2R = \frac{2r}{3}$. Тражена размера је $V_k : V_v = 9 : 2$.

386. Одредићемо $\operatorname{tg}\varphi$, где је φ тражени угао. Нека је r полупречник основе и H висина купе. Тада је $\operatorname{tg}\varphi = \frac{r}{H}$. Ако је R полупречник ваљка, тада из сличних троуглова SAO и M_1AM добијамо везу: $H : r = r : (r-R)$, сл. 130, односно $Hr - HR = r^2$. Сада из услова за површину налазимо полупречник ваљка: $(2R^2\pi + 2R\pi r) : r^2\pi = 3 : 2$, одакле следи једначина: $4R^2 + 4Rr - 3r^2 = 0$. Задовољавајуће решење је $R = \frac{r}{2}$. Сада претходни услов постаје: $HR = r^2$, а одавде је $\frac{r}{H} = \frac{1}{2}$, односно $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}$ и $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

387. Уочимо осни пресек купе, који је одређен средиштима A и B двеју наспрамних ивица октаедра, сл. 131. Пречник основе купе је дуж T_1T_2. Нека је a ивица октаедра: $AB = a$. Тада је $T_1T_2 = \frac{2}{3}a$, па је $r = \frac{a}{3}$. Дуж CO представља $\frac{2}{3}CM$, па је $CO = \frac{1}{3}SC$. Дуж SC је висина октаедра и $CO = a\sqrt{2}$, што значи да је $SO = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Запремина купе је $V_k = \frac{2\pi a^3\sqrt{2}}{81}$, а запремина октаедра $V_o = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$, па је $V_k : V_o = 2\pi : 27$.



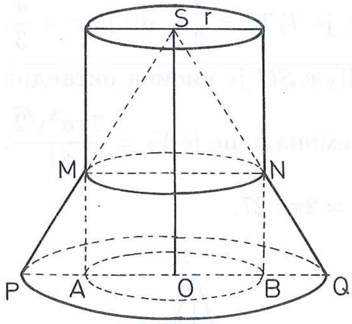
Сл. 131.



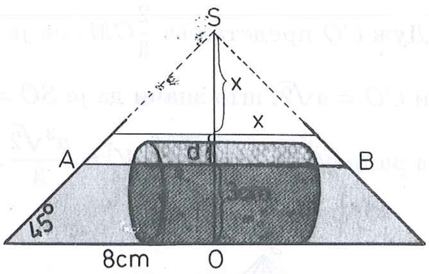
Сл. 132.

388. Посматрајмо сличне троуглове SO_1T и SO_2T у осном пресеку купе, сл. 132. Из $SO_1 : SO_2 = O_1T_1 : O_2T_2 = 2 : 1$, следи $SO_1 = 2SO_2$, односно $SO_2 = O_2O_1 = 3$ cm. Дакле, висина купе је $SC = 8$ cm. Сем тога је $ST_2 = \sqrt{SO_2^2 - O_2T_2^2} = \sqrt{8}$. Даље, из сличности троуглова SO_2T_2 и SBC добијамо услов: $ST_2 : O_2T_2 = SC : CB$, односно $\sqrt{8} : 1 = 8 : r$, па је $r = \sqrt{8}$. Запремина купе је $V = \frac{64\pi}{3}$.

389. Нека је R полупречник купе. Тада, из услова једнакости запремина купе и ваљка добијамо: $\frac{1}{3}R^2\pi H = r^2\pi H$, односно: $R = r\sqrt{3}$. Обратимо пажњу на осни пресек SPQ, сл. 133. Заједнички део датих тела је део ваљка висине AM и део купе са основом пречника $MN = 2r$. Из сличних троуглова AMP и OSP имамо везу: $AM : (R - r) = H : R$. Одавде је: $AM = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}H$, то је висина дела ваљка који нам треба. Висина дела купе је $H - AM = H - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}H = \frac{H}{\sqrt{3}}$. Тражена запремина је: $V = r^2\pi H\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}r^2\pi\frac{H}{\sqrt{3}} = r^2\pi H\frac{9-2\sqrt{3}}{9}$.



Сл. 133.



Сл. 134.

390. Замислимо да је суд продужен навише, све до врха S купе, као што је испрекиданом линијом на сл. 134 приказано. Промену висине нивоа $3ad$, израчунаћемо мерећи „ваздух“ у допунској купи. Због нагиба бочне ивице ($45°$) закључујемо да је висина целе купе једнака полупречнику основе, дакле износи 8 cm. Од првобитног нивоа воде, на слици ниво AB, висина је 5 cm и пречник $AB = 10$ cm. После спуштања цилиндра у посуду, запремина у суду се повећала за запремину ваљка (на слици светлије осенчено), па је сада висина „ваздуха“ у купи x cm и полупречник је x. Тако имамо једнакост: $\frac{1}{3}5^2\pi\cdot 5 = \frac{1}{3}x^2\pi\cdot x + 2^2\pi\cdot 6$. ($2\pi\cdot 6$ је запремина потопљеног цилиндра.) Одавде је $x^3 = 53$, па је $x \approx 3,75$ cm. Ниво воде се подигао за $d = 5 - x = 1,25$ cm $= 12,5$ mm, таман довољно да се цилиндар сасвим потопи у воду.

391. Из везе $H^2 + (r_1 - r_2)^2 = s^2$ добијамо бочну ивицу: $s = 17$ cm, па је површина $P = 850\pi$ cm^2.

392. Из $V = \frac{\pi H}{3}(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$, добијамо $H = 4$ cm, па даље радимо као у претходном задатку. Резултат: $P = 154\pi$ cm^2.

393. Из $H^2 + (r_1 - r_2)^2 = s^2$, налазимо $r_1 - r_2 = 12$ cm. Осни пресек је трапез површине: $\frac{r_1 + r_2}{2}H$, одакле је $r_1 + r_2 = 20$ cm. Имамо систем једначина по r_1 и r_2, чија су решења: $r_1 = 16$ cm и $r_2 = 4$ cm. Резултати: $P = 532\pi$ cm^2, $V = 540\pi$ cm^3.

394. Из $\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 \cdot 3,14 = 113,04$, добијамо $r_1 + r_2 = 12$ cm. Даље решавамо слично претходном задатку. Резултати: $P = 224\pi = 703,36$ cm^2, $V = 248\pi = 778,72$ cm^3.

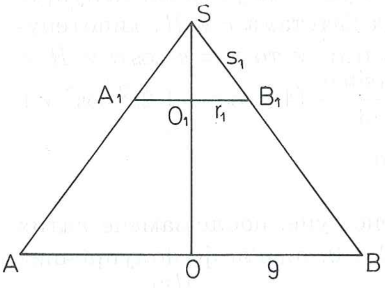
395. Из омотача добијамо: $r_1+r_2=8$ cm, а према услову је $r_1=r_2+4$, па је $r_1=6$ cm и $r_2=2$ cm. Сада из $H^2+(r_1-r_2)^2=s^2$ израчунамо $H=3$ cm, па је запремина $V=52\pi$ cm^3

396. Из површине: $210\pi=81\pi+r^2\pi+(9+r)10\pi$, добијамо једначину $r^2+10r-39=0$, из које налазимо полупречник друге основе: $r=3$. Сада није тешко израчунати висину, $H=8$ cm, па је запремина $V=312\pi$ cm^3.

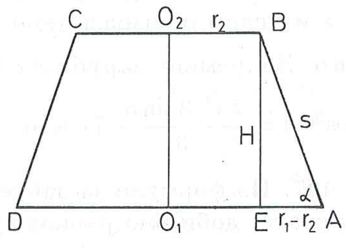
397. Из запремине и висине добијамо: $r_1^2+r_1r_2+r_2^2=124$, а из збира површина основа: $r_1^2+r_2^2=104$. Из ове две једначине нађемо $r_1r_2=20$. Сада ову једначину помножимо једном са 2, други пут са -2 и додамо претходној једначини. Добијамо: $(r_1+r_2)^2=144$ и $(r_1-r_2)^2=64$, а одавде имамо два система линеарних једначина: ($r_1+r_2=12$ и $r_1-r_2=8$), односно ($r_1+r_2=12$ и $r_1-r_2=-8$). Полупречници основа су 10 cm и 2 cm. Сада прво нађемо изводницу $s=17$ cm, па је површина омотача $M=204\pi$ cm^2.

398. Висину $H=4$ cm одмах израчунамо. Површина омотача је једнака збиру површина основа, одакле је $r_1^2+r_2^2=r_1s+r_2s=5r_1+5r_2$. Како је $r_1-r_2=3$ cm, то из добијеног система једначина имамо: $r_1=6$ cm и $r_2=3$ cm. Запремина је $V=84\pi$ cm^3.

399. Разматрамо два случаја: када мањи део омотача садржи врх и када већи део омотача садржи врх. Означићемо са r_1 полупречник пресека, са s_1 одсечак изводнице између врха и пресечне равни и са H_1 одговарајућу висину. Изводница дате купе је $s=\sqrt{9^2+12^2}=15$ cm.



Сл. 135.



Сл. 136.

У првом случају омотач мањег одсечка купе је $\frac{1}{9}$ омотача дате купе. Омотач дате купе је $9\pi\cdot 15=135\pi$ cm^2, па је $r_1\pi s_1=15\pi$, тј. $s_1=\frac{15}{r_1}$. Из сличних троуглова SOB и SO_1B_1, сл. 135, је $9:r_1=15:s_1$, односно $9:r_1=15:\frac{15}{r_1}$. Одавде је $r_1^2=9$, па је $r_1=3$ cm. Даље, из $9:r_1=12:h_1$, добијамо $h_1=4$ cm, па је висина зарубљене купе 8 cm. Тада је запремина зарубљене купе $V=312\pi$ cm^3.

У другом случају одсечак дате купе садржи већи део омотача, тачније $\frac{8}{9}$ омотача дате купе. Полазећи од услова $r_1\pi s_1 = 120\pi$ и поступајући слично као у првом случају, добићемо: $r_1 = 6\sqrt{2}$, $H = 12 - 8\sqrt{2}$, па је $V = 12\pi(27 - 16\sqrt{2})$ cm^3.

400. Из површина основа добијамо $r_1 = 5$ cm, $r_2 = 2$ cm, па из $M = \pi s(r_1 + r_2)$, добијамо $s = 5$ cm, итд. Запремина је $V = 52\pi$ cm^3.

401. Омотач је $M = \pi(r_1 + r_2)s = \pi r_1^2 + \pi r_2^2$, итд. $V = 84\pi$ cm^3.

402. Поступамо слично решењу задатка 399. Ако је h висина одсеченог дела и r полупречник пресечног круга, добијамо релацију $h = 3r$. Затим изразимо омотач преко r, итд. На крају добијемо $h = 3$, што значи да је тражено растојање 9 cm.

403. Из пропорције $s : r_1 : r_2 = 5 : 4 : 1$, можемо извући закључак: $s = 5r_2$ и $r_1 = 4r_2$. Сада из релације $H^2 + (r_1 - r_2)^2 = s^2$, налазимо да је $r_2 = 2$ cm, па је $r_1 = 8$ cm и $s = 10$ cm. Дакле, омотач је $M = 100\pi$ cm^2.

404. Слично задатку 396. Други полупречник је 4 cm, висина је 12 cm. Резултати: $P = 216\pi$ cm^2 и $V = 666,75\pi$ cm^3.

405. $P = \pi H^2\left(\frac{5}{2} + 2\sqrt{2}\right)$, $V = \frac{13\pi H^3}{12}$.

406. Из односа површина основа закључујемо да је мањи полупречник r, а већи $2r$. Из правоуглог троугла са катетама r и H, хипотенузом s и углом α, изразићемо H и r преко s и α, и то $r = s\cdot\cos\alpha$ и $H = s\cdot\sin\alpha$. Запремина зарубљене купе је $V = \frac{\pi s\sin\alpha}{3}\cdot(4s^2\cos^2\alpha + 2s^2\cos^2\alpha + s^2\cos^2\alpha) = \frac{\pi s^3\cdot 2\sin\alpha}{6}\cdot 7\cos^2\alpha = \frac{\pi s^3}{6}\sin 2\alpha\cos\alpha$.

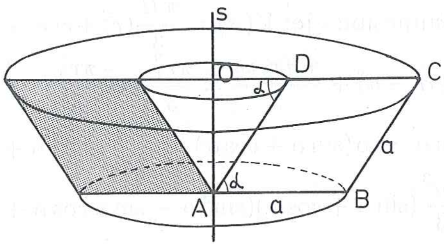
407. Из формуле за запремину зарубљене купе, после замене датих елемената, добијамо једначину: $r_1^2 + 6r_1 - 40 = 0$, одакле је полупречник пресечног круга: $r_1 = 4$. Висину допуне налазимо из $x = \frac{Hr_1}{r - r_1} = 24$ cm, па је запремина купе $V = 432\pi$ cm^3.

408. Према датим условима добијамо систем једначина по r_1 и r_2: $V = \frac{\pi H}{3}(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$ и $m^2 = (r_1 + r_2)H$. Решења овог система су:

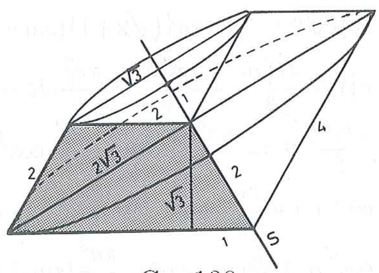
$$r_1 = \frac{1}{2H}\left(m^2 + \sqrt{\frac{3(4HV - \pi m^4)}{\pi}}\right),\ r_2 = \frac{1}{2H}\left(m^2 - \sqrt{\frac{3(4HV - \pi m^4)}{\pi}}\right).$$

409. Осни пресек је једнакокраки трапез $ABCD$, сл. 136. Из правоуглог троугла ABE налазимо: $H = (r_1 - r_2)\operatorname{tg}\alpha$ и $s = AB = \dfrac{r_1 - r_2}{\cos\alpha}$. Омотач је $M = \pi s(r_1 + r_2) = \dfrac{\pi(r_1^2 - r_2^2)}{\cos\alpha}$. Запремина је $V = \dfrac{\pi}{3}(r_1 - r_2)\operatorname{tg}\alpha(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \dfrac{\pi}{3}(r_1^3 - r_2^3)\operatorname{tg}\alpha$. Ако је $\alpha = 60^\circ$, тада је $M = 2\pi(r_1^2 - r_2^2)$ и $V = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}(r_1^3 - r_2^3)$.

410. Ротацијом добијамо зарубљену купу из које је извађена купа исте висине, чија је основа део веће основе зарубљене купе, сл. 137. Површина се састоји из круга полупречника a, кружног прстена ограниченог круговима полупречника $\rho = AN = a\cos\alpha$ и $r_2 = a + \rho$, омотача зарубљене купе и омотача обичне купе, која има исту висину и полупречник ρ. Дакле, $P = a^2\pi + (a+\rho)^2\pi - \rho^2\pi + (2a+\rho)\pi a + \rho\pi a = 4\pi a^2(1+\cos\alpha) = 8\pi a^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$. За $\alpha = 60^\circ$ је $P = 6\pi a^2$.



Сл. 137.



Сл. 138.

411. Слично претходном задатку: $\rho = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} = H$. Резултати: $P = 18(2+\sqrt{2})$ и $V = \dfrac{27\pi}{2}(\sqrt{2}+1)$.

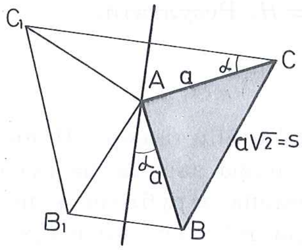
412. На сл. 138 видимо тело које подсећа на „летећи тањир“. Површину образују три позната омотача (две купе и једна зарубљена купа). Запремину добијамо тако што од збира запремина зарубљене купе и веће купе одузмемо запремину мање купе. Користећи се димензијама, које се једноставно израчунавају и лако уочавају на сл. 138, добијамо: $P = 12\pi\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$ и $V = 14\pi\ \mathrm{cm}^3$.

413. Слично задацима 411 и 412. Резултат: $V = 288\pi\ \mathrm{cm}^3$.

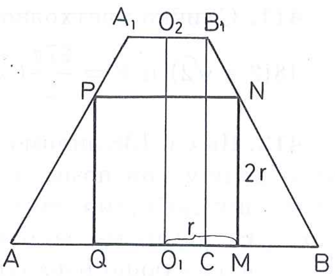
414. Очигледно је дати троугао тупоугли, па висина CD, која одговара краку, има подножје ван троугла. Структура добијеног тела и његове димензије виде се на сл. 139.
Резултати: $P = 832{,}5\pi\ \mathrm{cm}^2$, $V = 1425\pi\ \mathrm{cm}^3$.

415. (Видети задатке 365, 363 и 410) $V : V_1 = ah^2\pi : \frac{1}{12}d_1d_2^2\pi$. Како је $h = a\sin\alpha$, $d_1 = 2a\cos\frac{\alpha}{2}$ и $d_2 = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$, добићемо размеру: $V : V_1 = 12a^3\sin^2\alpha : 8a^3\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2} = 12a^3\sin^2\alpha : 4a^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2} = 3\sin\alpha : \sin\frac{\alpha}{2} = 6\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} : \sin\frac{\alpha}{2} = 6\cos\frac{\alpha}{2}$. Из услова $V : V_1 = 9 : \sqrt{3} = 6\cos\frac{\alpha}{2}$ добијамо: $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, па је $\alpha = 60^\circ$. Користећи сл. 137, добијемо запремину као разлику запремина зарубљене купе и обичне купе. (Обе имају висину $H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.) $V = \frac{\pi}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(a^2 + \frac{3a^2}{2} + \frac{9a^2}{4}\right) - \frac{\pi}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{a^4}{4} = \frac{3\pi a^3\sqrt{3}}{4}$.

416. Углови BAM и ACN су једнаки (са нормалним крацима) па су подударни троуглови ABM и ACN. Стога је $r_1 = n$, $r_2 = m$ и $m + n = H$, сл. 139. Затим имамо везе: $r_1 = a\sin\alpha$, $r_2 = a\cos\alpha$ и $H = a(\sin\alpha + \cos\alpha)$. Рачунамо површину тела: $P(\alpha) = \pi a\sqrt{2}(r_1 + r_2) + \pi a r_1 + \pi a r_2 = \pi a(r_1 + r_2)(\sqrt{2}+1) = \pi a^2(\sqrt{2}+1)(\sin\alpha + \cos\alpha)$. Запремина је: $V(\alpha) = \frac{\pi H}{3}(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2) - \frac{\pi r_1^2 m}{3} - \frac{\pi r_2^2 n}{3} = \frac{\pi r_1^2}{3}(H - m) + \frac{\pi r_2^2}{3}(H - n) + \frac{\pi H r_1 r_2}{3} = \frac{\pi r_1^2}{3}n + \frac{\pi r_2^2}{3}m + \frac{\pi r_1 r_2}{3}H = \frac{\pi a^3}{3}\sin^3\alpha + \frac{\pi a^3}{3}\cos^3\alpha + \frac{\pi a^3}{3}\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) = \frac{\pi a^3}{3}(\sin^3\alpha + \cos^3\alpha) + \frac{\pi a^3}{3}\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) = \frac{\pi a^3}{3}(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) = \frac{\pi a^3}{3}(\sin\alpha + \cos\alpha)$. Према томе: $P(\alpha) : V(\alpha) = 3(\sqrt{2}+1) : a$.



Сл. 139.



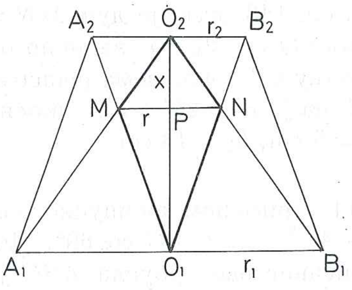
Сл. 140.

417. Ивица коцке је $a = \sqrt[3]{V}$. Висина зарубљене купе је $H = a$, полупречници основа су $r_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $r_2 = \frac{a}{2}$, па је запремина купе
$$V_1 = \frac{\pi a}{3}\left(\frac{2a^2}{4} + \frac{a^2\sqrt{2}}{4} + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{\pi a^3}{12}(3 + \sqrt{2}) = \frac{\pi V}{12}(3 + \sqrt{2}).$$

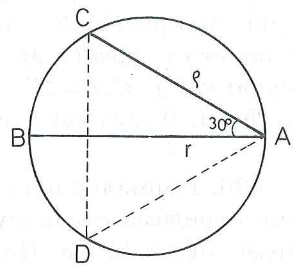
418. Осни пресек на сл. 140 показује да треба одредити димензије квадрата $MNPQ$, уписаног у једнакокраки трапез ABB_1A_1. Из сличних троуглова BB_1C и BNM имамо пропорцију: $B_1C : BC = MN : MB$. Потребно је израчунати висину $H = BB_1$ зарубљене купе. Из дате запремине следи: $3150\pi = \frac{\pi H}{3}(20^2 + 20\cdot 5 + 5^2)$, па је $H = 18$ cm. Обзиром да је $B_1C = 18$ cm, $BC = r_1 - r_2 = 15$, $MN = 2r$ и $MB = r_1 - r = 20 - r$, добијамо пропорцију $18 : 15 = 2r : (20 - r)$, одакле је $r = 7,5$ cm. Тражена површина је $P = \frac{675}{2}\pi$ cm^2.

419. Нека је r полупречник двојне купе. Тада је полупречник ваљка $2r$. Запремина двојне купе је $V_1 = \frac{\pi H}{3}r^2$. Запремину V_2 добићемо када од запремине ваљка одузмемо запремине двеју једнаких зарубљених купа: $V_2 = 4r^2\pi H - \frac{7\pi H r^2}{3} = \frac{5\pi H r^2}{3}$. Дакле $V_1 : V_2 = 1 : 5$.

420. На сл. 141 полупречник r двојне купе је дуж MP. Означимо са x дуж O_2P. Из сличних троуглова AO_1O_2 и MPO_2, односно $O_2O_1A_1$ и O_2PM, добијамо пропорције $r : r_1 = x : H$ и $r : r_2 = (H - x) : H$. Из прве пропорције је $x = \frac{rH}{r_1}$, па заменом у другу добијамо: $\frac{r}{r_2} = \frac{H - \frac{rH}{r_1}}{H}$, тј. $\frac{r}{r_2} = \frac{r_1 - r}{r_1}$. Одавде је $r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$. Запремина двојне купе је $V_1 = \frac{\pi H r_1^2 r_2^2}{3(r_1 + r_2)}$, па је тражена запремина: $V = \frac{\pi H}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_1 + r_2)^2}\right)$.



Сл. 141.

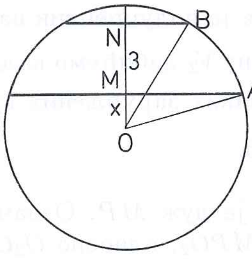


Сл. 142.

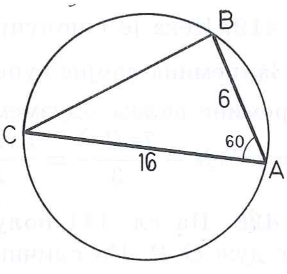
421. Пречник пресечног круга је двострука висина једнакостраничног троугла странице r, где је r полупречник лопте. Ако је ρ полупречник пресека, тада из $\rho^2\pi = 48\pi$, добијамо $\rho = 4\sqrt{3}$. Следи да је $r = 8$ cm.

422. Поставимо раван која садржи дати пречник и нормална је на дату раван. Добијамо пресек приказан на сл. 142, где је AC пречник пресечног круга. Како је $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ (периферијски угао над пречником) то је $AC = r\sqrt{3}$. Површина пресека је $Q = \dfrac{3\pi}{4}r^2$.

423. Уочимо велики круг дате лопте, који је нормалан на дате равни, сл. 143. Из правоуглих троуглова OAM и OBN добијамо: $OA^2 = AM^2 + OM^2$ и $OB^2 = BN^2 + ON^2$, односно: $r^2 = 12^2 + x^2$ и $r^2 = 9^2 + (3+x)^2$. Даље је: $144 + x^2 = 81 + 9 + 6x + x^2$, одакле следи $x = 9$. Коначно $r^2 = 12^2 + 9^2$, тј. $r = 15$ cm.



Сл. 143.



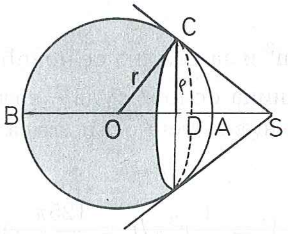
Сл. 144.

424. Послужићемо се сликом 143. Одредићемо најпре дуж $OM = x$ и ON. Овде је $AM^2 = 140$ и $BN^2 = 135$, па је $x^2 = r^2 - AM^2 = 144 - 140$, па је $x = 2$ cm и слично $BN = 3$ cm. Зависно од тога да ли је центар O лопте између M и N или не, добијамо да је растојање између пресечних равни једнако 5 cm, или 1 cm.

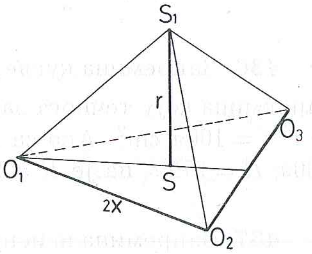
425. Слично претходном задатку. Према сл. 143, дата је дуж $MN = 27$ cm. Ако је $OM = x$, тада је $ON = 27 + x$ или $ON = 27 - x$, зависно од распореда тачака O, M, N. Случај као у задатку 423, овде нема решења. Случај кад је $ON = 27 - x$ даје решење $x = 7$, па је $r^2 = 24^2 + 7^2$, односно $r = 25$ cm. Према томе, висине калота су $h_1 = 5$ cm, $h_2 = 18$ cm.

426. Нормални пресек висдимо на сл. 144. Применом косинусне теореме одредимо страницу BC: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos 60^\circ$. Добијемо $BC = 14$ cm. Полупречник круга описаног око троугла ABC је полупречник великог круга, заправо представља тражени полупречник лопте. Помоћу Хероновог обрасца нађемо површину троугла, $P = 24\sqrt{3}$, па је $r = \dfrac{6\cdot 14\cdot 16}{96\sqrt{3}} = \dfrac{14\sqrt{3}}{3}$ cm.

427. Полупречник траженог круга је хипотенузина висина правоуглог троугла SOC, у ком је полупречник лопте, $OC = 6$ cm, катета и $SO = 4 + 6 = 10$ cm хипотенуза, сл. 145. Резултат $O = 2\rho\pi = 9,6\pi$ cm.



Сл. 145.



Сл. 146.

428. Услов каже да је $4\pi(r+3)^2 = 4r^2\pi + 108\pi$. Одавде налазимо да је $r = 3$ cm. Запремина се са $\frac{4}{3}\cdot 3^3\pi == 36\pi$ cm^3 повећала на $\frac{4}{3}\cdot 6^3\pi = 288\pi$ cm^3, тј. повећала се за 252π cm^3.

429. Запремина нове кугле једнака је збиру запремина трију претопљених: $\frac{4}{3}r^3\pi = \frac{4}{3}3^3\pi + \frac{4}{3}4^3\pi + \frac{4}{3}5^3\pi$. После скраћивања ове једнакости остаје: $r^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3 = 216$, па је $r = 6$ cm.

430. Из $4r_1^2\pi - 4r_2^2\pi = 64\pi$ и $r_1 + r_2 = 8$, следи: $r_1 = 5$ cm и $r_2 = 3$ cm.

431. Услов је $\frac{4}{3}\cdot 3^3\pi = 3\cdot\frac{4}{3}x^3\pi$, одакле је $x = \sqrt[3]{9}$ dm полупречник мање лопте. Површина ове лопте је $P = 4x^2\pi = 12\pi\sqrt[3]{3}$ cm^2, или приближно $P = 54,26$ dm^2. (Узели смо: $\pi = 3,14$ и $\sqrt[3]{3} = 1,44$.)

432. Из $\frac{4}{3}r^3\pi = 1000$ cm^3, следи: $r = \sqrt[3]{750:\pi}$. Узимајући приближно $\pi = 3,14$, добијамо $r \approx 6,2$ cm.

433. Нека је R полупречник, s изводница и H висина купе. Тада из $R\pi s = 3R^2\pi$, следи $s = 3R$, па је $R^2 + H^2 = s^2 = 9R^2$. Одавде је $R^2 = \frac{H^2}{8}$. Запремина купе је једнака запремини дате лопте: $\frac{1}{3}R^2\pi H = \frac{4}{3}r^3\pi$, одакле налазимо $\frac{H^2}{8}\cdot H = 4r^3$. Коначно је $H = 2r\sqrt[3]{4}$.

434. Из једнаких запремина: $\frac{1}{3}r^2\pi H = \frac{2}{3}r^3\pi$, добијамо $H = 2r$, па је $s = \sqrt{H^2 + r^2} = r\sqrt{5}$. Дакле: $M = r\pi s = r^2\pi\sqrt{5}$.

435. Подножје нормале из центра лопте на раван датог троугла је центар круга уписаног у тај троугао. Полупречник ρ уписаног круга и тражено растојање H су катете троугла, чија је хипотенуза полупречник r лопте. Најпре израчунамо површину датог троугла, $P = 48$, па полупречник ρ, $\rho = \frac{P}{s} = 3$ cm. Сада је $H = \sqrt{r^2 - \rho^2} = 3$ cm.

436. Запремина кугле је $V = \frac{4}{3} \cdot 3^3 \pi = 972\pi$ cm^3 и за толико се повећава запремина коју течност заузима у посуди. Површина основе суда – ваљка је $r^2\pi = 100\pi$ cm^2. Ако са H означимо повећање нивоа течности, тада је: $100\pi \cdot H = 972\pi$, па је $H = 9,72$ cm.

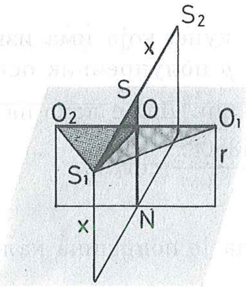
437. Запремина неиспуњеног дела посуде је: $V = \frac{1}{12} r^2 \pi H = \frac{125\pi}{6}$ cm^3, па ако је r полупречник лопте, тада важи једнакост: $\frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{125\pi}{6}$. Одавде је $r^3 = \frac{125}{8}$, па је $r = \frac{5}{2}$ cm.

438. Центри ових лопти очигледно представљају темена правилног тетраедра, ивице 2 cm. Темена основе (центри прве три лопте) одређују раван, која је од дате хоризонталне равни удаљена 1 cm. Тражено растојање је $d = H + 1$, где је H висина тетраедра, а то, према решењу задатка 110 износи: $H = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. Дакле $D = \frac{2\sqrt{6}}{3} + 1$, или, приближно $d = 2,63$ cm.

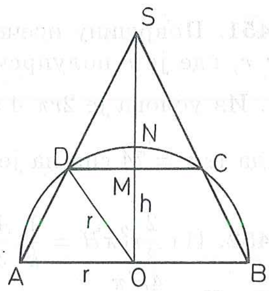
439. Центри ових лопти су темена правилне једнакоивичне четворостране пирамиде, ивице $2r$. Ако је њена висина H, тада је тражено растојање d једнако $H + 2r$. Резултат: $d = r(2 + \sqrt{2})$.

440. Центри трију лопти непознатог полупречника, тачке O_1, O_2, O_3 на сл. 146, одређују основу двају једнаких тетраедара. Центри S_1 и S_2 двеју датих лопти, симетрични у односу на раван $O_1O_2O_3$, представљају врхове ових тетраедара. Додирна тачка S ових двеју лопти је заједничко подножје висина тетраедара. Троугао $O_1O_2O_3$ је једнакостраничан, са страницом $O_1O_2 = 2x$, где је x тражени полупречник лопте. Тачка S је тежиште овог троугла, а висина тетраедра је $S_1S = r$. Као што знамо $O_1S = \frac{O_2O_3\sqrt{3}}{3} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$. Бочне ивице тетраедра имају дужине $(r + x)$. Сада из правоуглог троугла O_1SS_1 добијамо: $O_1S_1^2 - O_1S^2 = SS_1^2$, односно $(r + x)^2 - \frac{4x^2}{3} = r^2$. Сређивањем добијемо једначину: $x^2 - 6rx = 0$, одакле је $x = 6r$.

441. Означимо центре лопти полупречника r са O_1 и O_2, $O_1O_2 = 2r$, а са S_1 и S_2 центре лопти непознатог полупречника, $S_1S_2 = 2x$, сл. 147. Средишта дужи O_1O_2 и S_1S_2, тачке редом O и S, су додирне тачке парова једнаких лопти. Троугао $O_1O_2S_1$ је једнакокрак, јер је $O_1S_1 = r+x = O_2S_1$, па је $OS_1^2 = O_1S_1^2 - OO_1^2 = (r+x)^2 - r^2 = x^2 + 2rx$. Троугао S_1OS_2 је такође једнакокрак и $OS^2 = OS_1^2 - SS_1^2 = x^2 + 2rx - x^2 = 2rx$. Међутим, како је $OS = SN - ON = x - r$, добијамо: $(x-r)^2 = 2rx$. Ово је квадратна једначина која даје решења $x_1 = r(2+\sqrt{3})$ и $x_2 = r(2-\sqrt{3})$. Прво решење одговара слици 147. Али, постоји и друго решење, овде је то x_2, у случају када је $x < r$.



Сл. 147.



Сл. 148.

442. Нека је h висина калоте. Тада је површина ове калоте једнака збиру површина појаса и великог круга: $2r\pi h = r^2\pi + 2r\pi(r-h)$. Одавде је $4r\pi h = 3r^2\pi$, па је $h = \frac{3}{4}r$ тражени услов.

443. Из формула за површине калоте и појаса, јасно је да $P_1 : P_2 = h : MN$, сл. 148. Из сличних троуглова SOA и SMD следи $AO : DM = SO : SM$, односно $r : \sqrt{r^2 - h^2} = 2r : (2r - h)$. Одавде је $h = \frac{4}{5}r$, па је $MN = \frac{1}{5}r$ и $P_1 : P_2 = 4 : 1$.

444. Послужимо се сликом 145. Из сличности троуглова OCS и ODS добијамо услов: $OS \cdot OD = OC^2$, односно $c \cdot (r-h) = r^2$, где је $h = AD$ висина калоте која се тражи. Одавде је $h = \frac{cr - r^2}{c}$, па је површина: $P = 2r\pi h = \frac{2\pi r^2(c-r)}{c}$.

445. Ако је ρ полупречник пресека и h висина калоте, тада је $\rho^2 = r^2 - (r-h)^2 = 2rh - h^2$, па из $\rho^2\pi : 2r\pi h = 2 : 3$, добијамо $h = \frac{2}{3}r$.

446. Очигледно је висина осветљене калоте (на сл. 145 дуж DA): $h = \frac{2r}{3}$. Даље слично задатку 427. Решење: $3r$.

447. Слично задатку 444. Резултат: $P \approx 15578325\ \mathrm{km}^2$.

448. Висину појаса одредимо слично решењу задатка 424. Имамо два решења: $h_1 = 9$ cm и $h_2 = 41$ cm. Одговарајуће површине су

$P_1 = 1170\pi$ cm^2 и $P_2 = 5330\pi$ cm^2.

449. Полупречник лопте је 26 cm. Површина појаса је $P = 520\pi$ cm^2.

450. Из површине појаса добијамо полупречник лопте: $r = 25$ cm. Резултат: $V = 1250\pi$ cm^3.

451. Површину исечка чине калота и омотач купе, која има изводницу r, где је r полупречник лопте. Означимо са ρ полупречник основе купе. Из услова је $2r\pi \cdot 4 = \frac{1}{3}\rho\pi r$. Одавде је $\rho = 24$ cm. Даље лако налазимо да је $r = 74$ cm, па је запремина исечка $V = \frac{43808\pi}{3}$ cm^3.

452. Из $\frac{2}{3}r^2\pi H = \frac{1}{k} \cdot \frac{4}{3}r^3\pi$, добијамо: $H = \frac{2r}{k}$, па је површина калоте: $P = 2r\pi H = \frac{4r^2\pi}{k}$.

453. Означимо са r и ρ полупречнике лопте и основе купе, као у задатку 451. По услову је $2r\pi H = Q$, H је висина калоте, и $\rho\pi r = M$. Из $\frac{\rho\pi r}{2r\pi H} = \frac{M}{Q}$, добијамо $\rho = \frac{2HM}{Q}$. Затим, из $\rho^2 + (r - H)^2 = r^2$, добијамо $H = \frac{Q\sqrt{Q}}{\sqrt{\pi(4M^2 + Q^2)}}$. (Користили смо услов $2rH = \frac{Q}{\pi}$). Даље је $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4M^2 + Q^2}{\pi Q}}$, па је запремина исечка:

$$V = \frac{2}{3}r^2\pi H = \frac{r}{3} \cdot 2r\pi H = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{Q(4M^2 + Q^2)}{\pi}}.$$

454. Услов тврди: $2r\pi H = \frac{1}{3}4r^2\pi$, одакле је $H = \frac{2}{3}r$. Запремина одсечка је $\pi H^2\left(r - \frac{H}{3}\right) = \pi\left(\frac{2}{3}r\right)^2\left(r - \frac{2r}{9}\right) = \frac{28r^3\pi}{81}$. Тражени однос запремина је $V : V_1 = \frac{4}{3}r^3\pi : \frac{28}{81}r^3\pi = 27 : 7$.

455. Из услова је $2r\pi H = 2\rho^2\pi$, односно $\rho^2 = rH$. Из везе $r^2 = \rho^2 + (r - H)^2$, налазимо да је $H = r$. Дакле, одсечак је полулопта, па је $V = \frac{2}{3}r^3\pi$.

456. Одредимо полупречник лопте, као у задатку 423. Добијемо $r = 5$ cm, па је запремина слоја једнака разлици запремина двају одсечака, са висинама 8 cm и 1 cm. Према томе $V = \frac{434\pi}{3}$.

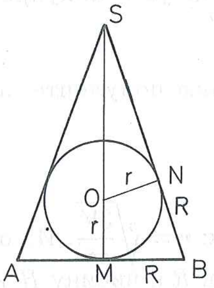
457. Слично претходном задатку, али постоје два решења, условљена положајем центра лопте у односу на пресечне равни. Могући су случајеви $H_1 = 15 - 7 = 8$ cm и $H_2 = 15 + 7 = 22$ cm. У првом случају је $V_1 = \frac{11968\pi}{3}$, а у другом: $V_2 = \frac{37532\pi}{3}$.

458. Из дате запремине израчунамо $r = 8$ cm, па је тражена запремина $V = 256\pi$ cm^3.

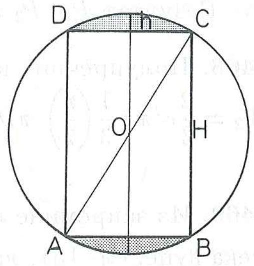
459. Запремина одсечка једнака је половини запремине исечка: $\pi h^2\left(r^2 - \frac{h}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}r^2\pi h$. Сређивањем добијемо једначину: $h^2 - 3rh + r^2 = 0$, која даје решења по непознатој висини: $h_1 = \frac{r(3+\sqrt{5})}{2}$, $h_2 = \frac{r(3-\sqrt{5})}{2}$. Задатак има два решења: $V_1 = \frac{\pi}{6}r^3(3+\sqrt{5})$ cm^3, $V_2 = \frac{\pi}{6}r^3(3-\sqrt{5})$ cm^3.

460. Висину одредимо слично решењу задатка 424. Резултати:
а) $P_1 = 1600\pi$ cm^2, $V_1 = \frac{95744\pi}{3}$ cm^3.
б) $P_2 = 4400\pi$ cm^2, $V_2 = \frac{300256\pi}{3}$ cm^3.

461. Осни пресек купе је једнакостраничан троугао странице s. При томе пресек са лоптом је велики круг, који је описан око троугла. Полупречник лопте је $r = \frac{s\sqrt{3}}{3}$, па је $P = \frac{4}{9}s^2\pi$ и $V = \frac{4}{27}s^3\pi\sqrt{3}$.



Сл. 149.



Сл. 150.

462. Осни пресек купе је једнакокраки троугао SAB у који је уписан велики круг лопте, сл. 149. Ако са R и H означимо полупречник и висину купе, тада је $H = 4r$, па је $SN = 2r\sqrt{2}$. Из сличних троуглова SON и SBM имамо: $SN : ON = SM : MB$, односно $2r\sqrt{2} : r = 4r : R$, одакле је $R = r\sqrt{2}$. Изводница купе је $s = SB = SN + BN = 2r\sqrt{2} + r\sqrt{2} = 3r\sqrt{2}$. Површина купе је $P_1 = R^2\pi + R\pi s = 8r^2\pi = 2\cdot 4r^2\pi = 2P$, а запремина је: $V_1 = \frac{1}{3}R^2\pi H = \frac{8\pi r^3}{3} = 2\cdot\frac{4}{3}r^3\pi = 2V$.

Тражене размере су: $P_1 : P = 1 : 2 = V_1 : V$.

463. Из осног пресека, сл. 150, израчунаћемо висину ваљка и висину одсечака (осенчени део на слици). $H = BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3}$. Висина одсечка је $h = \frac{2r - r\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{2}(2 - \sqrt{3})$. Треба од запремине лопте одузети запремине ваљка и двају одсечака:
$V = \frac{4}{3}r^3\pi - r^2\pi H - 2\cdot \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right) = \frac{\pi r^3\sqrt{3}}{2}$.

464. Осни пресек купе представља једнакокраки троугао у који је уписан полукруг са центром на основици. Израчунамо полупречник полулопте слично решењу задатка 55 (сл. 24): $r = \frac{12}{5}$. Запремина полулопте је $V = \frac{2}{3}r^3\pi = \frac{1152\pi}{125}\ \text{cm}^3$.

465. Из $\frac{4}{3}r^3\pi = \frac{32}{3}\pi$, добијамо полупречник лопте $r = 2$ cm. Полупречник R купе је $R = r\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm. (R је половина странице једнакостраничног троугла, описаног око круга полупречника r.) Запремина купе је $V = \frac{1}{3}R^3\pi\sqrt{3} = 24\pi\ \text{cm}^3$.

466. $V_1 : V_2 : V_3 = 3 : 2 : 1$.

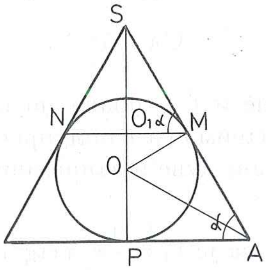
467. Полупречник основе купе је $R = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, где је r полупречник лопте. Резултат $P_1 : P_2 = 16 : 9$.

468. Полупречник купе је половина полупречника полулопте, па је: $V_1 : V_2 = \frac{2}{3}r^2\pi : \frac{1}{3}\left(\frac{r}{2}\right)^2\pi\sqrt{3} = 16 : \sqrt{3}$.

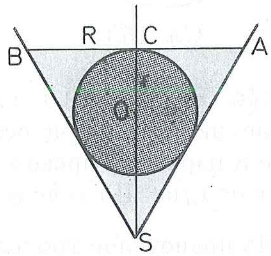
469. Из запремине лопте добијамо полупречник: $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$. Из осног пресека купе, сл. 151, лако израчунамо полупречник R и висину H купе. Из троугла AOP налазимо: $R = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, а из троугла SAP је $H = R\operatorname{tg}\alpha = r\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Запремина купе је: $V_1 = \frac{1}{3}R^2\pi H = \frac{1}{3}r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\pi\cdot r\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}r^3\pi\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2} = \frac{V}{4}\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}$. За $\alpha = 60°$ је $V_1 = \frac{V}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^3 = \frac{9V}{4}$.

470. Из основе дате купе добијамо полупречник купе: $r = \sqrt{\frac{B}{\pi}}$. Из троугла AOP, сл. 151, је полупречник ρ лопте: $\rho = OP = r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, а из

троугла ASP је изводница купе: $s = \dfrac{r}{\cos\alpha}$. Изводница мање купе је $SM = s - r = \dfrac{2r\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. Висина мање купе је $SO_1 = SM\sin\alpha = 2r\operatorname{tg}\alpha\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$. Коначно, полупречник основе мање купе је: $O_1M = SM\cdot\cos\alpha = 2r\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$. Тражена запремина је:
$V = \dfrac{1}{3}O_1M^2\pi\cdot SO_1 = \dfrac{8}{3}\pi r^3\sin^6\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha$, односно $V = \dfrac{8}{3}\sqrt{\dfrac{B^3}{\pi}}\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin^6\dfrac{\alpha}{2}$.
Специјално, за $B = 4$ и $\alpha = 60°$, је $V = \dfrac{1}{\sqrt{3\pi}}$.



Сл. 151.

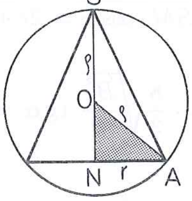


Сл. 152.

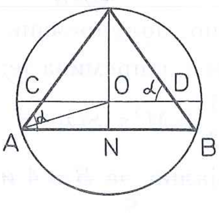
471. Троугао SAB је једнакостраничан, сл. 152, па је полупречник BC конуса испуњеног водом: $BC = R = r\sqrt{3}$. Запремина овог дела суда је $V_1 = \dfrac{1}{3}R^3\pi\sqrt{3} = 3\pi r^3$. Кад извадимо куглу у суду остаје воде $V_2 = V_1 - \dfrac{4}{3}r^3\pi = \dfrac{5}{3}r^3\pi$. Висину, односно ниво h, преостале течности у суду израчунаћемо користећи особине сличних тела: $V_1 : V_2 = SC^3 : h^3$, односно $3\pi r^3 : \dfrac{5}{3}\pi r^3 = (3r)^3 : h^3$. Одавде је $h^3 = 15r^3$, па је $h = r\sqrt[3]{15} \approx 2,5r$.

472. Лопта и ваљак имају једнаке полупречнике, дужине r, а полупречник купе је $r\sqrt{3}$. Тражена размера је $P_l : P_v : P_k = 4r^2\pi : 6r^2\pi : 9r^2\pi = 4 : 6 : 9$ и $V_l : V_v : V_k = \dfrac{4}{3}r^3\pi : 2r^3\pi : 3r^3\pi = 4 : 6 : 9$.

473. Из датог услова за запремину је: $\dfrac{4}{3}\rho^3\pi = 4\cdot\dfrac{r^2}{3}\pi H$, односно $\rho^3 = r^2H$, где је ρ полупречник лопте, а r полупречник купе. Из правоуглог троугла OAN, сл. 153, добијамо: $OA^2 = ON^2 + AN^2$, тј. $\rho^2 = (H-\rho)^2 + r^2$. Одавде је $2\rho H - H^2 = r^2$ или $2\rho H^2 - H^3 = r^2H$. Заменимо r^2H са ρ^3 и биће: $\rho^3 - 2\rho H^2 + H^3 = 0$. Овај израз трансформишемо: $\rho^3 - \rho^2H + \rho^2H - \rho H^2 - \rho H^2 + H^3 = 0$, а одавде је $\rho^2(\rho - H) + \rho H(\rho - H) - H^2(\rho - H) = 0$, односно: $(\rho - H)(\rho^2 + \rho H - H^2) = 0$. Одавде добијамо полупречник лопте: $\rho_1 = H$ или $\rho^2 + \rho H - H^2 = 0 \iff \rho_{1,2} = \dfrac{-H \pm \sqrt{5H^2}}{2}$. Како је $\rho > 0$, уважавамо решење $\rho_2 = \dfrac{H(\sqrt{5}-1)}{2}$. Задатак има два решења, па је запремина лопте: $V_1 = \dfrac{4}{3}\pi H^3$ или $V_2 = \dfrac{\pi}{6}H^3(\sqrt{5}-1)^3$.



Сл. 153.



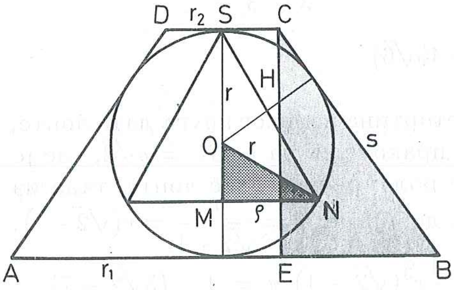
Сл. 154.

474. Нека је SAB осни пресек уписане купе и CD права по којој паралелни пресек сече осни пресек, сл. 154. Означимо са r полупречник лопте и изразимо преко r и α запремину V уписане купе и запремину V_1 одсечене купе. По услову је још $V = 2V_1$.

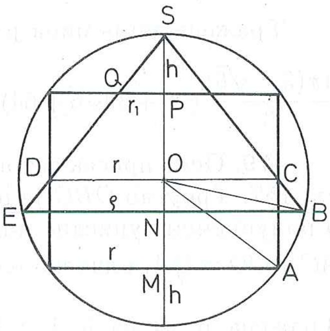
Из правоуглог троугла SOD је $OD = r\operatorname{ctg}\alpha$, па је $V_1 = \dfrac{1}{3}r^3\pi\operatorname{ctg}^2\alpha$. У правоуглом троуглу SAN је $SN = AN\operatorname{tg}\alpha$. Обратимо сада пажњу на угао $\sphericalangle AON$. Како је троугао AOS једнакокрак, то је $\sphericalangle AON = \sphericalangle OAS + \sphericalangle ASO = 2\sphericalangle ASO$ (спољашњи угао троугла). Како је $\sphericalangle ASO = \sphericalangle ASN = 90^\circ - \alpha$, то је $\sphericalangle AON = 180^\circ - 2\alpha$. Сада је у троуглу AON: $AN = r\cdot\sin(180^\circ - 2\alpha) = r\sin 2\alpha$. Дакле: $SN = r\sin 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$, па је $V = \dfrac{1}{3}AN^2\pi\cdot SN = \dfrac{1}{3}r^3\pi\sin^3 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$. Према услову је $V = 2V_1$, тј. $\dfrac{1}{3}r^3\pi\sin^3 2\alpha\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{3}r^3\pi\operatorname{ctg}^2\alpha$. После скраћивања остаје услов $\sin^3 2\alpha\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg}^2\alpha$. Стављајући $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, добићемо: $\sin^3 2\alpha\sin^3\alpha = 2\cos^3\alpha$, па после кореновања $\sin 2\alpha\sin\alpha = \sqrt[3]{2}\cos\alpha$, тј. $2\sin^2\alpha\cos\alpha - \sqrt[3]{2}\cos\alpha = 0$. Даље је $\cos\alpha\left(2\sin^2\alpha - \sqrt[3]{2}\right) = 0$. Како је α угао на основици једнакокраког троугла, дакле оштар угао, то је $\cos\alpha \neq 0$, па је $2\sin^2\alpha = \sqrt[3]{2}$, одакле је $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Тражени угао је $\alpha = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

475. Осни пресек зарубљене купе је једнакокраки трапез, описан око великог круга лопте, па је његова висина једнака пречнику лопте, сл. 155. Користећи особину тангентног четвороугла, налазимо крак трапеза, тј. изводницу купе: $2s = 2r_1 + 2r_2 = 20$, односно $s = 10$ cm. Висина зарубљене купе $H = 2r$, налази се из правоуглог троугла BCE: $H = \sqrt{s^2 - (r_1 - r_2)^2} = 8$ cm. Полупречник лопте је 4 cm, па из правоуглог троугла OMN добијамо полупречник ρ уписане купе: $\rho^2 = ON^2 - OM^2 =$

$4^2 - 2^2 = 12$. Размера запремина зарубљене купе, лопте и уписане купе је: $V_z : V_l : V_k = 224\pi : \dfrac{256}{3}\pi : 24\pi = 84 : 32 : 9$.



Сл. 155.



Сл. 156.

476. Из услова $r_1^2\pi = 2r_2^2\pi$, следи $r_1 = r_2\sqrt{2}$, итд. Решавамо слично претходном задатку. Резултат: $V = \dfrac{\pi r^3}{3}\left(3\sqrt{2} + 2\right)$.

477. Из површине лопте добијамо пречник лопте (висину зарубљене купе): $2r = \sqrt{\dfrac{P}{\pi}}$. Замислимо да је $\sphericalangle CBE = 60°$, сл. 155. Тада је $s = \dfrac{4r}{\sqrt{3}} = r_1 + r_2$. Омотач је: $M = \pi s(r_1 + r_2) = \pi s^2 = \dfrac{16\pi r^2}{3} = \dfrac{16\pi}{3} \cdot \dfrac{P}{4\pi} = \dfrac{4P}{3}$.

478. На сл. 156 је приказан осни пресек. Да би смо добили тражену запремину, одузећемо од запремине лопте: зарубљену купу са осним пресеком $BCDE$, делове ваљка ван те зарубљене купе и малу купу ван ваљка (са полупречником $r_1 = PQ$ и висином h). Израчунајмо димензије ових тела. Уочавамо непосредно да је $2h = 20 - 12$, па је $h = 4$ cm. Полупречник ваљка, из троугла OAM, је: $r = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm. Остале димензије рачунамо за свако појединачно тело.

Зарубљена купа. Један полупречник је $r = 8$ cm. Други полупречник, $BN = \rho$, налазимо из троугла OBN и то $\rho = \sqrt{OB^2 - ON^2}$. Због $SN = PM = 12$ и $SP = 4$, следи да је $MN = 4$ cm, па је $ON = OM - MN = 6 - 4 = 2$ cm. Дакле: $\rho = \sqrt{10^2 - 2^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$ cm. Висина x се добија из пропорције $\rho : r = SN : (SN - x)$, односно $4\sqrt{6} : 8 = 12 : (12 - x)$. Одавде је $x = 4\left(3 - \sqrt{6}\right)$.

Мањи део ваљка. Полупречник је $r = 8$ cm и висина $MN = 4$ cm.

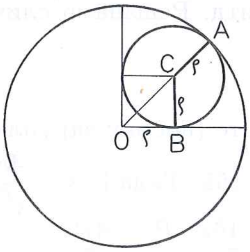
Већи део ваљка. (изнад зарубљене купе). Полупречник је $r = 8$ cm и висина $PN - x = 8 - 4\left(3 - \sqrt{6}\right) = 4\left(\sqrt{6} - 1\right)$ cm.

Мала купа. Висина је $SP = h = 4$ cm и полупречник, $PQ = 4r_1$, налазимо из услова $PQ : EN = SP : SN$, односно из $r_1 : 4\sqrt{6} = 4 : 12$. Дакле:

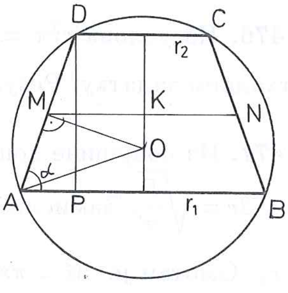
$r_1 = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ cm.

Тражена запремина је $V = \dfrac{4}{3}10^3\pi - 8^2\pi 4\sqrt{6} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2 \pi \cdot 4 -$ $\dfrac{4\pi(3-\sqrt{6})}{3}(96 + 32\sqrt{6} + 64) = \dfrac{32\pi}{9}(263 - 48\sqrt{6})$.

479. Осни пресек датог исечка је четвртина великог круга дате лопте, сл. 157. Троугао OBC је једнакокраки правоугли, па је $OC = \rho\sqrt{2}$, где је ρ полупречник уписане лопте. Ако је r полупречник дате лопте, тада из $AC + CO = OA$, односно из $\rho + \rho\sqrt{2} = r$, добијамо: $\rho = \dfrac{r}{\sqrt{2}+1} = r(\sqrt{2}-1)$. Тражена размера је $V : V_1 = \dfrac{4}{3}r^3\pi : \dfrac{4}{3}r^3(\sqrt{2}-1)^3\pi = 1 : (5\sqrt{2}-7) = 5\sqrt{2}+7 \approx 14$.



Сл. 157.

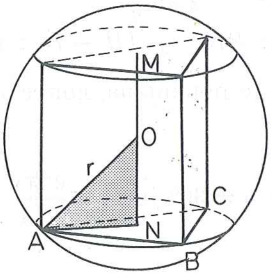


Сл. 158.

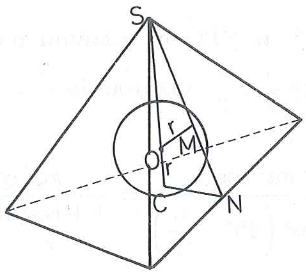
480. На сл. 158 је приказан осни пресек зарубљене купе. Тражи се полупречник лопте, на слици дуж AO, где је O тачка у којој симетрала MO крака AD сече осу купе. Из правоуглог троугла AOM је $r = AO = \sqrt{AM^2 + OM^2}$. Нека је DP висина трапеза $ABCD$. Тада је дуж $AP = r_1 - r_2$, па је $AM = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{AP}{2\cos\alpha} = \dfrac{r_1 - r_2}{2\cos\alpha}$. Угао MOK је једнак углу α (са нормалним крацима), па је $OM = \dfrac{MK}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{2}\dfrac{MN}{\sin\alpha} = \dfrac{r_1 + r_2}{2\sin\alpha}$. Према томе: $r = \sqrt{\left(\dfrac{r_1 - r_2}{2\cos\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{r_1 + r_2}{2\sin\alpha}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos 2\alpha}}{\sin 2\alpha}$. Специјално, ако је $\alpha = 60°$ и $r_1 = 2r_2$, тада је $\cos 2\alpha = \cos 120° = -\dfrac{1}{2}$ и $\sin 2\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, па је $r = 2r_2 = r_1$, тј. већа основа зарубљене купе је велики круг лопте.

481. Равни које садрже основе призме секу лопту по круговима чији су пречници хипотенузе основа. Отуда следи да највећа бочна страна призме садржи центар лопте. Дакле, дијагонала ове стране је пречник лопте, а хипотенуза основе призме је дужине $r\sqrt{2}$ и једнака је висини призме. Катете основе су $r\sqrt{2}\sin\alpha$ и $r\sqrt{2}\cos\alpha$, па је површина основе призме: $B = \dfrac{r^2\sin 2\alpha}{2}$, а запремина призме је $V = \dfrac{r^3\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha$.

482. Средиште O осе MN призме је центар описане лопте, сл. 159. Из правоуглог троугла OAN је $r^2 = AN^2 + ON^2$. Према услову је $ON = \dfrac{1}{2}MN = a$, где је a основна ивица призме. Тачка N је центар круга описаног око основе, па је $AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Дакле $r^2 = \dfrac{3a^2}{9} + a^2 = \dfrac{12a^2}{9}$, па је $r = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Тражена размера је $V_1 : V_2 = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^3\pi : \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а то износи $V_1 : V_2 = 64\pi : 27$.



Сл. 159.



Сл. 160.

483. Круг уписан у основу призме подударан је великом кругу лопте, па је основна ивица $a = \dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$. Висина призме је пречник лопте: $H = 2r$. Резултат: $M = 8r^2\sqrt{3}$.

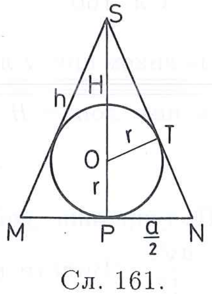
484. Дата пирамида је правилан тетраедар. Полупречник уписане лопте је четвртина висине тетраедра: $r = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$. (Видети решења задатака 110 и 113.) Резултат: $P = \dfrac{a^2\pi}{6}$.

485. Уписана лопта додирује бочну страну у тачки апотеме, на сл. 160 у тачки M апотеме SN, а основу додирује у подножју висине, на слици тачка C. Знамо да је троугао SCN правоугли. Користећи, између осталог и Херонов образац, израчунамо полупречник CN круга уписаног у основу пирамиде: $CN = 4$ cm. Сада је $SC = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ cm. Правоугли троугао SOM је сличан троуглу SNC, па је $SO : OM = SN : CN$, односно: $(3 - r) : r = 5 : 4$. Одавде је $r = \dfrac{4}{3}$ cm, па је тражена површина: $P = \dfrac{64\pi}{9}$ cm^2.

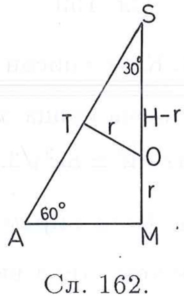
486. Основа уписане пирамиде је квадрат који има дијагоналу $2r$, па је површина основе $B = 2r^2$. Ако са d означимо растојање од центра лопте до центра основе пирамиде, онда је $d = \sqrt{r^2 - k^2}$ и висина пирамиде је $H = r + d = r + \sqrt{r^2 - k^2}$. Тражена запремина је: $V = \dfrac{2r^2}{3}\left(r + \sqrt{r^2 - k^2}\right)$.

487. Из услова за бочну страну налазимо апотему: $h = \dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. Ако пирамиду пресечемо са равни коју одређују врх пирамиде и средишта двеју основних ивица, добићемо једнакокраки троугао, чија је основица $MN = a$ и краци h. Круг уписан у овај троугао је велики круг лопте. На сл. 161, његов полупречник је $OT = OP = r$. Најпре одредимо висину пирамиде: $SP = H = \sqrt{h^2 - PN^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{a^4}{4}} = \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. Троуглови SPN и STO су слични па је: $SO : OT = SN : PN$, тј. $(H - r) : r = \dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} : \dfrac{a}{2}$. Одавде је $r = \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sqrt{2}\cos\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)}$, па је површина лопте $P =$

$$\frac{\pi a^2\cos\alpha}{2\cos^2\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\pi a^2\cos\alpha}{1 + \cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\pi a^2\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}.$$ За $\alpha = 30^\circ$ је $P = \dfrac{a^2\pi\sqrt{3}}{3}$.



Сл. 161.

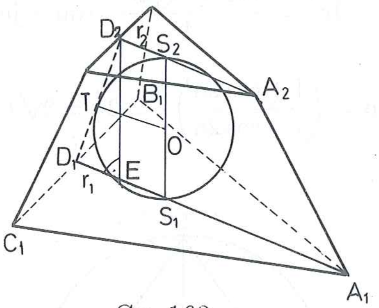


Сл. 162.

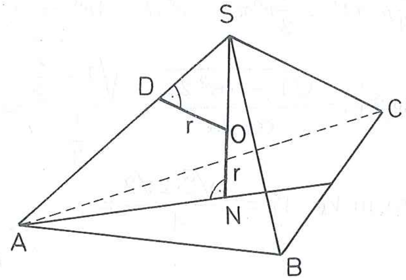
488. Полупречник лопте одређујемо из осног пресека, чији део видимо на сл. 162. У правоуглом троуглу SOT је $OT = \dfrac{1}{2}OS$, тј. $r = \dfrac{H - r}{2}$. Одавде је $r = \dfrac{H}{3}$, па је запремина лопте: $V = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{H}{3}\right)^3\pi = \dfrac{4\pi H^3}{81}$.

489. Већи дијагонални пресек пирамиде је једнакокраки трапез, коме је дужа основица $2r$, а мања r. Висина трапеза је $\dfrac{r\sqrt{3}}{2}$. (Трапез се разлаже на три једнакостранична троугла.) Основне ивице пирамиде су r и r_2 и висина је $H = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$, па је запремина $V = \dfrac{21r^3}{16}$.

490. Из размере површина основа закључујемо да је коефицијент сличности 2. Реч је о правилној зарубљеној пирамиди, па уписана лопта додирује основе у њиховим центрима, а бочне стране у тачкама које припадају симетралама основних ивица (на сл. 163, то је нпр. тачка T). Раван одређена висинама A_1D_1 и A_2D_2 је нормална на ивицу B_1C_1, па је $\sphericalangle A_1D_1D_2 = \alpha$ тражени угао. Нека је E подножје нормале из D_2 на $A_1B_1C_1$. Тада је $\dfrac{D_1E}{D_1D_2} = \cos\alpha$. Означимо дуж D_2S_2 са r_2, а дуж S_1D_1 са r_1. Тада је $r_1 = 2r_2$. Даље је: $D_1E = S_1D_1 - S_1E = S_1D_1 - S_2D_2 = r_1 - r_2 = 2r_2 - r_2 = r_2$. Затим, на основу једнакости тангентних дужи је: $D_2T = S_2D_2$ и $D_1T = S_1D_1$, па је $D_1D_2 = r_1 + r_2 = 3r_2$. Према томе: $\cos\alpha = \dfrac{r_2}{3r_2} = \dfrac{1}{3}$, па је $\alpha = \arccos\dfrac{1}{3}$ и $\alpha \approx 70,5^\circ$.



Сл. 163.



Сл. 164.

491. Сфера додирује основу у подножју N нормале из S на раван ABC. Нека је D тачка у којој сфера додирује ивицу SA, сл. 164. Знамо да је $AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ и $SN = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Из сличних троуглова SDO и SNA имамо везу: $SO : OD = SA : AN$, односно $\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{3} - r\right) : r = a : \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Одавде је $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{3+\sqrt{3}}$.

492. Нека су S_1, S_2, S_3, S_4 центри датих лопти. Тачке S_1, S_2, S_3 и S_4 су темена правилног тетраедра странице $2r$. Постављени задатак има два решења: једно је сфера описана око датих лопти, а друго је сфера уписана у међупростор датих лопти, унутар тетраедра. Оба решења су концентрична лопти описаној око тетраедра $S_1S_2S_3S_4$. Заједнички центар је пресечна тачка висина тетраедра. Полупречник лопте која је описана око тетраедра је (према решењу задатка 484): $\rho = \dfrac{3}{4}\dfrac{2r\sqrt{6}}{3} = \dfrac{r\sqrt{6}}{2}$.

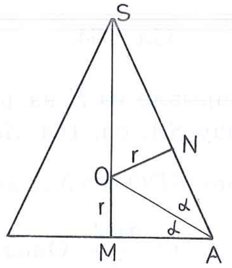
Полупречници тражених сфера су $\rho+r$ и $\rho-r$, тј. $\dfrac{r(\sqrt{6}+2)}{2}$ и $\dfrac{r(\sqrt{6}-2)}{2}$.

493. Уочимо осни пресек ове купе, сл. 165. Нека је O центар уписане лопте, OM и ON полупречници лопте: $OM = ON = r$. Означимо са 2α угао MAS. Изразимо полупречник $MA = \rho$, висину $H = SM$ и изводницу $s = SA$ купе. Најпре је $\rho = r\operatorname{ctg}\alpha$, па је $H = \rho \operatorname{tg} 2\alpha = r\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$. Затим $s = \dfrac{\rho}{\cos 2\alpha} = \dfrac{r\operatorname{ctg}\alpha}{\cos 2\alpha}$.

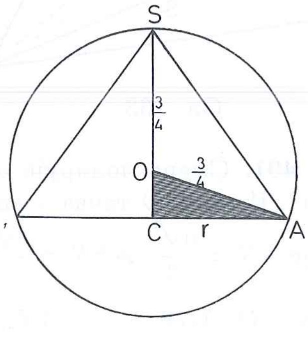
Из услова за површине добијамо: $\rho^2\pi + \rho\pi s = 8r^2\pi$, односно $r^2\operatorname{ctg}^2\alpha + \dfrac{p^2\operatorname{ctg}^2\alpha}{\cos 2\alpha} = 8r^2$. Одавде, после скраћивања са r^2 добијемо тригонометријску једначину: $\operatorname{ctg}^2\alpha\left(1+\dfrac{1}{\cos 2\alpha}\right) = 8$, тј. $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{\cos 2\alpha + 1}{\cos 2\alpha} = 8$. Следи да је $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{3}$. Користећи ову једнакост одредићемо количник $V_k : V_l = \dfrac{1}{3}\rho^2\pi H : \dfrac{4}{3}r^3\pi = \rho^2 H : 4r^3 = r^3\operatorname{ctg}^3\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha : 4r^3 = \dfrac{\operatorname{ctg}^3\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha}{4}$. Како је

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}}{\cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{9}}}{\dfrac{1}{3}} = 2\sqrt{2} \text{ и } \operatorname{ctg}^3\alpha = \left(\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2},$$

то је $V_k : V_l = \dfrac{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}{4} = 2$.



Сл. 165.



Сл. 166.

494. Нека је x висина уписане купе. Ако са $V(x)$ означимо запремину купе изражене преко x, а са $V(1)$ запремину купе чија је висина 1, треба доказати да је $V(1) > V(x)$, где је $x \in \left(0, \dfrac{3}{2}\right)$ и $x \neq 1$. Из осенченог троугла на сл. 166 налазимо везу: $AC^2 = OA^2 - OC^2$, односно $r^2 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 - \left|x - \dfrac{3}{4}\right|^2$. Одавде је $r^2 = \dfrac{3}{2}x - x^2$. Тада је запремина уписане купе: $V(x) =$

$\frac{1}{3}r^2\pi x = \frac{\pi}{3}\left(\frac{3}{2}x^2 - x^3\right) = \frac{\pi}{6}(3x^2 - 2x^3)$. Како је $V(1) = \frac{\pi}{6}$, то је $V(1) - V(x) = \frac{\pi}{6}(2x^3 - 3x^2 + 1) = \frac{\pi}{6}(x-1)^2(2x+1)$, а то значи да је $V(1) - V(x) > 0$ за $x \neq 1$ и $x \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$, што је и требало доказати.

495. Ако је R полупречник лопте, $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$, r полупречник ваљка и x висина ваљка, $x \in (0, \sqrt{3})$, тада важи једнакост: $r^2 = R^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{3-x^2}{4}$ (видети сл. 159). Означимо са $V(x)$ запремину ваљка изражену преко висине x: $V(x) = r^2\pi x = \frac{3x - x^3}{4}\pi$. Тада је $V(1) = \frac{\pi}{2}$, па је $V(1) - V(x) = \frac{\pi}{4}(x^3 - 3x - 2) = \frac{\pi}{4}(x-1)^2(x+2)$. Очигледно за $x \neq 1$ и $x \in (0, \sqrt{3})$ је $V(1) - V(x) > 0$, што се и тврдило.

496. Изразићемо димензије ваљка и купе преко полупречника r лопте и угла α, где је 2α угао при врху осног пресека купе, сл. 167. Ваљак је једнакостраничан, полупречника r, па је $V_2 = 2r^3\pi$. Висина купе је $H = SN = SO + r = \frac{r}{\sin\alpha} + r = \frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}$. Полупречник купе је $BN = H\operatorname{tg}\alpha = \frac{r(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}$. Запремина купе је: $V_1 = \frac{1}{3}BN^2\pi\cdot H = \frac{\pi r^3}{3}\frac{(1+\sin\alpha)^3}{\sin\alpha\cos^2\alpha} = \frac{\pi r^3}{3}\frac{(1+\sin\alpha)^3}{\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)} = \frac{\pi r^3}{3}\cdot\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\sin\alpha(1-\sin\alpha)}$.

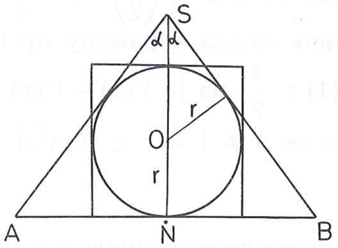
а) Нека је $k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(1+\sin\alpha)^2}{6\sin\alpha(1-\sin\alpha)}$. Одавде добијамо квадратну једначину по непознатој $\sin\alpha$: $(1+6k)\sin^2\alpha + 2(1-3k)\sin\alpha + 1 = 0$. Она има решења ако је дискриминанта $D \geqslant 0$, а то значи: $(1-3k)^2 - (1+6k) \geqslant 0$. Одавде је $9k^2 - 12k \geqslant 0$, односно $3k(3k-4) \geqslant 0$. Како је $k = \frac{V_1}{V_2} > 0$, следи да је $3k - 4 \geqslant 0$, па је $k \geqslant \frac{4}{3}$. Дакле, $k \neq 1$, па је $V_1 \neq V_2$.

б) Најмања вредност за k је $k = \frac{4}{3}$. Тада квадратна једначина по $\sin\alpha$ прелази у: $9\sin^2\alpha - 6\sin\alpha + 1 = 0$, односно: $(3\sin\alpha - 1)^2 = 0$, одакле је $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ и $\alpha = \arcsin\frac{1}{3} \approx 19,5°$. Тражени угао је приближно $39°$.

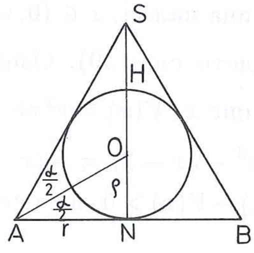
497. Нека је ρ полупречник лопте, r и H полупречник и висина купе и α угао између изводнице и равни основе купе, сл. 168. Изразићемо све димензије преко полупречника r и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t$. Полупречник лопте је

$\rho = r \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2} = rt$. Висина купе је $H = r \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2r \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{2rt}{1-t^2}$. Сада је:

$V_l : V_k = \dfrac{4}{3}\rho^3\pi : \dfrac{1}{3}r^2\pi H = 2(t^2 - t^4) = 2\left(\dfrac{1}{4} - \left(\dfrac{1}{4} - t^2 + t^4\right)\right) = \dfrac{1}{2} - 2\left(\dfrac{1}{2} - t^2\right)^2 \leqslant \dfrac{1}{2}$. Максимум, $V_l : V_k = \dfrac{1}{2}$ достиже се за $t^2 = \dfrac{1}{2}$, тј. за $\operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, односно, кад је $\alpha = 2 \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 70,5^\circ$.



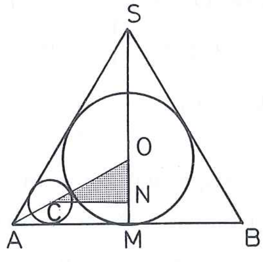
Сл. 167.



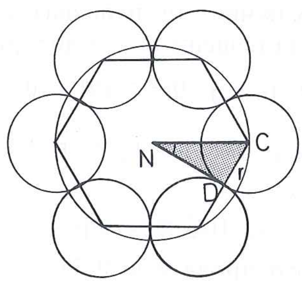
Сл. 168.

498. Уочимо осни пресек купе који садржи центар једне од n мањих лопти, сл. 169. Означимо са R полупречник лопте L, а са r полупречник осталих n лопти. Како је $AM = 1$, то је $OM = R = \operatorname{tg} \alpha$. Даље је $OC = R + r = \operatorname{tg} \alpha + r$, а $ON = R - r = \operatorname{tg} \alpha - r$, па је $\sin \alpha = \dfrac{ON}{OC} = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha - r}{\operatorname{tg} \alpha + r}$.

Одавде излази да је $r = \dfrac{(1 - \sin \alpha) \operatorname{tg} \alpha}{1 + \sin \alpha}$. Коначно је $CN = (R + r) \cos \alpha = \left(\operatorname{tg} \alpha + \dfrac{(1 - \sin \alpha) \operatorname{tg} \alpha}{1 + \sin \alpha}\right) \cdot \cos \alpha = \dfrac{2 \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$.



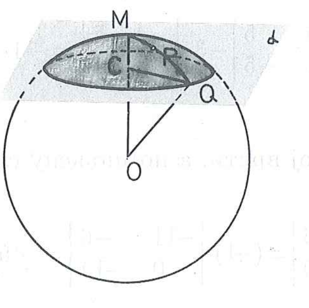
Сл. 169.



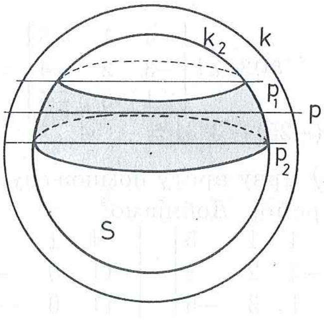
Сл. 170.

Уочимо паралелни пресек купе који садржи центре n једнаких лопти. Раван сече ове лопте по великим круговима, од којих сваки додирује по два суседна, сл. 170. Центри ових кругова су темена правилног n-тоугла чији описани круг има полупречник CN, па из троугла CDN добијамо везу између n и α: $\dfrac{r}{CN} = \sin\dfrac{\pi}{n}$, односно $\sin\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{1-\sin\alpha}{2\cos\alpha}$.

499. Уочимо неку раван α, која сече дату сферу по кругу k полупречника 5 cm, сл. 171. Ако је O центар дате лопте, C центар круга k, нека је M тачка продора праве OC кроз сферу, тако да је C између O и M. Нека је P произвољна тачка мање калоте, којој је M теме, и означимо са Q продор круга, са центром O и тетивом MP, кроз раван α. Дато је $OM = OQ = 13$ и $CQ = 5$, а лако је израчунати: $OC = 12$, $CM = 1$ и $MQ = \sqrt{26}$. Дакле, да би тачка P припадала мањој калоти, потребно је и довољно да је $MP \leqslant \sqrt{26}$. Површина ове калоте је $2\cdot 13\pi\cdot 1 = 26\pi$. Конструишимо сада око сваке од датих тачака исту овакву калоту, висине 1. Збир површина ових 25 калота је највише $25\cdot 26\pi$, а то је мање од површине лопте, која износи $26^2\pi$. Дакле, постоји тачка M која не припада ни једној од 25 калота, па је од сваке, од 25 датих тачака, удаљена више од $\sqrt{26}$. Конструишемо калоту висине 1, са теменом M и њена основа је тражени круг.



Сл. 171.



Сл. 172.

500. Нека је k_2 круг, концентричан са кругом k, полупречника $r = (10\pi - 1,1)$. Ако се круг k_1 налази у кругу k_2, онда је сигурно и у кругу k. Нека је S сфера, којој је k_2 велики круг и p једна од 30 датих правих. Уочимо праве p_1 и p_2, паралелне са p, на растојању 1 од p. Поставимо равни α_1 и α_2, кроз праве p_1 и p_2, нормалне на раван круга k. Ове равни одсецају од сфере S појас ширине 2 или калоту чија је висина не већа од 2. Површина овог појаса, или калоте је највише $2\cdot r\cdot \pi\cdot 2 = 4r\pi$. Поступимо тако и са преосталих 29 датих правих и добијемо укупно 30 појаса или калота, таквих да је збир свих њихових површина највуше $30\cdot 4r\pi$. Међутим, површина сфере S је $4r^2\pi = r\cdot 4r\pi = (10\pi - 1,1)\cdot 4r\pi > 30\cdot 4r\pi$. Дакле, на сфери S постоји тачка M, која не припада ни једном од 30 појаса или калота, па је њена нормална пројекција M_1 у равни круга k, удаљена од сваке од 30 датих правих за више од 1. Круг са центром M_1, полупречника 1, је тражени круг.

501. *а)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2.$ *б)* 13.

в) $\begin{vmatrix} \cos 34^\circ & -\sin 34^\circ \\ \cos 56^\circ & \sin 56^\circ \end{vmatrix} = \cos 34^\circ\cdot \sin 56^\circ + \sin 34^\circ\cdot \cos 56^\circ = \cos^2 34^\circ + \sin^2 34^\circ = 1.$

г) -1; *д)* $2i$; *ђ)* 0; *е)* 1; *ж)* 0.

502. *а)* $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{matrix} = 2\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot 4\cdot 5 + (-1)\cdot 0\cdot 1 - 5\cdot 1\cdot (-1) - 1\cdot 4\cdot 2 -$ $3\cdot 0\cdot 3 = 63.$

б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 4\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-5) - 4\cdot (-13) +$ $3\cdot 2 = 63.$

в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0\cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 11 - 4(-13) = 63.$

503. *а)* $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -1\cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} - 3\cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -1\cdot 11 +$ $2(-25) - 3\cdot 31 = -154.$

б) Прву врсту помножену са -2 додамо другој врсти, а помножену са -3 трећој. Добијамо

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -11 & 0 & -6 \\ -11 & 0 & -20 \end{vmatrix} = (-1)\cdot \begin{vmatrix} -11 & -6 \\ -11 & -20 \end{vmatrix} = (-1)\cdot \begin{vmatrix} -11 & -6 \\ 0 & -14 \end{vmatrix} = -154.$$

504. *а)* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 4 \\ 12 & 3 & -4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ -5 & 1 \\ 12 & 3 \end{matrix} = 2\cdot 1\cdot (-4) + 1\cdot 4\cdot 12 + 1(-5)\cdot 3 - 12\cdot 1\cdot 1 -$ $3\cdot 4\cdot 2 - (-4)(-5)\cdot 1 = -31.$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 4 \\ 12 & 3 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 4 \\ 3 & 12 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 6 & -7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 6 & -7 \end{vmatrix} =$$

$- \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -31 \end{vmatrix} = -31$, где смо: заменили места првој и другој колони, трећу врсту додали другој, другу врсту помножену са 5 додали трећој и на крају развијали детерминанте по првој колони.

505. *а)* 40; *б)* -8; *в)* 0; *г)* 2; *д)* 0; *ђ)* $-\cos\varphi$; *е)* 8; *ж)* $(ab + bc + ca)x + abc$.

506. *а)* Друга и трећа колона су пропорционалне (својство 7°).
б) Ако јој додамо прву колону, друга колона ће бити једнака трећој (својства 6° и 7°).
в) Ако јој додамо прву колону помножену са x, друга колона ће бити једнака трећој.
г) Ако јој додамо другу врсту помножену са $a-b$, трећа врста ће бити једнака првој.
д) Додавањем прве колоне трећој сви елементи треће колоне биће једнаки 1, па је добијена детерминанта једнака 0 јер има једнаке другу и трећу колону (својства 6° и 7°).
ђ) Како је $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, то додавањем трећој колони прве колоне помножене са -1, она постаје једнака другој. Детерминанта је једнака 0.
е) Како је $\sin(x+\delta) = \sin x\cos\delta + \cos x \sin\delta$, то додавањем трећој колони прве колоне помножене са $-\cos\delta$ и друге помножене са $-\sin\delta$, сви њени елементи биће једнаки нули, па је детерминанта једнака нули (својства 6° и 3°).

507. Користећи Сарусово правило добијамо
$$\begin{vmatrix} x & a & a\\ a & x & a\\ a & a & x\end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} x & a & a\\ a & x & a\\ a & a & x\end{matrix}\right|\begin{matrix} x & a\\ a & x\\ a & a\end{matrix} = x^3 + a^3 + a^3 - a^2x - a^2x - a^2x - a^2x = x^3 - 3a^2x + 2a^3.$$

а) Применом последњег резултата за $a=1$ и $a=2$ дата једначина постаје: $x^3 - 3x + 2 = x^3 - 12x + 16$. Решење је $x = \dfrac{14}{9}$.

б) I начин. $x^3 - 3a^2x + 2a^3 = x^3 - ax^2 + ax^2 - a^2x - 2a^2x + 2a^3 = x^2(x-a) + ax(x-a) - 2a^2(x-a) = (x-a)(x-a)(x+2a)$. Решења су $x=a$ или $x=-2a$.
II начин. Користећи особине детерминанте можемо је израчунати у облику полинома растављеног на чиниоце. Другу и трећу колону помножену са 1 додајмо првој, а затим прву врсту помножену са -1 додајмо другој и трећој. Добијамо
$$\begin{vmatrix} x & a & a\\ a & x & a\\ a & a & x\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2a & a & a\\ x+2a & x & a\\ x+2a & a & x\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2a & a & a\\ 0 & x-a & 0\\ 0 & 0 & x-a\end{vmatrix} = (x+2a)(x-a)^2,$$
па су решења $x=a$ или $x=-2a$.

в) Решења су $x=1$ или $x=2$.

508. *а)* Применом својства 5° добијамо
$$D = \begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1\\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2\\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1\\ a_2 & a_2 & c_2\\ a_3 & a_3 & c_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1 & c_1\\ b_2x & a_2 & c_2\\ b_3x & a_3 & c_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & -b_1x & c_1\\ a_2 & -b_2x & c_2\\ a_3 & -b_3x & c_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & b_1x & c_1\\ b_2x & b_2x & c_2\\ b_3x & b_3x & c_3\end{vmatrix}.$$

Први и четврти сабирак једнаки су нули (7°), а на други и трећи применимо својства 4° и 2°. Добијамо

$$D = 0+x\cdot\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

б) $$D = \begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1i+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2i & a_2i+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3i & a_3i+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1i & c_1 \\ a_2 & a_2i & c_2 \\ a_3 & a_3i & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1i & a_1i & c_1 \\ b_2i & a_2i & c_2 \\ b_3i & a_3i & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1i & b_1 & c_1 \\ b_2i & b_2 & c_2 \\ b_3i & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + i\cdot i\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + i^2\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

509. *а)* Прву врсту помножену са (-1) додамо другој и трећој. Добијамо:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c^2-a^2)-(c-a)(b^2-a^2) = (b-a)(c-a)\big[c+a-(b+a)\big] = (b-a)(c-a)(c-b).$$

б) $$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & ca-bc \\ 0 & c-a & ab-bc \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} b-a & c(a-b) \\ c-a & b(a-c) \end{vmatrix} = (b-a)\cdot b(a-c) - (c-a)c(a-b) = -(b-a)b(c-a)+(c-a)\cdot c\cdot(b-a) = (c-a)(b-a)(c-b).$$

в) Другу и трећу колону помножену са 1 додајмо првој, а затим прву врсту помножену са -1 додајмо другој и трећој. Добијамо:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2b & 2c \\ 2a & b-c-a & 2c \\ 2a & 2b & c-b-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & 2b & 2c \\ a+b+c & b-c-a & 2c \\ a+b+c & 2b & c-b-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & 2b & 2c \\ 0 & -(a+b+c) & 0 \\ 0 & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$$

510. *а)* Другу врсту помножену са $a+b+c$, а прву са $-ab-ac-bc$ додамо трећој врсти. Први елеменат треће врсте постаје $bc+a(a+b+c)-ab-ac-bc = a^2$, други b^2 а трећи c^2.

б) $$(a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2(a+b+c) \\ 1 & b & b^2(a+b+c) \\ 1 & c & c^2(a+b+c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a^2b+a^2c \\ 1 & b & b^2a+b^2c \\ 1 & c & c^2a+c^2b \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a^2b+a^2c+1\cdot abc+a(-ab-ac-bc) \\ 1 & b & b^2a+b^2c+1\cdot abc+b(-ab-ac-bc) \\ 1 & c & c^2a+c^2b+1\cdot abc+c(-ab-ac-bc) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} + 0$$

в) $(ab+ac+bc)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = -(ab+ac+bc)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ 1 & b^2 & b \\ 1 & c^2 & c \end{vmatrix} =$

$$-\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a(ab+ac+bc) \\ 1 & b^2 & b(ab+ac+bc) \\ 1 & c^2 & c(ab+ac+bc) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a(ab+ac+bc)-a^2(a+b+c)-abc \\ 1 & b^2 & b(ab+ac+bc)-b^2(a+b+c)-abc \\ 1 & c^2 & c(ab+ac+bc)-c^2(a+b+c)-abc \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & a^2 & -a^3 \\ 1 & b^2 & -b^3 \\ 1 & c^2 & -c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

511. *а)* Прву једначину помножену са -1 додамо другој. Добијемо еквивалентни систем:

$$\begin{aligned} x+2y&=4 \\ -3y&=-3, \end{aligned}$$

одакле добијамо $y=1$ и $x=4-2\cdot y=4-2\cdot 1=2$.. Решење је $(2,1)$ или $x=2$, $y=1$. Систем је одређен.

б) Прву једначину помножену са 2 додајмо другој. Добијамо:

$$\begin{aligned} 2x+3y&=8 \\ 0&=11. \end{aligned}$$

Систем је немогућ, односно неме решења.

в) Прву једначину помножену са -2 додамо другој. Добијамо:

$$\begin{aligned} 3x-y&=5 \\ 0&=0, \end{aligned}$$

односно $x=\frac{1}{3}y+\frac{5}{3}$, па су сва решења дата са $\left(\frac{1}{3}\alpha+\frac{5}{3},\alpha\right)$, $\alpha\in R$, односно $x=\frac{1}{3}\alpha+\frac{5}{3}$, $y=\alpha$. Систем је неодређен.

г) $(1,1)$. *д)* Систем је немогућ. *ђ)* $(3-\alpha,\alpha)$, $\alpha\in R$.

512. *а)* Заменимо места првој и другој једначини и првој и трећој променљивој. Прву једначину помножену са -2 и -1 додамо другој и трећој и на крају, другу једначину помножену са 1 додамо трећој. Добијемо еквивалентне системе:

$$\begin{aligned} 2z+3y+3x&=2 \\ 4z+5y+6x&=3\,; \\ 2z+4y+5x&=1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2z+3y+3x&=\ \ 2 \\ -\ y\qquad&=-1\,; \\ y+2x&=-1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2z+3y+3x&=\ \ 2 \\ -\ y\qquad&=-1\,. \\ 2x&=-2 \end{aligned}$$

Из треће једначине добијамо $x=-1$, из друге $y=1$, а из прве $z=\frac{1}{2}\cdot\left(2-3\cdot 1-3\cdot(-1)\right)=1$, па је решење $(-1,1,1)$. Систем је одређен.

б) Пребацимо трећу једначину на прво место, а затим је помножену са -2 и -3 додамо трећој и четвртој. Другу једначину помножену са 1 и 8 додамо трећој и четвртој. На крају трећу једначину помножену са -17 додамо четвртој. Добијамо еквивалентне системе:

$$\begin{aligned} x+y+\ \ z &= \ \ 4 \\ y-2z &= -1 \\ -y+\ \ z &= \ \ 0 \\ -8y-\ \ z &= -9 \end{aligned}; \quad \begin{aligned} x+y+\ \ z &= \ \ 4 \\ y-\ 2z &= -1 \\ -\ z &= -1 \\ -17z &= -17 \end{aligned}; \quad \begin{aligned} x+y+\ \ z &= \ \ 4 \\ y-\ 2z &= -1 \\ -\ z &= -1 \\ 0 &= \ \ 0 \end{aligned}$$

Из последњег система добијамо $z = 1$, $y = 2\cdot z - 1 = 2\cdot 1 - 1 = 1$, $x = 4 - y - z = 4 - 1 - 1 = 2$, па је решење $(2,1,1)$. Систем је одређен.

в) Поновити поступак из *б)*. Последња једначина последњег система гласи $0 = 2$, па систем нема решења.

г) Четврту једначину помножену са -1 додамо првој. Заменимо места другој и трећој једначини. Ове трансформације нам омогућују лакше спровођење Гаусовог поступка. Прву једначину помножену са -9, -2, -2 и -7 додамо другој, трећој, четвртој и петој. Другу једначину помножену са -3, -2 и -1 додамо трећој, четвртој и петој. На крају, трећу једначину помножену са $-\frac{3}{5}$ додамо четвртој. Добијамо следеће еквивалентне системе:

$$\begin{aligned} x_1 \quad -x_3-2x_4 &= -3 \\ 9x_1+\ x_2+4x_3-5x_4 &= \ \ 1 \\ 2x_1+3x_2+2x_3+5x_4 &= \ \ 3 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &= \ \ 5 \\ 7x_1+x_2+6x_3-\ x_4 &= \ \ 7 \end{aligned}; \quad \begin{aligned} x_1-\ x_3-\ 2x_4 &= -3 \\ x_2+13x_3+13x_4 &= 28 \\ 3x_2+\ 4x_3+\ 9x_4 &= \ \ 9 \\ 2x_2+\ 5x_3+\ 8x_4 &= 11 \\ x_2+13x_3+13x_4 &= 28 \end{aligned};$$

$$\begin{aligned} x_1-\ x_3-2x_4 &= -3 \\ x_2+13x_3+13x_4 &= \ \ 28 \\ -35x_3-30x_4 &= -75 \\ -21x_3-18x_4 &= -45 \\ 0 &= \ \ 0 \end{aligned}; \quad \begin{aligned} x_1-\ x_3-2x_4 &= -3 \\ x_2+13x_3+13x_4 &= 28 \\ -35x_3-30x_4 &= -75 \\ 0 &= \ \ 0 \\ 0 &= \ \ 0 \end{aligned}.$$

Из последњег система добијамо $x_3 = \dfrac{15-6x_4}{7}$, $x_2 = \dfrac{1-13x_4}{7}$ и $x_1 = \dfrac{-6+8x_4}{7}$, па је решење система $\left(\dfrac{-6+8\alpha}{7}, \dfrac{1-13\alpha}{7}, \dfrac{15-6\alpha}{7}, \alpha\right)$, $\alpha \in R$. Систем је неодређен.

д) Поновимо поступак из *г)*. Последњи систем се разликује само у последњој једначини која гласи $2x_4 = 0$ па је решење система $\left(-\dfrac{6}{7}, \dfrac{1}{7}, \dfrac{15}{7}, 0\right)$. Систем је одређен.

ђ) Понављањем поступка из *г)* последња једначина последњег система гласи $0 = 1$, па систем нема решења, односно немогућ је.

е) Решење је $\left(\dfrac{\alpha-9\beta-2}{11}, \dfrac{-5\alpha+\beta+10}{11}, \alpha, \beta\right)$, $\alpha, \beta \in R$.

ж) Решење је $(3,2,1)$.

з) Решење је $(-2,2,3)$.

513. *а)* Решење је $(0,0,0)$. Решење које се састоји од нула има сваки хомоген систем па се оно назива тривијалним решењем, тако да систем има само тривијално решење.

б) Решење је $\left(-\dfrac{\alpha}{3}, -\dfrac{\alpha}{3}, \alpha\right)$, $\alpha \in R$. За $\alpha = 0$ добијамо тривијално решење $(0,0,0)$, а за $\alpha \neq 0$ решење није тривијално, тако да систем има нетривијалних решења.

в) Решење је $(-\alpha-\beta, \alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in R$. Систем има нетривијалних решења.

514. Дати системи једначина еквивалентни су следећим системима:

а) $\begin{aligned} x + 3y &= 0 \\ (2-3a)y &= 0 \end{aligned}$ *б)* $\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ (a^2-4)y &= a-2 \end{aligned}$ *в)* $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ (a-3)y &= b-3 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$

г) $\begin{aligned} x + 2y - 3z &= \ \ 8 \\ -5y + 7z &= -17 \\ 0 &= a-7 \end{aligned}$ *д)* $\begin{aligned} x + y + \ \ z &= 0 \\ -3y - 2z &= 0 \\ az &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$ *ђ)* $\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\ -4x_2 + x_3 - \ \ x_4 &= 0 \\ (a-1)x_4 &= 5 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$

а) За $a = \dfrac{2}{3}$ другу једначину $(0=0)$ одбацимо. Решење је $(-3\alpha, \alpha)$, $\alpha \in R$, па систем има нетривијалних решења. За $a \neq \dfrac{2}{3}$ систем има само тривијално решење $(0,0)$.

б) За $a \neq 2 \land a \neq -2$ систем је одређен, па има јединствено решење $\left(\dfrac{a}{a+2}, \dfrac{1}{a+2}\right)$.

За $a = -2$ друга једначина постаје $0 = -4$. Систем је немогућ, односно неме решења.

За $a = 2$ друга једначина постаје $0 = 0$ па је решење система $(1-2\alpha, \alpha)$, $\alpha \in R$. Систем је неодређен.

в) За $a \neq 3$ систем је одређен и решење је $y = \dfrac{b-3}{a-3}$, $x = 1 - \dfrac{b-3}{a-3}$, односно $\left(\dfrac{a-b}{a-3}, \dfrac{b-3}{a-3}\right)$.

За $a = 3$ и $b \neq 3$ друга једначина постаје $0 = b-3$, па је систем немогућ.

За $a = b = 3$ решење система је $(1-\alpha, \alpha)$, $\alpha \in R$. Систем је неодређен.

г) За $a \neq 7$ због треће једначине систем је немогућ.

За $a = 7$ решење је $z = \alpha$, $y = \dfrac{7\alpha+17}{5}$, $x = 8 + 3\alpha - 2 \cdot \dfrac{7\alpha+17}{5}$, односно $\left(\dfrac{\alpha+6}{5}, \dfrac{7\alpha+17}{5}, \alpha\right)$, $\alpha \in R$. Систем је неодређен.

д) За $a \neq 0$ систем има само тривијално решење $(0,0,0)$.

За $a = 0$ решење је $z = \alpha$, $y = -\frac{2}{3}\alpha$, $x = -\alpha + \frac{2}{3}\alpha = -\frac{1}{3}\alpha$, односно $\left(-\frac{1}{3}\alpha, -\frac{2}{3}\alpha, \alpha\right)$, $\alpha \in R$, па систем има нетривијалних решења.

ђ) За $a = 1$ систем је због треће једначине немогућ.

За $a \neq 1$ решење система је $x_4 = \dfrac{5}{a-1}$, $x_3 = \alpha$. $x_2 = \dfrac{1}{4}\left(\alpha - \dfrac{5}{a-1}\right)$, $x_1 = \dfrac{1}{2}\left[2 - \dfrac{5}{4}\left(\alpha - \dfrac{5}{a-1}\right) - \alpha - \dfrac{3 \cdot 5}{a-1}\right]$, односно $\left(\dfrac{43-8a}{8-8a} - \dfrac{9}{8}\alpha, \dfrac{\alpha}{4} + \dfrac{5}{4-4a}, \alpha, \dfrac{5}{a-1}\right)$, $\alpha \in R$. Систем је неодређен.

515. *а)* $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$, $D_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10$, $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$.

$D \neq 0$ па је систем одређен и решење је $x = \dfrac{D_x}{D} = 2$, $y = \dfrac{D_y}{D} = 1$, односно $(2, 1)$.

б) $D = D_x = D_y = -1$. Систем је одређен и решење је $(1, 1)$.

в) $D = 1$, $D_x = \cos\alpha$, $D_y = \sin\alpha$. Систем је одређен и решење је $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

г) $(1, e)$; *д)* $\left(\dfrac{a+1}{a^2+1}, \dfrac{a-1}{a^2+1}\right)$; *ђ)* $(1, 2)$.

516. *а)* $D = 0$, $D_x = 0$, $D_y = 0$. Систем је немогућ или неодређен. Ако прву једначину помножену са 2 додамо другој ова постаје $0 = 0$. Из прве једначине добијамо да је решење $\left(\dfrac{\alpha+3}{2}, \alpha\right)$, $\alpha \in R$. Систем је неодређен.

б) $D = 0$, $D_x = 4 \neq 0$. Систем је немогућ.

в) $D = D_x = D_y = 0$. На основу Крамеровог правила систем је немогућ или неодређен. Иначе, због друге једначине је јасно да је систем немогућ.

г) Немогућ. *д)* Неодређен, $(2 + \alpha, \alpha)$, $\alpha \in R$. *ђ)* Немогућ.

517. *а)* $D = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Систем има само тривијално решење $(0, 0)$.

б) $D = 0$. Систем има нетривијалних решења. Ако другој једначини додамо прву помножену са -3, она постаје $0 = 0$. Ставимо $y = \alpha$. Из прве једначине добијамо $x = -\alpha$, па је $(-\alpha, \alpha)$, $\alpha \in R$ решење система једначина. За $\alpha = 0$ добијамо тривијално, а са $\alpha \neq 0$ нетривијална решења.

в) $D = D_x = D_y = 0$ систем има нетривијалних решења. Јасно је да сваки реални бројеви x и y задовољавају обе једначине, па је (α, β), $\alpha \in R$, $\beta \in R$ решење система једначина.

518. *а)* $D = m^4 - 4m^2 = m^2(m-2)(m+2)$, $D_x = m(m+2)$, $D_y = -m(m+2)$. За $m \neq 0$ и $m \neq -2$ и $m \neq 2$, $D \neq 0$. Систем је одређен и решење је

$\left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{1}{m(m-2)}, \frac{-1}{m(m-2)}\right).$

За $m = 0$, $D = D_x = D_y = 0$. Систем је немогућ или неодређен. Заменом $m = 0$ у систем он постаје
$0 \cdot x + 0 \cdot y = 1$
$0 \cdot x + 0 \cdot y = -1$. Очигледно да је немогућ.

За $m = 2$, $D = 0$, $D_x = 6 \neq 0$. Систем је немогућ.

За $m = -2$, $D = D_x = D_y = 0$. Систем је немогућ или неодређен. Заменом $m = -2$ у систем он постаје
$4x - 4y = 1$
$-4x + 4y = -1$. Ако прву једначину додамо другој она постаје $0 = 0$ па је можемо одбацити. Решење је $\left(\alpha, \alpha + \frac{1}{4}\right)$, $\alpha \in R$. Систем је неодређен.

б) $D = m^2(m-2)(m+2)$.

За $m \neq 0$ и $m \neq 2$ и $m \neq -2$, $D \neq 0$. Систем има само тривијално решење $(0,0)$.

За $m = 0$ или $m = 2$ или $m = -2$, $D = 0$. Систем има нетривијална решења. За $m = 0$ систем постаје: $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$ и $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$, па је решење (α, β), $\alpha \in R$, $\beta \in R$. За $m = 2$ систем постаје: $4x + 4y = 0$ и $4x + 4y = 0$, па је решење $(-\alpha, \alpha)$, $\alpha \in R$. За $m = -2$ систем постаје: $4x - 4y = 0$ и $-4x + 4y = 0$, па је решење (α, α), $\alpha \in R$.

в) $D = m - 2$, $D_x = 2m - 2$ и $D_y = -1$. За $m = 2$ нема решења, а за $m \neq 2$ решење је $\left(\frac{2(m-1)}{m-2}, \frac{1}{2-m}\right)$.

г) $D = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$, $D_x = D_y = m - 1$. За $m \neq 1$ и $m \neq -1$, систем је одређен: $\left(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+1}\right)$, за $m = -1$ је немогућ, а за $m = 1$ неодређен: $(1 - \alpha, \alpha)$, $\alpha \in R$.

д) $D = (m-1)(m+1)$. За $m \neq 1$ и $m \neq -1$, имамо само тривијално решење. За $m = 1$ или $m = -1$ има нетривијалних решења: $(-\alpha, \alpha)$, $\alpha \in R$, за $m = 1$ и (α, α), $\alpha \in R$, за $m = -1$.

ђ) $D = -2 - m$, $D_x = -6$, $D_y = 6 - 3m$. Ако је $m \neq -2$ систем је одређен: $\left(\frac{6}{m+2}, \frac{3m-6}{m+2}\right)$, а ако је $m = -2$, тада је $D = 0$ и $D_x \neq 0$, па је систем немогућ.

519. На основу тога што је $x = 1$, $y = 3$ решење, добијамо: $a + 2b = 0$ и $a - 3b + 4c = 9$. Изразимо a и c преко b: $a = -2b$ и $c = \frac{5b+9}{4}$. Сада систем има облик $\begin{array}{l} 2bx + \quad by = 5b \\ (5b+13)x + (5b+9)y = 40 + 20b \end{array}$ и мора бити $D = 0$, тј. $2b(5b+9) - b(5b+13) = 0$. Одавде је $b = 0$ или $b = -1$. За $b = 0$ имамо систем: $\begin{array}{l} 0\cdot x+0\cdot y=0 \\ 13x+9y=40 \end{array}$. За $b=-1$ је $\begin{array}{l} 2x+\ y=5 \\ 8x+4y=20 \end{array}$. У оба случаја систем има бесконачно много решења.

520. *а)* $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}=60$, $D_x=\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix}=180$,

$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix}=60$, $D_z=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix}=60$. Систем је одређен и решење је $x=\dfrac{D_x}{D}=3$, $y=\dfrac{D_y}{D}=1$, $z=\dfrac{D_z}{D}=1$, односно $(3,1,1)$.

б) $D=6$, $D_x=6$, $D_y=12$, $D_z=-12$. Систем је одређен и решење је $x=1$, $y=2$, $z=-2$, односно $(1,2,-2)$.

в) $D=1$, $D_x=2$, $D_y=6$, $D_z=5$. Систем је одређен и решење је $(2,6,5)$.

г) $(3,2,1)$; *д)* $(1,2,1)$; *ђ)* $(1,1,-1)$.

521. *а)* $D=D_x=D_y=D_z=0$ Систем је немогућ или неодређен. Примењујући Гаусов поступак добијамо да је решење $\left(2-\dfrac{1}{5}\alpha, \dfrac{3}{5}\alpha, \alpha\right)$, $\alpha\in R$. Систем је неодређен.

б) $D=0$, $D_x=0$, $D_y=6\neq 0$. Систем је немогућ.

в) $D=D_x=D_y=D_z=0$ Систем је немогућ или неодређен. Примењујући Гаусов поступак добијемо еквивалентни систем у коме друга једначина гласи: $0=1$. Систем је немогућ.

г) Немогућ. *д)* Неодређен, $(\alpha+2,\alpha+1,\alpha)$, $\alpha\in R$.
ђ) Неодређен, $(-\alpha,\alpha,1)$, $\alpha\in R$.

522. *а)* $D=6$. Систем има само тривијално решење $(0,0,0)$.

б) $D=0$ Систем има нетривијалних решења. Дати систем је еквивалентан систему:

$$\begin{array}{r} 3z+2x+\ y=0 \\ -3x-5y=0 \\ 0=0. \end{array}$$

Његова решења су $y=\alpha$, $x=-\dfrac{5\alpha}{3}$, $z=\dfrac{7\alpha}{9}$, односно $\left(-\dfrac{5\alpha}{3},\alpha,\dfrac{7\alpha}{9}\right)$, $\alpha\in R$.

в) $D=0$. Систем има нетривијалних решења. Ако прву једначину помножену са -2 и 1 додамо другој и трећој, ове постају $0=0$ и $0=0$, тако да су сва решења система $y=\alpha$, $z=\beta$, $x=-2\alpha-\beta$, односно $(-2\alpha-\beta,\alpha,\beta)$, $\alpha\in R$, $\beta\in R$..

г) (α,α,α), $\alpha\in R$. *д)* $(-\alpha,\alpha,0)$, $\alpha\in R$. *ђ)* Има само тривијално решење.

523. *а)* $D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ m+1 & m^2-1 & 1\\ m^2+2 & m-2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ m & m^2 & 0\\ m^2 & m & 0\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}m & m^2\\ m^2 & m\end{vmatrix}=$ $m^2-m^4=-m^2(m-1)(m+1)$.

$D_x=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & m^2-1 & 1\\ 4 & m-2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & m^2 & 0\\ 2 & m & 0\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-2 & m^2\\ 2 & m\end{vmatrix}=-2m-2m^2=$ $-2m(m+1)$.

$D_y=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ m+1 & -1 & 1\\ m^2+2 & 4 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ m & -2 & 0\\ m^2 & 2 & 0\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}m & -2\\ m^2 & 2\end{vmatrix}=2m+2m^2=2m(m+1).$

$D_z=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ m+1 & m^2-1 & -1\\ m^2+2 & m-2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ m+2 & m^2-2 & 0\\ m^2-2 & m+2 & 0\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}m+2 & m^2-2\\ m^2-2 & m+2\end{vmatrix}=$ $(m+2)^2-(m^2-2)^2=-m^4+5m^2+4m=-m(m^3-5m-4)=-m(m^3+1-5m-5)=-m[(m+1)(m^2-m+1)-5(m+1)]=-m(m+1)(m^2-m-4)$.

За $m\neq 0$ и $m\neq 1$ и $m\neq -1$, $D\neq 0$. Систем је одређен и решење је $x=\dfrac{D_x}{D}$, $y=\dfrac{D_y}{D}$, $z=\dfrac{D_z}{D}$, односно $\left(\dfrac{2}{m(m-1)},\dfrac{-2}{m(m-1)},\dfrac{m^2-m-4}{m(m-1)}\right)$.

За $m=0$, $D=D_x=D_y=D_z=0$. Систем је немогућ или неодређен. Заменом $m=0$ у систем и додавањем прве једначине помножене са -1 другој, ова постаје $0=-2$. Систем је немогућ.

За $m=1$, $D=0$, $D_x=-4\neq 0$. Систем је немогућ.

За $m=-1$ $D=D_x=D_y=D_z=0$. Систем је немогућ или неодређен. Заменом $m=-1$ у систем он постаје:

$$\begin{aligned} x-\ y+\ z&=\ 1\\ z&=-1\\ 3x-3y+2z&=\ 4.\end{aligned}$$

Ако прву једначину помножену са -3 и другу помножену са 1 додамо трећој, ова постаје $0=0$, па су решења система $z=-1$, $y=\alpha$, $x=\alpha+2$, односно $(\alpha+2,\alpha,-1)$, $\alpha\in R$. Систем је неодређен.

б) $D=-m^2(m-1)(m+1)$

За $m\neq 0$ и $m\neq 1$ и $m\neq -1$, $D\neq 0$. Систем има само тривијално решење $(0,0,0)$.

За $m=0$ или $m=1$ или $m=-1$, $D=0$. Систем има нетривијална решења.

За $m=0$ систем постаје:

$$\begin{aligned} x-\ y+\ z&=0\\ x-\ y+\ z&=0\\ 2x-2y+2z&=0.\end{aligned}$$

Ако прву једначину помножену са -1 и -2 додамо другој и трећој, ове постају $0=0$ и $0=0$, па је решење система $(\alpha-\beta,\alpha,\beta)$, $\alpha\in R$, $\beta\in R$.

За $m=1$ систем и њему еквивалентан систем постају

$$\begin{array}{rl} x-y+\ z=0 & \\ 2x\quad +\ z=0 & \\ 3x-y+2z=0 & \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 2y-z=0 \\ 0=0. \end{array}$$

Њихова решења су $\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \alpha\right)$, $\alpha \in R$.

За $m=-1$ систем и њему еквивалентан систем постају

$$\begin{array}{r} x-\ y+\ z=0 \\ z=0 \\ 3x-3y+2z=0 \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{r} x-y+z=0 \\ z=0 \\ 0=0. \end{array}$$

Њихова решења су $(\alpha, \alpha, 0)$, $\alpha \in R$.

в) $D=m^3-3m+2=(m-1)^2(m+2)$, $D_x=D_y=D_z=(m-1)^2$.

За $m \neq 1$ и $m \neq -2$, $D \neq 0$. Систем је одређен и решење је $\left(\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2}\right)$.

За $m=-2$, $D=0$, $D_x=9 \neq 0$. Систем је немогућ.

За $m=1$, $D=D_x=D_y=D_z=0$. Систем је немогућ или неодређен. заменом $m=1$ у систем Гаусовим поступком добијамо решење $(1-\alpha-\beta, \alpha, \beta)$, $\alpha \in R$, $\beta \in R$. Систем је неодређен.

г) $D=-n(m-1)$, $D_x=-2n+1$, $D_y=-(m-1)$, $D_z=4n-2mn-1$.

За $m \neq 1$ и $n \neq 0$, $D \neq 0$. Систем је одређен и решење је $\left(\frac{2n-1}{n(m-1)}, \frac{1}{n}, \frac{2mn-4n+1}{n(m-1)}\right)$.

За $n=0$ или $\left(m=1 \text{ и } n \neq \frac{1}{2}\right)$, $D=0$, $D_x \neq 0$. Систем је немогућ.

За $m=1$ и $n=\frac{1}{2}$, $D=D_x=D_y=D_z=0$. Систем је немогућ или неодређен. Заменом $m=1$, $n=\frac{1}{2}$ у систем добијемо решења $(2-\alpha, 2, \alpha)$, $\alpha \in R$. Систем је неодређен.

д) $D=-(m-1)(m-2)(m+3)$. За $m \neq 1$ и $m \neq 2$ и $m \neq -3$, $D \neq 0$. Систем има само тривијално решење.

За $m \in \{1, 2, -3\}$, $D=0$. Систем има нетривијалних решења. Решења су: $\left(-\frac{\alpha}{2}, \alpha, \alpha\right)$, $\alpha \in R$, за $m=1$; $(-2\alpha, -\alpha, \alpha)$, $\alpha \in R$, за $m=2$ и $\left(\frac{\alpha}{2}, -\alpha, \alpha\right)$, $\alpha \in R$, за $m=-3$.

524. *а)* $D=2(a-1)^2(a+2)$, $D_x=D_z=(a-1)(2a-3)$, $D_y=(a-1)(3a-1)$.

За $a \neq 1$ и $a \neq -2$, $D \neq 0$. Систем је одређен и решење је $\left(\frac{2a-3}{2(a-1)(a+2)}, \frac{3a-1}{2(a-1)(a+2)}, \frac{2a-3}{2(a-1)(a+2)}\right)$.

За $a=1$, $D=D_x=D_y=D_z=0$. Систем је немогућ или неодређен. Гаусовим поступком утврђујемо да је систем немогућ.

За $a=-2$, $D=0$, $D_x=21 \neq 0$. Систем је немогућ.

б) $D=(a-2)^2(a+3)$, $D_x=(a-1)(a-2)(a+3)$, $D_y=\dfrac{D_z}{2}=-(a-2)(a+3)$.

За $a\neq 2$ и $a\neq -3$, $D\neq 0$. Систем је одређен и решење је $\left(\dfrac{a-1}{a-2},-\dfrac{1}{a-2},-\dfrac{2}{a-2}\right)$.

За $a=2$, $D=D_x=D_y=D_z=0$ Систем је немогућ или неодређен. Гаусовим поступком утврђујемо да је систем немогућ.

За $a=-3$, $D=D_x=D_y=D_z=0$ Систем је немогућ или неодређен. Гаусовим поступком утврђујемо да је решење система $\left(\dfrac{2+\alpha}{3},\dfrac{1-\alpha}{3},\alpha\right)$, $\alpha\in R$. Систем је неодређен.

в) $D=2(a-1)^2(a+2)$. За $a\neq 1$ и $a\neq -2$ систем има само тривијално решење $(0,0,0)$.

За $a=1$ или $a=-2$ има нетривијалних решења: $(-\alpha-\beta,\alpha,\beta)$, $\alpha\in R$, $\beta\in R$ за $a=1$ и (α,α,α) за $a=-2$.

г) $D=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$, $D_x=\begin{vmatrix}a^3&a&a^2\\b^3&b&b^2\\c^3&c&c^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&a^2&a^3\\b&b^2&b^3\\c&c^2&c^3\end{vmatrix}=abc\cdot D$,

$D_y=\begin{vmatrix}1&a^3&a^2\\1&b^3&b^2\\1&c^3&c^2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&a^2&a^3\\1&b^2&b^3\\1&c^2&c^3\end{vmatrix}=-(ab+ac+bc)\cdot D$,

$D_z=\begin{vmatrix}1&a&a^3\\1&b&b^3\\1&c&c^3\end{vmatrix}=(a+b+c)\cdot D$ (види задатке 509 и 510).

За $a\neq b\neq c\neq a$, $D\neq 0$, Систем је одређен и решење је $(abc,-(ab+ac+bc),a+b+c)$.

Ако су међу бројевима a, b и c два једнака, онда је $D=D_x=D_y=D_z=0$. Систем је немогућ или неодређен. Због симетрије посматраћемо само случај $a=b\neq c$. Полазни систем је еквивалентан систему

$$\begin{aligned} x+ay+\quad a^2z&=a^3\\ (c-a)y+(c^2-a^2)z&=c^3-a^3\\ 0&=0 \end{aligned}$$

Његова решења су $(ac(\alpha-a-c),\ a^2+ac+c^2-a\alpha-c\alpha,\alpha)$, $\alpha\in R$. Систем је неодређен.

Ако је $a=b=c$, онда је $D=D_x=D_y=D_z=0$. Систем је немогућ или неодређен. Полазни систем је еквивалентан једначини $x+ay+a^2z=a^3$. Његова решења су $(a^3-a\alpha-a^2\beta,\alpha,\beta)$, $\alpha\in R$, $\beta\in R$.

д) $D=(b-a)(c-a)(c-b)$, $D_x=(b-d)(c-d)(c-b)$, $D_y=(d-a)(c-a)(c-d)$, $D_z=(b-a)(d-a)(d-b)$ (види задатак 509).

Ако су бројеви a, b и c међусобно различити, $D\neq 0$. Систем је одређен. Решење је $\left(\dfrac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)},\dfrac{(d-a)(c-d)}{(b-a)(c-b)},\dfrac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}\right)$.

Ако су међу бројевима a, b и c два једнака (посматрајмо случај $a=$

$b \neq c$) и ако је $d = a$, онда је $D = D_x = D_y = D_z = 0$. Систем је немогућ или неодређен. Полазни систем је еквивалентан систему $x + y + z = 1$, $(c-a)z = 0$, $(c^2 - a^2)z = 0$. Његово решење је $(1-\alpha, \alpha, 0)$, $\alpha \in R$. Систем је неодређен.

Ако је $a = b \neq c = d$, онда је $D = D_x = D_y = D_z = 0$. Систем је немогућ или неодређен. Њему еквивалентан систем је $x + y + z = 1$, $(c-a)z = c - a$, $(c^2 - a^2)z = c^2 - a^2$. Његово решење је $(-\alpha, \alpha, 1)$, $\alpha \in R$. Систем је неодређен.

Ако је $a = b \neq c \neq d \neq a$, онда је $D = 0$ $D_x \neq 0$. Систем је немогућ .

На сличан начин се разматрају случајеви: $a = c = d \neq b$, $a = c \neq b = d$, $a = c \neq b \neq d \neq a$, $b = c = d \neq a$, $b = c \neq d = a$ и $b = c \neq d \neq a \neq b$.

Ако је $a = b = c = d$, $D = D_x = D_y = D_z = 0$. Систем је немогућ или неодређен. Систем је еквивалентан једначини $x + y + z = 1$. Његова решења су $(1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta)$, $\alpha \in R$, $\beta \in R$. Систем је неодређен.

Ако је $a = b = c \neq d$, $D = D_x = D_y = D_z = 0$. Систем је немогућ или неодређен. Дата једначина њему еквивалентног система гласи: $0 = d - a$. Систем је немогућ.

ђ) $D = (a-b)^2(a+2b)$, $D_x = (a-b)(a-4b)$, $D_y = 2(a-b)^2$, $D_z = 3a(a-b)$.

1° За $a \neq b$ и $a \neq -2b$, решење је $\left(\dfrac{a-4b}{(a-b)(a+2b)}, \dfrac{2}{a+2b}, \dfrac{3a}{(a-b)(a+2b)}\right)$.

2° $a = b$ систем нема решења.

3° $a = 2b$, такође нема решења.

е) $D = (a-b)(2-a)$, $D_x = (2-a)(1-b)$, $D_y = (2-a)(a-1)$, $D_z = 0$.

1° За $a \neq b$ и $a \neq 2$, решење је $\left(\dfrac{1-b}{a-b}, \dfrac{a-1}{a-b}, 0\right)$.

2° Ако је $a = 2$ и $b \neq 2$, решења су: $\left(1 - 2\alpha - \dfrac{2\alpha - 1}{b-2}, \dfrac{2\alpha-1}{b-2}, \alpha\right)$, $\alpha \in R$.

3° За $a = b$, систем је еквивалентан са:
$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ -az &= 1 - a \\ (a-2)z &= 0. \end{aligned}$$

Одавде закључујемо:

За $a = b = 0$ систем није сагласан.

За $a = b = 1$, решење је свака уређена тројка облика $(1-y, y, 0)$ где је $y \in R$.

За $a = b = 2$, решење је свака уређена тројка $\left(-y, y, \dfrac{1}{2}\right)$, $y \in R$.

ж) Гаусовим поступком добијамо еквивалентан систем
$$\begin{aligned} -x + (p+1)y + (p^2-2)z &= p - 2 \\ 3py + (2p^2+1)z &= 2p - 2 \\ (p^2-1)z &= p - 1. \end{aligned}$$

1° Ако је $p \neq 0$ и $p \neq 1$ и $p \neq -1$, систем има решење:

$\left(\frac{p^2-p-1}{p(p+1)}, \frac{-1}{p+1}, \frac{1}{p+1}\right)$.

2° Ако је $p=0$, из друге и треће једначине добијамо: $z=-2$ и $z=1$, што је немогуће, па за $p=0$ нема решења.

3° За $p=-1$, последња једначина постаје: $0\cdot z=-2$, што је немогуће, па систем нема решења.

4° За $p=1$ решење система је свака уређена тројка облика: $(1-3z, -z, z)$, где је $z \in R$.

525. Имамо систем од шест једначина са четири непознате. Одузмимо другу једначину од прве и шесту од пете, па добијемо: $x_2-x_3=a(b-c)$ и $x_2-x_3=d(b-c)$. Сада одузмемо ове две једнакости и добијемо услов: $(b-c)(a-d)=0$. Слично, одузимањем четврте једначине од друге и пете од треће, долазимо до услова: $(c-d)(a-b)=0$. На крају, одузмемо четврту једначину од прве и шесту од треће и добијемо: $(b-d)(a-c)=0$. Одавде долазимо до закључка, да је потребан услов да систем има решења, једнакост трију од четири параметра.

Докажимо да је овај услов и довољан. Нека је нпр. $a=b=c$. Тада је решење: $x_1=x_2=x_3=\frac{a^2}{2}$, $x_4=a\left(d-\frac{a}{2}\right)$.

526. *а)* $\vec{a}+\vec{b}=(4+(-4), 3+5)=(0,8)$;
б) $-2\vec{b}=(-2\cdot(-4), -2\cdot 5)=(8,-10)$, $\vec{a}-2\vec{b}=\vec{a}+(-2\vec{b})=(12,-7)$;
в) $\vec{a}+3\vec{b}-7\vec{c}=(-29,18)$; *г)* $|\vec{a}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$;
д) $\vec{b}+\vec{c}=(-1,5)$, $\frac{1}{|\vec{a}|}(\vec{b}+\vec{c})=\left(-\frac{1}{5}, 1\right)$;
ђ) $\vec{n}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(3,8)$, $|\vec{n}|=\sqrt{73}$, $|\vec{n}_0|=\frac{1}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n}=\left(\frac{3}{\sqrt{73}}, \frac{8}{\sqrt{73}}\right)$.

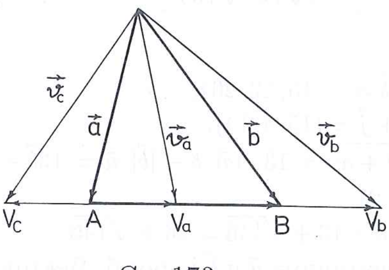
527. *а)* $\vec{a}+\vec{b}=(15,4,13)$;
б) $3\vec{a}=(9,12,36)$, $-2\vec{b}=(-24,0,-10)$, $3\vec{a}-2\vec{b}=(-15,12,26)$;
в) $2\vec{i}=(2,0,0)$, $\vec{a}+2\vec{i}=(5,4,12)$; *г)* $\vec{a}+\vec{b}+\vec{j}=(15,4,14)$;
д) $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=13$, $|\vec{b}|=\sqrt{12^2+0+5^2}=13$, $|\vec{a}|\cdot\vec{b}-|\vec{b}|\cdot\vec{a}=13\vec{b}-13\vec{a}=13(\vec{b}-\vec{a})=13\cdot(9,-4,-7)=(117,-52,-91)$;
ђ) $\vec{a}-\vec{b}=(-9,4,7)$, $O=|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{b}|=13+13+\sqrt{146}=26+\sqrt{146}$;
е) Како је $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, паралелограм одређен векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је ромб. Вектор његове дијагонале $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}$ лежи на симетрали угла између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, па је $\vec{s}_0=\frac{1}{|\vec{s}|}\cdot\vec{s}=\left(\frac{15}{\sqrt{530}}, \frac{4}{\sqrt{530}}, \frac{17}{\sqrt{530}}\right)$.

528. *а)* $\overrightarrow{OA}=(1,2)$, $\overrightarrow{OB}=(3,-1)$, $\overrightarrow{OC}=(2,1)$, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(6,2)$;
б) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(0,0)$; *в)* $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(7,2,8)$; *г)* $(0,0,0)$.

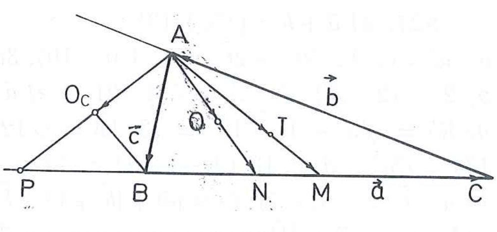
529. *а)* $A(2,1)$, $B(3,-1)$, $M(5,0)$, $N(-4,3)$, $P(3,1)$, $Q(2\sqrt{5},\sqrt{5})$;
б) $C(0,1,2)$, $D(4,-2,5)$, $R(4,-1,7)$, $S(-12,8,-11)$, $T(1,0,2)$, $U(4\sqrt{5},-2\sqrt{5},5\sqrt{5})$.

530. *а)* $\overrightarrow{AB}=(4-1,3-2,2-3)=(3,1,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(1,-1,-3)$, $\overrightarrow{BC}=(-2,-2,-2)$, $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{11}$, $AC=\sqrt{11}$, $BC=2\sqrt{3}$.
б) $\overrightarrow{AB}=(1,4,0)$, $\overrightarrow{AC}=(0,0,0)$, $\overrightarrow{BC}=(-1,-4,0)$, $AB=\sqrt{17}$, $AC=0$, $BC=\sqrt{17}$.
в) $\overrightarrow{AB}=(1,-1,-3)$, $\overrightarrow{AC}=(2,-2,0)$, $\overrightarrow{BC}=(1,-1,3)$, $AB=\sqrt{11}$, $AC=2\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{11}$.

531. *а)* $AB=\sqrt{3}$, $AC=2\sqrt{3}$, $BC=\sqrt{3}$, $AB+BC=AC$, нису темена троугла.
б) $AB=\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{2}$, $AB=AC=BC$, троугао је једнакостраничан (и наравно оштроугли).
в) $AB=\sqrt{6}$, $AC=\sqrt{6}$, $BC=\sqrt{2}$, $AB=AC$ и $BC^2<AB^2+AC^2$, троугао је једнакокрак и оштроугли.
г) $AB=\sqrt{14}$, $AC=\sqrt{14}$, $BC=\sqrt{50}$, $AB+AC>BC$: јесу темена троугла, $AB=AC$: троугао је једнакокрак, $AB^2+AC^2<BC^2$: троугао је тупоугли.
д) $AB=\sqrt{11}$, $AC=\sqrt{21}$, $BC=\sqrt{6}$, $AB+BC>AC$ (проверите без калкулатора): јесу темена разностраничног троугла, $AB^2+BC^2<AC^2$: троугао је тупоугли.
ђ) $AB=\sqrt{14}$, $AC=\sqrt{20}$, $BC=\sqrt{6}$., $AB+BC>AC$: јесу темена разностраничног троугла, $AB^2+BC^2=AC^2$: троугао је правоугли.
е) $AB=\sqrt{17}$, $AC=\sqrt{11}$, $BC=\sqrt{14}$., $BC+AC>AB$: јесу темена разностраничног троугла, $AC^2+BC^2>AB^2$: троугао је оштроугли.



Сл. 173.



Сл. 174.

532. $\overrightarrow{AV}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CV}=\vec{v}-\vec{a}$, $\overrightarrow{VB}=\vec{b}-\vec{v}$, па из $\overrightarrow{AV}=m\overrightarrow{VB}$ добијамо:
$\vec{v}-\vec{a}=m(\vec{b}-\vec{v})$, $\vec{v}+m\vec{v}=\vec{a}+m\vec{b}$, $\vec{v}=\dfrac{\vec{a}+m\vec{b}}{1+m}$ (сл. 173).

а) Ако је $m>0$, вектори $\overrightarrow{AV}$ и $\overrightarrow{VB}$ имају исти смер, па важи распоред $A-V-B$.

б) Ако је $m \in (-1,0)$, вектори $\overrightarrow{AV}$ и $\overrightarrow{VB}$ су супротног смера и $|\overrightarrow{AV}| = |m|\cdot|\overrightarrow{VB}| < |\overrightarrow{VB}|$, ап је распоред $V - A - B$.
в) Ако је $m < -1$ распоред је $A - B - V$.
г) V ће бити средиште дужи AB ако је $\overrightarrow{AV} = 1\cdot\overrightarrow{VB}$, односно ако је $m = 1$.
д) $\overrightarrow{AV} = -2\overrightarrow{VB}$, $m = -2$. *ђ)* $\overrightarrow{AV} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{VB}$, $m = -\frac{1}{2}$.

533. Претпоставимо да је $b > c$. Нека су M N и P пресечне тачке праве BC са тежишном линијом и симетралама унутрашњег и спољашњег угла код темена A (сл. 174). Како је $\overrightarrow{BM} = 1\cdot\overrightarrow{MC}$, то је $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + 1\cdot\overrightarrow{AC}}{1+1} = \dfrac{\vec{c} - \vec{b}}{2}$, па је $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \dfrac{\vec{c} - \vec{b}}{3}$. Како је $\overrightarrow{BN} = \frac{c}{b}\overrightarrow{NC}$ и $\overrightarrow{BP} = -\frac{c}{b}\overrightarrow{PC}$, то је $\overrightarrow{AN} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b}\overrightarrow{AC}}{1 + \frac{c}{b}} = \dfrac{b\cdot\vec{c} - c\cdot\vec{b}}{b+c}$ и $\overrightarrow{AN} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \left(-\frac{c}{b}\right)\overrightarrow{AC}}{1 + \left(-\frac{c}{b}\right)} = \dfrac{b\cdot\vec{c} + c\cdot\vec{b}}{b-c}$. Тачке O и O_c налазе се на симетралама углова код темена B троуглова ABN и ABP па је $AO : ON = AB : BN = c : \dfrac{ca}{b+c}$ и $AO_c : O_cP = AB : BP = c : \dfrac{ca}{b-c}$ одакле добијамо: $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{ON}\cdot\dfrac{b+c}{a} = (\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AO})\cdot\dfrac{b+c}{a}$ и $\overrightarrow{AO_c} = \overrightarrow{O_cP}\cdot\dfrac{b-c}{a} = (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AO_c})\cdot\dfrac{b-c}{a}$ или $\overrightarrow{AO} = \dfrac{b+c}{a+b+c}\cdot\overrightarrow{AN} = \dfrac{b\cdot\vec{c} - c\cdot\vec{b}}{a+b+c}$ и $\overrightarrow{AO_c} = \dfrac{b-c}{a+b+c}\overrightarrow{AP} = \dfrac{b\cdot\vec{c} + c\cdot\vec{b}}{a+b+c}$.

534. $M\left(\dfrac{x_1 + mx_2}{1+m}, \dfrac{y_1 + my_2}{1+m}, \dfrac{z_1 + mz_2}{1+m}\right)$, $S\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

535. *а)* $S\left(\dfrac{2+4}{2}, \dfrac{1+(-1)}{2}, \dfrac{-3+1}{2}\right) = S(3,0,-1)$.

б) $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, $C\left(\dfrac{2 + \frac{2}{3}\cdot 4}{1+\frac{2}{3}}, \dfrac{1 + \frac{2}{3}(-1)}{1+\frac{2}{3}}, \dfrac{-3 + \frac{2}{3}\cdot 1}{1+\frac{2}{3}}\right) = C\left(\dfrac{14}{5}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{-7}{5}\right)$.

в) Тачка A се налази између тачака B и D, па је $\overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$, $m = -\frac{2}{3}$,

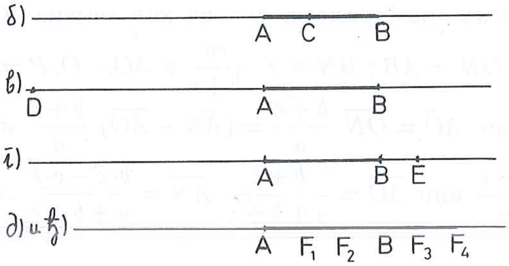
$$D\left(\frac{2 + \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot 4}{1 - \frac{2}{3}}, \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)(-1)}{1 - \frac{2}{3}}, \frac{-3 + \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot 1}{1 - \frac{2}{3}}\right) = D(-2,5,-11).$$

г) Тачка B је између тачака A и E, па је $\overrightarrow{AE} = -5\overrightarrow{EB}$, $m = -5$,

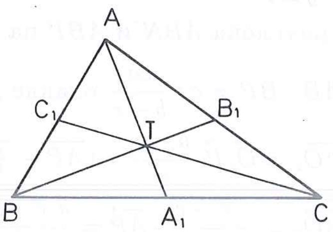
$E\left(\dfrac{2+(-5)4}{1-5}, \dfrac{1-5(-1)}{1-5}, \dfrac{-3-5\cdot 1}{1-5}\right) = E\left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{-3}{2}, 2\right)$.

д) $\overrightarrow{AF}_1 = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{F_1B}$ и $\overrightarrow{AF}_2 = 2\overrightarrow{F_2B}$, па је $F_1\left(\dfrac{2+\frac{1}{2}\cdot 4}{1+\frac{1}{2}}, \dfrac{1+\frac{1}{2}\cdot(-1)}{1+\frac{1}{2}}, \dfrac{-3+\frac{1}{2}\cdot 1}{1+\frac{1}{2}}\right) =$
$F_1\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{-5}{3}\right)$, $F_2 = \left(\dfrac{2+2\cdot 4}{1+2}, \dfrac{1+2(-1)}{1+2}, \dfrac{-3+2\cdot 1}{1+2}\right) = F_2\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$.

ђ) $\overrightarrow{AF}_3 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}_3 = -4\overrightarrow{F_3B}$, $F_3\left(\dfrac{2-4\cdot 4}{1-4}, \dfrac{1+(-4)(-1)}{1-4}, \dfrac{-3+(-4)\cdot 1}{1-4}\right) =$
$F_3\left(-\dfrac{14}{3}, \dfrac{-5}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$, $\overrightarrow{AF}_4 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}_4 = -\dfrac{5}{2}\overrightarrow{F_4B}$, $F_4\left(\dfrac{2-\frac{5}{2}\cdot 4}{1-\frac{5}{2}}, \dfrac{1-\frac{5}{2}(-1)}{1-\frac{5}{2}}, \dfrac{-3-\frac{5}{2}\cdot 1}{1-\frac{5}{2}}\right) =$
$F_4\left(\dfrac{16}{3}, \dfrac{-7}{3}, \dfrac{11}{3}\right)$, сл. 175.



Сл. 175.



Сл. 176.

536. *а)* тачке A_1, B_1 и C_1 имају координате (сл. 176) $A_1(0,1,1)$, $B_1(0,0,1)$, $C_1(0,1,0)$ па је $AA_1 = \sqrt{2}$, $BB_1 = \sqrt{5}$, $CC_1 = \sqrt{5}$.
б) $A_1(1,1,0)$, $B_1(0,2,1)$, $C_1(3,0,2)$ $AA_1 = \sqrt{10}$, $BB_1 = 5$, $CC_1 = \sqrt{43}$.
в) $C_1(3,0,2)$, $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{CA}_1$, $C\left(\dfrac{4-2\cdot 4}{1-2}, \dfrac{-1-2\cdot 1}{1-2}, \dfrac{1-2\cdot 2}{1-2}\right) = C(4,3,3)$, $B_1(3,2,3)$, $AA_1 = \sqrt{5}$, $BB_1 = \sqrt{14}$, $CC_1 = \sqrt{11}$.
г) $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{CB}_1$, $C(-4,4,4)$, $AA_1 = \dfrac{3}{2}AT = \dfrac{3}{2}\sqrt{14}$, $CC_1 = \dfrac{3}{2}CT = \dfrac{3}{2}\sqrt{18}$, $BB_1 = 3\cdot B_1T = 3\cdot\sqrt{3}$.

537. *а)* $C_1\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}, \dfrac{-1}{2}\right)$, $\overrightarrow{CT} = 2\overrightarrow{TC}_1$, $T\left(\dfrac{-1+2\cdot\frac{1}{2}}{1+2}, \dfrac{-7+2\cdot\frac{7}{2}}{1+2}, \dfrac{1+2\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+2}\right) =$
$T(0,0,0)$.

б) Пресек дијагонала S је средиште дужи AC, $S\left(\frac{1}{2}, -2, 1\right)$, $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{DS}$, $D(-2, -8, 4)$.

в) $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{MB}$, $M(-4, 5, -5)$, $\overrightarrow{BN} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{NC}$, $N(-1, -29, 7)$.

538. *а)* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (-3, -4, 0)$, $|\overrightarrow{AC}| = 5$.

б) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA} = (-4, 3, 0)$, $|\overrightarrow{AC}| = 5$.

в) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = (0, 12, 5)$, $|\overrightarrow{AC}| = 13$.

г) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = (12, 3, 4)$, $|\overrightarrow{CA}| = 13$.

539. *а)* $\vec{0} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (-6\alpha + 4\beta, 9\alpha - 6\beta) \Rightarrow -6\alpha + 4\beta = 0$ и $9\alpha - 6\beta = 0$. Детерминанта овог хомогеног система једначина је једнака $D = \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 9 & -6 \end{vmatrix} = 0$, па систем има нетривијалних решења, односно постоје бројеви α и β, од којих бар један није нула, такви да је $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$, на пример $\alpha = 2$, $\beta = -3$.

б) $\vec{0} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{CD} = (8\alpha - 12\beta, -6\alpha + 9\beta) \Rightarrow 8\alpha - 12\beta = 0$ и $-6\alpha + 9\beta = 0$. $D = \begin{vmatrix} 8 & -12 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 0$. Вектори су линеарно зависни.

в) и *г)* Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ су компланарна (припадају равни Oxy), па су линеарно зависни.

540. *а)* Из $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (2\alpha - 9\beta, -3\alpha + 6\beta) = \vec{0} \Rightarrow 2\alpha - 9\beta = 0$ и $-3\alpha + 6\beta = 0$. $D = \begin{vmatrix} 2 & -9 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$, па систем има само тривијално решење $\alpha = \beta = 0$. Вектори су линеарно независни.

Из $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c} = (-4, 1) \Rightarrow 2\alpha - 9\beta = -4$ и $-3\alpha + 6\beta = 1$. $D_\alpha = \begin{vmatrix} -4 & -9 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -15$, $D_\beta = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -10 \Rightarrow \alpha = \frac{D_\alpha}{D} = 1$, $\beta = \frac{D_\beta}{D} = \frac{2}{3}$. $\vec{c} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

б) Из $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow 3\alpha + \beta = 0$ и $5\alpha + \beta = 0$, $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Систем има само тривијално решење, па су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линеарно независни.

Из $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c}$ следи: $3\alpha + \beta = -6$, $5\alpha + \beta = -10$ па је $\alpha = -2$, $\beta = 0$, $\vec{c} = -2\vec{a} + 0\vec{b} = -2\vec{a}$.

в) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$, па су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линеарно независни.

Из $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \alpha = -2$, $\beta = 5 \Rightarrow \vec{c} = -2\vec{a} + 5\vec{b}$.

г) Из $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow k\alpha - \beta = 0$ и $\alpha + k\beta = 0$. $D = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k^2 + 1 \neq 0$, па систем за свако $k \in R$ има само тривијално решење, односно вектори су линеарно независни.

Из $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{c} \Rightarrow k\alpha-\beta=1$ и $\alpha+k\beta=1$, $D_\alpha=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & k\end{vmatrix}=k$, $D_\beta=\begin{vmatrix}k & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=k \Rightarrow \alpha=\beta=\dfrac{k}{k^2+1}$ и $\vec{c}=\dfrac{k}{k^2+1}\vec{a}+\dfrac{k}{k^2+1}\vec{b}$.

541. Из $\vec{0}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=(\alpha m+\beta,\alpha+\beta m) \Rightarrow \alpha m+\beta=0$ и $\alpha+\beta m=0$. $D=\begin{vmatrix}m & 1\\ 1 & m\end{vmatrix}=m^2-1$. За $m\neq 1$ и $m\neq -1$, $D\neq 0$, систем има само тривијално решење, па су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линеарно независни вектори, односно нису колинеарни. За $m=1$ или $m=-1$, $D=0$, систем има нетривијалних решења, па су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линеарно зависни (колинеарни) вектори.

Из $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b} \Rightarrow \alpha m+\beta=1$ и $\alpha+\beta m=1$. $D_\alpha=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & m\end{vmatrix}=m-1$, $D_\beta=\begin{vmatrix}m & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=m-1$.

За $m\neq 1$ и $m\neq -1$, $D\neq 0$, систем је одређен, има јединствено решење. Преко линеарно независних вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вектор $\vec{c}$ се може изразити (разложити) на јединствен начин.

За $m=-1$, $D=0$, $D_x=-2\neq 0$ систем нема решења. Преко колинеарних вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, не може се изразити њима неколинеаран вектор $\vec{c}$.

За $m=1$ $D=D_x=D_y=0$. Систем је немогућ или неодређен. Заменом $m=1$ у систем, он постаје $x+y=1$ и $x+y=1$. Његова решења су $(1-t,t)$, $t\in R$, па је $\vec{c}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$. Преко колинеарних вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, њима колинеаран вектор се може разложити на бесконачно много начина.

542. Из $\vec{0}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=(2\alpha+\beta,\alpha+\beta,3\alpha-\beta) \Rightarrow 2\alpha+\beta=0$ и $\alpha+\beta=0$ и $3\alpha-\beta=0$. Гаусовим поступком утврђујемо да добијени систем једначина има само тривијално решење, па су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линеарно независни.

Из $\vec{0}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=(2\alpha+\beta+4\gamma,\alpha+\beta+3\gamma,3\alpha-\beta+\gamma)$ следи $2\alpha+\beta+4\gamma=0$ и $\alpha+\beta+3\gamma=0$ и $3\alpha-\beta+\gamma=0$. $D=\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 3\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=0$, па добијени систем има нетривијалних решења и $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ су линеарно зависни вектори. Решење система је $(-t,-2t,t)$, $t\in R$. Нетривијално решење добијамо на пример за $t=1$ $(-1,-2,1)$, па је $-\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ или $\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$.

543. Из $\vec{0}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=(\alpha+\beta+\gamma,\beta+\gamma,\gamma)$ следи $\alpha=\beta=\gamma=0$. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ су линеарно независни вектори. Очигледно је $\vec{i}=\vec{a}$, $\vec{j}=\vec{b}-\vec{a}$ и $\vec{k}=\vec{c}-\vec{b}$, па је $\vec{d}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=(x-y)\vec{a}+(y-z)\vec{b}+z\vec{c}$.

544. *а)* $\overrightarrow{AB}=(1,-4,3)$, $\overrightarrow{AC}=(3,-12,9)$, $3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ па су вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ линеарно зависни, односно колинеарни. Следи да су A, B, C

колинеарне тачке.

б) Из $\vec{0} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} = (\alpha + 4\beta, \beta, 2\alpha)$ следи $\alpha = \beta = 0$. Вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AV}$ су линеарно независни па A, B и C нису колинеарне тачке.

в) Из $\vec{0} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} = (\alpha + 2\beta, \alpha m + 2\beta, 2\alpha + (n-1)\beta)$ следи $\alpha + 2\beta = 0$ и $m\alpha + 2\beta = 0$ и $2\alpha + (n-1)\beta = 0$. Ако прву једначину помножену са -1 и -2 додамо другој и трећој, добијамо еквивалентан систем $\alpha + 2\beta = 0$ и $(m-1)\alpha = 0$ и $(n-5)\beta = 0$. Ако је $m \neq 1$ или $n \neq 5$ систем има само тривијално решење, па су тачке неколинеарне. Ако је $m = 1$ и $n = 5$, систем има нетривијално решење $(-2, 1)$, па су тачке колинеарне.

г) Колинеарне су за свако m.

545. *а)* Из $\vec{0} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD} = (\alpha + 2\beta + 4\gamma, 2\alpha - \beta + 3\gamma, 3\alpha + \beta + 7\gamma)$ следи $\alpha + 2\beta + 4\gamma = 0$ и $2\alpha - \beta + 3\gamma = 0$ и $3\alpha + \beta + 7\gamma = 0$. Детерминанта добијеног система једначина једнака је нули, па систем има нетривијалних решења. Дате тачке су компланарне;

б) Из $\vec{0} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD}$ следи $\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0$ и $2\alpha + 5\beta + 4\gamma = 0$ и $3\alpha + \beta + 7\gamma = 0$. Детерминанта система једначина је једнака 1, па систем има само тривијално решење. Дате тачке нису компланарне;

в) Нису компланарне ни за једно m;

г) Компланарне су за свако m;

д) За $m = 1$ су компланарне, а за $m \neq 1$ нису.

546. *а)* Нека је $N(x, y, z)$. Тада је $\overrightarrow{MN} = (x+1, y-1, z)$. Из услова $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$, тј. $(x+1, y-1, z) = (3, -6, 2)$, добијемо: $x + 1 = 3$, $y - 1 = -6$ и $z = 2$, па је $N(2, -5, 2)$.

б) и *в)* Слично претходном. Резултати: *б)* $N(-10, 19, -6)$, *в)* $N\left(-\frac{1}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{4}{7}\right)$ или $N\left(-\frac{13}{7}, \frac{19}{7}, -\frac{4}{7}\right)$.

547. *а)* $\overrightarrow{BA} = (-5, -3, 3)$, $\overrightarrow{BC} = (-1, 1, 0)$, па је $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = (-6, -2, 3)$. Дакле: $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + 3^2} = 7$.

б) Користимо једнакост $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, при чему је $D(x, y, z)$. Слично претходном задатку добијемо $D(-4, 2, 2)$.

548. *а)* $\vec{m}\cdot\vec{n} = |\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cos(\vec{m}, \vec{n}) = 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 1$. *б)* $\vec{m}\cdot\vec{m} = |\vec{m}|\cdot|\vec{m}|\cos 0^\circ = 1$.

в) $\vec{n}\cdot\vec{n} = |\vec{n}|^2 = 4$. *г)* $\vec{m}\cdot(2\vec{m} + \vec{n}) = 2\vec{m}\cdot\vec{m} + \vec{m}\cdot\vec{n} = 2\cdot 1 + 1 = 3$.

д) $(\vec{m} + \vec{n})(\vec{m} - \vec{n}) = \vec{m}\cdot\vec{m} - \vec{m}\cdot\vec{n} + \vec{n}\cdot\vec{m} - \vec{n}\cdot\vec{n} = |\vec{m}|^2 - |\vec{n}|^2 = -3$.

ђ) $(2\vec{m} + \vec{n})\cdot(3\vec{m} - 7\vec{n}) = 6\vec{m}\cdot\vec{m} + 3\vec{n}\cdot\vec{m} - 14\vec{m}\cdot\vec{n} - 7\vec{n}\cdot\vec{n} = 6|\vec{m}|^2 - 11\vec{m}\cdot\vec{n} - 7|\vec{n}|^2 = 6 - 11 - 7\cdot 4 = -33$.

549. *а)* $\vec{a}\cdot\vec{b} = (2\vec{m}+\vec{n})\cdot(\vec{m}-2\vec{n}) = 2|\vec{m}|^2 - 3|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos 60^\circ - 2|\vec{n}|^2 = 2\cdot 4 - 3\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} - 2 = 3.$

б) $\vec{a}\cdot\vec{a} = (2\vec{m}+\vec{n})^2 = 4|\vec{m}|^2 + 4\vec{m}\cdot\vec{n} + |\vec{n}|^2 = 16+4+1 = 21$, $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{21}$.

в) $|\vec{b}| = \sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}} = 2.$

г) $\vec{a}\cdot\vec{m} = 9$, $\cos(\vec{a},\vec{m}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{m}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{m}|} = \dfrac{9}{2\sqrt{21}}$, $\sphericalangle(\vec{a},\vec{m}) = \arccos\dfrac{9}{2\sqrt{21}}$.

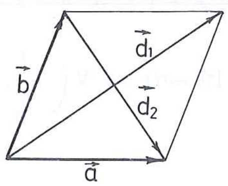
д) $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{3}{2\sqrt{21}}$, $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \arccos\dfrac{3}{2\sqrt{21}}$.

ђ) $Pr_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{3}{2}.$

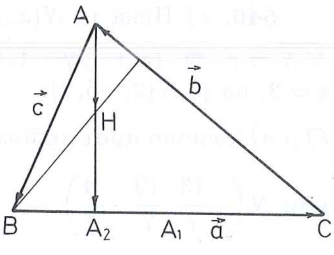
е) $\vec{Pr}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b} = \dfrac{3}{4}(\vec{m}-2\vec{n}) = \dfrac{3}{4}\vec{m} - \dfrac{3}{2}\vec{n}.$

ж) $Pr_{\vec{m}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{m}}{|\vec{m}|} = \dfrac{9}{2}.$

550. Нека су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектори страница паралелограма. Вектори $\vec{d_1} = \vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{d_2} = \vec{a}-\vec{b}$ су вектори његових дијагонала, сл. 177. Ако је паралелограм ромб, онда је $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ и $\vec{d_1}\cdot\vec{d_2} = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$, па је $\vec{d_1}\perp\vec{d_2}$. Ако су дијагонале нормалне, онда је $0 = \vec{d_1}\cdot\vec{d_2} = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$. Следи $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.



Сл. 177.



Сл. 178.

551. $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = \big||\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})\big| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}||\cos(\vec{a},\vec{b})| \leqslant |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, јер је $|\cos(\vec{a},\vec{b})| \leqslant 1$. Једнакост важи када су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни вектори ($\cos 0^\circ = 1 = |\cos 180^\circ|$).

552. Из $|2\vec{a}+\vec{b}| = 4$ добијамо $16 = |2\vec{a}+\vec{b}|^2 = (2\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}+\vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 9$, па је $\vec{a}\cdot\vec{b} = -\dfrac{9}{4}\cdot$ $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2} = \sqrt{4 - \dfrac{9}{2} + 9} = \sqrt{\dfrac{17}{2}}.$

553. Једнакост $\vec{c} = t\cdot(2\vec{a}+\vec{b})$ помножимо скаларно са $\vec{b}$. Добијемо:

$\vec{c}\cdot\vec{b} = t(2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b})$, $3 = t(2+4)$, $t = \dfrac{1}{2}$, $\vec{c} = \vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b}$.

554. *а)* Вектор $\vec{h} = \overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_2} = \vec{c} + t\vec{a}$ нормалан је на вектор $\vec{a}$, сл. 178, па је $0 = \vec{h}\cdot\vec{a} = \vec{c}\cdot\vec{a} + t\cdot\vec{a}\cdot\vec{a}$, $t = -\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}$, $\vec{h} = \vec{c} - \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\cdot\vec{a}$.

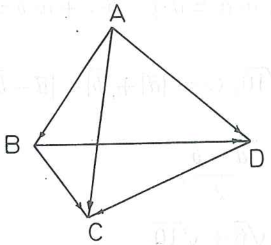
б) Вектор $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} = -\vec{c} + t\cdot\vec{h}$ нормалан је на вектор $\vec{b}$ па је $0 = \overrightarrow{BH}\cdot\vec{b} = -\vec{c}\cdot\vec{b} + t\cdot\vec{h}\cdot\vec{b}$, $t = \dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\vec{b}\cdot\vec{h}} = \dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\vec{b}\cdot\vec{c} - \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}} = \dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{a})\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})}{(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{c}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{c})}$ и

$$\overrightarrow{AH} = t\cdot\vec{h} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{a})\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})}{(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{c}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{c})}\left(\vec{c} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\cdot\vec{a}\right).$$

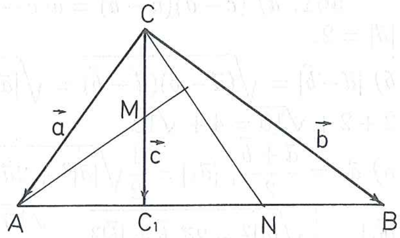
555. *а)* $\vec{a}\perp\vec{b}$, па из $\vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{m}+\vec{n})(5\vec{m}-2\vec{n}) = 0$, добијемо $\vec{m}\cdot\vec{n} = 1$, па је $\cos(\vec{m},\vec{n}) = \dfrac{1}{2}$, односно $\sphericalangle(\vec{m},\vec{n}) = 60^\circ$.

б) $\vec{d_1} = \vec{a}+\vec{b} = 6\vec{m}-\vec{n}$ и $\vec{d_2} = \vec{b}-\vec{a} = 4\vec{m}-3\vec{n}$, па је $\cos(\vec{d_1},\vec{d_2}) = \dfrac{\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}}{|\vec{d_1}||\vec{d_2}|} = \dfrac{1}{2}$, односно $\sphericalangle(\vec{d_1},\vec{d_2}) = 60^\circ$. ($|\vec{d_1}| = |\vec{d_2}| = 2\sqrt{7}$ и $\vec{d_1}\cdot\vec{d_2} = 14$.)

556. Из датих услова добијамо следеће једнакости:
$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} - |\vec{b}|^2 = 0$,
$(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 - 3\vec{a}\cdot\vec{b} - 2|\vec{b}|^2 = 0$,
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 9$.
Решавањем добијеног система линеарних једначина по непознатима $|\vec{a}|^2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ и $|\vec{b}|^2$ добијамо $|\vec{a}|^2 = 5$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = -2$ и $|\vec{b}|^2 = 8$;
$|\vec{a}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{-2}{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$.



Сл. 179.

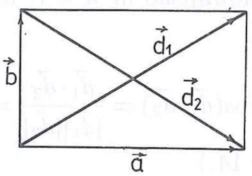


Сл. 180.

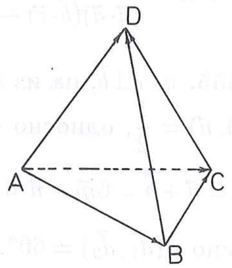
557. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 - 0 = 0$, сл. 179.

558. Уведимо ознаке: $\vec{a}=\overrightarrow{CA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CB}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{CC_1}$. Тада је(сл. 180) $\overrightarrow{AM}=-\vec{a}+\dfrac{\vec{c}}{2}$, $\overrightarrow{CN}=\vec{c}+\dfrac{\vec{b}-\vec{c}}{2}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$, па је $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CN}=\dfrac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c})(\vec{c}-2\vec{a})=\dfrac{1}{4}[\vec{b}\vec{c}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}(\vec{c}-\vec{a})-\vec{c}\vec{a}]=\dfrac{1}{4}[(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{c}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}(\vec{c}-\vec{a})]=0.$

559. Нека су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектори страница, а $\vec{d_1}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{d_2}=\vec{a}-\vec{b}$ вектори дијагонала паралелограма (сл. 181).
$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff |\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2 \iff (\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})=(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=0 \iff \vec{d_1}\cdot\vec{d_1}=\vec{d_2}\cdot\vec{d_2} \iff |\vec{d_1}|^2=|\vec{d_2}|^2 \iff |\vec{d_1}|=|\vec{d_2}|.$



Сл. 181.



Сл. 182.

560. Како је $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$, сл. 182, то је: $|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AD}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2-|\overrightarrow{BD}|^2 \iff (\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD})(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}) \iff \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{DC}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}) \iff 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{DC}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}) \iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=0.$

561. *а)* $(\vec{c}-\vec{a})(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}=4$, $|\vec{a}|=2$.

б) $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})}=\sqrt{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\sqrt{10}$, $O=|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{b}|=2+2+\sqrt{10}=4+\sqrt{10}$.

в) $\vec{a}_1=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $|\vec{a}_1|=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $\vec{b}_1=\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$,
$|\vec{b}_1|=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$, $O_1=2a_1+2b_1=\sqrt{6}+\sqrt{10}$.

г) $\vec{e}=x\vec{a}+y\vec{b}$, $\vec{c}-\vec{e}=\vec{c}-x\vec{a}-y\vec{b}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}-\vec{e}\perp\vec{b}$. Из $(\vec{c}-\vec{e})\cdot\vec{a}=0$ и $(\vec{c}-\vec{e})\cdot\vec{b}=0$ добијамо $\vec{c}\cdot\vec{a}-x\vec{a}\cdot\vec{a}-y\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ и $\vec{c}\cdot\vec{b}-x\vec{a}\cdot\vec{b}-y\vec{b}\cdot\vec{b}=0$, односно $4x-y=7$ и $-x+4y=2$, $x=2$, $y=1$, па је $\vec{e}=2\vec{a}+\vec{b}$, $|\vec{e}|=\sqrt{(2\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}+\vec{b})}=\sqrt{4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=4.$

562. Тачка у равни xOy је $B(x,y,0)$, па је вектор $\overrightarrow{MB}=(x-3,y+1,1)$. Услови су: $\vec{a}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ и $(x-3)^2+(y+1)^2+1=9$. Први услов даје једначину $-(x-3)+2y=0$, одакле је $x-3=2y$. Заменом у други услов добијемо квадратну једначину: $5y^2+2y-7=0$, која даје решења: $y_1=1$ и $y_2=-\dfrac{7}{5}$. Имамо два решења задатка: $B_1(5,1,0)$ и $b_2\left(\dfrac{1}{5},-\dfrac{7}{5},0\right)$.

563. *а)* $\vec{m}\cdot\vec{n}=0$, односно: $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Заменом датих величина добијамо: $1-|\vec{a}|^2+4+4=0$. Одавде је $|\vec{a}|=3$.
б) $\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, где α и β треба одредити. Вектор $\vec{p}-\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}-\vec{c}$ је нормалан на $\vec{a}$ и на $\vec{b}$, па је $(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0$ и $(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0$. Одавде добијамо систем једначина $9\alpha-2\beta-1=0$ и $-\alpha+2\beta-1=0$, који има решење: $\alpha=\dfrac{1}{4}$, $\beta=\dfrac{5}{8}$. Дакле $\vec{p}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{5}{8}\vec{b}=\dfrac{1}{8}(2\vec{a}+5\vec{b})$.
в) $|\vec{p}|=\sqrt{\vec{p}\cdot\vec{p}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

564. *а)* $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a},\vec{b})=3\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}=3$.
б) $|(3\vec{a}+\vec{b})\times(2\vec{a}-\vec{b})|=|3\vec{a}\times\vec{a}+2\vec{b}\times\vec{a}-3\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{b}|=|3\cdot\vec{0}-2\vec{a}\times\vec{b}-3\vec{a}\times\vec{b}-\vec{0}|=|-5\vec{a}\times\vec{b}|=5|\vec{a}\times\vec{b}|=5\cdot 3=15$.
в) $P_1=|(3\vec{a}+2\vec{b})\times(7\vec{a}-\vec{b})|=51$.
г) $P_2=\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})|=\dfrac{3}{2}$.
д) $h_a=\dfrac{2P_2}{|\vec{a}|}=1$. Треба да одредимо $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}+\vec{b}-\vec{a}|=|\vec{b}|=2$. Дакле: $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{|\vec{a}|^2+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}+|\vec{b}|^2}=\sqrt{13+6\sqrt{3}}$. Према томе $h_b=\dfrac{2P_2}{|\vec{b}|}=\dfrac{3}{2}$ и $h_r=\dfrac{2P_2}{|\vec{a}+\vec{b}|}=\dfrac{3}{\sqrt{13+6\sqrt{3}}}$.

565. *а)* $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sqrt{1-\cos^2(\vec{a},\vec{b})}=$

$$\sqrt{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\left(1-\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right)^2\right)}=\sqrt{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\sqrt{1081}.$$

б) 0, јер је $(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a}$.
в) $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=1081$.
г) 0, јер су вектори $(\vec{a}\times\vec{b})$ и $(\vec{a}\times\vec{b})$ колинеарни.

566. $\dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{\vec{a}\cdot\vec{b}}=\dfrac{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})}=\mathrm{tg}(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}$, па је $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$. Из

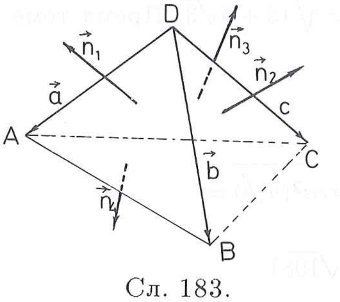
$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=2$, добијамо: $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=4$, а из $|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{73}$, добијамо: $|\vec{a}|^2+8+4|\vec{b}|^2=73$, односно $|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2=65$. Решења овог система једначина су $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=\dfrac{1}{2}$ или $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=4$.

567. Помножимо једнакост $\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$ векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$, векторским производом с десне стране. Добијамо: $\vec{a}\times\vec{a}+2\vec{b}\times\vec{a}+3\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$ и $\vec{a}\times\vec{b}+2\vec{b}\times\vec{b}+3\vec{c}\times\vec{b}=\vec{0}$, а одавде је: $2\vec{a}\times\vec{b}=-3\vec{a}\times\vec{c}$ и $\vec{a}\times\vec{b}=3\vec{b}\times\vec{c}$. Дакле: $2|\vec{a}\times\vec{b}|=3|\vec{a}\times\vec{c}|$ и $|\vec{a}\times\vec{b}|=3|\vec{b}\times\vec{c}|$. Следи:
$P_{\vec{a},\vec{b}}:P_{\vec{b},\vec{c}}:P_{\vec{a},\vec{c}}=|\vec{a}\times\vec{b}|:|\vec{b}\times\vec{c}|:|\vec{a}\times\vec{c}|=3:1:2$.

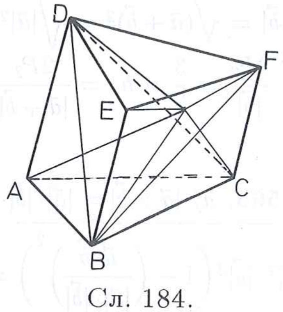
568. Слично задатку 565 *а)*, добијамо: $P=\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$. Како је $|\vec{a}|^2=(2\vec{m}+3\vec{n}+\vec{p})^2=4|\vec{m}|^2+9|\vec{n}|^2+|\vec{p}|^2+12\vec{m}\cdot\vec{n}+4\vec{m}\cdot\vec{p}+6\vec{n}\cdot\vec{p}=16+3\sqrt{2}$ и слично $|\vec{b}|^2=\vec{b}^2=14-\sqrt{2}$ и $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{13}{2}+\sqrt{2}$, то је $P=\dfrac{\sqrt{695+52\sqrt{2}}}{4}$.
Тражена висина је $h_a=\dfrac{2P}{|\vec{a}|}=\dfrac{\sqrt{695+52\sqrt{2}}}{2\sqrt{16+3\sqrt{2}}}$.

569. $(\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}-\vec{d}\times\vec{b}+\vec{d}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{c}\times\vec{d}+\vec{b}\times\vec{d}-\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$, па су $\vec{a}-\vec{d}$ и $\vec{b}-\vec{c}$ колинеарни.

570. *а)* Нека је дати полиедар тетраедар, сл. 183. Како је $\vec{n}_1=\dfrac{1}{2}\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{n}_2=\dfrac{1}{2}\vec{b}\times\vec{c}$, $\vec{n}_3=\dfrac{1}{2}\vec{c}\times\vec{a}$ и $\vec{n}_4=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a})\times(\vec{b}-\vec{a})$, то је $\vec{n}_1+\vec{n}_2+\vec{n}_3+\vec{n}_4=\dfrac{1}{2}(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{b}-\vec{c}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{a})=\vec{0}$.



Сл. 183.



Сл. 184.

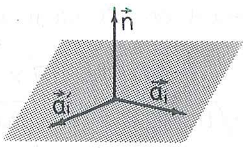
б) У општем случају поделимо полиедар на тетраедре, на пример тако што сваку страну полиедра поделимо на троуглове, а затим сва темена спојимо са неком тачком унутар тетраедра, сл. 184. На сваку страну сваког тетраедра поставимо вектор чији је интензитет једнак површини те стране, а који је усмерен ван тог тетраедра. Збир свих тих вектора једнак је $\vec{0}$. Са обе стране троугла који дели два тетраедра, полази по један вектор. Та два вектора имају једнаке интензитете а супротне смерове па је њихов збир једнак $\vec{0}$. На тај начин се пониште сви вектори који полазе са троуглова унутар полиедра. Вектори који полазе са једне стране полиедра имају исти правац и смер, па је њихов збир усмерен ка спољашњости полиедра и има интензитет једнак збиру површина троуглова на које је страна подељена, односно једнак површини те стране.

571. *а)* $|\vec{a}_i'| = |\vec{a}_i|\cdot|\vec{n}|\cdot\sin 90^\circ = |\vec{a}_i|$, $\vec{a}_i' \perp \vec{a}_i$ и вектори $\vec{a}_i$, $\vec{n}$ и $\vec{a}_i'$ чине десни триедар, сл. 185, па је $\vec{a}_i'$ добијен наведеном ротацијом.

б) углови су једнаки као углови са нормалним крацима.

в) $\vec{a}_1' + \vec{a}_2' + \cdots + \vec{a}_k' = \vec{a}_1 \times \vec{n} + \vec{a}_2 \times \vec{n} + \cdots + \vec{a}_k \times \vec{n} =$ $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_k) \times \vec{n} = \vec{0} \times \vec{n} = \vec{0}$.

г) $(\vec{a}_i \times \vec{n})\cdot(\vec{a}_j \times \vec{n}) = |\vec{a}_i \times \vec{n}|\cdot|\vec{a}_j \times \vec{n}|\cdot\cos(\vec{a}_i \times \vec{n}, \vec{a}_j \times \vec{n}) = |\vec{a}_i|\cdot|\vec{a}_j|\cdot\cos(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = \vec{a}_i\cdot\vec{a}_j$.



Сл. 185.

572. *а)* $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 3 + 2(-1) = 1$.

б) $\vec{b}\cdot\vec{c} = 5$, $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c}) = 1\cdot\vec{c} - 5\cdot\vec{a} = (-3, -9)$.

в) $|\vec{a}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = \sqrt{10}$, $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$.

г) $Pr_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

д) $\vec{P}r_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b} = \dfrac{1}{10}\cdot\vec{b} = \left(\dfrac{3}{10}, -\dfrac{1}{10}\right)$.

ђ) $\vec{h} = -\vec{a} + \vec{P}r_{\vec{b}}\vec{a} = \left(-\dfrac{7}{10}, -\dfrac{21}{10}\right)$.

573. *а)* $\vec{a}\cdot\vec{b} = -1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 0\cdot 3 = -1$.

б) $\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = (-2, 1, 1)$.

в) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1) = \vec{c}$.

г) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 3$. *д)* $\vec{b}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$.

ђ) $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{14}$, $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{-1}{\sqrt{28}}$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\dfrac{-1}{\sqrt{28}}$.

е) $|\vec{b}\times\vec{c}| = \sqrt{6}$, $\cos(\vec{a}, \vec{b}\times\vec{c}) = \dfrac{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}\times\vec{c}|} = \dfrac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}\times\vec{c}) = 30^\circ$, па је тражени угао једнак $\alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

ж) Није дефинисано векторски производ броја $\vec{a}\cdot\vec{b}$ и вектора $\vec{c}$.

574. Нека је $\vec{c}=(x,y)$. $\vec{a}\perp\vec{c} \iff \vec{a}\cdot\vec{c}=2x+3y=0$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=-x+my=7$. $D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & m\end{vmatrix}=2m+3$, $D_x=\begin{vmatrix}0 & 3\\ 7 & m\end{vmatrix}=-21$, $D_y=\begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 7\end{vmatrix}=14$. За $m\neq-\dfrac{3}{2}$, $D\neq 0$, добијени систем је одређен, решење је $x=\dfrac{-21}{2m+3}$, $y=\dfrac{14}{2m+3}$. Задатак има једно решење $\vec{c}=\left(\dfrac{-21}{2m+3},\dfrac{14}{2m+3}\right)$. За $m=-\dfrac{3}{2}$, $D=0$, $D_y\neq 0$, систем је немогућ, па задатак нема решења.

575. Нека је $\vec{d}=(x,y,z)$. Решење система једначина $\vec{d}\cdot\vec{a}=x+y+z=0$, $\vec{d}\cdot\vec{b}=2x+2y+z=0$ и $\vec{d}\cdot\vec{c}=x+2y-6z=3$ је $(-3,3,0)$ па је $\vec{d}=(-3,3,0)$. Други начин: $\vec{d}\parallel\vec{a}\times\vec{b}$, па је $\vec{d}=x(\vec{a}\times\vec{b})=x(-1,1,0)=(-x,x,0)$. $\vec{d}\cdot\vec{c}=-x+2x=3$, па је $x=3$ и $\vec{d}=(-3,3,0)$.

576. $\vec{d}=x\cdot\vec{a}\times\vec{b}=(2x,-4x,2x)$, $\vec{c}\times\vec{d}=(10x,-2x,-14x)$ $P=|\vec{c}\times\vec{d}|=\sqrt{100x^2+4x^2+196x^2}=\sqrt{300x^2}=\sqrt{75}\cdot 2|x|=\sqrt{75}$, $|x|=\dfrac{1}{2}$. За $x=\dfrac{1}{2}$, $\vec{d}=\vec{d_1}=(1,-2,1)$, а за $x=-\dfrac{1}{2}$ је $\vec{d}=\vec{d_1}=(-1,2,-1)$.

577. Нека је $\vec{d}=(x,y,z)$. Из $|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ и $\cos 60^\circ=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|}$. Добијамо систем једначина $x^2+y^2+z^2=1$ и $x+y+z=0$ и $x=\dfrac{1}{2}$. Заменом $x=\dfrac{1}{2}$ и $y=-\dfrac{1}{2}-z$ у прву једначину, она постаје $\dfrac{1}{4}+\left(-\dfrac{1}{2}-z\right)^2+z^2=2z^2+z+\dfrac{1}{2}=1$. Њена решења су $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. За $z=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$, $y=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ па је $\vec{d_1}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4},\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)$ а за $z=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$, $y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ па је $\vec{d_1}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4},\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)$. $\vec{d_1}\cdot\vec{c}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}<0$, па је угао између $\vec{d_1}$ и $\vec{c}$ туп, а $\vec{d_2}\cdot\vec{c}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}>0$ па је $\sphericalangle(\vec{d_2},\vec{c})$ оштар. Дакле, $\vec{d}=\vec{d_1}$.

578. Вектор $\vec{a}\times\vec{b}=(-1,3,-7)$ је нормалан на раван вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, па ће вектор $\vec{c}=\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})=(-24,13,9)$ бити нормалан на вектор $\vec{a}$ и компланаран са $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тражени вектор је $\vec{c_0}=\dfrac{1}{|\vec{c}|}\cdot\vec{c}=\left(\dfrac{-24}{\sqrt{826}},\dfrac{13}{\sqrt{826}},\dfrac{9}{\sqrt{826}}\right)$.

579. $C=(x,y,z)$. Услове: $|\vec{c}|=1$, $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{b}\times\vec{c}|=\sqrt{2}$, можемо написати на следећи начин: $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=\dfrac{3}{2}$, $(y-z)^2+$

$(x+z)^2+(x+y)^2=2$. Од квадрата друге једначине одузмемо прву, а од треће двоструку прву. Добијемо $xy+xz+yz=\frac{5}{8}$ и $xy+xz-yz=0$ одакле је $yz=x(y+z)=\frac{5}{16}$. Заменом $y+z=\frac{3}{2}-x$ добијамо квадратну једначину по x: $x\left(\frac{3}{2}-x\right)=\frac{5}{16}$. Решење је $x=\frac{1}{4}$ ($x=\frac{5}{4}$ отпада због $x^2+y^2+z^2=1$). Заменом $x=\frac{1}{4}$ у прву и другу једначину добијамо $y^2+z^2=\frac{15}{16}$ и $y+z=\frac{5}{4}$, односно $y=\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}$, $z=\frac{5\mp\sqrt{5}}{8}$. Тражени вектор је $\vec{c}=\vec{c}_1=\left(\frac{1}{4},\frac{5+\sqrt{5}}{8},\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)$ и $\vec{c}=\vec{c}_2=\left(\frac{1}{4},\frac{5-\sqrt{5}}{8},\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)$.

580. $\vec{d}_1=(1,-2,1)$, $\vec{d}_2=\left(\frac{13}{7},\frac{-11}{7},\frac{-2}{7}\right)$.

581. Нека су $\vec{a}$ и $\vec{c}$ колинеарни вектори. Тада је $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=[\vec{c},\vec{a},\vec{b}]=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{0}\cdot\vec{b}=0$. Остали случајеви доказују се слично.

582. *а)* $[\vec{a}+\vec{b},\vec{b},\vec{c}]=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]+\vec{0}$.
б) $[\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},\vec{c}]=[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})]\cdot\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-2[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$.
в) $[\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}]=(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{c}+\vec{a})=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]+[\vec{a},\vec{b},\vec{a}]+[\vec{a},\vec{c},\vec{c}]+[\vec{a},\vec{c},\vec{a}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{a}]=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]+0+0+0+0+[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=2[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$.
г) $[2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},3\vec{a}+4\vec{b}]=\big((2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c})\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\big)\cdot(3\vec{a}+4\vec{b})=(2\vec{a}\times\vec{a}+2\vec{a}\times\vec{b}+2\vec{a}\times\vec{c}+3\vec{b}\times\vec{a}+3\vec{b}\times\vec{b}+3\vec{b}\times\vec{c}-\vec{c}\times\vec{a}-\vec{c}\times\vec{b}-\vec{c}\times\vec{c})(3\vec{a}+4\vec{b})=(-\vec{a}\times\vec{b}+3\vec{a}\times\vec{c}+4\vec{b}\times\vec{c})(3\vec{a}+4\vec{b})=-3[\vec{a},\vec{b},\vec{a}]-4[\vec{a},\vec{b},\vec{b}]+3[\vec{a},\vec{c},\vec{a}]+12[\vec{a},\vec{c},\vec{b}]+12[\vec{b},\vec{c},\vec{a}]+16[\vec{b},\vec{c},\vec{b}]=0$.

583. *а)* $[\vec{m},\vec{n},\vec{p}]=(\vec{m}\times\vec{n})\cdot\vec{p}=|\vec{m}\times\vec{n}|\cdot|\vec{p}|\cdot\cos 0=|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cdot\sin 60^\circ\cdot 1\cdot 1=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
б) $V_1=|[\vec{m}-\vec{n}+\vec{p},\vec{m}+\vec{n}-\vec{p},-\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}]|=|(\vec{0}+\vec{m}\times\vec{n}-\vec{m}\times\vec{p}-\vec{n}\times\vec{m}+\vec{0}+\vec{n}\times\vec{p}+\vec{p}\times\vec{m}+\vec{p}\times\vec{n}+\vec{0})(-\vec{m}+\vec{n}+\vec{p})|=|(2\vec{m}\times\vec{n}+2\vec{p}\times\vec{m})(-\vec{m}+\vec{n}+\vec{p})|=|0+0+2[\vec{m},\vec{n},\vec{p}]+0+2[\vec{p},\vec{m},\vec{n}]|=4[\vec{m},\vec{n},\vec{p}]=2\sqrt{3}$.
в) $V_2=\frac{1}{6}|[\vec{m}+\vec{n},\vec{m}+\vec{p},\vec{n}+\vec{p}]|=\frac{1}{6}|(\vec{0}+\vec{m}\times\vec{p}+\vec{n}\times\vec{m}+\vec{n}\times\vec{p})(\vec{n}+\vec{p})|=\frac{1}{6}|[\vec{m},\vec{p},\vec{n}]+0+0+[\vec{n},\vec{m},\vec{p}]+0+0|=\frac{1}{6}|-2[\vec{m},\vec{n},\vec{p}]|=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

584. Множењем дате једнакости скаларно са $\vec{c}$ добијамо: $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{c}]+[\vec{c},\vec{a},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0$, па су $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарни вектори.

585. Ако су вектори $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{b}\times\vec{c}$ и $\vec{c}\times\vec{a}$ компланарни, онда су линеарно зависни, па постоје $\alpha,\beta,\gamma\in R$такви да је $\alpha\cdot\vec{a}\times\vec{b}+\beta\cdot\vec{b}\times\vec{c}+\gamma\cdot\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$.

При томе је бар један од њих, на пример α различит од 0. Множењем последње једнакости скаларно са $\vec{c}$ добијамо $\alpha[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0$, па вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ припадају једној равни. Вектори $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{b}\times\vec{c}$ и $\vec{c}\times\vec{a}$ нормални су на ту раван па су колинеарни.

586. *а)* $V=\dfrac{1}{6}|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|=\dfrac{1}{6}|4[\vec{m},\vec{n},\vec{p}]|=\dfrac{3}{2}|\vec{m}\cdot(\vec{n}\times\vec{p})|=\dfrac{3}{2}|\vec{m}|\cdot|\vec{n}\times\vec{p}|\cdot\cos 0^\circ=$ $\dfrac{3}{2}\cdot 1\cdot|\vec{n}|\cdot|\vec{p}|\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{3}{2}\cdot 1\cdot 4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}.$

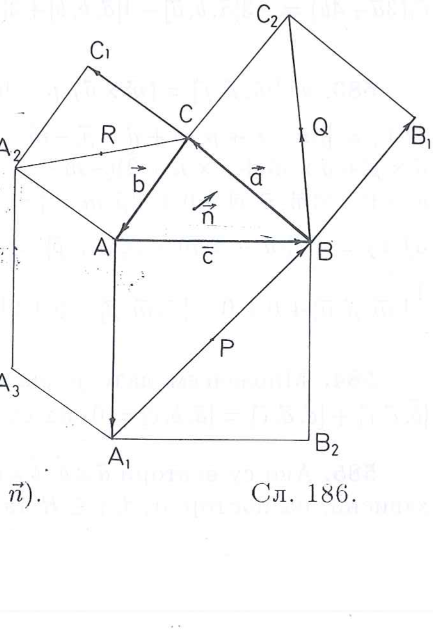
б) $B=\dfrac{1}{2}|\vec{b}\times-\vec{c}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{20\cdot 25-8^2}=\sqrt{109}.$

в) $V=\dfrac{B\cdot H}{3}$, $H=\dfrac{3\cdot V}{B}=\dfrac{9\sqrt{3}}{\sqrt{109}}.$

587. *а)* $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(a_1b_1\vec{m}\times\vec{m}+a_1b_2\vec{m}\times\vec{n}+a_1b_3\vec{m}\times\vec{p}+a_2b_1\vec{n}\times\vec{m}+a_2b_2\vec{n}\times\vec{n}+a_2b_3\vec{n}\times\vec{p}+a_3b_1\vec{p}\times\vec{m}+a_3b_2\vec{p}\times\vec{n}+a_3b_3\vec{p}\times\vec{p})\cdot\vec{c}=$ $\big((a_1b_2-a_2b_1)\vec{m}\times\vec{n}+(a_1b_3-a_3b_1)\vec{m}\times\vec{p}+(a_2b_3-a_3b_2)\vec{n}\times\vec{p}\big)\cdot(c_1\vec{m}+c_2\vec{n}+c_3\vec{p})=0+$ $0+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\cdot c_3\cdot[\vec{m},\vec{n},\vec{p}]+0+\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\cdot c_2\cdot[\vec{m},\vec{p},\vec{n}]+0+\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\cdot c_1\cdot[\vec{n},\vec{p},\vec{m}]=$ $\left(c_1\cdot\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}-c_2\cdot\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}+c_3\cdot\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)\cdot[\vec{m},\vec{n},\vec{p}]=D\cdot[\vec{m},\vec{n},\vec{p}]$. На левој страни последње једнакости $[\vec{m},\vec{n},\vec{p}]$ је помножено детерминантом D развијеном по трећој врсти.

588. На пример у задатку 586 $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}\cdot[\vec{m},\vec{n},\vec{p}]=(0+3+2-0-1-0)[\vec{m},\vec{n},\vec{p}]=4[\vec{m},\vec{n},\vec{p}].$

589. Нека је $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ и $\vec{n}$ јединични вектор нормалан на раван троугла усмерен од цртежа ка нама, сл. 186. Тада је (зад. 571): $\overrightarrow{CC_1}=\vec{b}\times\vec{n}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}\times\vec{n}$, $\overrightarrow{BB_1}=\vec{a}\times\vec{n}$, $\overrightarrow{AA_3}=\overrightarrow{AA_2}+\overrightarrow{A_2A_3}=\vec{b}\times\vec{n}+\vec{c}\times\vec{n}=(\vec{b}+\vec{c}+\vec{a}-\vec{a})\times\vec{n}=-\vec{a}\times\vec{n}$, $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_2})=$ $\dfrac{1}{2}(-\vec{c}\times\vec{n}+\vec{c}+\vec{a}+\vec{a}\times\vec{n})=\dfrac{1}{2}\big((\vec{a}-\vec{c})\times\vec{n}-\vec{b}\big)$
$\overrightarrow{BR}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CR}=\vec{a}+\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\overrightarrow{CC_1})=$
$\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{c}+\vec{b}\times\vec{n})=\dfrac{1}{2}(\vec{a}-\vec{c}+\vec{b}\times\vec{n}).$



Сл. 186.

а) $\overrightarrow{AA_3}\cdot\overrightarrow{BC} = -(\vec{a}\times\vec{n})\cdot\vec{a} = -[\vec{a},\vec{n},\vec{a}] = 0.$
б) $|\overrightarrow{AA_3}| = |-\vec{a}\times\vec{n}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{n}|\cdot\sin 90^\circ = |\vec{a}| = |\overrightarrow{BC}|.$
в) $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BR} = \frac{1}{4}\big((\vec{a}-\vec{c})\times\vec{n}-\vec{b}\big)\cdot(\vec{a}-\vec{c}+\vec{b}\times\vec{n}) = \frac{1}{4}\big([\vec{a}-\vec{c},\vec{n},\vec{a}-\vec{c}] + ((\vec{a}-\vec{c})\times \vec{n})\cdot(\vec{b}\times\vec{n}) - \vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c}) - [\vec{b},\vec{b},\vec{n}]\big) = \frac{1}{2}(0+(\vec{a}-\vec{c})\cdot\vec{b}-(\vec{a}-\vec{c})\cdot\vec{b}-0) = 0.$
г) $|\overrightarrow{PQ}|^2 = \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}\big((\vec{a}-\vec{c})\times\vec{n}-\vec{b}\big)\big((\vec{a}-\vec{c})\times\vec{n}-\vec{b}\big) = \frac{1}{4}\big(|(\vec{a}-\vec{c})\times\vec{n}|^2 - 2[\vec{a}-\vec{c},\vec{n},\vec{b}]+|\vec{b}|^2\big) = \frac{1}{4}\big(|\vec{a}-\vec{c}|^2 - 2[\vec{a}-\vec{c},\vec{n},\vec{b}]+|\vec{b}|^2\big)$
$|\overrightarrow{BR}|^2 = \overrightarrow{BR}\cdot\overrightarrow{BR} = \frac{1}{4}\big((\vec{a}-\vec{c})+\vec{b}\times\vec{n}\big)\big((\vec{a}-\vec{c})+\vec{b}\times\vec{n}\big) = \frac{1}{4}\big(|\vec{a}-\vec{c}|^2+2[\vec{a}-\vec{c},\vec{b},\vec{n}]+|\vec{b}\times\vec{n}|^2\big) = \frac{1}{4}\big(|\vec{a}-\vec{c}|^2 - 2[\vec{a}-\vec{c},\vec{n},\vec{b}]+|\vec{b}|^2\big) = \overrightarrow{PQ}^2,\ |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{BR}|.$

590. *а)* $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix} = -27.$ *б)* -2. *в)* 33. *г)* 0.

591. *а)* $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = -4 < 0$. Чине леви триедар.
б) $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = 0$. Компланарни су.
в) $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = 10 > 0$. Чине десни триедар.
г) Чине леви триедар.
д) $[\vec{a},\vec{i},\vec{j}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} = 1$. Чине десни триедар.

592. $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 5 & 1 & m\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 3 & -4 & -1\\ 5 & -4 & m-5\end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 1 & m-5\end{vmatrix} = -4(m-4).$
а) $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = 0$ за $m=4$ па су вектори компланарни.
б) $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] > 0$ за $m<4$, па вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ чине десни триедар.
в) $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] < 0$ за $m>4$, па $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ чине леви триедар.

593. $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = -6$, $V = |[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]| = 6$, $\vec{a}\times\vec{b} = (7,-5,-3)$, $B = |\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{49+25+9} = \sqrt{83}$, $H = \frac{V}{B} = \frac{6}{\sqrt{83}}$.

594. *а)* $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = (m-1)^2$ не може бити мање од нуле, па дати вектори не могу чинити леви триедар.
б) $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = 0$ за $m=1$. Тада је $\vec{a}=\vec{b}=\vec{c}=(1,1,1)$ па су дати вектори колинеарни.
в) $V = \frac{1}{6}|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]| = \frac{1}{6}(m-1)^2$. $V=6$ за $(m-1)^2=36$, односно за $m=7$ или $m=5$.

595. $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=-21$, $\vec{a}\times\vec{b}=(7,14,7)$, $Pr_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}=\dfrac{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=\dfrac{-21}{7\sqrt{6}}=-\dfrac{3}{\sqrt{6}}$, $\vec{P}r_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}=\dfrac{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}{|\vec{a}\times\vec{b}|^2}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\dfrac{-21}{49\cdot 6}\cdot(7,14,7)=\left(-\dfrac{1}{2},-1,-\dfrac{1}{2}\right)$.

596. *а)* $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix} m & 1 & -1\\ 3 & m & 2\\ 7 & 4 & 0\end{vmatrix}=2-m.$

а) за $m=2$ $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0$, па су дати вектори компланарни.

б) $\cos\alpha=\cos(\vec{a},\vec{i})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{i}|}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta=\cos(\vec{a},\vec{j})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{j}|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\gamma=\cos(\vec{a},\vec{k})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{k}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{6}}$.

в) $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$. Множењем ове једнакости скаларно са $\vec{a}$ и $\vec{b}$ добијамо систем једначина $\vec{a}\cdot\vec{c}=x\vec{a}\cdot\vec{a}+y\vec{a}\cdot\vec{b}$ и $\vec{b}\cdot\vec{c}=x\vec{a}\cdot\vec{b}+y\vec{b}\cdot\vec{b}$, $6x+6y=18$ и $6x+17y=29$. Решење је $x=2$, $y=1$ па је $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$.

597. Нека је $\vec{c}=(x,y,z)$. Из $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$, $\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|}=\cos 45^\circ$ и $|z|=1$ добијамо систем једначина: $x+y+z=0$ и $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $x^2+y^2+z^2=1$. Његова решења су $x=0$, $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y=0$, $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, одакле добијамо $\vec{c}_1=\left(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\vec{c}_2=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Из чињенице да вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине десни триедар добијамо $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ x & y & z\end{vmatrix}=x-y>0$. Последњу неједнакост задовољава вектор $\vec{c}=\vec{c}_1$.

598. *а)* $\vec{a}\times\vec{b}=(2,-1,2)$, $|\vec{a}\times\vec{b}|=3$, $\vec{n}_1=\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$, $\vec{n}_2=-\vec{n}_1=\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$. $\vec{n}_1\cdot\vec{c}=\dfrac{5}{3}>0$, па је $\sphericalangle(\vec{n}_1,\vec{c})$ оштар, а $\vec{n}_2\cdot\vec{c}=-\dfrac{5}{3}<0$, па је $\sphericalangle(\vec{n}_2,\vec{c})$ туп. Тражени вектор је $\vec{n}_1$.

б) $\vec{d}=x\vec{n}$, $x>0$. $V=\dfrac{1}{6}|[\vec{a},\vec{c},\vec{d}]|=\dfrac{28}{3}$, $[\vec{a},\vec{c},\vec{d}]=\pm 56$, $\begin{vmatrix} 2 & -6 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ \dfrac{2x}{3} & -\dfrac{x}{3} & \dfrac{2x}{3}\end{vmatrix}=\dfrac{28}{3}x=\pm 56$, $x=\pm 6$, $x=6$, $\vec{d}=(4,-2,4)$.

599. $\vec{c}=x\cdot\vec{a}\times\vec{b}=(-4x,-x,3x)$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(3-4x,3-x,5+3x)$, $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=$

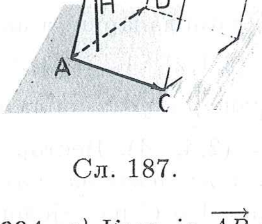
$\sqrt{26x^2+43} = \sqrt{69} \Rightarrow x = \pm 1$. За $x = 1$, $\vec{c} = \vec{c}_1 = (-4, -1, 3)$, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1] = 26 > 0$ па $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}_1$ чине десни триедар. За $x = -1$, $\vec{c} = \vec{c}_2 = (4, 1, -3)$, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_2] < 0$ па $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}_2$ чине леви триедар.

600. *а)* Како вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ чине десни триедар, то је $V = +[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 14(m+7) = 140$. $m = 3$.
б) $\vec{d} = (19, -6, 4) = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = (3x - y + 10z, 2x + 4y + 2z, -2x + y + 3z)$. Добијамо систем једначина: $3x - y + 10z = 19$ и $2x + 4y + 2z = -6$ и $-2x + y + 3z = -4$. Његово решење је $x = 2$, $y = -3$ и $z = 1$, па је $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

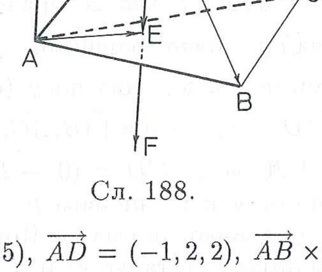
601. $D(x, 0, 0)$, $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}] = 1 - 2x$, па су тачке компланарне ако је $x = \dfrac{1}{2}$, односно ако је $D\left(\dfrac{1}{2}, 0, 0\right)$.

602. Дате тачке су компланарне акко су вектори $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (4, 5, 6)$ и $\overrightarrow{AD}(7, 8, m-1)$ компланарни, односно акко је $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}] = -3(m - 10) = 0$, $m = 10$.

603. Како је $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, -1) \neq \vec{0}$, вектори $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ нису колинеарни, па тачке A, C и D не леже на једној правој, одређују једну раван. Растојање тачке B од те равни једнако висини паралелопипеда одређеног векторима $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, која одговара страни ACD, сл. 187. Имамо $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = -2$, $H = \dfrac{V}{B} = \dfrac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}|} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$.



Сл. 187.



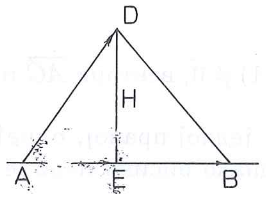
Сл. 188.

604. *а)* Како је $\overrightarrow{AB} = (0, 1, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 1, 5)$, $\overrightarrow{AD} = (-1, 2, 2)$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6, -3, -3)$ и $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, то је $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + x \cdot \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-1 + 6x, 2 - 3x, 2 - 3x)$, сл. 188. Број x одређујемо из услова компланарности вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AE}$: $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}] = (\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AE} = 6(6x-1)-3(2-3x)-3(2-3x) = 54x-18 = 0$. Добијамо, $x = \dfrac{1}{3}$, $\overrightarrow{AE} = (1,1,1)$ и $E(2,1,1)$.

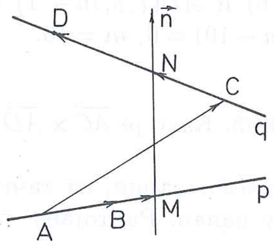
б) $\overrightarrow{DF} = -2\overrightarrow{FE}$, тачка F дели дуж DE у односу -2, па је $F\left(\dfrac{0+(-2)\cdot 2}{1-2}, \dfrac{2+(-2)\cdot 1}{1-2}, \dfrac{2+(-2)\cdot 1}{1-2}\right) = F(4,0,0)$.

605. *а)* Како је $\overrightarrow{AB} = (3,6,-3)$, $\overrightarrow{AC} = (1,8,-1)$, $\overrightarrow{AD} = (1,5,m-3)$, $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}] = 18(m-2)$, то су тачке A, B, C и D компланарне ако је $m=2$, односно $D(2,7,2)$.

б) Тражено растојање једнако је висини троугла ABD, сл. 189. Како је $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{6}$, $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = (9,0,9)$, $P = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}| = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$, то је $H = \dfrac{2P}{|AB|} = \sqrt{3}$.



Сл. 189.



Сл. 190.

в) Како је $\overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{AB}$, то је $\overrightarrow{AE} = x\cdot\overrightarrow{AB} = (3x,6x,-3x)$. Вектор $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE} = (3x-1, 6x-5, -3x+1)$, нормалан је на вектор $\overrightarrow{AB}$, па је $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE} = 54x-36 = 0$ и $x = \dfrac{2}{3}$. Тада је $\overrightarrow{AE} = (2,4,-2)$ и $E(3,6,1)$.

606. *а)* Ако се праве p и q секу или ако су паралелне, онда припадају једној равни, па су вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ компланарни, а ако су мимоилазне, онда нису (сл. 190). Како је $\overrightarrow{AB} = (2,1,2)$, $\overrightarrow{AC} = (1,3,-1)$, $\overrightarrow{AD} = (1,1,-3)$ и $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}] = -18 \neq 0$, то су праве p и q мимоилазне.

б) Даље је $\overrightarrow{CD} = (0.-2,-2)$ и $\vec{n} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD} = (2,4,-4)$. Вектор $\vec{n}$ је нормалан на правим p и q, па можемо сматрати да лежи на њиховој заједничкој нормали. Нормалне пројекције тачака A и C на заједничку нормалу су тачке M и N, па је најкраће растојање између правих p и q, једнако растојању између тачака M и N, једнако $d = |Pr_{\vec{n}}\overrightarrow{AC}| = \left|\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\vec{n}|}\right| =$

$\left|\dfrac{18}{6}\right| = 3.$

в) $\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CN} \parallel \overrightarrow{CD}$, па постоје $x, y \in R$ такви да је $\overrightarrow{AM} = x\cdot\overrightarrow{AB} = (2x, x, 2x)$ и $\overrightarrow{CN} = y\cdot\overrightarrow{CD} = (0, -2y, -2y)$. Вектор $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = (1-2x, 3-x-2y, -1-2x-2y)$ нормалан је на векторе $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, па је $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN} = 2(1-2x) + 1(3-x-2y) + 2(-1-2x-2y) = -9x - 6y + 3 = 0$ и $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{MN} = 0(1-2x) - 2(3-x-2y) - 2(-1-2x-2y) = -4x + 8y - 4 = 0$. Решење добијеног система једначина је $x = 0$, $y = \dfrac{1}{2}$, па је $\overrightarrow{AM} = (0,0,0)$, $M = A(1,1,1)$, $\overrightarrow{CN} = (0,-1,-1)$ и $N(2,3,-1)$.

Најкраће растојање између мимоилазних правих p и q могло се добити као $d = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$.

607. *а)* $d = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$. *б)* $d = \sqrt{\dfrac{7}{5}}$ (види задатак 603).

608. *а)* $d = \sqrt{22}$. *б)* $d = \dfrac{3}{5}\sqrt{\dfrac{19}{2}}$ (види задатак 605).

609. *а)* $d = \dfrac{34}{\sqrt{65}}$. *б)* $d = \sqrt{6}$ (види задатак 606).

610. *а)* $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \neq 0$. Праве су паралелне и различите.

б) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} \neq 0$, $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0$. Праве припадају једној равни а нису паралелне, значи секу се.

в) $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] \neq 0$. Праве су мимоилазне.

г) Секу се. *д)* Мимоилазне.

ђ) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 0$. Праве се поклапају.

611. *Упутство.* Тачки $M(x,y)$ одговарају следеће симетричне тачке $M_1(x,-y)$ (у односу на осу Ox), $M_2(-x,y)$ (у односу на осу Oy), $M_3(-x,-y)$ (у односу на координатни почетак), $M_4(y,x)$ (у односу на симетралу првог и трећег квадранта) и $M_5(-y,-x)$ (у односу на симетралу другог и четвртог квадранта). Наводимо овим редом решења за прву од задатих тачака, за тачку A: $(2,-5)$, $(-5,2)$, $(-2,-5)$, $(5,2)$, $(-5,-2)$.

612. *а)* $AB = \sqrt{(0+6)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{36+64} = 10$. Остали резултати: *б)* 13, *в)* 6, *г)* 13, *д)* $2\sqrt{2}$, *ђ)* $3\sqrt{10}$, *е)* 3, *ж)* $m^2 + n^2$.

613. Најближа је тачка B и $AB = 5$.

614. $BD = 2\sqrt{13}$.

615. $AS = \sqrt{2} < 3$, тачка A је у кругу, тачка C је на кругу и B је ван круга.

616. Нека је $X(x, 0)$. Тада је $\sqrt{(x-1)^2 + (0-3)^2} = 5$, итд. Одавде је $x = -3$ или $x = 5$, па имамо два решења: $X_1(-3, 0)$ и $X_2(5, 0)$.

617. Тачка која припада симетрали првог и трећег квадранта има једнаке координате, дакле $B(x, x)$, па из $AB = 4$, односно $(x-5)^2 + (x-5)^2 = 4^2$, добијамо: $(x-5)^2 = 8$, па је $x - 5 = 2\sqrt{2}$ или $x - 5 = -2\sqrt{2}$, односно $x = 5 + 2\sqrt{2}$ или $x = 5 - 2\sqrt{2}$. Имамо два решења: $B_1(5 + 2\sqrt{2}, 5 + 2\sqrt{2})$ и $B_2(5 - 2\sqrt{2}, 5 - 2\sqrt{2})$.

618. Нека је $S(x, y)$. Тачка S је једнако удаљена од темена датог троугла, тј. $AS = BS$ и $AS = CS$. Одавде добијамо систем линеарних једначина по x и y. Из $AS = BS$, или још боље, из $AS^2 = BS^2$, добијамо услов: $(x+6)^2 + y^2 = (x+7)^2 + (y-7)^2$. Одавде је $x - 7y = -31$. Из $AS^2 = CS^2$ слично се добије: $7x + y = -17$. Решење система једначина је $x = -3$, $y = 4$, па је $S(-3, 4)$. Слично се добије центар R другог круга $R(2, 4)$, па је $RS = 5$.

619. *а)* $10 + 5\sqrt{2}$, *б)* $23 + \sqrt{17}$, *в)* $10 + \sqrt{13} + \sqrt{181}$, *г)* $13 + 4\sqrt{2} + \sqrt{65}$.

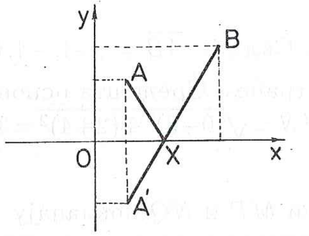
620. $AB = AC$ и $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

621. Косинусном теоремом докажемо да је највећи угао туп.

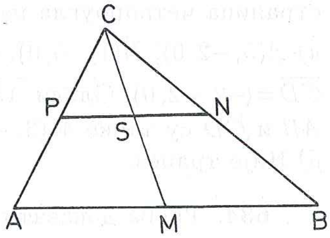
622. *а)* Дате тачке и тачка $C(3, 2)$ одређују правоугли троугао из којег налазимо: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$, па је $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$.
б) $\alpha = 135°$.

623. Нека је $M(x, y)$. Из $AM^2 - BM^2 = 96$ добијамо једнакост $x = 10$, што значи да за свако y важи $x = 10$. Тражени скуп је права нормална на осу Ox.

624. Дати израз можемо написати у облику:
$f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (0-2)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (0-3)^2}$. Тада је $f(x)$ збир растојања тачке $X(x, 0)$ од $A(1, 2)$ и $B(4, 3)$, сл. 191. Познато нам је, из особина симетрије, да ће овај збир бити најмањи када тачка X припада дужи $A'B$, где је A' тачка симетрична са A у односу на осу Ox. Како је $A'(1, -2)$, то је тражена најмања вредност израза једнака: $f(x) = A'B = \sqrt{(4-1)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{34}$.



Сл. 191.



Сл. 192.

625. *а)* $S(-1,4)$, *б)* $S(-3,2)$.

626. Означимо са M, N, P редом средишта страница AB, BC, CA и са T тежиште троугла. Резултати:
а) $M(-4,2)$, $N(-1,1)$, $P(-2,0)$, $T\left(-\frac{7}{3},1\right)$.
б) $M\left(-\frac{7}{2},0\right)$, $N\left(-\frac{9}{2},-4\right)$, $P(-7,-2)$, $T(-5,-2)$.

627. Одредимо средиште S дужи AB, па средишта M и N дужи AS и SB. Резултат: $M(-4,-2)$, $S(-2,-5)$, $N(0,-8)$.

628. *а)* $B(17,13)$, *б)* $A(-11,8)$, *в)* $A(-6,5)$, *г)* $B(-5,-2)$.

629. *а) Први начин.* Нека су темена троугла $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ и $C(x_C,y_C)$. Знамо да је $\frac{x_A+x_B}{2}=7$, $\frac{x_B+x_C}{2}=-4$, $\frac{x_A+x_C}{2}=1$, односно $x_A+x_B=14$, $x_B+x_C=-8$ и $x_A+x_C=2$. Саберемо ове три једнакости и добијемо нову једнакост: $x_A+x_B+x_C=4$. Сада се лако одреди: $(x_A+x_B+x_C)-(x_B+x_C)=x_A=4-(-8)=12$, $x_B=2$, $x_C=-10$. Слично се одреди и y_A, y_B, y_C. Резултат: $A(12,-1)$, $B(2,17)$, $C(-10,-7)$.
б) Други начин. Одредимо тачку S, као средиште дужи NP, сл. 192: $S(1,-5)$. Затим, слично задатку 628, знајући M и S, одредимо $C(6,-16)$. Слично одредимо и остала два темена. Резултат: $A(-6,8)$, $B(-2,4)$.

630. *а)* Средиште дијагонале AC је тачка $S(-2,5)$, па на основу координата тачака B и S налазимо тачку D, јер је тачка S средиште и друге дијагонале: $D(-1,3)$.
б) $D(-3,-7)$, *в)* $D(2,5)$, *г)* $C(5,4)$, *д)* $C(0,7)$, $D(-3,5)$.

631. Слично претходном задатку, одредимо непознато теме. Резултати: *а)* $AC=13$, *б)* $AC=20$.

632. Израчунамо дужине дужи AB, BC и AC и уверимо се да је $AB^2+BC^2=AC^2$, итд. Даље слично задатку 630: $D(-1,1)$.

633. Уведимо трећу координату $z = 0$, па докажимо да су два вектора страница четвороугла паралелна.

а) $A(5,-2,0)$, $B(1,-6,0)$, $C(1,3,0)$, $D(-1,1,0)$. Сада је $\overrightarrow{AB} = (-4,-4,0)$ и $\overrightarrow{CD}=(-2,-2,0)$. Следи $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{CD}$, па је $ABCD$ трапез. Средишта основица AB и CD су тачке $M(3,-4)$ и $N(0,2)$, па је $MN=\sqrt{(0-3)^2+(2+4)^2}=3\sqrt{5}$.
б) Није трапез.

634. Треба доказати да се средишта дужи MP и NQ поклапају.

635. Ако су средишта страница BC и AC, редом тачке $M(0,y)$ и $N(x,0)$, онда координате тачке $C(x_C, y_C)$ налазимо из формуле за средиште дужи. Како је $A(3,6)$ и $N(x,0)$, то је $\dfrac{6+y_C}{2} = 0$, па је $y_C = -6$. Слично, користећи апсцисе тачака $M(0,y)$ и $B(-3,5)$, из $\dfrac{-3+x_C}{2} = 0$, добијамо $x_C = 3$, па је $C(3,-6)$. Ако је, пак, $M(0,x)$ и $N(y,0)$, тада је $C(-3,-5)$.

636. Тражи се тачка $C(x,y)$.

а) $\dfrac{2+\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3}}{1+\frac{3}{7}} = x$, односно $x = \dfrac{3}{2}$ и слично $y = \dfrac{-4+\frac{3}{7}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{1+\frac{3}{7}} = -3$.

б) Из $AC : CB = 1 : 3$, следи $BC : CA = 3$, па је $x = \dfrac{6+3\cdot 2}{1+3} = 3$, $y = \dfrac{9+3\cdot 5}{1+3} = 6$.

в) $C\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$, *г)* $C(1,4)$.

637. Нека је $AM = MN = NB$. Можемо прво одредити тачку N, тако да је $AN : NB = 2 : 1$. Затим, тачка M је средиште дужи AN.
а) $M(-2,6)$, $N(0,4)$, *б)* $M(5,5)$, $N(6,3)$.

638. *а)* $P(7,9)$, $Q\left(\dfrac{17}{2}, 15\right)$, *б)* $P\left(\dfrac{11}{2}, \dfrac{13}{2}\right)$, $Q(10,5)$.

639. *а)* $B(3,4)$, *б)* $C(11,-17)$, *в)* $A(-6,10)$.

640. *а)* Како је $P(x,1)$, то из $\dfrac{-1+5m}{1+m} = 1$, налазимо $m = \dfrac{1}{2}$, па је

$$x = \frac{1+\frac{1}{2}\cdot 4}{1+\frac{1}{2}} = 2.$$ Дакле $P(2,1)$.

б) $P(1,12)$, *в)* $P(4,0)$.

641. Користимо познату особину симетрале угла: $BM : MC = AB : AC$.

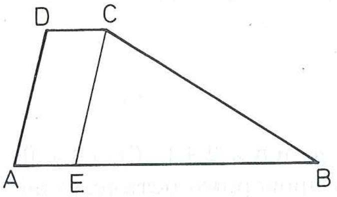
У нашем случају је $AB = 5$ и $AC = 2$, па је тражена тачка $M\left(\frac{15}{7}, \frac{3}{7}\right)$.

642. Претпоставимо да је $AN : NB = m$, па одредимо m, тако да дужина MN буде минимална. Координате тачке N су: $x = \dfrac{-1+2m}{1+m}$, $y = \dfrac{-1+5m}{1+m}$. Тада је $MN^2 = \left(5 - \dfrac{2m-1}{m+1}\right)^2 + \left(1 - \dfrac{5m-1}{m+1}\right)^2 = \dfrac{25m^2+20m+40}{(m+1)^2}$.

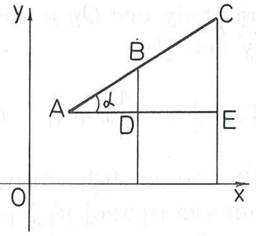
Уведимо нову променљиву $k = \dfrac{1}{m+1}$. Тада имамо: $MN^2 = 5 \cdot \dfrac{5m^2+4m+8}{(m+1)^2} =$
$\dfrac{5}{(m+1)^2}((5m^2+10m+5)+(-6m-6)+9) = \dfrac{5}{(m+1)^2}(5(m+1)^2-6(m+1)+9) =$
$5k^2\left(\dfrac{5}{k^2} - \dfrac{6}{k} + 9\right) = 5(9k^2-6k+5) = 5(9k^2-6k+1+4) = 5(3k-1)^2+20.$

Последњи израз је минималан ако је $3k-1=0$, тј. ако је $k = \dfrac{1}{3}$. Следи да је MN најмање ако је $\dfrac{1}{m+1} = \dfrac{1}{3}$, тј. ако је $m = 2$. Тада је тражена тачка $N(1,3)$.

643. Одредитмо тачку E, тако да је четвороугао $AECD$ паралелограм, сл. 193. (Видети решење задатка 630.) Добијамо: $E(0,-6)$. Сада налазимо тачку B, на основу услова: $AE : EB = 1 : 4$. Резултат: $B(8,-18)$.



Сл. 193.



Сл. 194.

644. *а)* 12, *б)*6, *в)* 19, *г)* 22.

645. Нека је $C(x,y)$. Троугао је једнакокрак, па је $AC = BC$ одакле је $(x-2)^2+(y+2)^2 = (x-6)^2+y^2$, односно $2x+y=7$. Из формуле за површину добијемо: $|2x+4y+12| = 10$, па је $x+2y+6=5$ или $x+2y+6=-5$. Имамо два система линеарних једначина из којих добијамо: $C(5,-3)$ или $C(3,1)$.

646. *а)* $h_a = \dfrac{2P}{a} = 5$, *б)* $h_c = 5$, *в)* $h_b = 2\sqrt{2}$.

647. *а)* *Први начин.* Ако су A, B, C колинеарне тачке, тада је површина „троугла“ ABC једнака нули. Овде: $\pm 2P_\triangle = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 0$, дакле, нема троугла.

б) Други начин. Нека су су A, B, C три тачке једне праве, као на сл. 194. Тада је $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{CE}{DE}$. Међутим, $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, а $\dfrac{CE}{AE} = \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$. Према томе, ако права AB није паралелна са осом Oy, тада су тачке ABC колинеарне ако важи једнакост: $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$. У нашем случају је $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-6}{3} = -2$ и $\dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \dfrac{6}{-3} = -2$.

в) Трећи начин. $\overrightarrow{AB} = (-4, -10, 0)$ и $\overrightarrow{BC} = (-2, -5, 0)$, па је $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$, што значи да су AB и BC паралелене праве, тј. A, B, C су тачке једне праве.

г) Слично претходним случајевима.

648. Покажемо да су A, B, C колинеарне, а такође и A, B, D, итд.

649. *а)* Површина троугла ABC је 4.

б) и *в)* Тачке су колинеарне.

650. *а)* Површина четвороугла $ABCD$ је 8.

б) Све дате тачке су колинеарне.

в) Колинеарне су тачке Q, R и S.

651. *а)* и *е)* Праве су косе и садрже координатни почетак, *в)* и *ж)* представљају осе Oy и Ox, *б)* и *ђ)* паралелене су оси Oy и *г)*, *д)* паралелене су оси Ox.

652. *а)* $y = \dfrac{4}{3}x + 4$, *б)* $y = -\dfrac{1}{2}x$, итд.

653. Тачка $A(2, -6)$ не припада нпр. правој p_1 јер $2\cdot 2 + (-6) - 2 \neq 0$, али припада правој p_3 јер је $-6 = -3\cdot 2$. Слично проверимо остале тачке и праве. Закључак: $A \in p_3$, B не припада ни једној од датих правих. $C \in p_1$ и $C \in p_2$, $D \in p_2$ и $D \in p_4$, $E \in p_1$.

654. *а)* Права пролази кроз координатни почетак.

б) За $y = 0$ је $2x + 10 = 0$, тј. $x = -5$, а за $x = 0$ је $y = 10$. Права сече координатне осе у тачкама $A(-5, 0)$, $B(0, 10)$.

в) $A(-4, 0)$, $B\left(0, -\dfrac{2}{3}\right)$.

655. *а)* Из $3\cdot 1 - 2y - 3 = 0$, следи $y = 0$. Тражена тачка је $A(1, 0)$.

б) $B(-1, -3)$, *в)* $C\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$, *г)* $D(-3, -6)$.

656. *а)* $x = 1$, $y = 3$. *б)* $x + 2 = 0$, $y - 1 = 0$.

в) Оса Oy, тј. $x = 0$ и $y + 10 = 0$.

657. *а)* $y = x$, *б)* $y = x\sqrt{3}$, *в)* $y = -x$, *г)* $y = -\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$.

658. *а)* $\alpha = 45^\circ$, $\beta = -45^\circ$. *б)* $\alpha = -45^\circ$, $\beta = 45^\circ$.
в) $\alpha = -30^\circ$, $\beta = 60^\circ$. *г)* $\alpha = 60^\circ$, $\beta = -30^\circ$.

659. Паралелне су праве *а)* и *г)* јер је $k_a = k_г = \dfrac{1}{5}$. Нормални су парови *б)* и *ђ)* ($k_б = -2$, $k_ђ = \dfrac{1}{2}$ и $k_б \cdot k_ђ = -1$), као и *в)* и *д)*.

660. *а)* $m = -1$, *б)* $m = 2$, *в)* $m = -3$.

661. *а)* $a = 2$, *б)* $a = 1$ или $a = 0$.

662. $y = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$ и $y = -x\sqrt{3}$.

663. *а)* $m = -3$, *б)* $m = -6$, *в)* $m = 3\sqrt{3}$.

664. *а)* $p = 2$, *б)* $p = \dfrac{1}{2}$, *в)* $p = 1$.

665. *а)* $\operatorname{tg}\varphi = 1$, па је $\varphi = 45^\circ$. *б)* $\varphi = 45^\circ$.

в) $tg\varphi = \left|\dfrac{-\dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{2}}{1 - \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{2}}\right| = \left|\dfrac{-\dfrac{13}{6}}{0}\right|$, што није могуће, па $\operatorname{tg}\varphi$ није дефинисан.

Дакле, $\varphi = 90^\circ$. (Заиста $-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{2} = -1$.)
г) $\varphi = 45^\circ$, *д)* $\varphi = \operatorname{arctg} 4$, *ђ)* $\varphi = \operatorname{arctg} 2$, *е)* $\varphi = 60^\circ$.

666. Доведемо дате праве не експлицитни облик, па утврдимо да је: $n_1 = \dfrac{4}{5}$, $n_2 = \dfrac{1}{10}$, $n_3 = -\dfrac{3}{5}$, па је тражена права $2x + 10y - 1 = 0$.

667. Одредимо тачку C, која дели дуж AB у размери $AC : CB = 2 : 3$. То је тачка $C(1, -3)$. Тражена права је $y = -3x$.

668. Средиште дужи AB је $S(4, -1)$. Права OS је $y = -\dfrac{1}{4}x$. Пресечна тачка је $P(-4, 1)$, а угао између правих је $\operatorname{arctg}\dfrac{5}{3}$.

669. *а)* Коефицијенти правца су $k_c = 2$, $k_a = \dfrac{1}{3}$, $k_b = -\dfrac{2}{3}$, па је $\operatorname{tg}\alpha = \left|\dfrac{k_c - k_b}{1 + k_c \cdot k_b}\right| = 8$ и $\alpha = \operatorname{arctg} 8$. Слично $\beta = 45^\circ$, и $\gamma = \operatorname{arctg}\dfrac{9}{7}$.
б) $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$, $\beta = \operatorname{arctg} 3$, $\gamma = 90^\circ$.

670. *а)* Коефицијенти правца су $k_1 = -\frac{3}{2}$ и $k_2 = m$. Из $\left|\frac{m+\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}m}\right| = 1$ $(= \operatorname{tg} 45°)$, добијамо $m = -\frac{1}{5}$ или $m = 5$.
б) 5 или $-\frac{5}{4}$.

671. *а)* Нека је $M(x, y)$ тачка симетрале дужи AB. Тада је $AM = BM$, а одатле је $(x+1)^2 + (y-3)^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2$. Сређивањем добијемо једначину праве: $2x - y = 0$.
б) $x - y - 3 = 0$.

672. *а)* Координате темена A су решења система једначина правих AB и CA: $(x - 3y - 1 = 0$ и $4x - y + 7 = 0)$. То је тачка $A(-2, -1)$. Слично добијамо $B(4, 1)$ и $C(-1, 3)$.
б) $K(0, 3)$, $L(3, -3)$, $M(0, -5)$, $N(-3, 1)$.

673. Тражена тачка је пресек дате праве и симетрале дужи AB. То је тачка $S(2, 2)$.

674. На датој правој одредимо тачке $A(x, 0)$ и $B(0, y)$. Добијемо: $A(5, 0)$, $B\left(0, \frac{60}{k}\right)$. Затим, из $AB = 13$, добијамо: $(0-5)^2 + \left(\frac{60}{k} - 0\right)^2 = 169$. Одавде је $k = 5$ или $k = -5$.

675. Нека је $C(x, y)$. Из формуле за површину добијамо: $2P = 8 = |-x + y - 5|$. Постоје два решења, која добијамо користећи овај услов и једначину $2x + y - 4 = 0$, дате праве. Из система једначина $(2x + y - 4 = 0$ и $8 = -x + y - 5)$ и $(2x - y - 4 = 0$ и $8 = -x + y - 5)$ добијамо $C(-3, 10)$ или $C\left(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

676. Да, заједничка тачка је $(2, 1)$.

677. Ако је тачка на оси Oy, онда је $x = 0$. Тада је из датих једначина: $y = -\frac{m+6}{2m+3} = \frac{2-m}{m-1}$. Одавде је $m = 0$ или $m = 6$.

678. Тражена права је $y = kx + n$, па како она пролази кроз тачку $(1, 1)$, добијамо: $1 = k + n$, тј, $n = 1 - k$, и једначина постаје: $y = kx + 1 - k$. Апсцисе x_1 и x_2 пресечних тачака ове праве са датим правим су $x_1 = \frac{k-6}{k-2}$ и $x_2 = \frac{k-4}{k+1}$. Сада из $\frac{k-6}{k-2} + \frac{k-4}{k+1} = 2$, налазимо $k = \frac{2}{3}$. Тражена права је $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. Права $x = 1$ није тражена права.

679. Нека је $P(x, y)$ тражена тачка. Тада важи једнакост: $MP^2 + NP^2 = (x+5)^2 + y^2 + (x+3)^2 + (y-4)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 16x - 8y + 50$. Из $2x - y - 10 = 0$ је $y = 2z - 10$, па кад сменимо у претходну једнакост, добијемо: $MP^2 + NP^2 = 10x^2 - 80x + 330 = 10(x^2 - 3x + 33) = 10(x-4)^2 + 170$. Ово је најмање ако је $x - 4 = 0$ тј. $x = 4$. Резултат $P(4, -2)$.

680. Нека су $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$ две произвољне тачке дате праве. Доказаћемо да је $\vec{n} \perp \overrightarrow{MN}$, тј. да је $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$. Како су M и N тачке дате праве, то је $Ax_i + By_i + C = 0$, $i = 1, 2$, односно (случај $B \neq 0$) $y_1 = -\dfrac{A}{B}x_1 - \dfrac{C}{B}$ и $y_2 = -\dfrac{A}{B}x_2 - \dfrac{C}{B}$. Вектор $\overrightarrow{MN}$ изразићемо преко координата: $\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \left(x_2 - x_1, -\dfrac{A}{B}(x_2 - x_1)\right) = (x_2 - x_1) \cdot \left(1, -\dfrac{A}{B}\right)$.

Према томе: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MN} = (A, B) \cdot (x_2 - x_1)\left(1, -\dfrac{A}{B}\right) = (x_2 - x_1)\left(A + B \cdot \left(-\dfrac{A}{B}\right)\right) = (x_2 - x_1)(A - A) = 0$. Дакле $\vec{n} \perp \overrightarrow{MN}$, па је $\vec{n}$ нормално на дату праву. Слично се доказује случај $B = 0$, $A \neq 0$.

681. *а)* $3x - y - 2 = 0$, *б)* $3x + 7y + 2 = 0$, *в)* $x + 3 = 0$.

682. *а)* $x + y + 2 = 0$, $x - 5y - 4 = 0$, $5x - y - 20 = 0$.
б) $3x - y - 4 = 0$, $3x + 5y - 34 = 0$, $3x + 2y - 1 = 0$.

683. Тежошна линија t_a је права одређена тачком A и средиштем M дужи BC. Како је $M(2, 9)$, то је једначина праве t_a: $x + 2y - 20 = 0$. Остале тежишне линије: $2x + y - 16 = 0$, $x + y - 12 = 0$.

684. *а)* $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{1} = 1$, *б)* $\dfrac{x}{-1} + \dfrac{y}{1} = 1$, *в)* $\dfrac{x}{-4} + \dfrac{y}{20} = 1$, итд.

685. $m = 2$, $n = 6$. Једначина праве је: $3x + y - 6 = 0$. Површина троугла је 6.

686. Тражимо једначину праве $\dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{n} = 1$. Како је тачка N на правој, то је $\dfrac{6}{m} - \dfrac{1}{n} = 1$. Из дате површине добијамо другу једначину: $|m \cdot n| = 6$. Решавањем добијеног систем једначина долазимо до решења: $m_1 = -3(1 + \sqrt{5})$, $n_1 = \dfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ и $m_2 = 3(\sqrt{5} - 1)$, $n_2 = \dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Тражена права је $x(\sqrt{5} + 1) + 6y(\sqrt{5} - 1) - 12 = 0$ или $x(\sqrt{5} - 1) + 6y(\sqrt{5} + 1) + 12 = 0$.

687. *а)* $y = x + 1$, *б)* $y = x\sqrt{3} + 1$, *в)* $y = -x\sqrt{3} + 1$; *г)* $y = -x + 1$.

688. *а)* Коефицијент правца дате праве p је $k = 2$, па је тражена једначина: $y + 6 = 2(x - 2)$, односно $y = 2x - 10$.

б) $3x - y + 16 = 0$.
в) Како је $k = \frac{3}{4}$, то тражена права има облик: $3x - 4y + c = 0$. Заменимо координате дате тачке $V(2,5)$ и добијемо: $6 - 20 + c = 0$, одакле је $c = 14$. Тражена права је $3x - 4y + 14 = 0$.
г) $3x - 2y - 12 = 0$.

689. *а)* Коефицијент правца дате праве p је $k_1 = \frac{3}{7}$, а коефицијент k нормале добићемо из услова: $k \cdot k_1 = -1$. Дакле $k = -\frac{7}{3}$, па је тражена права $y + 1 = -\frac{7}{3}(x - 5)$, односно $7x + 3y - 32 = 0$.
б) $4x - 7y + 26$, *в)* $2x + 3y = 0$, *г)* $3x + y - 23 = 0$.

690. *а)* За праву m је $k_1 = 4$. Ако је коефицијент правца тражене праве једнак k, тада је $\left|\frac{k - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = \operatorname{tg} 45°$, тј. $\left|\frac{k-4}{1+4k}\right| = 1$. Добијамо $k = -\frac{5}{3}$ или $k = \frac{3}{5}$. Једначина тражене праве је: $5x + 3y - 24 = 0$ или $3x - 5y + 6 = 0$.
б) $x + 5y - 14 = 0$ или $5x - y + 8 = 0$.

691. *а)* Поставимо нормалу кроз M на p. Из $k \cdot (-1) = (-1)$ је $k = 1$, па је једначина нормале n: $y + 2 = 1(x - 2)$, односно $x - y - 4 = 0$. Пресек правих p и n, тј. решење система којег одређују једначине ових правих, даје тражену тачку: $P(1, -3)$.
б) $P(-1, 0)$, *в)* $(0, -1)$.

692. *а)* Као у претходном задатку, нађемо тачку S на правој s, најближу тачки A. То је тачка $S\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, Затим, као у задатку 628, одредимо координате тачке B, јер је $AS = SB$. То је тачка $B(2, 0)$.
б) $S(-3, 1)$ и $B(-4, -1)$.

693. Упадни зрак, тј. права AB, има једначину: $2x - y - 2 = 0$. Тачка C, у којој зрак пада на дату праву је пресечна тачка зрака и праве, тј. решење система једначина: $2x - y - 2 = 0$ и $x - 2y + 2 = 0$. То је тачка $C(2, 2)$. Одредимо угао под којим зрак пада на дату праву: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 - k_1 k_2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 1} = \frac{3}{4}$. Коефицијент правца одбијеног зрака добијамо из услова $\frac{k - \frac{1}{2}}{1 + \frac{k}{2}} = -\frac{3}{4}$. Одавде је $k = -\frac{2}{11}$, па је тражена једначина: $y - 2 = -\frac{2}{11}(x - 2)$, односно: $2x + 11y - 26 = 0$.

694. Одредимо тачку B_1, симетричну са B у односу на дату праву (слично задатку 692): $B_1\left(-\frac{19}{5}, \frac{58}{5}\right)$. Права AB_1, чија је једначина $2x + y - 4 = 0$ је полазни светлосни зрак. Једначину одбојног зрака одредимо као у претходном задатку: $x - 2y + 9 = 0$.

695. Слично претходном задатку. *а)* $4x - 5y + 1 = 0$ и $5x - 4y + 2 = 0$. *б)* $62x - 41y + 20 = 0$ и $73x + 14y + 31 = 0$.

696. Користимо једначину прамена у облику: $2x + 5y + 8 + n(3x - 4y - 6) = 0$. (Узели смо $m = 1$.) После сређивања добијемо: $(2 + 3n)x + (5 - 4n)y + (8 - 6n) = 0$.

а) $\dfrac{8 - 6n}{4n - 5} = -4$, па је $n = \dfrac{6}{5}$. Тражена једначина је: $28x + y + 4 = 0$.

б) Заменимо: $x = 1$, $y = -1$ и добијемо: $n = -5$. Права је: $13x - 25y - 38 = 0$.

в) $2 + 3n = 0$, итд: $23y + 36 = 0$.

г) $k = -\dfrac{3n + 2}{5 - 4n} = 1$, итд: $23x - 23y - 34 = 0$.

д) $\left|\dfrac{k - 4}{1 + 4k}\right| = 1$, где је $k = -\dfrac{3n + 2}{5 - 4n}$, итд. Имамо два решења: $69x - 115y - 174 = 0$ и $115x + 69y + 118 = 0$.

697. Дату једначину можемо представити у облику: $2x + y + 4 + m(3x - y + 1) = 0$. Ово је једначина прамена правих, које пролазе кроз пресек правих $2x + y + 4 = 0$ и $3x - y + 1 = 0$. Пресечна тачка је $P(-1, -2)$.

698. *а)* $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y}{-3}$;

б) $\vec{p} = \dfrac{1}{6}(3, 2)$, па је права: $\dfrac{x + 2}{3} = \dfrac{y - 2}{2}$.

в) Једнакост $\dfrac{x - 3}{0} = \dfrac{y + 3}{2}$ има смисла само ако је $x - 3 = 0$ – то је управо тражена једначина.

г) $y = 0$.

699. *а)* $x = 2 - t$, $y = -3 + 2t$; *б)* $\vec{m} = \dfrac{1}{2}(1, -2)$, па је $x = t$, $y = -2t$; *в)* $x = 3$, $y = 1 + 2t$.

г) $\vec{m} = (0 - 2, 3 - (-1)) = (-2, 4) = 2(-1, 2)$, па имамо: $x = -3 - t$, $y = 2t$.

700. *а)* Сменимо x и y из p у q: $2(-1 + t) - (2 - 3t) - 1 = 0$. Одавде је $t = 1$, па је $x = 0$, $y = -1$. Пресечна тачка је $P(0, -1)$.

б) Коефицијент правца је $k = \dfrac{-3}{1} = -3$, па је: $y - 0 = -3(x + 2)$, односно $y = -3x - 6$.

в) Видети *б)*: $y - 2 = \dfrac{1}{3}(x - 2)$, односно $x - 3y + 4 = 0$.

г) Нека је N пројекција тачке A на праву p (подножје нормале). Како је $N \in p$, то је $N(-1+t, 2-3t)$. Тада је вектор $\overrightarrow{AN} = (-1+t-10, 2-3t-(-1)) = (t-11, 3-3t)$ нормалан на вектор правца $\vec{p} = (1, -3)$, па је $\vec{p} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$. Дакле: $t - 11 - 9 + 9t = 0$, па је $t = 2$. Тада је тражена пројекција: $N(1, -4)$.

701. *а)* Тачка A не припада ни једној од датих висина, што значи да су дате висине h_b и h_c. Права AC је нормална на висину h_c; то је права: $y - 2 = -\frac{3}{2}(x - 1)$, односно $3x + 2y - 7 = 0$. Слично добијемо једначину странице AB: $x - y + 1 = 0$. Даље, одредимо пресек правих h_c и AC, то је тачка $C(7, -7)$. Слично добијемо $B(-2, -1)$, па је трећа страница троугла BC: $2x + 3y + 7 = 0$.
б) Слично претходном задатку, одредимо најпре координате тачака A и B. То су: $A(1, -1)$ и $B(5, 3)$, итд. Једначине страница су: $2x + y - 13 = 0$ и $4x - y - 5 = 0$.
в) $4x - y - 7 = 0$, $x + 3y - 31 = 0$, $x + 5y - 7 = 0$.
г) Ако је M средиште странице BC, тада је права BC паралелна правој NP, итд. Једначине страница су: $2x - y = 0$, $x - 3y - 15 = 0$ и $3x + y - 25 = 0$.

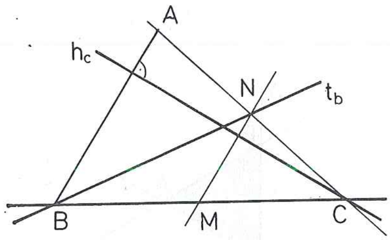
702. Постоје две такве праве: једна је паралелна са MN, то је права $4x + y - 6 = 0$, друга садржи средиште $S(3, -1)$ дужи MN, то је права: $3x + 2y - 7 = 0$.

703. $H(12, 19)$.

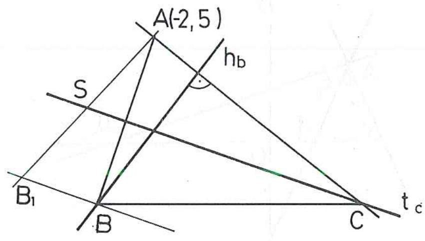
704. Прво се одреди теме у ком се секу дате странице, затим средиште странице наспрам тог темена (користећи дато тежиште). Сада можемо написати једначину средње линије, итд. Резултат: $x - y + 3 = 0$.

705. Задатак ћемо прво решити конструктивно, сл. 195. Права BC сече дату висину у C и дату тежишну линију у B. Права AB је нормална на h_c. Одредимо средиште M странице BC. Права кроз M, паралелна са AB, је средња линија и сече тежишну линију t_b у средишту N странице AC. Даље, кад имамо C и N, лако одредимо A. На описани начин добијемо најпре: $B(-2, -1)$ и $C(4, 1)$. Затим, средиште дужи BC, тачку $M(1, 0)$. Права MN је нормална на h_c, па има једначину: $y = \frac{3}{2}(x - 1)$. Она сече праву t_b у тачки $N(3, 3)$. Права AC је одређена тачкама C и N и њена једначина је $2x + y - 9 = 0$. Једначина треће странице, праве AB, која је паралелна са MN, гласи $3x - 2y + 4 = 0$.

706. Као у претходном задатку, прво ћемо одредити конструктивно решење. Права AC је нормална на h_b. Пресек ове праве и праве t_c одређује теме C. Затим, изаберемо произвољну тачку S праве t_c и, користећи се формулом за средиште дужи, одредимо тачку B_1, тако да је S средиште дужи AB_1. Права кроз B_1, паралелна са t_c, сече h_b у тачки B. Сада је лако написати једначине правих AB и BC, сл. 196. Редом рачунамо: AC: $3x+2y-4=0$, затим тачка $C(2,-1)$. Можемо уместо произвољне тачке S узети тачку C, па је $B_1C = CA$. Тада је $B_1(6,-7)$. Права BB_1 има једначину: $4x+5y+11=0$. Сада добијамо $B(1,-4)$. Коначно, једначине правих AB и BC су: $3x+y+1=0$ и $3x-y-7=0$.



Сл. 195.



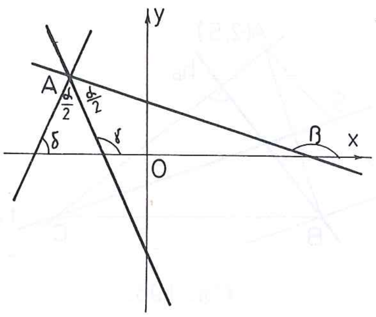
Сл. 196.

707. *а)* Једначину дијагонале BD нађемо као симетралу дужи AC (видети задатак 671): $x+2y-9=0$. Затим, као у задатку 690, одредимо једначине правих AB и AD (које са BD одређују углове од 45°). Ове праве, у пресеку са BD, одређују темена B и D. То су тачке $(1,4)$ и $(5,2)$.
б) Једначина праве AB је: $x-3y+11=0$. Задатак има два решења, јер тачке C и D могу бити са једне или са друге стране праве AB. Треба написати једначине правих AD и BC (нормалних на AB), па једначине дијагонала AC и BD (секу AB под углом од 45°). У пресецима добијамо темена квадрата: $C(5,2)$, $D(2,1)$ или $C(3,8)$, $D(0,7)$.
в) Најпре нађемо једначину дијагонале BD ($BD \perp AC$), па једначине правих AB и BC, итд. Решења су: $A(-1,0)$, $C(3,-8)$, $D(5,-2)$.

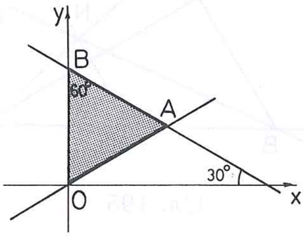
708. Једначина дијагонале BD је $4x-5y-3=0$ (видети задатак 671). На њој одређујемо тачке које су од средишта $O(2,1)$ дужи AC удаљене за $AC=\sqrt{164}$. То су тачке чије координате задовољавају услов: $(x-2)^2+(y-1)^2=164$. Ова једначина и једначина праве BD чине систем чија решења дају координате тачака B и D, а то су: $B(12,9)$ и $D(-8,-7)$.

709. Пресечна тачка датих правих је $A(-4,4)$. Нека су β, γ и δ редом углови који са осом Ox одређују праве AB, AC и AD, сл. 197. Очигледно је $\beta = \gamma + \dfrac{\alpha}{2}$, као спољашњи угао троугла, а из истих разлога је $\gamma = \delta + \dfrac{\alpha}{2}$. Следи да је $\beta+\delta = 2\gamma$, па је $\operatorname{tg} 2\gamma = \operatorname{tg}(\beta+\delta)$, односно: $\dfrac{2\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}^2\gamma} = \dfrac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\delta}{1-\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\delta}$. Знамо да је $\operatorname{tg}\gamma = -2$, $\operatorname{tg}\beta = -\dfrac{1}{3}$ и $\operatorname{tg}\delta = k$. Заменимо у добијену једнакост, одакле је $k=3$. Дакле, једначина странице AD је

$y = 3x + 16$. Страница CD је паралелна са AB, па је њена једначина: $y = -\frac{1}{3}x + n$. Уз услов $E \in CD$, добијемо $n = -4$. Дакле $y = -\frac{1}{3}x - 4$ је једначина странице CD. Сада је лако израчунати $C(0, -4)$ и једначину странице BC: $y = 3x - 4$.



Сл. 197.



Сл. 198.

710. Тачка B је пресек дате праве са осом Oy, јер ова права сече осу Ox под углом од $150°$, сл. 198. Дакле: $B(0, 2)$. Једначина праве OA је облика $y = kx$, а k ћемо одредити из услова: $\dfrac{k + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{k\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$, јер је $\sphericalangle OAB = 60°$. Одавде је $k = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Једначина праве OA је $y = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$. Пресек ове и дате праве одређује тачку $A(\sqrt{3}, 1)$.

711. *а)* $\dfrac{5x - 12y + 26}{-\sqrt{5^2 + 12^2}} = 0$, односно $-\dfrac{5}{13}x + \dfrac{12}{12}y - 2 = 0$.

б) $\dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y - 1 = 0$, *в)* $-\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}y - \dfrac{3}{2} = 0$, *г)* $\dfrac{1}{\sqrt{10}}x + \dfrac{3}{\sqrt{10}}y - \dfrac{4}{\sqrt{10}} = 0$,

д) $\dfrac{7}{5\sqrt{2}}x + \dfrac{1}{5\sqrt{2}}y - \dfrac{4\sqrt{2}}{5} = 0$, *ђ)* $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y - 3\sqrt{2} = 0$.

712. *а)* $(-1, 2) \cdot (x, y+2) = 0 \iff -x + 2(y+2) = 0$, односно: $-x + 2y + 4 = 0$. *б)* Права има облик: $1 \cdot x + 4 \cdot y + c = 0$. Заменимо координате дате тачке: $2 + 8 + c = 0$, одакле је $c = -10$, па је тражена једначина: $x + 4y - 10 = 0$. *в)* $y + 3 = 0$.

713. *а)* Нормални вектор праве $2x + 3y + 1 = 0$, а самим тим и тражене праве је $\vec{n} = (2, 3)$, па је тражена једначина: $(2, 3) \cdot (x - 3, y + 1) = 0$, односно $2x + 3y - 3 = 0$.

б) $x - 2y + 4 = 0$.

714. *а)* $p = \left|\dfrac{-10}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = 2$, *б)* $p = 2\sqrt{2}$, *в)* $p = \sqrt{5}$.

715. *а)* $h_A = \left|\dfrac{6\cdot 2+8\cdot 5+3}{\sqrt{6^2+8^2}}\right| = \dfrac{11}{2}$, *б)* $h_B = \sqrt{5}$, *в)* $h_V = 4$, *г)* $h_G = 1$.

716. Једначина праве кроз тачку A је: $y - 3 = k(x+4)$, или $kx - y + (4k+3) = 0$. Растојање од координатног почетка је (видети задатак 714): $\dfrac{|4k+3|}{\sqrt{k^2+1}} = 5$. После квадрирања добијамо једначину: $9k^2 - 24k + 16 = 0$, а одавде је: $k = \dfrac{4}{3}$. Тражена права је: $4x - 3y + 25 = 0$.

717. Слично претходном задатку: *а)* $3x - 4y - 3 = 0$, *б)* $12x - 5y + 7 = 0$.

718. Странице $x-y+1=0$ и $3x-4y+6=0$ секу се у тачки $A(2,3)$, па су тражене висине одстојања тачке A од правих $x-y-3=0$ и $3x-4y-7=0$. То су: $h_1 = 2\sqrt{2}$ и $h_2 = \dfrac{13}{5}$.

719. *а)* Изаберемо тачку на првој правој. (За $x = 0$ је $y = 3$.) Тражено растојање је $d = \left|\dfrac{3\cdot 0+4\cdot 3+13}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = 5$.

б) Као у задатку 714 израчунамо растојања координатног почетка од датих правих. Нормални облици датих правих су: $-\dfrac{3}{\sqrt{10}}x + \dfrac{1}{\sqrt{10}}y - \dfrac{\sqrt{10}}{3} = 0$ и $-\dfrac{3}{\sqrt{10}}x + \dfrac{1}{\sqrt{10}}y - \dfrac{\sqrt{10}}{4} = 0$. На основу коефицијената уз x и y, закључујемо да ус нормални вектори ових правих, из координатног почетка, окренути у истом смеру, па је: $d = p_1 - p_2 = \dfrac{\sqrt{10}}{3} - \dfrac{\sqrt{10}}{6} = \dfrac{\sqrt{10}}{6}$.

в) Координатни почетак је између датих правих, па је $d = p_1 + p_2 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. (Видети решење *б)*.)

г) $d = 3$.

720. Дату праву доведемо на облик $-\dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y - \dfrac{1}{5} = 0$. Тражена права је: $-\dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y - \left(\dfrac{1}{5}+3\right) = 0$ или $-\dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y - \left(\dfrac{1}{5}-3\right) = 0$, односно: $4x + 3y + 16 = 0$ или $4x + 3y - 14 = 0$.

721. *а)* Из нормалних облика датих правих утврдимо да је коор-

динатни почетак између њих и $p_1 = 1$, $p_2 = \frac{5}{2}$. Код тражене праве је $p = \frac{p_2 - p_1}{2} = \frac{3}{4}$, па њену једначину одређујемо као у претходном задатку: $12x - 16y - 15 = 0$.
б) Координатни почетак није између датих правих па је $p = \frac{p_1 + p_2}{2}$, итд. Решење: $8x - 4y - 17 = 0$.

722. *а)* $\frac{12x+9y-17}{\sqrt{12^2+9^2}} = \pm\frac{3x+4y+11}{\sqrt{3^2+4^2}}$, односно $\frac{12x+9y-17}{15} = \pm\frac{3x+4y+11}{5}$. Једначине симетрала углова су: $21x + 21y + 16 = 0$ и $3x - 3y - 50 = 0$.
б) $x + 3y - 4 = 0$ и $3x - y + 11 = 0$, *в)* $2x - y - 7 = 0$ и $x + 2y - 11 = 0$.
г) $y = 6$ и $x = 1$, *д)* $x - 3y + 13 = 0$ и $3x + y - 11 = 0$, *ђ)* $y = 1$ и $x = 5$.

723. Једначине симетрала углова одређених датим правим су: $x - y - 2 = 0$ и $x + y + 2 = 0$. Имамо две тачке, као решење задатка: $A(2, 0)$ и $B(-2, 0)$.

724. Једначине правих AC и BC су: $7x - 4y = 0$ и $8x - y - 25 = 0$. Симетрале углова одређених овим правим су: $x+3y-25 = 0$ и $3x-y-5 = 0$. Једначина праве AB је $x+3y = 0$, што значи да је $x+3y-25 = 0$ симетрала спољашњег угла, а $3x - y - 5 = 0$ је тражена симетрала угла ACB.

725. Кеко је $AB = BC = \sqrt{10}$ и $AC = \sqrt{8}$, то је $\sphericalangle ABC$ најмањи. Даље, слично претходном задатку, добијемо тражену симетралу: $x + y - 5 = 0$.

726. Као у задатку 716 одредимо једначине ових правих: $3x+4y-25 = 0$ и $4x - 3y - 25 = 0$. Оне имају коефицијенте праваца: $k_1 = -\frac{3}{4}$ и $k_2 = \frac{4}{3}$. Како је $k_1 \cdot k_2 = -1$, то је тражени угао прав.

727. Користимо једначину прамена правих (видети задатак 696): $x + 2y - 11 + m(2x - y - 2) = 0$, односно $(2m + 1)x + (2 - m)y - (2m + 11) = 0$. Из услова $\frac{|2m + 11|}{\sqrt{(2m + 1)^2 + (2 - m)^2}} = 5$, добијамо $m = \frac{2}{11}$, па је тражена права: $3x + 4y - 25 = 0$.

728. Нека је тражена тачка $P(a, b)$. како она припада правој $x+3y = 0$, то је $a = -3b$, па је растојање $OP = \sqrt{a^2 + b^2} = |b\sqrt{10}|$. Растојање тачке P од дате праве је $\frac{|a - 3b - 10|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|-6b - 10|}{\sqrt{10}}$. Сада, из $|b\sqrt{10}| = \frac{|-6b - 10|}{\sqrt{10}}$, односно из $|10b| = |-6b - 10|$, добијамо $b_1 = -\frac{5}{8}$ и $b_2 = \frac{5}{2}$. Тражена тачка је $\left(\frac{15}{8}, -\frac{5}{2}\right)$ или $\left(-\frac{15}{8}, \frac{5}{2}\right)$.

729. Тражена тачка припада симетрали дужи AB, а то је права $x - y - 5 = 0$. (Видети задатак 671.) Ако је $P(a, b)$ тражена тачка, тада је $a = b + 5$, па из $\frac{|2a + b - 3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, тј. из $|3b + 7| = 5$, добијамо: $b_1 = -\frac{2}{3}$ и $b_2 = -4$. Тражена тачка је $\left(\frac{13}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ или $(1, -4)$.

730. Страница квадрата је двоструко растојање дате тачке S од дате праве: $a = \frac{12}{\sqrt{10}}$. Даље, као у задатку 720, одредимо страницу квадрата, која је са оне стране дате праве, са које је и координатни почетак (нацртајте слику!): $x+3y+7 = 0$. Друге две странице су нормалне на ову праву, па имају облик: $3x - y + C = 0$. Непознато C одредимо из услова да је тачка S од ове праве удаљена $\frac{6}{\sqrt{10}}$. Тако добијемо праве: $3x - y + 9 = 0$ и $3x - y - 3 = 0$.

731. *а)* $(x+2)^2+y^2 = 9$, *б)* $(x+5)^2+(y+1)^2 = 18$, *в)* $x^2+(y-2)^2 = \frac{4}{9}$.

732. *а)* $S(2, -4)$, $r = 6$, јер је $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 36$;
б) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{9}{4}$, $r = \frac{3}{2}$, $S\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$,
в) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$, $r = \frac{5}{2}$, $S\left(\frac{3}{2}, 0\right)$,
г) Најпре једначину поделимо са 9 и добијемо $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y = \frac{31}{9}$, па је $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = 4$, тј. $r = 2$, $S\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$,
д) $x^2 + (y + 5)^2 = 139$, $r = 13$, $S(0, -5)$,
ђ) Једначина представља тачку $O(0, 0)$, јер је задовољена само за $x = 0$ и $y = 0$.

733. Тачка A је ван круга, јер заменом координата у једначину круга добијамо: $(2-3)^2+(5-2)^2 = 1^2+3^2 = 10 > 9$. Ван круга су још B и D. Тачке C и F су на кругу, јер, нпр. за тачку C је: $(3 - 3)^2 + (5 - 2)^2 = 0^2 + 3^2 = 9$. Тачке E и G су у кругу.

734. Утврдићемо растојање центра датог круга од датих правих и упоредити га са полупречником. Дати круг је: $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$, па је $S(1, 3)$ и $r = 3$, па је $h_p = \sqrt{5} < 3$, што значи да је права p сечица круга. Даље је $h_q = 3$, па је q тангента и $h_r = \frac{16}{\sqrt{13}} > 3$, па дати круг и права r немају заједничких тачака.

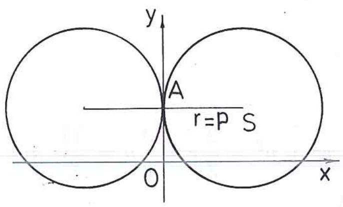
735. *а)* Центар првог круга је $S_1(1, 3)$, а другог $S_2(-3, -5)$, и полупре-

чници су $r_1 = 4$ и $r_2 = \sqrt{10}$. Како је $S_1S_2 = \sqrt{4^2+8^2} = 4\sqrt{5}$ и $4\sqrt{5} \approx 8,9 > 4+\sqrt{10}$, односно $S_1S_2 > r_1 + r_2$, закључујемо да је мањи круг ван већег и немају заједничких тачака.
б) $S_1S_2 = \sqrt{18}$, а $4 - 1 < \sqrt{18} < 1 + 4 = r_1 + r_2$, па се кругови секу.
в) Секу се.
г) $S_1S_2 = 5 = 2 + 3 = r_1 + r_2$, па се кругови додирују.

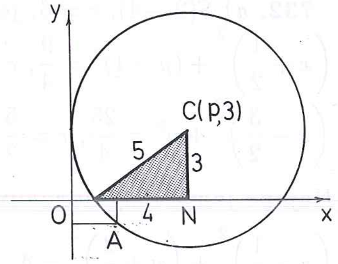
736. *а)* Како је $S(2, 4)$, тј. $p = 2$, $q = 4$, једначина круга је: $(x-2)^2+(y-4)^2 = r^2$. Полупречник r израчунамо тако што у ову једначину заменимо координате тачке M. Дакле из: $(4-2)^2+(-1-4)^2 = r^2$, добијемо: $r^2 = 29$, па је тражени круг: $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 29$.
б) $x^2 + y^2 = 50$, *в)* $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 10$.

737. Центар круга је средиште S сате дужи.
а) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 10$, *б)* $x^2 + (y+3)^2 = 5$.

738. Очигледно је A додирна тачка круга и осе Oy, па је $q = 2$. Сем тога је $|p| = r = 3$, сл. 199, па је тражени круг: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$ или $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 9$.



Сл. 199.



Сл. 200.

739. Слично претходном задатку: *а)* $x^2 + y^2 - 10y = 0$,
б) $x^2 + y^2 + 12x = 0$.

740. *а)* Дати круг је $(x-2)^2 + y^2 = 9$. Његов центар је $C(2, 0)$ и полупречник $r_1 = 3$. Тражени круг мора задовољавати један од услова: $r + r_1 = CS$ или $r - r_1 = CS$, јер је тачка S ван датог круга. Како је $CS = \sqrt{(5-2)^2 + (4+0)^2} = 5$, следи да је $r = 2$ или $r = 8$. Тражени круг је: $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 4$ или $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 64$.
б) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$ или $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 49$.
в) Тачка S је у кругу k. Решења су: $(x-2)^2+(y+1)^2 = 4$, $(x-2)^2+(y+1)^2 = 144$.

741. Полупречник је растојање тачке C од праве p.
а) $r = h_c = \left|\dfrac{3\cdot 3 + 2 - 4}{\sqrt{3^2+2^2}}\right| = \dfrac{7}{\sqrt{13}}$, па је тражени круг: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = \dfrac{49}{13}$.

б) $(x+4)^2+(y-2)^2=16$, *в)* $x^2+y^2=\dfrac{5}{4}$, *г)* $(x-2)^2+(y-2)^2=5$.

742. Слично задатку 738, важи услов: $r=|q|$ и $q=2p$. Решења су: $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ и $(x+1)^2+(y+2)^2=4$.

743. Задатак има четири решења, од којих је једно приказано на сл. 200. Тачка N је средиште тетиве, па из осенченог троугла рачунамо: $q^2=5^2-4^2=9$. Следи да је $q=3$ или $q=-3$. Ако је $q=3$, имамо једначину: $(x-p)^2+(y-3)^2=25$. Заменимо x и y координатама дате тачке A, па је $(2-p)^2=9$. Одавде је $2-p=3$ или $2-p=-3$, па је $p=-1$ или $p=5$. За $q=-3$ добијамо $p=2+\sqrt{21}$ или $p=2-\sqrt{21}$. Тражени кругови су: $(x+1)^2+(y-3)^2=25, (x-5)^2+(y-3)^2=25$, $\left(x-2-\sqrt{21}\right)^2+(y-3)^2=25$ и $\left(x-2+\sqrt{21}\right)^2+(y-3)^2=25$.

744. Очигледно, уписани круг додирује осу Ox у координатном почетку, па је $p=0$ и $q=r$. Одстојање тачке $C(0,r)$ од дате праве је полупречник траженог круга: $r=\dfrac{|-4r+36|}{\sqrt{3^2+4^2}}$. Одавде је $r=4$, па је круг: $x^2+(y-4)^2=16$.

745. Симетрала дужи AB (видети задатак 671), у пресеку са датом правом, одређује центар круга. Резултати: *а)* $x^2+(y-6)^2=10$, *б)* $(x+1)^2+y^2=5$, *в)* $(x+2)^2+(y-1)^2=34$, *г)* $(x+1)^2+y^2=1$.

746. Центар круга је пресечна тачка симетрала дужи AB и AC (видети задатак 671). Решења су: *а)* $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{9}{2}\right)^2=\dfrac{65}{2}$, *б)* $(x-3)^2+(y+1)^2=5$, *в)* $(x+1)^2+(y-1)^2=25$; *г)* $(x-9)^2+(y-1)^2=50$.

747. Најпре одредимо координате темена, па поступимо као у претходном задатку. Решење: $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}$.

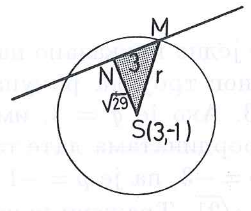
748. Нормала кроз T сече две дате паралелне праве. Једна пресечна тачка је T, а друга $M(-6,-3)$. Средиште дужи MT је центар траженог круга: $(x+2)^2+(y+1)^2=20$.

749. Центар круга је пресек симетрале дужи AT и нормале на дату праву у тачки T. Решење: $\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2=\dfrac{25}{2}$.

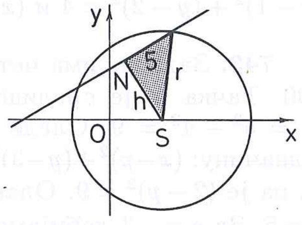
750. $(x-3)^2+(y-5)^2=25$.

751. Подножје N нормале из S на дату праву је средиште тетиве, сл.

201. $SN = h_S = \left|\dfrac{2\cdot 3 - 5\cdot(-1) + 18}{\sqrt{2^2+5^2}}\right| = \sqrt{29}$. Из осенченог круга налазимо: $r^2 = SN^2 + 3^2 = 38$, па је тражена једначина: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 38$.



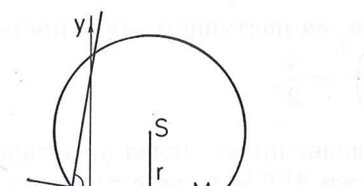
Сл. 201.



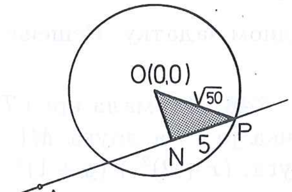
Сл. 202.

752. Према сл. 202 налазимо: $SN = \sqrt{r^2 - 5^2} = \sqrt{225} = 15$. Даље, како је центар круга $S(p,0)$, то из $h_S = SN = 15 = \left|\dfrac{3p - 4\cdot 0 + 24}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|$, добијамо $|3p - 24| = 75$. Решења су $p = 17$ или $p = -33$. Тражена тачка је $S(17,0)$ или $S(-33,0)$.

753. Поменута нормала има једначину $x + 7y - 13 = 0$, па је $N(-1,2)$. Нека је T тачка додира круга са осом Ox, сл. 203. Слично задатку 738, закључујемо да тачка T има координате p и 0, а центар круга је $S(p,r)$. Уочимо пресечну тачку $P(13,0)$ праве MN са осом Ox. На основу потенције тачке P према траженом кругу, важи једнакост: $PM\cdot PN = PT^2$. Како је $PM = 5\sqrt{2}$ и $PN = 10\sqrt{2}$ (растојање између две тачке), то је $PT^2 = 100$, односно $PT = 10$. Дакле, добили смо $T(3,0)$, па је тражени круг $(x-3)^2 + (y-r)^2 = r^2$. Сменимо координате тачке N и добијемо $r = 5$. Коначно, тражени круг је $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$. Друго решење је: $T(23,0)$, $r = 145$, $(x-23)^2 + (y-145)^2 = 145^2$.



Сл. 203.



Сл. 204.

754. *а)* Координате пресечних тачака добијамо као решење система једначина. и то линеарне ($y = 2x + 2$) и квадратне. Решење: $M\left(\dfrac{7}{5}, \dfrac{24}{5}\right)$ и $N(-1,0)$.

б) $M(0,-1)$ и $N(5,4)$.

в) Центри датих кругова су $S(8,10)$ и $C(-4,5)$. Примећујемо да је $r_1=7$, $r_2=6$ и $SC=13=r_1+r_2$. Дакле, кругови се додирују. Додирна тачка је пресек праве SC са једним од кругова: $P\left(\frac{20}{13},\frac{95}{13}\right)$.

г) $M(1,-1)$ и $N\left(\frac{97}{25},\frac{71}{25}\right)$.

755. Ако је N подножје нормале из центра на дату праву, тада је $r=2SN$ (слично задатку 743). Решење је: $(x-7)^2+(y-3)^2=160$.

756. Нека је N подножје нормале из центра O датог круга на сечицу. Према сл. 204, из осенченог троугла ONP израчунамо: $ON=\sqrt{r^2-NP^2}=\sqrt{50-25}=5$. Једначина сечице, заправо праве кроз $A(15,-5)$ је: $y+5=k(x-15)$, односно $kx-y-15k-5=0$. Даље је $ON=5=\dfrac{|-15k-5|}{\sqrt{k^2+1}}$, одакле је $\sqrt{k^2+1}=|3k+1|$. Добијамо $k=0$ или $k=-\dfrac{3}{4}$, па је сечица: $y+5=0$ или $3x+4y-25=0$.

757. Ако је S центар круга, тада је тражена сечица нормална на праву SN. Решења: *а)* $x+y-3=0$, *б)* $2x+y-5=0$.

758. *а)* $3x+4y-25=0$, *б)* $3x+y-10=0$, *в)* $3x-4y+23=0$.

759. *а)* Тангента има облик $y=2x+n$. Из услова додира: $r^2(k^2+1)=(kp-q+n)^2$, тј. из $5(4+1)=(4-4+n)^2$, добијамо $n=5$ или $n=-5$. Тражене тангенте су: $2x-y+5=0$ или $2x-y-5=0$.

б) $2x+y-1=0$ и $2x+y+19=0$,

в) $2x+y-5=0$ и $2x+y+5=0$.

760. Тражене тачке су додирне тачке датог круга са тангентама паралелним датој правој. Добићемо их у пресеку праве кроз центар, која је нормалана на дату праву, и датог круга. Решења: *а)* $A(1,-3)$, $B(5,-5)$; *б)* $A(-2,-2)$, $B(4,6)$.

761. *а)* Нека су $y=kx+n$ тражене тангенте. Коефицијент правца дате праве је $k_1=5$, па ћемо k одредити из услова: $\left|\dfrac{k-5}{1+5k}\right|=1$. Добијамо: $k=\dfrac{2}{3}$ или $k=-\dfrac{3}{2}$. Даље, n одредимо из услова додира: $r^2(k^2+1)=n^2$. Решења су: $2x-3y+13=0$, $2x-3y-13=0$, $3x+2y+13=0$, $3x+2y-13=0$.

б) $x-3y+5\sqrt{2}=0$, $x-3y-5\sqrt{2}=0$, $3x+y+5\sqrt{2}=0$, $3x+y-5\sqrt{2}=0$.

762. *а)* Једна од пресечних тачака праве и круга је $T(1,2)$. Тангента датог круга у овој тачки је: $x-2y+3=0$. Тражени угао одређују ова тангента и дата права: $\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{3-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{3}{2}}\right| = 1$. Дакле: $\varphi = 45^\circ$

б) $\varphi = 90^\circ$.

763. *а)* Дати круг је $(x-5)^2+(y+1)^2 = 1$. Како је $r = |q| = 1$, то је оса Ox једна од тангенти. Друга тангента има једначину: $y = kx$. Из услова додира: $1\cdot(k^2+1) = (5k+1)^2$, добијамо $k = 0$ или $k = -\dfrac{5}{12}$, па је друга тангента $y = -\dfrac{5}{12}x$. Очигледно је угао под којим се круг види из координатног почетка, тј. угао између тангенти: $\varphi = \operatorname{arctg}\left|-\dfrac{5}{12}\right| \approx 22^\circ 37'$.

б) Тангенте су: $y = k(x+8) = kx+8k$. Из услова додира имамо: $16(k^2+1) = 64k^2$. Одавде је $k = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ или $k = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Једначине тангенти су $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{8}{\sqrt{3}}$ и $y = -\dfrac{x}{\sqrt{3}} - \dfrac{8}{\sqrt{3}}$. Тражени угао је $\varphi = 60^\circ$.

в) Тангенете су $y-8 = (2+\sqrt{3})(x-8)$ и $y-8 = (2-\sqrt{3})(x-8)$. Како је $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$, то је угао под којим се круг види: $\varphi = 60^\circ$.

764. *а)* Нека је $T(x_0, y_0)$ додирна тачка. Како је $T \in k$, то је $y_0 = \sqrt{5-(x_0-1)^2}$, јер је једначина круга: $(x-1)^2+y^2 = 5$. Центар круга је $S(1,0)$. Тада је $\sphericalangle ATS = 90^\circ$, па $\overrightarrow{ST} \perp \overrightarrow{AT}$ и због тога је $\overrightarrow{ST}\cdot\overrightarrow{AT} = 0$. Имамо векторе: $\overrightarrow{ST} = \left(x_0-1, \sqrt{5-(x_0-1)^2}\right)$ и $\overrightarrow{AT} = \left(x_0-4, \sqrt{5-(x_0-1)^2}+1\right)$. Заменимо ове координате у скаларни производ: $(x_0-1)(x_0-4) + \sqrt{5-(x_0-1)^2}\left(\sqrt{5-(x_0-1)^2}+1\right) = 0$. Одавде је: $3x_0 - 8 = \sqrt{5-(x_0-1)^2}$, па за $x_0 \geqslant \dfrac{8}{3}$ квадрирамо и добијемо $x_0 = 3$. Једна додирна тачка је $(3,1)$. Другу додирну тачку $T_1\left(x_0, -\sqrt{5-(x_0-1)^2}\right)$, добијамо сличним поступком: $T_1(2,-2)$. Сада не би било тешко написати једначине тангенти ($2x+y-7=0$ и $x-2y-6=0$).

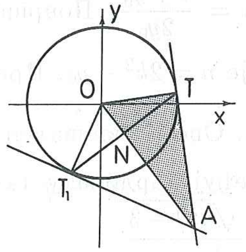
б) Поступајући слично претходном случају добијамо $T\left(-\dfrac{3}{5}, -\dfrac{1}{5}\right)$ и $T_1(1,-1)$. Занимљиво је да се тачка T_1 не може добити коришћењем услова додира, јер је једначина тангенте кроз T_1 нестандардна: $x-1=0$, њен коефицијент правца није дефинисан. (Овде је згодно узети тачку додира $T\left(-\sqrt{-y_0^2-2y_0}, y_0\right)$ и $T_1\left(\sqrt{-y_0^2-2y_0}, y_0\right)$.)

в) $T(2,2)$ и $T_1\left(-\dfrac{6}{17}, \dfrac{10}{17}\right)$.

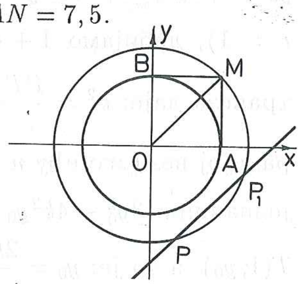
765. Тражи се дискусија решења система од једне линеарне и је-

квадратне једначине. Елиминишемо једну непознату, нпр. y, па добијемо квадратну једначину по x са параметром. Даље, зависно од дискриминанте, дискутујемо кад постоје два решења (права је сечица), једно решење (права је тангента), или нема решења (права и круг се не секу).
а) Сменимо $y = kx$ у једначину круга, па добијемо квадратну једначину: $(1 + k^2)x^2 - 10x + 16 = 0$. Њена дискриминанта је $D = b^2 - 4ac = 36 - 64k^2$. Ако је $k = \frac{3}{4}$ или $k = -\frac{3}{4}$ права p је тангента. Ако је $-\frac{3}{4} < k < \frac{3}{4}$, тада је $D > 0$ и права је сечица. Ако је $k < -\frac{3}{4}$ или $k > \frac{3}{4}$, тада је $D < 0$, систем нема решења и права p не сече круг.
б) $D = 1 - 8k^2$. За $k = \frac{\sqrt{2}}{4}$ или $k = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, p је тангента, за $-\frac{\sqrt{2}}{4} < k < \frac{\sqrt{2}}{4}$, p је сечица, а за $k < -\frac{\sqrt{2}}{4}$ или $k > \frac{\sqrt{2}}{4}$ права и круг се не секу.
в) $D = 4(2 - n^2)$. За $n = \sqrt{2}$ и $n = -\sqrt{2}$, p је тангента, за $-\sqrt{2} < n < \sqrt{2}$, p је сечица, а за $n < -\sqrt{2}$ или $n > \sqrt{2}$, права и круг немају заједничких тачака.

766. Користићемо се елементарном геометријом. Нека је TT_1 тетива која спаја додирне тачке тангенти, сл. 205. Троугао OAT је правоугли, а дуж TN хипотенузина висина. Због тога је $OA \cdot AN = AT^2$, где је AN тражена дуж. Лако израчунавамо: $OA = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Како је $OT = r = 5$, то је $AT = \sqrt{OA^2 - r^2} = 5\sqrt{3}$, па је $10 \cdot AN = 75$ и $AN = 7,5$.



Сл. 205.

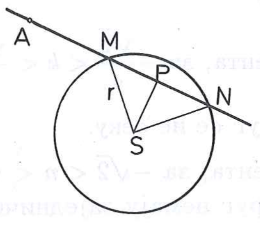


Сл. 206.

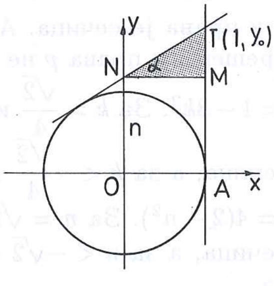
767. Дате праве се секу у тачки $\left(-\frac{8}{3}, 0\right)$ и симетричне су у односу на осу Ox. Значи центар је на оси Ox, па је $q = 0$. Из једначине $(x-p)^2 + y^2 = r^2$, на основу услова да круг пролази кроз координатни почетак, добијамо: $p^2 = r^2$, итд. Решења су: $(x+1)^2 + y^2 = 1$ и $(x-4)^2 + y^2 = 16$.

768. Нека је $OAMB$ квадрат, сл. 206, при чему су OA и OB полупречници. Из сваке тачке круга са центром O и полупречником OM, дати круг се види под правим углом. Једначина тог круга је $x^2 + y^2 = 10$. Тражене тачке су пресеци овог круга са датом правом: $P(1, -3)$ и $P_1(3, -1)$.

769. Права p, са полупречником у тачки пресека, образује угао од 45°. Ако су M и N пресечне тачке праве p и круга, тада је троугао SMN правоугли једнакокраки, сл. 207. Његова висина је $SP = \dfrac{r\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{26}}{2}$. Сада треба кроз тачку A поставити праву која је од центра $S(1,2)$ датог круга удаљена $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$. (Видети задатке 716 и 717.) Решења: $x - 5y - 4 = 0$ и $x + 5y - 24 = 0$.



Сл. 207.



Сл. 208.

770. Према сл. 208, површина трапеза $OPTN$ је k^2. Једначина тангенте NT је $y = \operatorname{tg}\alpha\cdot x + n$. Из троугла MNT је $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{TM}{MN} = \dfrac{y_0 - n}{1} = y_0 - n$, па је права: $y = (y_0 - n)x + n$. Користећи услов додира ($p = q = 0$, $r = 1$), добијамо $1 + (y_0 - n)^2 = n^2$. Одавде је $n = \dfrac{1 + y_0^2}{2y_0}$. Површина трапеза даје: $k^2 = \dfrac{PT + ON}{2}\cdot OP = \dfrac{n + y_0}{2}$, одакле је $n = 2k^2 - y_0$. Према ранијој вези између n и y_0, следи: $\dfrac{1 + y_0^2}{2y_0} = 2k^2 - y_0$. Ово је еквивалентно једначини: $3y_0^2 - 4k^2y_0 + 1 = 0$. Њена решења одређују ординату тачке $T(1, y_0)$, а то је: $y_0 = \dfrac{2k^2 + \sqrt{4k^4 - 3}}{3}$ или $y_0 = \dfrac{2k^2 - \sqrt{4k^4 - 3}}{3}$.

771. *а)* Поделимо са 144 и добијемо: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 144$, па је $a = 3$, $b = 4$. Жиже су на оси Oy: $F_1(0, -\sqrt{7})$, $F_2(0, \sqrt{7})$, $e = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

б) $a = 2$, $b = 1$, $F_1(-\sqrt{3}, 0)$, $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. *в)* $a = 4$, $b = 1$, $F_1(-\sqrt{15}, 0)$, $e = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

г) $a = \dfrac{1}{5}$, $b = \dfrac{1}{4}$, $F_1\left(0, -\dfrac{3}{20}\right)$, $e = \dfrac{3}{5}$. *д)* $a = 6$, $b = 4$, $c = 2\sqrt{5}$, $e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

ђ) $a = 10$, $b = 5$, $c = 5\sqrt{3}$, $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

772. *а)* Једначину сводимо на канонични облик: $3(x^2-6x+9)-27+4(y^2-10y+25)-100+115=0$, односно: $3(x-3)^2+4(y-5)^2=12$ и коначно: $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y-5)^2}{3}=1$. Центар симетрије је $S(3,5)$, а полуосе су $a=2$ и $b=\sqrt{3}$. Како је $c=\sqrt{a^2-b^2}=1$, то су координате жижа; $F_1(2,5)$ и $F_2(4,5)$ (жиже су померене са центром), $e=\frac{1}{2}$.

б) $S(2,0)$, $a=4$, $b=2$, $F_1(2-2\sqrt{3},0)$, $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

в) $S(-3,5)$, $a=2$, $b=3$, $F_1(5-\sqrt{5},-3)$, $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

г) $S(3,-2)$, $a=\sqrt{5}$, $b=2$, $F_1(2,-2)$, $F_2(4,-2)$, $e=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

773. Тачке D и E су на елипси, F је у елипси, а остале су ван елипсе.

774. Како је $F_1P+F_2P=2a$ (особина радијуса елипсе), следи да је $F_1P=2a-p$, где је $p=F_2P$ (видети слику на стр. 108). Знамо да је $F_1F_2=2c$ и $c^2=a^2-b^2$, па из правоуглог троугла F_1F_2P добијамо: $p^2=F_1P^2-F_1F_2^2$, односно: $p^2=(2a-p)^2-4c^2$, одакле је $p=\frac{b^2}{a}$.

775. *а)* $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$, *б)* $b^2=a^2-c^2$, итд. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$, *в)* $\frac{x^2}{41}+\frac{y^2}{16}=1$,
г) Из $e=\frac{c}{a}$ следи да је $c=6$, итд. $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{108}=1$, *д)* $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$,
ђ) Из $a^2-b^2=c^2=18$, тј. из $(a-b)(a+b)=18$ и $a-b=1{,}5$, добијамо $a=\frac{27}{4}$ и $b=\frac{21}{4}$. Елипса је $\frac{16x^2}{729}+\frac{16y^2}{441}=1$,
е) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$, *ж)* $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$, *з)* $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$,
и) $p=\frac{b^2}{a}=4$ и $2a=18$, итд. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}=1$.

776. *а)* $S(0,5)$, $c=3$, $a=5$, па је $b=4$. Једначина елипсе је: $\frac{x^2}{25}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$.
б) $\frac{(x-10)^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$, *в)* $\frac{4(x-6)^2}{9}+\frac{4(y-3)^2}{25}=1$.

777. Нека је $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ тражена елипса. Користећи се датом тачком добијамо везу: $\frac{9}{a^2}+\frac{12}{b^2}=1$. Из $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$ следи $\frac{c^2}{a^2}=\frac{5}{9}$, односно $\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{5}{9}$, итд. Решавањем добијеног система једначина по a^2 и b^2, добијамо: $a^2=36$

и $b^2 = 16$.

778. $16(x-5)^2 + 25y^2 = 400$, $25(x-5)^2 + 16y^2 = 625$.

779. Слично задатку 777: *а)* $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{49} = 1$, *б)* $x^2 + 5y^2 = 100$.

780. Координате пресечних тачака су решења система једначина, које чине једначина праве и једначина елипсе.
а) $P(6,\ 1)$ – права је тангента елипсе.
б) $A(3,\ 2)$ и $B(4,\ 1{,}5)$.
в) Права и елипса немају заједничких тачака.
г) Права додирује елипсу у тачки $T\left(\sqrt{5}, \dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)$.

781. *а)* Пресечне тачке су $M(4,0)$ и $N(0,-3)$, па је $PQ = \sqrt{4r + 3^2} = 5$.
б) $2\sqrt{5}$.

782. *а)* $A(m,m)$, $B(m,-m)$, $C(-m,m)$, $D(-m,-m)$, где је $m = 2\sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

б) $A(2,n)$, $B(2,-n)$, $C(-2,n)$, $D(-2,-n)$, где је $n = 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

783. *а)* Нека су $M(x_1,y_1)$ и $N(x_2,y_2)$ крајеви тетиве. Тада је $x_1+x_2 = -4$ и $y_1,y_2 = -2$. Како M и N припадају елипси, биће: $x_1^2 + 4y_1^2 = 12$ и $x_2^2 + 4y_2 = 12$. Одузмемо претпоследњу једнакост од последње и добијемо: $x_2^2 - x_1^2 + 4(y_2^2 - y_1^2) = 0$, односно $(x_2-x_1)(x_1+x_1) + 4(y_2-y_1)(y_2+y_1) = 0$. Овде сменимо x_1+x_2 са -4 и y_1+y_2 са -2 и скратимо: $(x_2-x_1) + 2(y_2-y_1) = 0$. Одавде је $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = -\dfrac{1}{2}$, а то је коефицијент правца сечице која одређује тражену тетиву. Једначина те праве кроз тачку A је: $x + 2y + 4 = 0$.
б) $5x + 6y - 11 = 0$.

784. Елипса је централно симетрична, па је координатни почетак центар квадрата. Координатне осе су осе симетрије страница квадрата. Због тога, теме квадрата које је у првом квадранту припада правој $y = x$.
а) Из $x^2 + a^2x^2 = a^2$, следи $x = \dfrac{\pm a}{\sqrt{a^2+1}}$, па су темена квадрата $A(m,m)$, $B(-m,m)$, $C(-m,-m)$, $D(m,-m)$, где је $m = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$. Површина квадрата је $\dfrac{4a^2}{a^2+1}$.
б) Слично претходном задатку. Темена се добијају као под *а)*, само је овде $m = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Површина квадрата је $\dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$.

785. Нека је $A(2,0)$ дато теме. Теме C је на правој AC, која има коефицијент правца $k = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Једначина праве AC је: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$, итд. Резултат: $B\left(\frac{2}{7}, \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ и $C\left(\frac{2}{7}, -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$.

786. *а)* $x - y - 3 = 0$, *б)* $2x - y + 16 = 0$, *в)* $x - 3 = 0$, *г)* $y + 5 = 0$.

787. Нека је $A(x_0, y_0)$ један крај пречника. Други крај је симетричан у односу на координатни почетак, па је то тачка $B(-x_0, -y_0)$. Тангенте у овим тачкама су $b^2x_0x + a^2y_0y - a^2b^2 = 0$ и $b^2x_0x + a^2y_0y + a^2b^2 = 0$. Ове две праве су паралелне, јер имају исти коефицијент правца.

788. *а)* Тангента је права: $y - 7 = k(x - 2)$, односно: $y = kx + 7 - 2k$. Из услова додира $a^2k^2 + b^2 = n^2$, добијамо: $100k^2 + 25 = (7 - 2k)^2$, што даје квадратну једначину: $24k^2 + 7k - 6 = 0$. Њена решења су $k = \frac{3}{8}$ или $k = -\frac{2}{3}$. Тражене тангенте су $3x - 8y + 50 = 0$ и $2x + 3y - 25 = 0$.
б) $x + 2y - 8 = 0$ и $11x - 10y - 56 = 0$, *в)* $x + y + 7 = 0$ и $7x + 29y - 149 = 0$, *г)* $x - y + 5 = 0$ и $x + 4y + 10 = 0$.

789. Слично претходном задатку, користимо услов додира.
а) $2x - 3y + 25 = 0$ и $2x - 3y - 25 = 0$, *б)* $2x - y + 12 = 0$ и $2x - y - 12 = 0$, *в)* $x - 3y + 3\sqrt{2} = 0$ и $x - 3y - 3\sqrt{2} = 0$, *г)* $x + y + \frac{\sqrt{5}}{2} = 0$ и $x + y - \frac{\sqrt{5}}{2} = 0$.

790. Слично претходном задатку.
а) $x + y + 5 = 0$ и $x + y - 5 = 0$, *б)* $2x - y + 9 = 0$ и $2x - y - 9 = 0$.

791. Слично задатку 765.
а) Права додирује елипсу за $n = 5$ или $n = -5$.
б) Права сече елипсу за $-5 < n < 5$.
в) Права и елипса немају заједничких тачака ако је $n < -5$ или $n > 5$.

792. Треба одредити тангенте дате елипсе, које су паралелне датој правој, као у задатку 789, па одредити додирне тачке, као у задатку 780. Решења: *а)* Најближа је тачка $M(-4, -1)$, а најдаља тачка $N(4, 1)$.
б) Најближа је тачка $M(-3, 2)$, а најдаља $N(3, -2)$.

793. Слично задатку 762. Резултати: *а)* $\varphi = 45^\circ$, *б)* $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$.

794. Користимо услов додира праве $y = kx + n$ и датих елипси:
а) $x - y + 4 = 0$, $x - y - 4 = 0$, $x + y + 4 = 0$ и $x + y - 4 = 0$;
б) $x + y + 3 = 0$, $x + y - 3 = 0$, $x - y + 3 = 0$ и $x - y - 3 = 0$;
в) $x + y + \sqrt{7} = 0$, $x + y - \sqrt{7} = 0$, $x - y + \sqrt{7} = 0$ и $x - y - \sqrt{7} = 0$.

795. *а)* Из услова додира добијамо $b^2 = 9$. Решење: $9x^2 + 16y^2 = 144$.
б) Заменимо координате дате тачке у једначину $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ и добијемо једначину са непознатим a^2 и b^2: $4b^2 + 4a^2 = a^2b^2$. Другу једначину даје услов додира. Решење: $x^2 + 4y^2 = 20$.
в) Применимо услове додира. Решење је: $3x^2 + 5y^2 = 120$.
г) Слично претходном задатку. Резултат је: $x^2 + 4y^2 = 40$.

796. Тражена права има облик $x+y+c=0$. Применимо услов додира, итд. Решења: *а)* $x+y+5=0$ и $x+y-5=0$, *б)* $x+y+2\sqrt{21}=0$ и $x+y-2\sqrt{21}=0$.

797. $2x + 3y - 24 = 0$.

798. Ако је тражена тангента облика $y = kx + n$, тада су координате додирне тачке $C\left(-\frac{n}{2k}, \frac{n}{2}\right)$. Заменом у једначину елипсе добијемо: $\frac{n^2}{4k^2} + n^2 = 20$, односно: $n^2 + 4k^2n^2 = 80k^2$. Из услова додира имамо: $20k^2 + 5 = n^2$, итд. Тражене једначине су: $x + 2y + 2\sqrt{10} = 0$, $x + 2y - 2\sqrt{10} = 0$, $x - 2y + 2\sqrt{10} = 0$ и $x - 2y - 2\sqrt{10} = 0$.

799. Одговарајућа тангента има једначину: $y = -\frac{1}{2}x + n$. Из услова додира добијемо: $n = 4$ или $n = -4$. Тангента $y = -\frac{1}{2}x+4$ додирује елипсу у тачки $T(2, 3)$, која припада и нормали. Сада из једначине нормале добијамо $4 - 3 + c = 0$, одакле је $c = -1$. Нормала је $2x - y - 1 = 0$. Тангенти $y = -\frac{1}{2} - 4$ одговара нормала $2x - y + 1 = 0$.

800. Из дате једначине елипсе налазимо полуосе: $a = 2$ и $b = \sqrt{3}$.
а) Једна од страница описаног троугла је вертикала кроз лево теме елипсе: $x = -2$ (нацртајте слику). Друга страница је права, која са осом Ox одређује угао од 30°. (Видети задатак 785.) Њена једначина је $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + n$. користећи услов додира, добијемо $n = -\sqrt{\frac{13}{3}}$, па је ова права $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{\frac{13}{3}}$. Слично добијемо трећу страницу троугла: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{\frac{13}{3}}$.
б) Додирна тачка је $T\left(-1, \frac{3}{2}\right)$, па је тангента елипсе у тој тачки права: $x - 2y + 2 = 0$. Она сече тангенте $x = -2$ и $x = 2$ у тачкама $A(-2, 1)$ и $B(2, 3)$. Средиште $S(0, 2)$ дужи AB је пречник круга, чија је једначина $x^2 + (y - 2)^2 = 5$. Жиже дате елипсе $F_1(-1, 0)$ и $F_2(1, 0)$, припадају овом кругу.

801. *а)* $a = 4$, $b = 1$, $c^2 = a^2 + b^2 = 17$, па су жиже: $F_1(-\sqrt{17}, 0)$ и

$F_2(\sqrt{17},0)$; $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{17}}{4}$; асимптоте су $y=\pm\dfrac{1}{4}x$

б) $a=6$, $b=5$, $c=\sqrt{61}$, $e=\dfrac{\sqrt{61}}{6}$, $y=\pm\dfrac{5}{6}x$.

в) $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{5}$, $e=\sqrt{\dfrac{5}{3}}$, $y=\pm x\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

г) $a=12$, $b=5$, $c=13$, $e=\dfrac{13}{12}$, $y=\pm\dfrac{5}{12}x$.

д) $a=8$, $b=\sqrt{17}$, $c=9$, $e=\dfrac{9}{8}$, $y=\pm x\dfrac{\sqrt{17}}{8}$.

ђ) $a=5$, $b=2$, $c=\sqrt{29}$, $e=\dfrac{\sqrt{29}}{5}$, $y=\pm\dfrac{2}{5}x$.

е) Једначина се своди на $\dfrac{(x+1)^2}{25}-\dfrac{(y-2)^2}{15}=1$, па је центар хиперболе тачка $S(-1,2)$. Даље је: $a=5$, $b=\sqrt{15}$, $c=2\sqrt{10}$, $e=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$, $y=\pm\dfrac{x\sqrt{15}}{5}$.

ж) $S(1,1)$, $a=5=b$, $c=5\sqrt{2}$, $e=\sqrt{2}$, $y=\pm x$.

з) $S(1,-1)$, $a=2$, $b=3$, $c=\sqrt{13}$, $e=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$, $y=\pm\dfrac{3}{2}x$.

802. Тачке A, B и E су на хиперболи, C је ван и D у хиперболи.

803. *а)* Из $a=5$ и $e=\dfrac{c}{a}=1,4$, следи $C=a\cdot 1,4=5\cdot 1,4=7$ и $b^2=c^2-a^2=24$. Једначина хиперболе је $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{24}=1$.

б) $x^2-4y^2=36$, *в)* $36x^2-5y^2=15$, *г)* $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{(y-6)^2}{9}=1$,

д) $\dfrac{(x-12)^2}{64}-\dfrac{(y-8)^2}{36}=1$.

804. Једначине асимптота су: $y=\pm x\sqrt{3}$, па је $\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$, итд. Тражена једначина је: $x^2-3y^2=6$.

805. *а)* $x^2-y^2=4$, *б)* $5y^2-20x^2=36$.

806. $\dfrac{x^2}{256}-\dfrac{y^2}{144}=1$.

807. *а)* $M(6,4)$ и $N\left(\dfrac{58}{17},-\dfrac{20}{17}\right)$; *б)* Нема пресечних тачака;

в) $M(6,2)$ и $N\left(\dfrac{14}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$; *г)* $M(-4,-5\sqrt{3})$, $N(4,5\sqrt{3})$.

808. Између координата сваког темена уписаног квадрата важи једнакост: $y=\pm x$. Резултати: *а)* $A(2,2)$, $B(-2,2)$, $C(-2,-2)$, $D(2,-2)$, *б)* $A\left(\frac{20}{3},\frac{20}{3}\right)$, $B\left(-\frac{20}{3},\frac{20}{3}\right)$, $C\left(-\frac{20}{3},-\frac{20}{3}\right)$, $D\left(\frac{20}{3},-\frac{20}{3}\right)$.

809. Асимптоте су $4x-3y=0$ и $4x+3y=0$. Жиже су: $F_1(0,-10)$ и $F_2(0,10)$. Растојање је: $d=\left|\frac{4\cdot 10-3\cdot 0+0}{\sqrt{4^2+3^2}}\right|=8$.

810. Десна жижа је $F_2(3,0)$, итд. Резултат: $d=40$.

811. Видети задатак 783. Решења: *а)* $2x-y-3=0$, *б)* $20x-9y=91$.

812. *а)* Тангента је $2x-y-\sqrt{2}=0$, а нормала $2x+y-3\sqrt{2}=0$.
б) Тангента је $6x+y+16$, а нормала $x-6y+15=0$.

813. Видети задатак 774. Решење: $p=\frac{b^2}{a}$.

814. Видети задатак 789. користити услов додира за праву и хиперболу. Решења: *а)* $x-y+2=0$ и $x-y-2=0$,
б) $2x-y+\sqrt{7}=0$ и $2x-y-\sqrt{7}=0$, *в)* $10x-3y+32=0$ и $10x-3y-32=0$.

815. Видети задатак 790. Решења: *а)* $x+3y+1=0$ и $x+3y-1=0$,
б) $3x-4y+10=0$ и $3x-4y-10=0$, *в)* $3x+y+8=0$ и $3x+y-8=0$,
г) $x+y-\sqrt{2}=0$ и $x+y+\sqrt{2}=0$.

816. Слично задатку 788. Решење $x-y+4=0$ и $5x+11y+4=0$.

817. *а)* Дата је права: $y=\frac{5}{6}x-\frac{4}{3}$, па је $k=\frac{5}{6}$ и $n=-\frac{4}{3}$. Из датих асимптота следи да је $a=2b$. Из услова додира налазимо $b=1$, итд. Тражена једначина је: $x^2-4y^2=4$.
б) $x^2-3y^2=12$.

818. *а)* $x^2-2y^2=2$, *б)* $9x^2-25y^2=225$, *в)* $x^2-2y^2=8$.

819. Нека је $T(x_0,y_0)$ додирна тачка. Тада је једначина тангенте: $b^2x_0x-a^2y_0y=a^2b^2$. Она сече асимптоту $y=\frac{b}{a}x$ у тачки са координатама: $x_1=\frac{a^2b}{bx_0-ay_0}$, $y_1=\frac{ab^2}{bx_0-ay_0}$, а асимптоту $y=-\frac{b}{a}x$ сече у тачки чије су координате: $x_2=\frac{a^2b}{bx_0+ay_0}$, $y_2=\frac{-ab^2}{bx_0+ay_0}$. Сада имамо: $\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{a^2b}{2}\left(\frac{1}{bx_0-ay_0}+\frac{1}{bx_0+ay_0}\right)=\frac{a^2b}{2}\cdot\frac{bx_0+ay_0+bx_0-ay_0}{b^2x_0^2-a^2y_0^2}=\frac{a^2b^2x_0}{b^2x_0^2-a^2y_0^2}$. Како је (x_0,y_0) тачка хиперболе, то је $b^2x_0^2-a^2y_0^2=a^2b^2$, па је $\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{a^2b^2x_0}{a^2b^2}=x_0$. Слично се израчуна да је $\frac{1}{2}(y_1+y_2)=y_0$.

820. Темена троугла су: тачка O (координатни почетак) и тачке $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ из претходног задатка. Није тешко уверити се да је површина троугла ABO једнака ab.

821. *а)* $T(0,0)$, $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $x + \frac{1}{2} = 0$, $y = 0$.

б) $T(0,0)$, $F\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, $x - \frac{3}{2} = 0$, $y = 0$. *в)* $T(0,0)$, $F(0,1)$, $y + 1 = 0$, $x = 0$.

г) $T(0,0)$, $F\left(0 - \frac{3}{4}\right)$, $y - \frac{3}{4} = 0$, $x = 0$.

д) $y^2 = -x$ и $T(0,0)$, $F\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$, $x - \frac{1}{4} = 0$, $y = 0$.

ђ) $T(0,0)$, $F\left(\frac{3}{4}, 0\right)$, $x + \frac{3}{4} = 0$, $y = 0$.

е) $y^2 = 6(x-2)$, $T(0,2)$, $F\left(\frac{7}{2}, 0\right)$, $x - \frac{1}{2} = 0$, $y = 0$.

ж) $x^2 = y - 5$, $T(0,5)$, $F\left(0, \frac{21}{4}\right)$, $y - \frac{19}{4} = 0$, $x = 0$.

з) $T(0,12)$, $F\left(0, \frac{47}{4}\right)$, $y - \frac{49}{4} = 0$, $x = 0$.

и) $(x+1)^2 = y + 4$, $T(-1,-4)$, $F\left(-1, -\frac{15}{4}\right)$, $y + \frac{17}{4} = 0$, $x = -1$.

ј) $(y+4)^2 = x + 7$, $T(-7,-4)$, $F\left(-\frac{27}{4}, -4\right)$, $x + \frac{29}{4} = 0$, $y = -4$.

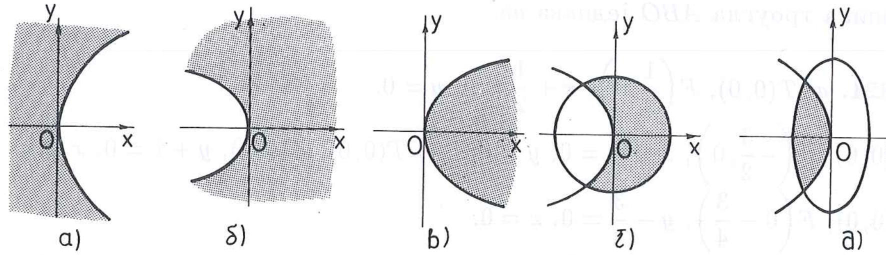
к) $(y-3)^2 = x - 1$, $T(1,3)$, $F\left(\frac{5}{4}, 3\right)$, $x - \frac{3}{4} = 0$, $y = 3$.

822. *а)* $y^2 = 12x$, *б)* $y^2 = -8x$, *в)* $x^2 = 16y$, *г)* $x^2 = -y$,
д) $y^2 = -8x$, *ђ)* $y^2 = 20x$, *е)* $x^2 = -12y$, *ж)* $x^2 = 8y$.

823. *а)* $y^2 = 36x = 36 \cdot 4 = 144$, па је $y = 12$, односно $M(4,12)$. како је $p = 18$, то је $F(9,0)$ и $r = FM = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.
б) Из $16 = 2p \cdot 4$ је $p = 2$, итд. $r = 5$.

824. Једначина тражене параболе је $(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha)$, где је $\alpha + \frac{p}{2} = -2$. Заменимо координате дате тачке A и $p = -4 - 2\alpha$ и добијемо следећу једначину по α и β: $(3-\beta)^2 = 2p(-2-\alpha)$, односно $(3-\beta)^2 = -4(2+\alpha)(-2-\alpha)$. Даље је: $(3-\beta)^2 = 4(2+\alpha)^2$, па је $3 - \beta = 2(2+\alpha)$ или $3 - \beta = -2(2+\alpha)$. Користећи координате тачке B добијамо: $(5-\beta)^2 = -4(2+\alpha)(1-\alpha)$. Решења овог система су $\alpha = -3$, $\beta = 1$, $p = 2$ или $\alpha = -\frac{11}{5}$, $\beta = \frac{17}{5}$ и $p = \frac{2}{5}$.
Тражена парабола је $(y-1)^2 = 4(x+3)$ или $\left(y - \frac{17}{5}\right)^2 = \frac{4}{5}\left(x + \frac{11}{5}\right)$.

825. Решења су осенчене површи на следећим сликама.



сл. 209

826. Једначина тетиве је $y = -\frac{1}{2}(x-1)$. Тражена тачка је $S(9,-4)$.

827. *а)* $A(1,2)$; *б)* Немају заједничких тачака;
в) $B(1,4)$, $C(9,12)$; *г)* $D(1,-2)$, $E(4,4)$.

828. *а)* Нека су $P_1(x_1,y_1)$ и $P_2(x_2,y_2)$ пресечне тачке тетиве са параболом. Тада је $y_1+y_2=10$ (видети решење задатка 783 *а)*). Тачке P_1 и P_2 су на датој параболи, па је $y_1^2=20x_1$ и $y_2^2=20x_2$. Одузимањем ових једнакости добијамо: $y_1^2-y_2^2=20(x_1-x_2)$, односно $(y_1-y_2)(y_1+y_2) = 20(x_1-x_2)$ или $(y_1-y_2)\cdot 10 = 20(x_1-x_2)$. Следи да је коефицијент правца тетиве: $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=2$. Тражена једначина је: $y-5=2(x-2)$.
б) $2x-y-1=0$; *в)* $2x-y-5=0$.

829. *а)* Тангента је $2x-y+2=0$ и нормала $x+2y-9=0$.
б) Тангента је $2x+3y+3=0$ и нормала $3x-2y+11=0$.
в) Тангента је $x+2y+8=0$, а нормала $2x-y-9=0$.

830. *а)* $x-3y+9=0$ и $x-2y+4=0$; *б)* $x-y+1=0$ и $x-2y+4=0$.

831. *а)* $x+y+2=0$; *б)* $4x+y+1=0$; *в)* $12x-4y+1=0$; *г)* $4x-2y+3=0$.

832. *а)* $4x+3y+18=0$; *б)* $x+3y+27=0$.

833. $9x+3y+1=0$ и $x-3y+9=0$.

834. *а)* $x-y+6=0$ и $6x-y+1=0$; *б)* $x+y+2=0$ и $2x+5y+25=0$.

835. Нека је $y=kx+n$ тражена тангента. Услов додира за параболу $y^2=x$, даје једнакост: $\frac{1}{2}=2kn$, па је $n=\frac{1}{4k}$, $k\neq 0$. Права $y=kx+\frac{1}{4k}$ и парабола $y=x^2$ имају тачно једну заједничку тачку, ако је дискриминанта система једнака нули: $16k^4+16k=0$. Одавде је $k=0$ или $k=-1$. За $k=-1$ добијамо тражену тангенту: $4x+4y+1=0$.

836. Видети решење задатка 762 *а)*. Резултат: $\varphi_1 = 90°$ и $\varphi_2 = 45°$.

837. *Упутство:* $p = 2kn$. Решења: *а)* $y^2 = 12x$; *б)* $y^2 = -40x$.

838. Видети решење задатка 760. Решење: $A\left(\frac{9}{16}, -\frac{3}{2}\right)$.

839. Видети решење задатка 785. Решење: $A(6, -2\sqrt{3})$, $B(6, 2\sqrt{3})$.

840. Нека је $N(n, n^2)$ тачка дате параболе, у којој је постављена нормала која пролази кроз тачку $A(x_0, x_0^2)$, $n \neq x_0$. Једначина тангенте у тачки N је: $\frac{1}{2}(y + n^2) = nx$. Њен коефицијент правца је $k = 2n$, па је једначина нормале у тој тачки: $y - n^2 = -\frac{1}{2n}(x - n)$. Како нормала пролази кроз тачку A, то је $x_0^2 - n^2 = -\frac{1}{2n}(x_0 - n)$. Скратимо са $(x_0 - n)$ и добијемо квадратну једначину по непознатој n: $2n^2 + 2x_0 n + 1 = 0$, чија је дискриминанта $D = 4(x_0^2 - 2)$ и $D > 0$, због услова $|x_0| > \sqrt{2}$. Нека су n_1 и n_2 решења ове једначине. Она одређују тачке $B(n_1, n_1^2)$ и $C(n_2, n_2^2)$ у којима су постављене нормале што се секу у A. Једначина праве BC је: $y - n_1^2 = \frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2 - n_1}(x - n_1)$, односно: $y = (n_1 + n_2)x - n_1 n_2$. Ова права сече осу Oy у тачки $P(0, -n_1 n_2)$. Како су n_1 и n_2 решења квадратне једначине $2n^2 + 2x_0 n + 1 = 0$, према Виетовим везама важи: $n_1 n_2 = \frac{1}{2}$. Дакле, тачка $P\left(0, \frac{1}{2}\right)$ не зависи од x_0.

841. *а)* Нека је $y = kx + n$ тражена тангента. Услов додира за први круг даје једнакост: $4(k^2 + 1) = n^2$, а за други: $1 \cdot (k^2 + 1) = (k \cdot 0 - 2 + n)^2$, итд. Решење: $x\sqrt{3} - y + 4 = 0$ и $x\sqrt{3} + y - 4 = 0$.
б) $x + 2y + 15 = 0$ и $x - 2y + 15 = 0$;
в) $x = 1$, $y = 2$, $3x + 4y - 5 = 0$ и $4x - 3y - 10 = 0$;
г) $x + y + \sqrt{10} = 0$ и $x + y - \sqrt{10} = 0$, $x - y + \sqrt{10} = 0$, $x - y - \sqrt{10} = 0$;
д) $x + y - 5 = 0$ и $x - y - 5 = 0$;
ђ) $x + y + 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$ и $x - y - 1 = 0$;
е) $2x + 3y + 1 = 0$, $2x + 3y - 1 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$ и $2x - 3y - 1 = 0$;
ж) $x + y + 2 = 0$ и $x - y + 2 = 0$.

842. Видети решење задатка 762 *б)*.
а) $45°$; *б)* $\operatorname{arctg} 8$; *в)* $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{13}$.

843. $p = 6$.

844. $x^2 + (y - 4)^2 = 5$.

845. $9x^2 - 16y^2 = 144$.

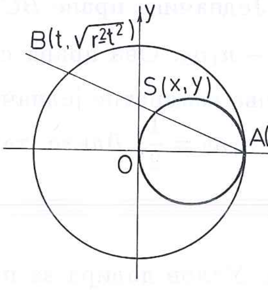
846. $9x^2 + 25y^2 = 225$.

847. $x^2 = 4y$.

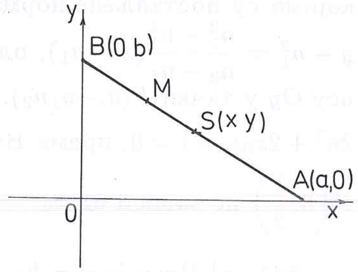
848. Из услова додира праве $y = kx + n$ и дате параболе је $kn = 3$, а како је T тачка додира, такође је $3k + n = 6$. Одавде је $k = 1$ и $n = 3$. Даље је $q = 0$ итд. Решење: $r = 6\sqrt{2}$, $S(9, 0)$.

849. Имамо решења: $4x^2 + 9y - 36 = 0$ и $4x^2 - 9y - 36 = 0$.

850. Нека је $B\left(t, \sqrt{r^2 - t^2}\right)$ произвољна тачка датог круга, сл. 210, а $S(x, y)$ средиште дужи AB. За координате средишта S важе једнакости: $x = \dfrac{y + r}{2}$ и $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{r^2 - t^2}$, односно $t = 2x - r$ и $2y = \sqrt{r^2 - t^2}$. Заменимо t из прве у другу једнакост: $2y = \sqrt{r^2 - (2x - r)^2}$, одакле сређивањем добијемо: $\left(x - \dfrac{r}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{r^2}{4}$. Тражени скуп тачака је круг.



Сл. 210.



Сл. 211.

851. Услов $AM = 2MB$, изражава се једнакошћу: $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+2)^2 + y^2}$. После квадрирања и сређивања добијамо једначину круга: $x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$, односно $(x + 3)^2 + y^2 = 4$.

852. *а)* Према сл. 211, како је $AS = SB$, следи да су координате тачака A и B, изражене преко x и y, одређене са: $A(2x, 0)$ и $B(0, 2y)$. Како је $OA^2 + OB^2 = AB^2$, тј. $4x^2 + 4y^2 = 9$, то је тражени скуп тачака четвртина круга чија је једначина $x^2 + y^2 = \dfrac{9}{4}$.

б) Слично претходном случају, решење је четвртина елипсе: $4x^2 + y^2 = 4$.

853. Нека је $P(p, q)$ тачка праве PM, која додирује дату елипсу. Једначина ове праве је: $q - y = k(p - x)$, где су p и q текуће координате, односно: $q = kp + (y - kx)$. Применимо услов додира: $a^2k^2 + b^2 = (y - kx)^2$, па добијемо, по непознатој k, квадратну једначину: $(a^2 - x^2)k^2 + 2xyk +$

$b^2 - y^2 = 0$. Она има два решења, k_1 и k_2, која, према услову нормалности из M, задовољавају услов: $k_1 \cdot k_2 = -1$. Према Виетовим везама за квадратну једначину следи: $\frac{b^2 - y^2}{a^2 - x^2} = -1$. Одавде добијемо једначину круга: $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

854. Дат је круг $(x+2)^2 + y^2 = 4$ и тачка $P(2,0)$, ван круга. Центар круга је $S(-2,0)$ и полупречник $r = 2$, па је задат услов: $SM = MP + 2$, односно $\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} + 2$. Квадрирањем добијамо: $2x - 1 = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$, а одавде за $2x - 1 \geqslant 0$, односно $x \geqslant \frac{1}{2}$, је $3x^2 - y^2 = 3$. Тражени скуп је десна грана ове хиперболе.

855. Центри датих кругова су $O(0,0)$ и $S(3,0)$ а полупречници 2 и 3. Скуп $M(x,y)$ тражених тачака задовољава услов: $OM + 1 = SM$. Решење је лева грана хиперболе $8(x - 1,5)^2 - y^2 = 2$ (због $x < \frac{4}{3}$).

856. Решење је парабола $y^2 - 4x$.

857. Параболу представљену једначином $x^2 = 12(y+3)$.

858. Решење је права $y - 8 = 0$.

859. $x - 4y = 0$.

860. Слично задатку 852 *б)*. Решење: елипса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ где је $b = \frac{k}{1+\lambda}$ и $a = b\lambda$.

861. Задатак се може решити слично задатку 853. Још једноставнија је следећа идеја. Нека су T_1 и T_2 тачке у којима тангенте из M додирују дати круг. Како је $\sphericalangle T_1MT_2 = 90°$, то је четвороугао OT_1MT_2 квадрат, где је O центар круга. Због тога је $OM = r\sqrt{2}$, а тачке $M(x,y)$ за које је $OM = r\sqrt{2}$ припадају кругу чија је једначина: $x^2 + y^2 = 2r^2$.

862. Решење је хипербола: $3x^2 - y^2 = 48$.

863. $y^2 = 8(x-2)$.

864. Решење је елипса: $9x^2 + 25y^2 = 225$.

865. Парабола $y^2 = 8(x-1)$.

866. Унија тачака елипсе $8(x-1)^2 + 9y^2 = 72$ и праве $y = 0$, без тачке $(4,0)$.

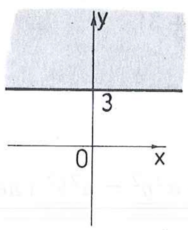
867. Видети решење задатка 853. Резултат: $x = -\frac{p}{2}$.

868. Решење је круг: $x^2 + \left(y - \dfrac{a}{3}\right)^2 = \dfrac{a^2}{9}$.

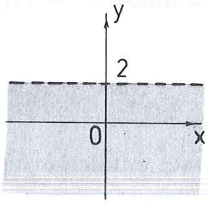
869. За $k \neq \pm 1$, права $y = kx$ сече дате праве у тачкама $A\left(\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{k}{k+1}\right)$ и $B\left(\dfrac{1}{1-k}, \dfrac{k}{1-k}\right)$. Средиште дужи AB, тачка $S(x, y)$, има координате: $x = \dfrac{1}{1-k^2}$, $y = \dfrac{k}{1-k^2}$. Елиминацијом параметра k, добијамо: $x^2 - y^2 = x$, а то је хипербола: $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \dfrac{1}{4}$.

870. Скуп тачака P је део хиперболе $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, и то делови из првог и трећег квадранта, а скуп тачака Q је преостали део ове хиперболе.

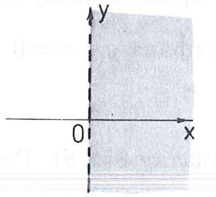
871. Решења су приказана на сликама 212 – 215. *)



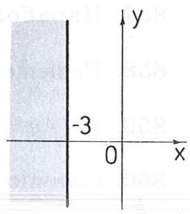
Сл. 212.



Сл. 213.



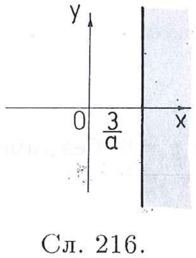
Сл. 214.



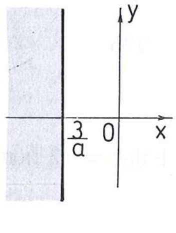
Сл. 215.

872. *а)* За $a > 0$ добијамо неједначину $x \geqslant \dfrac{3}{a}$, сл. 216, за $a < 0$ је $x \leqslant \dfrac{3}{a}$, сл. 217, а за $a = 0$, $-3 \geqslant 0$, која нема решења;

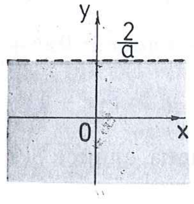
б) За $a > 0$ добијамо неједначину $y < \dfrac{2}{a}$, сл. 218, за $a < 0$ је $y > \dfrac{2}{a}$, сл. 219, а за $a = 0$, $-2 < 0$, чије је решење свака тачка у равни.



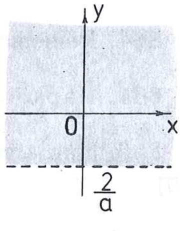
Сл. 216.



Сл. 217.



Сл. 218.



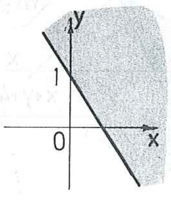
Сл. 219.

*) Решења су тачке са шрафиране површине. Тачке са испрекидане линије не припадају скупу решења, а са пуне припадају. (Не односи се на координатне осе.)

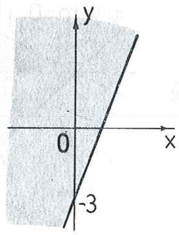
873. Неједначине су еквивалентне са:

а) $y \geqslant -\frac{3}{2}x+1$; *б)* $y \geqslant 2x-3$; *в)* $y < -x+3$; *г)* $y > x+1$.

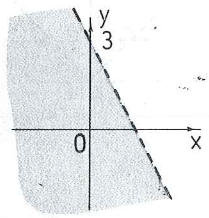
Решења су приказана на сликама 220 – 223.



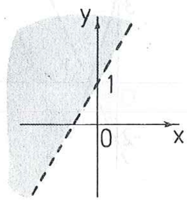
Сл. 220.



Сл. 221.

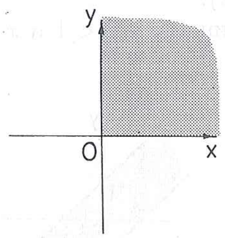


Сл. 222.

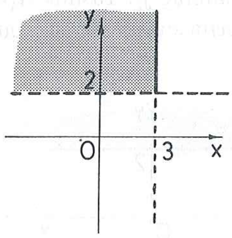


Сл. 223.

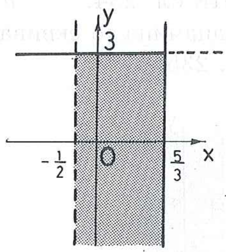
874. Решења су дата на сликама 224 – 226.



Сл. 224.

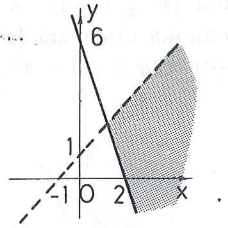


Сл. 225.

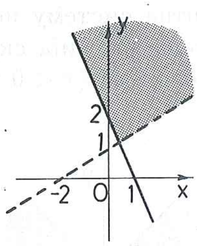


Сл. 226.

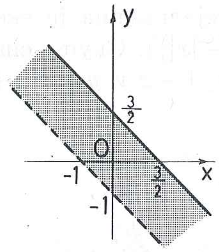
875. Решења *а)*, *б)* и *в)* дата су на сл. 227 – 229. *г)* Нема решења.



Сл. 227.



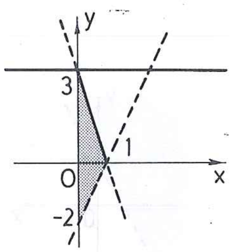
Сл. 228.



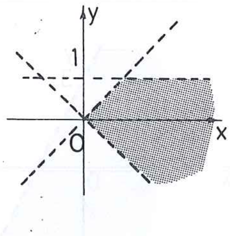
Сл. 229.

876. Решења *а)* и *б)* дата су на сликама 230 и 231.

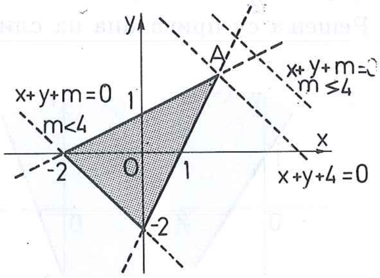
в) Тачка $A(2,2)$ налази се на граничним правама полуравни одређених првом и другом неједначином. За $m<4$ тачка A припада отвореној полуравни која је одређена трећом неједначином, па је решење троугао на сл. 232. За $m=4$, решење је тачка A, а за $m>4$ систем нема решења.



Сл. 230.



Сл. 231.



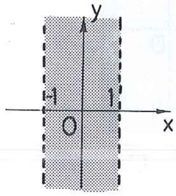
Сл. 232.

877. *а)* Неједначина је еквивалентна систему неједначина ($x < 1$ и $x > -1$), сл. 233.

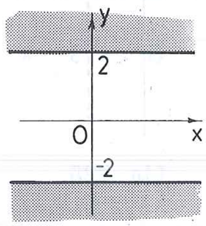
б) Решење је свака тачка из равни. *в)* Нема решења.

г) Видети сл. 234. *д)* Решење је тачка $A(3, -2)$.

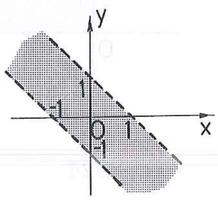
ђ) Неједначина је еквивалентна систему неједначина ($x + y < 1$ и $x + y > -1$), сл. 235.



Сл. 233.

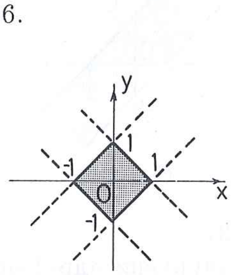


Сл. 234.

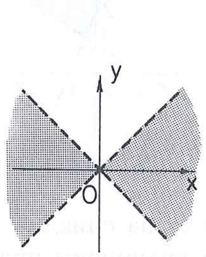


Сл. 235.

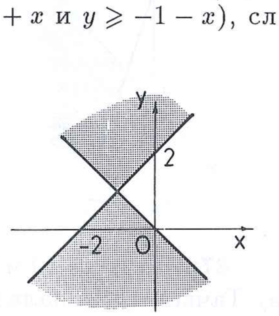
е) Неједначина је еквивалентна систему неједначина ($y \leqslant 1 - |x|$ и $y \geqslant -(1 - |x|)$). Скуп њених решења је унија скупова решења система ($x \geqslant 0$ и $y \leqslant 1 - x$ и $y \geqslant -1 + x$) и система ($x < 0$ и $y \leqslant 1 + x$ и $y \geqslant -1 - x$), сл. 236.



Сл. 236.



Сл. 237.



Сл. 238.

ж) Скуп решења је унија скупова решења система ($x - y > 0$ и $x + y > 0$)

и система ($x - y < 0$ и $x + y < 0$), сл. 237.

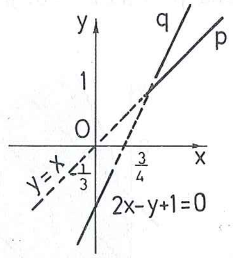
з) Неједначина је еквивалентна неједначини $|x + 1| \leqslant |y - 1|$, односно систему $-|y - 1| \leqslant x + 1 \leqslant |y - 1|$. Скуп решења је унија скупова решења система ($y \geqslant 1$ и $-y + 1 \leqslant x + 1 \leqslant y - 1$) и система ($y < 1$ и $y - 1 \leqslant x + 1 \leqslant -y + 1$), сл. 238.

878. *а)* Решење система једначина је тачка $A(-1, -1)$. Она задовољава неједначину, па је решење датог система.

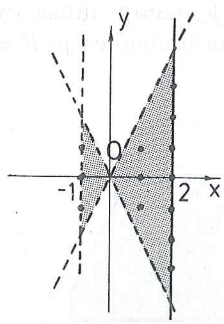
б) Систем од две једначине нема решења, па ни дати систем нема решења ни за једно $a \in R$, сл. 239.

в) Решења су тачке праве p: $y = x$, које задовољавају неједнакост $x + 3x \geqslant 3$, односно $x \geqslant \dfrac{3}{4}$, сл. 239.

г) Решења су тачке праве q: $y = 2x - 1$ које задовољавају услов $x^2 - (2x - 1)^2 \leqslant 0$, односно $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty)$, сл. 239.



Сл. 239.



Сл. 240.

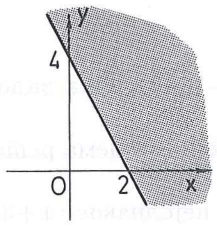
879. Решења датог система дата су на слици 240. Тачке, чије су (обе) координате целобројне, а које припадају скупу решења су $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, -1)$, $(2, -2)$, $(2, -3)$, $(-1, 0)$, $(-1, 1)$ и $(-1, -1)$.

880. *а)* Бројеви x и y морају задовољавати неједначину $2x + y - 4 \geqslant 0$, сл. 241.

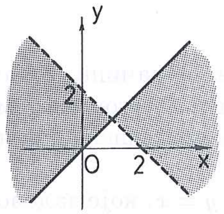
б) Тражене вредности су решења неједначине $\dfrac{x - y}{x + y - 2} \geqslant 0$, односно скуп тражених вредности је унија скупова решења система ($x - y \geqslant 0$ и $x + y - 2 > 0$) и ($x - y \leqslant 0$ и $x + y - 2 < 0$), сл. 242.

в) Тражене вредности су решења неједначине $\dfrac{x - y}{x + y - 2} > 0$. На сл. 242 треба све праве нацртати испрекиданом линијом.

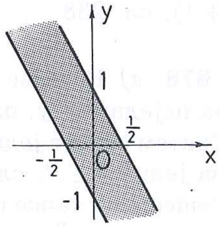
г) Тражене вредности су решења система неједначина $-1 \leqslant 2x + y \leqslant 1$, сл. 243.



Сл. 241.

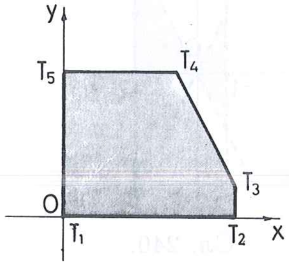


Сл. 242.

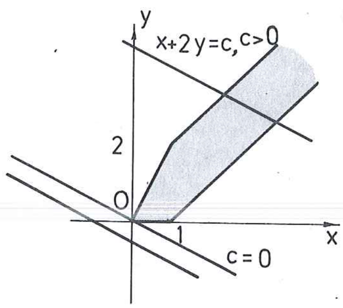


Сл. 243.

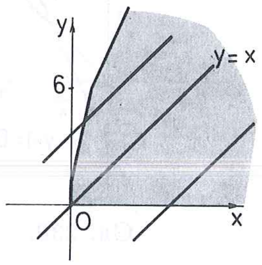
881. Скуп допустивих решења је ограничен сл. 244. Његова темена су тачке $T_1(0,0)$, $T_2(6,0)$, $T_3(6,1)$, $T_4(4,5)$ и $T_5(0,5)$. У тим тачкама вредности функције циља су $F_1 = 0$, $F_2 = 42$, $F_3 = 47$, $F_4 = 53$ и $F_5 = 25$. Највећа вредност је $F = 53$ за $x = 4$, $y = 5$, а најмања је 0 за $x = 0$, $y = 0$.



Сл. 244.



Сл. 245.



Сл. 246.

882. Скуп допустивих решења и права $x + 2y = c$ приказани су на слици 245. Најмања вредност $c \in R$, за коју постоји допустиво решење које припада правој $x + 2y = c$ је $c = 0$, па функција циља најмању вредност достиже у тачки $(0,0)$. Очигледно је да за свако $c > 0$, постоји пресек праве $x + 2y = c$ са скупом допустивих решења. Функција циља нема највећу вредност на скупу допустивих решења.

883. Скуп допустивих решења и права $x - y = c$ приказани су на слици 246. Очигледно да за свако $c \in R$, постоји њихов пресек, па дати израз нема ни највећу ни најмању вредност на датој области.

884. *а)* Тачка $M(3,0)$ је једино допустиво решење па дати израз достиже своју највећу и најмању вредност $F = 3$ у њој.
б) Не постоји ни једно допустиво решење, па израз нема никакву (па ни

најмању ни највећу) вредност.

885. Тачке $T_1(2,0)$, $T_2(4,0)$, $T_3(6,2)$, $T_4(0,8)$ и $T_5(0,2)$ су темена многоугла допустивих решења (нацртајте F). У њима израз узима вредности $F_1 = 81$, $F_2 = 79$, $F_3 = 75$, $F_4 = 75$ и $F_5 = 81$. Највећу вредност $F = 81$ израз добија у тачкама M_1 и M_5, па ће је добијати и у свакој тачки дужи M_1M_5. Најмању вредност $F = 75$ израз добија у тачкама дужи M_3M_4.

886. Најмању вредност $F = -12$ израз добија у темену многоугла допустивих решења $M(6,0)$. Метод искључивања се састоји у томе што минимум израза означимо са $2x - y \leqslant F$, а затим ту и неједнакости у ограничењима решимо по једној непознатој (на пример x). Добијамо еквивалентне системе неједнакости $\left(A = \max\left\{0, 2-y, 3+y, -\dfrac{y+F}{2}\right\}\right)$:

$$\left.\begin{array}{c} 0 \leqslant x \\ 0 \leqslant y \\ x \leqslant 6-2y \\ 2-y \leqslant x \\ 3+y \leqslant x \\ -\dfrac{y+F}{2} \leqslant x \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} A \leqslant x \leqslant 6-2y \\ 0 \leqslant y \\ 0 \leqslant 6-2y \\ 2-y \leqslant 6-2y \\ 3+y \leqslant 6-2y \\ -\dfrac{y+F}{2} \leqslant 6-2y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} A \leqslant x \leqslant 6-2y \\ 0 \leqslant y \\ y \leqslant 3 \\ y \leqslant 4 \\ y \leqslant 1 \\ y \leqslant 4+\dfrac{F}{3} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} A \leqslant x \leqslant 6-2y \\ 0 \leqslant y \leqslant \min\left\{1, 4+\dfrac{F}{3}\right\} \\ 0 \leqslant 4+\dfrac{F}{3} \end{array}\right\}$$

Ограничења по x сведу се на једно: x мора бити веће од максимума свих његових ограничења са доње стране. При томе свако ограничење променљиве x са доње стране мора бити мање или једнако од сваког ограничења са доње стране. Исто применимо и на добијена ограничења променљиве y. Последња неједначина последњег система се може трансформисати у облик $F \geqslant -12$, а друга у $0 \leqslant y \leqslant 0$, односно, $y = 0$. За $y = 0$ и $F = -12$ $A = \max\{0, 2, 3, 6\} = 6$, па прва неједнакост последњег система гласи $6 \leqslant x \leqslant 6$, односно $x = 6$. Најмања вредност израза F је $F = -12$ за $x = 6$, $y = 0$. Тачка $M(6,0)$ је оптимално решење.

887. Најмања вредност је $F = 2$ за $x = 0$, $y = 2$.

888. *а)* Ако засеје x и y хектара пшенице, а u и v хектара кукуруза на првој и другој њиви, из услова задатка добијамо еквивалентне системе једначина и неједначина који одређују скуп допустивих решења.

$$\left.\begin{array}{r} x+u=15 \\ y+v=10 \\ 3x+4y \geqslant 12 \\ 6u+9v \geqslant 72 \\ x,y,u,v \geqslant 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} u = 15-x \\ v = 10-y \\ 3x+4y \geqslant 12 \\ 6(15-x)+9(10-y) \geqslant 72 \\ 0 \leqslant x \leqslant 15 \\ 0 \leqslant y \leqslant 10 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} u = 15-x \\ v = 10-y \\ 3x+4y \geqslant 12 \\ 6x+9y \leqslant 108 \\ 0 \leqslant x \leqslant 15 \\ 0 \leqslant y \leqslant 10 \end{array}\right\}$$

Скуп допустивих решења по x, y (нацртајте га) је петоугао чија су темена тачке $M_1(4,0)$, $M_2(15,0)$, $M_3(15,2)$, $M_4(3,10)$, $M_5(0,10)$ и $M_6(0,3)$. Принос

пшенице са прве њиве је $3\cdot x$, а са друге $4\cdot y$ тона, док је кукуруза $6u$ са прве а са друге $9v$ тона, па ће зарада $F = 5(3x+4y) + 2(6u+9v) = 5(3x+4y) + 2\big(6(15-x) + 9(10-y)\big) = 360 + 3x + 2y$ бити највећа у тачки $M_3(15,2)$. На првој њиви и на два хектара друге њиве треба да засеје пшеницу, а на преосталих 8 хектара друге њиве кукуруз. Зарадиће 409 хиљада динара бруто.
б) функција циља $F = 900 + 3x - y$ достиже највећу вредност у тачки $M_2(15,0)$.
в) $F = 360 - 3x - 6y$, $M_1(4,0)$.
г) Функција циља $F = 360 - 2y$ достиже највећу вредност $F = 360$ у тачкама дужи M_1M_2. На другој њиви не треба сејати пшеницу већ само кукуруз, док на првој може да бира колико ће између 4 и 15 хектара пшенице засејати.
д) $F = 720 + 3x$, M_4M_5.

889. *а)* Ако направи x тулумби и y принцес-крофни потрошиће $18x + 24y \leqslant 2880$ грама брашна, $6x+4y \leqslant 720$ грама шећера и $\frac{1}{20}x + \frac{1}{5}y \leqslant 20$ јаја. Скуп допустивих решења (нацртајте га) одређен неједначинама $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $3x+4y \leqslant 480$, $3x+2y \leqslant 360$ и $x+4y \leqslant 400$, је петоугао чија су темена $M_1(0,0)$, $M_2(120,0)$ $M_3(80,60)$, $M_4(40,90)$ и $M_5(0,100)$. Зарада је једнака функцији циља $F = x+5y$ и достиже највећу вредност $F = 500$ динара у $M_5(0,100)$. Треба да направи 100 принцес-крофни а ни једну тулумбу. Потрошиће 2400 грама брашна, 400 грама шећера и сва јаја.
б) $F = 2x+4y = 440$ у тачки $M_4(40,90)$.
в) $F = x+y = 140$ у тачки $M_3(80,60)$.
г) $F = 2x+y = 240$ у тачки $M_2(120,0)$.
д) $F = 3x+4y = 480$ у тачкама дужи M_3M_4, при чему потроши сво брашно. У M_3 потроши и сав шећер, а преостане му јаја, а у M_4 потроши јаја а преостане му шећера.

890. *а)* Нађимо прво скуп допустивих решења. Нека је x, y и z тона превезено у продавнице P_1, P_2 и P_3 из магацина M_1, а u, v, w из магацина M_2. Из услова задатка добијамо еквивалентне системе неједначина:

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=6\\ u+v+w=4\\ x+u=2\\ y+v=3\\ z+w=5\\ x,y,z,u,v,w\geqslant 0\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{c} u=2-x\\ v=3-y\\ w=5-z\\ x+y+6=6\\ 2-x+3-y+5-z=4\\ x\leqslant 2\\ y\leqslant 3\\ z\leqslant 5\\ x,y,z\geqslant 0\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{c} u=2-x\\ v=3-y\\ v=5-z\\ z=6-x-y\\ 0\leqslant x\leqslant 2\\ 0\leqslant y\leqslant 2\\ 0\leqslant 6-x-y\leqslant 5\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{c} u=2-x\\ v=3-y\\ w=x+y-1\\ z=6-x-y\\ 0\leqslant x\leqslant 2\\ 0\leqslant y\leqslant 2\\ 1\leqslant x+y\leqslant 6\end{array}\right\}$$

Скуп допустивих решења по x, y (нацртајте га) је петоугао чија су темена

$M_1(1,0)$, $M_2(2,0)$, $M_3(2,3)$, $M_4(0,3)$ и $M_5(0,1)$. Функција циља (укупних трошкова превоза) $F = 13x + 9y + 13z + 12u + 10v + 9w = 123 - 3x - 5y$ достиже минимум $F = 102$ у тачки $M_3(2,3)$. Најмањи трошкови превоза, 102 динара, биће ако из магацина M_1 превеземо у продавницу P_1 2 тоне, у P_2 3 тоне, а у P_3 $6-2-3=1$ тону, док из магацина M_1 у P_1 $u = 2-2 = 0$ тона, у P_2 $v = 3-3 = 0$ тона и у P_3 $w = 2+3-1 = 4$ тоне шећера.

б) $F = 123+4x+y$, $M_5(0,1)$, $x = 0$, $y = 1$, $z = 5$, $u = 2$, $v = 2$ $w = 0$, $F = 124$.

в) $F = 123+x+5y$, $M_1(1,0)$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 5$, $u = 1$, $v = 3$ $w = 0$, $F = 124$.

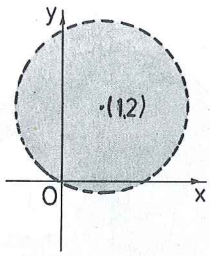
г) $F = 123+2x+2y$, M_1M_5, $x = t$, $y = 1-t$, $z = 5$, $u = 2-t$, $v = 2+t$ $w = 0$, $t \in [0,1]$, $F = 124$.

д) $F = 123+5x-6y$, $M_4(0,3)$, $x = 0$, $y = 3$, $z = 3$, $u = 2$, $v = 0$ $w = 2$, $F = 105$.

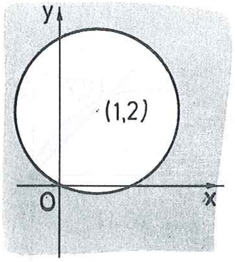
891. Дате неједначине напишимо у облику:

а) $(x-1)^2+(y-2)^2 < 5$; *б)* $(x-1)^2+(y-2)^2 \geqslant 5$; *в)* $\dfrac{x^2}{1^2}+\dfrac{y^2}{2} < 1$.

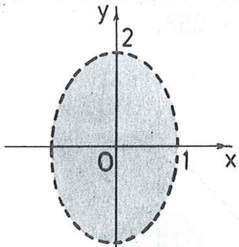
Решења су приказана на сликама 247 – 249.



Сл. 247.

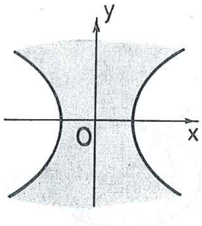


Сл. 248.

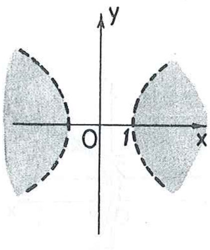


Сл. 249.

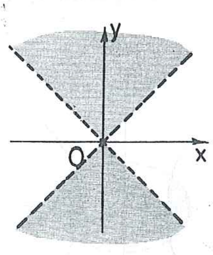
892. Решења су дата на сликама 250 – 252.



Сл. 250.

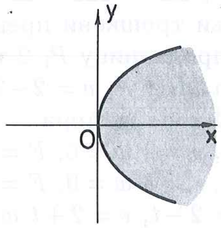


Сл. 251.

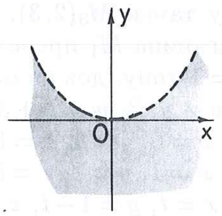


Сл. 252.

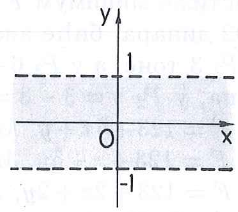
893. Решења су дата на сликама 253 – 255.



Сл. 253.



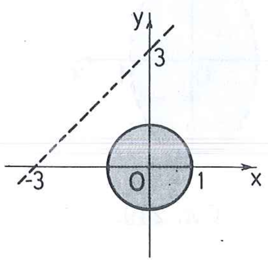
Сл. 254.



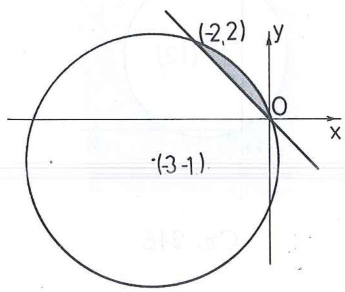
Сл. 255.

894. $2\cos(x+y^2) \leqslant 2$, а $y^2+2 \geqslant 2$ за све $x, y \in R$, па ће неједнакост бити испуњена само ако је $x+y^2 = 2k\pi$ и $y=0$. Решења су елементи скупа $\{(2k\pi, 0),\ k \in Z\}$.

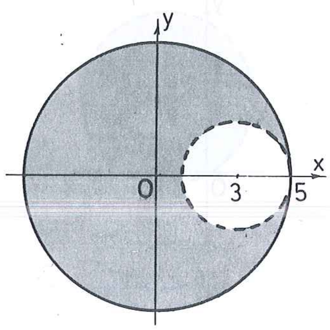
895. *а)* Дати круг и права немају заједничких тачака.
б) Дати круг и права секу се у тачкама $A(0,0)$ и $B(2,2)$.
в) Дати кругови се додирују изнутра. Решења су приказана на сликама 256 – 258.



Сл. 256.

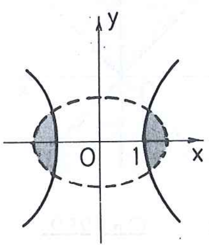


Сл. 257.

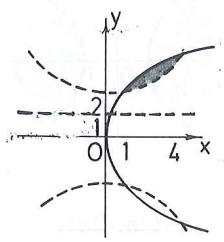


Сл. 258.

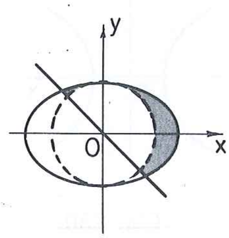
896. Решења су дата на сликама 259 – 261.



Сл. 259.



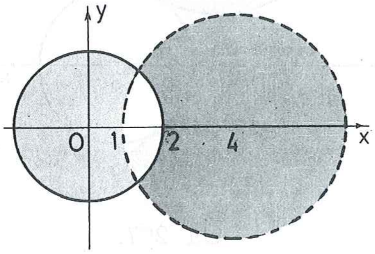
Сл. 260.



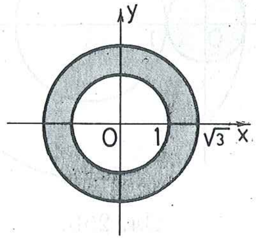
Сл. 261.

897. *а)* Дати кругови ће имати заједничку тачку ако растојање између њихових центара није веће од збира њихових полупречника, односно ако је $\sqrt{13} \leqslant |a|+1$, $|a| \geqslant \sqrt{13}-1$, $a \in \left(-\infty, 1-\sqrt{13}\right) \cup \left(\sqrt{13}-1, +\infty\right)$.
б) Решења прве неједначине су све тачке изнад праве $y = x+a$, а друге све тачке на параболи $y^2 = 2x$ и десно од ње. Решење ће постојати ако систем једначина $y^2 = 2x$ и $x = y - a$ има два решења. Добијамо: $y^2 - 2y + 2a = 0$, $D = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 2a = 4 - 8a > 0$, $a < \frac{1}{2}$.
в) Решење прве неједначине су све тачке на хиперболи $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$ и између њених грана, а друге тачке на кругу и унутар круга $(x-5)^2 + y^2 = a^2$. Центар тог круга се налази десно од десне гране хиперболе, па ће решење система једначина постојати ако постоји решење система једначина $x^2 - y^2 = 16$ и $(x-5)^2 + y^2 = a^2$, односно ако је $a^2 \geqslant 1$ или $a \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

898. *а)* Израз ће постојати ако је тачка $M(x,y)$ решење система неједначина $4 - x^2 - y^2 \geqslant 0$ и $(x-4)^2 + y^2 - 9 > 0$ или система $4 - x^2 - y^2 \leqslant 0$ и $(x-4)^2 + y^2 - 9 < 0$, сл. 262.
б) Ако је $y = 0$ мора бити $x^2 > 0$, односно $x \neq 0$, а ако је $y \neq 0$ мора бити $y^2\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1\right) > 0$. Дискриминанта израза у загради једнака је -3, а коефицијент уз $\left(\frac{x}{y}\right)^2$ једнак је 1, па је решење последње неједначине свака тачка $M(x,y)$, таква да је $y \neq 0$. Израз постоји за свако x, y осим за $x = 0$ и $y = 0$.
в) Мора бити $-1 \leqslant x^2 + y^2 - 2 \leqslant 1$, односно $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 3$, сл. 263.

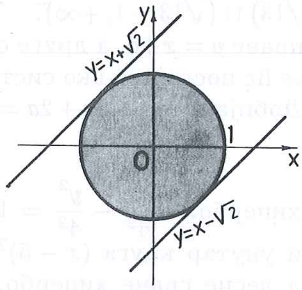


Сл. 262.

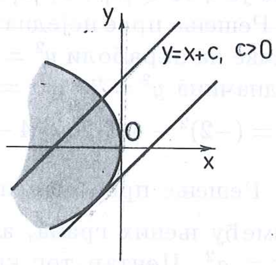


Сл. 263.

899. *а)* Израз добија вредност c на правој $y - x = c$, односно $y = x + c$. највећа и најмања вредност функције биће оне вредности c, за које је права $y = x + c$ тангента круга $x^2 + y^2 = 1$, сл. 264, односно за $c = \pm\sqrt{2}$. Највећа вредност израза је $\sqrt{2}$ а најмања $-\sqrt{2}$.



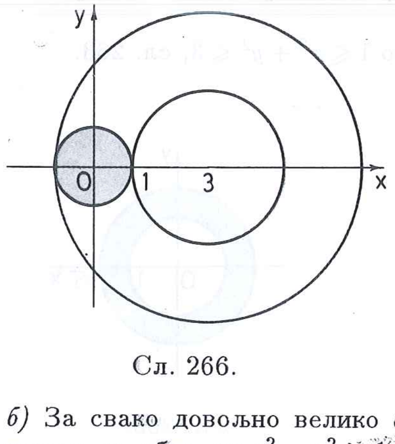
Сл. 264.



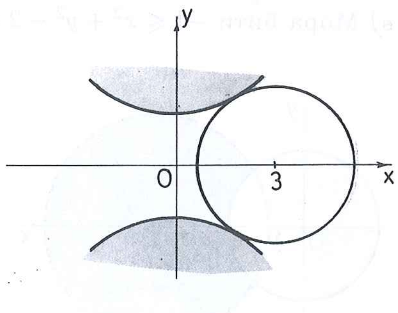
Сл. 265.

б) Очигледно да ако је $c > 0$ постоји пресек праве $y = x + c$ са области, па не постоји највећа вредност израза на области, сл. 265. Најмање c је оно за које је права $y = x + c$ тангента на параболу $y^2 = -x$, односно $c = -\dfrac{1}{4}$.

900. *а)* Тачка $(3, 0)$ није решење неједначине $x^2 + y^2 \leqslant 1$, па израз добија вредност $F = c$ на кругу $(x-3)^2 + y^2 = c$, чији је полупречник једнак $\sqrt{c}$. Најмања вредност c је она за коју се кругови $(x-3)^2 + y^2 = \sqrt{c}^2$ и $x^2 + y^2 = 1$ додирују споља, односно за коју је $\sqrt{c} + 1 = 3$, $c = 4$, а највећа за коју се додирују изнутра, односно за коју је $\sqrt{c} - 1 = 3$, $c = 16$. (Видети сл. 266.)



Сл. 266.



Сл. 267.

б) За свако довољно велико c круг $(x-3)^2 + y^2 = c$ има заједничких тачака са области $y^2 - x^2 \geqslant 1$, па не постоји највећа вредност израза F на тој области. Најмања вредност је она за коју круг додирује хиперболу $y^2 - x^2 = 1$, односно $c = \dfrac{17}{2}$, сл. 267.

901. $10^{2n} - 1 = 100\ldots00 - 1 = 99\ldots99$ – то је број са $2n$ цифара 9.

како је $3^3 = 27 = 9 \cdot 3$, то закључујемо да је тражени услов испуњен кад је број $99\ldots99 : 9 = 11\ldots11$ дељив са 3. Број $11\ldots11$ има паран број јединица, а да би био дељив са 3 мора му збир цифара, $2n$, бити 6, 12, 18,... Тражени природни бројеви су $n = 3k$.

902. Страница квадратне плоче има дужину $d = D(1638, 882) = 126$ mm. Како је $1638 : 126 = 13$ и $882 : 126 = 7$, добићемо укупно $13 \cdot 7$, тј. 91 квадратну плочу.

903. Тражени број је облика $n = k \cdot s - 3$, јер му недостаје 3 да би био дељив са 4, 5, 8 и 12, где је $s = S(4, 5, 8, 12) = 120$. За $k = 8$ је $n = 8 \cdot 120 - 3 = 957$.

904. Ако је $\overline{abc}$ произвољан троцифрени број, тада је $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1001 = \overline{abc} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.

905. Збир цифара броја n је $21 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 9) + 15 = 960$. Дакле, n је број дељив са 3, па је сложен. Не може n бити квадрат, јер би морао бити дељив са 9, а збир цифара (960) није дељив са 9.

906. Дату једначину можемо написати у облику $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11$. Лева страна је производ четири узастопна цела броја, па је очигледно $x - 2 = -8$ или $x - 5 = 8$. Решења су: $x_1 = -6$, $x_2 = 13$. Сада се дата једначина може написати у облику $(x-6)(x-13)(x^2 - 7x + 100) = 0$. како је $x^2 - 7x + 100 = \left(x - \frac{7}{2}\right)62 + \frac{351}{4} > 0$, закључујемо да нема више целих решења.

907. Ако је $p = 2$, тада је $2^{1998} + 2^{1999}$ паран број (збир два парна броја), па је сложен. Ако је $p > 2$, онда је p непаран број, па су p^{1998} и p^{1999} непарни бројеви, а збир непарних бројева $p^{1998} + p^{1999}$ је паран, па због тога и сложен број.

908. Како је $1170 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$, следи да тражени број не постоји, јер не постоји цифра 13.

909. како је $168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$, то су могуће цифре четвороцифреног броја:2, 2, 6, 7, или 2, 3, 4, 7, или 1, 3, 8, 7, или 1, 4, 6, 7. Најмањи је број 1378. Највећи број не постоји, јер дописивањем произвољног броја јединица добијамо произвољно велики број, а производ цифара стално остаје једнак 168.

910. Слично претходном задатку. Решење: 1566.

911. $2376 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11$, па је тражени број $2 \cdot 3 \cdot 11$, тј. 66. Заиста: $66 \cdot 2376 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 11^2 = (2^2 \cdot 3^2 \cdot 11)^2 = 396^2$.

912. Претпоставимо супротно, тј. да је збир цифара (јединица) сложен број, нпр. нека је $10 = 2\cdot 5$. Тада је наш број: $1111111111 = 11111\cdot 100001$, а то је сложен број – контрадикција! Обрнуто не важи, јер је нпр. 3 прост број, а $111 = 3\cdot 37$ је сложен број.

913. Уочимо производ свих простих бројева мањих од 22: $n = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19$. Тада су сложени сви бројеви редом: $n+2$, $n+3$, $n+4, \dots$ $n+20$, $n+21$. У то се није тешко уверити. Слично, ако је n производ свих простих бројева мањих од 102, тада су сложени сви природни бројеви редом од $n+2$ до $n+101$.

914. Ако бисмо желели да извршимо такву поделу да свако дете добије различит број бомбона, тада би нам требало најмање $0+1+2+\dots+62+63 = 2016$ бомбона, а толико немамо. (Дирихлеов принцип.)

915. Дати бројеви су различити, па их можемо сложити у растући низ: $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_{1000} < n_{1001}$. Формирајмо нов низ од 1000 различитих бројева: $n_2 - n_1$, $n_3 - n_1$, $n_4 - n_1, \cdots$, $n_{1000} - n_1$, $n_{1001} - n_1$. Овом низу допишимо следећих 1000 различитих бројева: n_2, n_3, $n_4, \dots$, n_{1000}, n_{1001}. Сада имамо 2000 бројева мањих од 2000. По Дирихлеовом принципу међу њима морају постојати бар два једнака. У нашем случају то су један из првог и један из другог низа од 100 бројева. Нека је, нпр.: $n_k - n_1 = n_p$. Тада је $n_k = n_1 + n_p$, што се и тврдило.

916. Уочимо да је $5^2 = 25 \equiv -1 (\operatorname{mod} 13)$. Даље је: $5^{555} = (5^2)^{277}\cdot 5 \equiv (-1)^{277}\cdot 5 (\operatorname{mod} 13) \equiv -5 (\operatorname{mod} 13)$. Тражени остатак дељења је 8.

917. Одређивањем последње цифре (конгруенцијом по модулу 10) утврдимо да су бројеви *а)* и *б)* дељиви са 10. Слично је и у случају *в)* (5^k се увек завршава цифром 5). У случају *г)* примећујемо да је $3^2 - 9 \equiv (-1)(\operatorname{mod} 100)$, па је $3^{1999} - 3^{2000} = (3^2)^{999}\cdot 3 - (3^2)^{1000} \equiv (-1)^{999}\cdot 3 - (-1)^{1000} (\operatorname{mod} 10) \equiv -4 (\operatorname{mod} 10)$. Дакле, израз *г)* није дељив са 10.

918. Слично претходном задатку. Рачунајући последњу цифру сваког сабирка, налазимо да је остатак дељења једнак 1.

919. $5 \equiv -1 (\operatorname{mod} 3)$, па је $5^{2n-1} - 1 \equiv \big((-1)^{2n-1} - 1\big)(\operatorname{mod} 3) \equiv 1 (\operatorname{mod} 3)$ а $4^n - 1 \equiv 0 (\operatorname{mod} 3)$, јер из $4 \equiv 1 (\operatorname{mod} 3)$ следи $4^n - 1 \equiv (1^n - 1)(\operatorname{mod} 3)$. Дакле, $5^{2n-1} - 1$ није дељиво са 3, а $4^n - 1$ је дељиво са 3, па не може бити $5^{2n-1} - 1$ дељиво са $4^n - 1$.

920. Не постоји такво n (слично претходном задатку докажемо да је $2^{2n} - 1$ дељиво са 3, а $3^{2n} - 1$ није дељиво са 3).

921. Уочимо да је $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{1998} + 2^{1999} = 2(2^{1999} - 1)$. Ако је тражена подела могућа, онда је збир елемената једног подскупа једнак

$2^{1999}-1$, тј. непаран је. Међутим, ово није могуће, јер се сабирају све сами парни бројеви. Тражена подела је немогућа.

922. Нека је p први, q други дати број. Тада је $q=(2^{2\cdot 2^n}-1)+2=(2^{2^n}-1)(2^{2^n}+1)+2=(2^{2^n}-1)\cdot p+2$. Дакле, ако је $d=D(p,q)$, онда d мора бити и делилац броја 2. Према томе $d=2$ или $d=1$. Али, бројеви p и q су непарни, па је $d\neq 2$, тј. $d=1$.

923. Скуп природних бројева поделимо на класе релацијом конгруенције по модулу 5. Број n може бити облика: $5k$, $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$ или $5k+4$. Смењујући n у дати израз $f(n)=3n^2+3n+7$, добијамо: $f(5k)=3(5k)^2+3\cdot 5k+7\equiv 2(\operatorname{mod}5)$, $f(5k+1)=3(5k+1)^2+3(5k+1)+7\equiv(3+3+2)(\operatorname{mod}5)\equiv 3(\operatorname{mod}5)$, итд. Једино је $f(5k+2)\equiv 0(\operatorname{mod}5)$, па су тражени бројеви $n=5k+2$, $k\in N$.

924. Посматрајмо низ бројева: a, $2a$, $3a,\ldots,(p-1)a$. Ови бројеви имају различите остатке при дељењу са p. Заиста, ако би два броја имала исти остатак, онда би њихова разлика ka, $k<p$ морала бити дељива са p. Наравно да ово није могуће, јер је $k<p$ и a није дељиво са p. Због тога је $a\cdot 2a\cdot 3a\cdots(p-1)a\equiv 1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1)(\operatorname{mod}p)$. Бројеви $1, 2, 3,\ldots,(p-1)$ су узајамно прости са p, па из услова $\big(a\cdot 2a\cdot 3a\cdots(p-1)a-1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1)\big)\equiv 0(\operatorname{mod}p)$, тј. из: $1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1)\cdot(a^{p-1}-1)\equiv 0(\operatorname{mod}p)$, следи да је $a^{p-1}-1\equiv 0(\operatorname{mod}p)$, што се и тврдило.

925. $111\ldots 1=\dfrac{999\ldots 9}{9}=\dfrac{1000\ldots 0-1}{9}=\dfrac{1}{9}(10^{p-1}-1)$. Како 10 није дељиво са p, на основу претходног задатка следи да је $10^{p-1}-1$ дељиво са p, па је и дати број дељив са p.

926. $n^5+29n=n^5-n+30n=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)(n^2+1)+30n$. Производ три узастопна броја, $(n-1)\cdot n(n+1)$, дељив је са 2 и са 3, па је дељив и са 6. Даље, користећи идеју из решења задатка 923, утврдимо да је $(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n^2+1)$ дељиво са 5, итд.

927. Дати израз напишемо у облику: $m^2+3mn+n^2=(m-n)^2+5mn$. Израз је дељив са 25, па како је $5mn$ дељиво са 5, мора бити и $(m-n)^2$ дељиво са 5. Следи да је $(m-n)$ дељиво са 5, што значи да је $(m-n)^2$ дељиво са 25. Онда мора бити и $5mn$ дељиво са 25, одакле закључујемо да је бар један од бројева m или n дељив са 5. Међутим, због дељивости са 5 разлике $(m-n)$. Мора бити са 5 дељив и други број.

928. $P(m)=\dfrac{1}{4}\big((2m+1)^2+15\big)$. Ако би $P(m)$ било дељиво са 9, онда би морало бити дељиво и са 3. Како је 15 дељиво са 3, мора бити и $(2m+1)^2$ дељиво са 3, одакле закључујемо да је $(2m+1)^2$ дељиво са 9. Али онда израз у загради не може бити дељив са 9, јер при дељењу са

9 даје остатак 6.

Слично закључујемо да $P(m)$ није дељиво са 25.

929. Из услова да се разломак може скратити следи да је $ax+b=kn$ и $cx+d=km$, где су m и n цели бројеви. Помножимо прву једначину са $-c$, а другу са a и саберемо. Добићемо: $ad-bc=akm-ckn=k(am-cn)$, што потврђује да је $(ad-bc)$ дељиво са k.

930. Треба да докажемо да су (a^2+b^2) и $(ac+bd)$ узајамно прости. Како је $(ac+bd)^2+1=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$, следи да је $(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2=1$, одакле извлачимо неопходан закључак.

931. Број учесника у колони је бесконачан јер из претпоставке да постоји коначан број n учесника у колони, следи да постоји бар $n+1$ учесник, онај који се налази у колони иза n-тог, чиме смо дишли до контрадикције. Јасно је да се у колони налазе само дечаци. Строг доказ те чињенице састоји се у њеној преформулацији као тврђења T_n, које зависи од природног броја n и у коришћењу математичке индукције. Нека је T_n тврђење: n-ти учесник колоне је дечак. Тада се исказ: „На челу колоне налази се дечак“, може преформулисати као „Први учесник колоне је дечак“, односно T_1, исказ: „Одмах иза сваког дечака у колони налази се дечак“ као „Ако је n-ти учесник колоне дечак, онда је и $n+1$-ви учесник колоне дечак“, односно $T_n \Rightarrow T_{n+1}$. На основу математичке индукције следи тачност тврђења T_n за свако $n \in N$, односно да је за свако $n \in N$, n-ти учесник колоне дечак. Дакле, у колони су само дечаци.

932. Користићемо варијанту 1°. Нека је T_n тврђење: $n^3+11n^2+38n+42>0$. Како је $(-2)^3+11\cdot(-2)^2+38(-2)+42=2>0$, то је T_{-2} тачно. Докажимо да ис тачности тврђења T_n следи тачност тврђења T_{n+1}: $(n+1)^3+11(n+1)^2+38(n+1)+42>0$, за све $n \geqslant -2$. $(n+1)^3+11(n+1)^2+38(n+1)+42=(n^3+11n^2+38n+42)+(3n^2+25n+50)>0+0=0$ (први сабирак је већи од нуле јер је то тврђење T_n, а други је квадратни трином чије су нуле $n=-5$ и $n=-\dfrac{10}{3}$ и који је позитиван ако је $n>-\dfrac{10}{3}$, специјално ако је $n \geqslant -2$). На основу математичке индукције, тврђење је тачно за све целе бројеве $n \geqslant -2$.

933. Користимо варијанту 2°. Нека је T_n: n се може написати као производ броја 1 и простих бројева. Како је $2=1\cdot 2$ и како је 2 прост број, то је T_2 тачно. Докажимо да из тачности тврђења $T_2, T_3, \ldots, T_{n-1}$ и T_n следи тачност тврђења T_{n+1}: $n+1$ се може написати као производ броја 1 и простих бројева. Ако је $n+1$ прост број, онда је $n+1=1\cdot(n+1)$ па је тврђење T_{n+1} тачно. Ако је $n+1$ сложен број, онда је $(n+1)=k\cdot l$, где су k и l природни бројеви мањи од $n+1$ и већи или једнаки од 2. На основу тврђења T_k и T_l добијамо: $k=1\cdot k_1\cdot k_2\cdots k_s$ и $l=1\cdot l_1\cdot l_2\cdots l_r$, где су $k_1, k_2, \ldots,$

$k_s,\ l_1,\ l_2, \ldots, l_r$ прости бројеви, па је $n+1 = k\cdot l = 1\cdot k_1\cdot k_2\cdots k_s\cdot l_1\cdot l_2\cdots l_r$. Овим је доказана тачност тврђења T_{n+1}, а самим тим и тачност тврђења T_n, за све $n \geqslant 2$.

934. *а)* Нека је $T_n\colon 1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Тврђење T_1 гласи: збир свих природних бројева од 1 до 1, односно 1 једнак је $\dfrac{1\cdot 2}{2}$ или $T_1\colon 1 = \dfrac{1\cdot 2}{2}$. T_1 је тачно тврђење. Докажимо да из $T_n \Rightarrow T_{n+1}\colon 1+2+\cdots+n+(n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$. Докажимо да је лева страна последње једнакости једнака десној користећи при томе (увек кад нам затреба) једнакост у тврђењу T_n. $1+2+\cdots+n+(n+1) = (1+2+\cdots+n)+(n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2}+n+1 = \dfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$. На основу математичке индукције следи да је тврђење T_n тачно за свако $n \in N$.

в) Нека је $T_n\colon 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Тврђење $T_1\colon 1^2 = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$ је тачно. Докажимо да из T_n следи $T_{n+1}\colon 1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. $1^2+2^2+\cdots+(n+1)^2 = (1^2+2^2+\cdots+n^2)+(n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = (n+1)\dfrac{n(2n+1)+6(n+1)}{6} = \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \dfrac{(n+1)(2n^2+4n+3n+6)}{6} = \dfrac{(n+1)[2n(n+2)+3(n+2)]}{6} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

и) Нека је $T_n\colon \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 2}+\cdots+\dfrac{1}{2n(2n+1)} = \dfrac{2n}{2n+1}$. $T_1\colon \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3} = \dfrac{2\cdot 1}{2\cdot 1+1}$ је тачно. Докажимо да из $T_n \Rightarrow T_{n+1}\colon \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)} = \dfrac{2n+2}{2n+3}$. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)} = \left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{2n(2n+1)}\right)+\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}+\dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)} = \dfrac{2n}{2n+1}+\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}+\dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)} = \dfrac{2n(2n+2)(2n+3)+2n+3+2n+1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} = \dfrac{2(2n+2)[2n^2+3n+1]}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} = \dfrac{2(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \dfrac{2n+2}{2n+3}$.

љ) Нека је $T_n\colon 1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}+\cdots+\dfrac{1}{3n-1}+\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{2}{3n} = \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{3n}$. $T_1\colon 1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$ је тачно. Докажимо да из T_n следи $T_{n+1}\colon 1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}+\cdots+\dfrac{1}{3n-1}+\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{2}{3n}+\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}-\dfrac{2}{3n+3} = \dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{3n+3}$. $\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}+\cdots+\dfrac{1}{3n-1}+\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{2}{3n}\right)+\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}-\dfrac{2}{3n+3} =$

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{2}{3n+3}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{n+1}-\frac{3}{3n+3}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{3n+3}$.

935. *д)* Нека је T_n: $(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^{n-1}})=\frac{1-x^{2^n}}{1-x}$. T_1: $1+x=\frac{1-x^2}{1-x}$ је тачно Докажимо да из T_n следи T_{n+1}: $(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^n})=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$. $[(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^{n-1}})](1+x^{2^n})=\frac{1-x^{2^n}}{1-x}\cdot(1+x^{2^n})=\frac{1^2-(x^{2^n})^2}{1-x}=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$.

936. *ж)* Нека је T_n: $\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}>\frac{1}{2\sqrt{n}}$. T_2: $\frac{4!}{4^2\cdot(2!)^2}>\frac{1}{2\sqrt{2}}$ је еквивалентно са $\frac{24}{64}>\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\frac{3}{4}>\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{9}{16}>\frac{1}{2}$, па је тачно. Докажимо да из T_n следи T_{n+1}: $\frac{(2n+2)!}{4^{n+1}[(n+1)!]^2}>\frac{1}{2\sqrt{n+1}}$. $\frac{(2n+2)!}{4^{n+1}[(n+1)!]^2}=\frac{(2n)!\cdot(2n+1)(2n+2)}{4^n(n!)^2\cdot 4\cdot(n+1)^2}>\frac{1}{2\sqrt{n}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}=\frac{1}{2\sqrt{n+1}}\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n}\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2}}=\frac{1}{2\sqrt{n+1}}\cdot\sqrt{\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+4n}}>\frac{1}{2\sqrt{n+1}}$.

љ) Нека је T_n: $\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{3n}>\frac{1}{3}$. T_2: $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}>\frac{1}{3}$ је тачно. Докажимо да из T_n следи T_{n+1}: $\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+4}+\cdots+\frac{1}{3n+3}>\frac{1}{3}$. $\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+4}+\cdots+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}=\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{3n}\right]+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}>\frac{1}{3}+\frac{9n^2+5n+4}{6(n+1)(2n+1)(3n+1)(3n+2)}>\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$.

937. *а)* Нека је T_n: $2|n^2+3n$, односно постоји $k\in Z$ такво да је $n^2+3n=2k$. T_0: $2|0^2+3\cdot 0$ је тачно. Докажимо да из T_n следи T_{n+1}: $2|(n+1)^2+3(n+1)$. $(n+1)^2+3(n+1)=n^2+2n+1+3n+3=n^2+3n+2n+4=2\cdot k+2(n+2)=2(k+n+2)$, па је T_{k+1} тачно.

ђ) Нека је T_n: $9|(3n+2)\cdot 4^{n+1}+1$. T_0: $9|2\cdot 4+1$ је тачно. Докажимо да из T_n следи T_{n+1}: $9|[3(n+1)+2]\cdot 4^{(n+1)+1}+1$. $[3(n+1)+2]\cdot 4^{(n+1)+1}+1=(3n+2)\cdot 4^{n+2}+3\cdot 4^{n+2}+1=(3n+2)\cdot 4^{n+1}\cdot 4+4+3\cdot 4^{n+2}+-3=4[(3n+2)\cdot 4^{n+1}+1]+3(4^{n+2}-1)$. Први сабирак дељив је са 9 јер је T_n по претпоставци тачно. Да бисмо доказали да је други сабирак дељив са 9, довољно је доказати да је тачно тврђење T_n': $3|4^{n+2}-1$. Докажимо то тврђење индукцијом. T_0': $3|4^2-1$ је тачно. Докажимо да из T_n' следи T_{n+1}': $3|4^{(n+1)+2}-1$. $4^{(n+1)+2}-1=$

$4\cdot 4^{n+2}-1=3\cdot 4^{n+2}+(4^{n+2}-1)$. Први сабирак је дељив са 3 а такође и други по индуктивној претпоставци, па је тврђење T_n' тачно, а такође и тврђење T_n за све $n\geqslant 0$.

938. *б)* Нека је T_n: $a_n=\frac{11}{12}\cdot 3^n-\frac{2n+1}{4}$. T_1: $a_1=\frac{11}{12}\cdot 3-\frac{3}{4}=2$ је тачно. Докажимо да из T_n следи T_{n+1}: $a_{n+1}=\frac{11}{12}\cdot 3^{n+1}-\frac{2n+3}{4}$. $a_{n+1}=3\cdot a_n+n=3\left(\frac{11}{12}\cdot 3^n-\frac{2n+1}{4}\right)+n=\frac{11}{12}\cdot 3^{n+1}-\frac{6n+3}{4}+\frac{4n}{4}=\frac{11}{12}\cdot 3^{n+1}-\frac{2n+3}{4}$.

ђ) Нека је T_n: $a_n=(n+1)2^n+n+2$. T_1: $a_1=(1+1)\cdot 2^1+1+2=7$ је тачно. Докажимо да из тачност тврђења T_1, T_2, T_{n-1} следи да је тврђење T_n тачно. T_2: $a_2=3\cdot 2^2+2+2=16$ је тачно. Доказаћемо да је T_n тачно за $n\geqslant 3$, при чему ћемо користити тачност тврђења T_{n-1}: $a_{n-1}=n\cdot 2^{n-1}+n-1+2$ и T_{n-2}: $a_{n-2}=(n-1)\cdot 2^{n-2}+n-2+2$. $a_n=4(a_{n-1}-a_{n-2})+n-2=4(n\cdot 2^{n-1}+n+1-(n-1)2^{n-2}-n)+n-2=2^2(2n\cdot 2^{n-2}+1-(n-1)\cdot 2^{n-2})+n-2=2n\cdot 2^n+4-(n-1)2^n+n-2=(n+1)\cdot 2^n+n+2$.

939. *г)* Нека је T_n: $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\cdot\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$. T_1: $\sin x=\dfrac{\sin x\cdot\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ је тачно. Докажимо да из T_n следи T_{n+1}: $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin(n+1)x=\dfrac{\sin\frac{n+2}{2}\cdot\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$. $(\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx)+\sin(n+1)x=$

$$\frac{\sin\frac{n+1}{2}\cdot\sin\frac{n}{2}x+\sin\frac{x}{2}\cdot\sin(n+1)x}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left[\cos\frac{1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x\right]+\frac{1}{2}\left[\cos\frac{2n+1}{2}x-\cos\frac{2n+3}{2}x\right]}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left[\cos\frac{1}{2}x-\cos\frac{2n+3}{2}x\right]}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{n+2}{2}x\cdot\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{n+2}{2}x\cdot\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

ђ) За $n=0$ је очигледно: $\operatorname{arctg}1=\operatorname{arctg}1$. За $n=1$ проверавамо једнакост на основу: $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)=2$. Коначно: $\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\cdots+\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}+\operatorname{arctg}\frac{1}{(n+1)^2+(n+1)+1}=\operatorname{arctg}(n+1)+\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+3n+3}$.

Како је: $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(n+1)+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n^2+3n+3}\right)=\dfrac{n+1+\dfrac{1}{n^2+3n+3}}{1-\dfrac{n+1}{n^2+3n+3}}=$

$\dfrac{n^3+4n^2+6n+4}{n^2+2n+2}=(n+2)$, то је $\operatorname{arctg}(n+1)+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n^2+3n+3}=\operatorname{arctg}(n+2)$, чиме је потврђено $T_n \Rightarrow T_{n+1}$.

940. *а)* Означимо са T_n тврђење у поставци задатка ако се у равни налази n правих. T_1 је тачно јер једна права дели раван на две полуравни које можемо обојити различитим бојама. Докажимо да из T_n следи T_{n+1}: Нека се у равни налази $n+1$ права. Склонимо на тренутак једну од њих. У равни је остало n правих, које деле раван на поља која можемо обојити на начин описан у поставци задатка (јер је T_n тачно). Вратимо у раван праву коју смо склонили. Она нека од поља, која су постојала када је било n правих, дели на два деле. У једној полуравни одређеној враћеном правом извршимо пребојавање. Поља или делове поља који су били обојени првом бојом пребојимо другом и обратно. Јасно је да су сада сва поља обојена на описани начин у случају када у равни лежи $n+1$ права, па је T_{n+1} тачно.

941. *а)* $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$; *б)* $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1$; *в)* $0,\ 2,\ 0,\ 2,\ 0$;
г) $2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5}$; *д)* $-1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1$; *ђ)* $1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1$;
е) $\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ -1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}$; *ж)* $3,\ \frac{9}{2},\ \frac{9}{2},\ \frac{27}{8},\ \frac{81}{40}$.

942. *а)* $5,\ -6,\ 7$; $a_n=(-1)^{n-1}\cdot n$. *б)* $\frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{64}$; $a_n=\frac{1}{2^n}$.
в) $\frac{1}{3^5},\ 3^6,\ \frac{1}{3^7}$; $a_n=3^{(n-1)\cdot(-1)^{n-1}}$. *г)* $\frac{4}{\sqrt{5}},\ \frac{5}{\sqrt{6}},\ \frac{6}{\sqrt{7}}$, $a_n=\frac{n-1}{\sqrt{n}}$.
д) $0,\ 6,\ 0$; $a_n=\left(1+(-1)^n\right)\cdot 2^{\frac{n}{2}}$. *ђ)* Ƨ5, ∂6, ∇7. (да бисте открили правило, посматрајте само десне половине симбола, који су, као што сте приметили, осно симетрични).

943. *а)* $a_{n+1}=n+2>n+1=a_n$, за свако $n\in N$. Низ је строго растући и није ограничен, јер ма колико велико било M, број$n+1$ ће бити већи од њега, за довољно велико n.
б) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+2}{n+1}\cdot\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1}<1$, одакле је $a_{n+1}<a_n$. Низ је строго опадајући. $|a_n|=\left|\dfrac{n+1}{n}\right|=\dfrac{n+1}{n}\leqslant\dfrac{n+n}{n}=2$. Низ је ограничен. (Може се ближе ограничити: $0<a_n\leqslant 2$.)
в) $a_{2k-1}=-1<1=a_{2k}>-1=a_{2k+1}$, за свако $k\in N$, па низ није монотон. $|a_n|=1=M$; низ је ограничен.
г) $a_{4k}=0<1=a_{4k+1}>a_{4k+2}=0$, за свако $k\in N$. Низ није монотон.

$|a_n| = \left|\sin\frac{n\pi}{2}\right| \leqslant 1 = M$; низ је ограничен.

д) $a_{2n-1} = 4n - 3 < 4n + 1 = a_{2n} = a_{2n+1}$. Низ је растући, али није строго растући. $|a_n| = |2n + (-1)^n| \geqslant 2n - 1 > M$ за довољно велико n. Низ није ограничен.

ђ) $a_{2n-1} < 0$ и $a_{2n} > 0$ за све $n \in N$. Низ није монотон. Даље је $|a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \leqslant 1 = M$. Низ је ограничен.

944. $a_1 = -4 < a_2 = 9 > a_3 = 4$, па низ није монотон. За $n > 5$ је $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 + 5(-1)^{n+1} - n^2 - 5(-1)^n = 2n + 1 + 2\cdot 5\cdot(-1)^{n+1} > 2\cdot 5 + 1 + 2\cdot 5(-1)^{n+1} = 2\cdot 5\big(1 + (-1)^{n+1}\big) + 1 \geqslant 0 + 1 > 0$, одакле следи да је $a_{n+1} > a_n$. Низ је растући за довољно велико n.

945. Уочимо да је $a_{n+1} = \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{b^n}{n!}\cdot\frac{b}{n+1} = a_n\cdot\frac{b}{n+1}$. За $n+1 \leqslant b$ је $a_{n+1} > a_n$, а за $n + 1 > b$, тј. за $n > b - 1$ је $a_{n+1} < a_n$. Низ, дакле, није монотон, али је за довољно велико n, конкретно за $n > b - 1$, строго опадајући. Сви чланови низа су позитивни, а ако је $n_0 = [b-1]$, тада је $|a_n| < a_{n_0} = M$. Низ је ограничен.

946. Трансформишимо општи члан низа са леве стране једнакости:
$$\frac{n+1}{(n-1)!+n!+(n+1)!} = \frac{n+1}{(n-1)!\big(1+n+n(n+1)\big)} = \frac{n+1}{(n-1)!(n+1)^2} =$$
$$\frac{1}{(n-1)!(n+1)} = \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$ Применом овог резултата трансформише се дати збир:
$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

947. Први чланови низа су: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, итд. Ако докажемо да је низ строго растући, с обзиром да су му чланови цели бројеви, биће доказано и тврђење задатка. Заиста: $a_{n+1} - a_n = a_n^3 - 3a_n^2 - a_n + 5$. Доказаћемо да је функција $f(a_n) = a_n^3 - 3a_n^2 - a_n + 5$ позитивна: $f(1) = 2$ и $f(3) = 2$, а за $a_n \geqslant 5$, означивши $a_n = t$, имамо: $f(t) = t^3 - 3t^2 - t + 5 = t\cdot t^2 - 3t^2 - t + 5 \geqslant 5t^2 - 3t^2 - t + 5 = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{8} > 0$. Значи $a_{n+1} - a_n > 0$, па је $a_{n+1} > a_n$. Тиме је тврђење доказано.

948. Чланови низа су очигледно позитивни бројеви. Према датој формули је $a_{n+3}\cdot a_{n+1} = a_{n+2}^2 + 8$, па је: $a_{n+3}\cdot a_{n+1} - a_{n+2}\cdot a_n = a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2$, а одавде: $a_{n+1}(a_{n+3} + a_{n+1}) = a_{n+2}(a_{n+2} + a_n)$. Последња једнакост се може написати о облику: $\frac{a_{n+3} + a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}}$. Проширујући дејство ове формуле на цео низ добијамо:

$$\frac{a_{n+3}+a_{n+1}}{a_{n+2}}=\frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}}=\cdots=\frac{a_3+a_1}{a_2}=\frac{5}{2}.$$

(Према датим почетним условима је $a_3\cdot a_1=a_2^2+8$, одакле је $a_3=11$.) Даље, из $\frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}}=\frac{5}{2}$ је $a_{n+1}=\frac{2}{5}(a_{n+2}+a_n)$, па је $a_{n+1}^2=\frac{4}{25}(a_{n+2}^2+2a_n\cdot a_{n+2}+a_n^2)$. Одузмемо левој и десној страни једнакости број $-\frac{16}{25}a_n\cdot a_{n+2}$, па добијемо једнакост: $a_{n+1}^2-\frac{16}{25}a_n\cdot a_{n+2}=\frac{4}{25}(a_{n+2}-a_n)^2$. Помножимо са 25 и заменимо $a_n\cdot a_{n+2}=a_{n+1}^2+8$ и добијемо: $9a_{n+1}^2-128=4(a_{n+2}-a_n)^2$ што се и тврдило.

949. Израчунајмо a_2 из дате формуле: $a_2=3a_1+\sqrt{8a_1^2+1}=6$. Из дате рекурентне формуле налазимо: $(a_{n+1}-3a_n)^2=8a_n^2+1$, односно $a_{n+1}^2-6a_na_{n+1}+a_n^2=1$. Аналогно, за a_{n+2} важи: $a_{n+2}^2-6a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+1}^2=1$. Одузимањем двеју последњих једнакости добијамо: $a_{n+2}^2-a_n^2-6a_{n+1}\cdot a_{n+2}+6a_n\cdot a_{n+1}=0$, коју трансформишемо у: $(a_{n+2}-a_n)(a_{n+2}+a_n-6a_{n+1})=0$. Из услова је јасно да је низ строго растући, па је $a_{n+2}-a_n>0$, одакле произилази $a_{n+2}+a_n-6a_{n+1}=0$, односно: $a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$. Очигледно је $a_{n+2}>0$, а како су a_1 и a_2 природни бројеви, на основу принципа математичке индукције (варијанта 2°) и остали чланови низа су природни бројеви.

950. Из дате формуле добијамо: $a_{n+1}=2a_n^2-2a_n+1$, односно $2a_{n+1}=4a_n^2-4a_n+2=(2a_n-1)^2+1$. Применом ове формуле добијамо: $a_1=\frac{1}{2}(2a_0-1)^2+\frac{1}{2}$, итд. Даље, математичком индукцијом лако добијемо $a_n=\frac{1}{2}(2a_0-1)^{2^n}+\frac{1}{2}$.

951. Из дате формуле добијамо: $3a_{n-1}=2n(a_{n-1}-a_n)$. Ову везу применимо редом на $a_{n-2}, a_{n-3},\ldots, a_2, a_1$:

$$\begin{aligned}
3a_{n-1}&=2n(a_{n-1}-a_n)\\
3a_{n-2}&=2(n-1)(a_{n-2}-a_{n-1})\\
3a_{n-3}&=2(n-2)(a_{n-3}-a_{n-2})\\
&\vdots\\
3a_2&=2\cdot 3(a_2-a_3)\\
3a_1&=2\cdot 3(a_1-a_2)
\end{aligned}$$

Саберемо све ове једнакости и добићемо:

$$3s-3a_n=-2na_n+2(a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_3+a_2+a_1)+2a_1,$$

а одавде је $3s=a_n-2na_n+2s+2a_1$, односно: $s=2a_1-(2n-1)a_n$. Како је $2a_1=2\cdot\frac{1}{2}=1$, следи: $s=1-(2n-1)a_n<1$.

952. Уведимо ознаку: $m = 1+2+3+\cdots+(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Тада је $x_n = (m+1)+(m+2)+\cdots(m+n) = \dfrac{n}{2}(m+m+n+1) = \dfrac{n}{2}(2m+n+1) = \dfrac{n}{2}(n^2+1)$.

953. Из дате формуле добијамо: $a_{n+1}^2 = a_n^2+2+\dfrac{1}{a_n^2} > a_n^2+2$. Применимо ову неједнакост редом:

$$\begin{aligned} a_2^2 &> a_1^2+2 \\ a_3^2 &> a_2^2+2 \\ &\vdots \\ a_{99}^2 &> a_{98}^2+2 \\ a_{100}^2 &> a_{99}^2+2 \end{aligned}$$

Саберемо и добијемо: $a_{100}^2 > a_1^2 + 99\cdot 2 = 199 > 196$, па је $a_{100}^2 > 14$.

954. Из дате везе је $t_{n+1} = \dfrac{t_n}{xt_{n-1}}$. Сада редом рачунамо $t_0 = a$, $t_1 = b$, $t_2 = \dfrac{b}{ax}$, $t_3 = \dfrac{1}{ax^2}$, $t_4 = \dfrac{1}{bx^2}$, $t_5 = \dfrac{a}{bx}$, $t_6 = a$, $t_7 = b$ и даље се понављају чланови низа.

955. Слично претходном задатку налазимо: $a_3 = \dfrac{1+b}{b}$, $a_4 = \dfrac{a+b+1}{ab}$, $a_5 = \dfrac{(a+1)(b+1)}{b(1+b)} = \dfrac{a+1}{b}$, $a_6 = a$, $a_7 = b$, итд. Низ је периодичан, са периодом 5. Према томе: $a_{1999} = a_{1995+4} = a_4 = \dfrac{a+b+1}{ab}$.

956. *а)* -3, 1, 5, 9, 13.
б) $a_{13} = a_1 + 12d$, па је $d = \dfrac{a_{13}-a_1}{12} = -2$. Низ је: 2, 0, -2, -4, -6.
в) $a_1 = 4$, $a_2 = 9$, $d = 5$.
г) $a_9 - a_5 = 4d = \dfrac{20}{9}$, па је $d = \dfrac{5}{9}$. Решење: $-\dfrac{14}{9}$, -1, $-\dfrac{4}{9}$, $\dfrac{1}{9}$, $\dfrac{2}{3}$.
д) $a_3 + a_5 + a_7 = 3a_1 + 12d = 48$, итд.: 28, 25, 22, 19, 16.

957. *а)* $a_1 + 2d = 7$ и $6(2a_1 + 11d) = 210$, итд.
б) $a_1 = -11$, $d = 3$.

958. $d = 3$, $a_n = 28$, $S_n = 105$, итд: $a_1 = -14$.

959. Слично претходном задатку: $x = 37$.

960. $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ и $a_4 + a_5 + a_6 = 72$. Резултат: $a_1 = -4$, $d = 7$.

961. $a_1 = -5$, $d = 2$.

962. $n = 11$.

963. *а)* Из $a_1 + a_5 = 2a_1 + 4d = 18$, тј. $a_1 + 2d = 9$ и $(a_1+d)(a_1+3d) = 65$ добијамо a_1 и d. Имамо два решења: 1, 5, 9,... или 17, 13, 9,...
б) $a_1 = 17$, $d = 2$.

в) Има четири решења, која добијамо комбиновањем вредности: $d = 1$ и $a_1 = 1$ или $a_1 = -4$, односно $d = -1$ и $a_1 = -1$ или $a_1 = 4$.
г) Решења: $a_1 = 2$, $d = -3$ или $a_1 = -10$ и $d = 3$.
д) $a_1 = -3$ и $d = 5$ или $a_1 = 7$ и $d = -5$.
ђ) $a_1 = -\frac{7}{2}$, $d = \frac{3}{2}$ или $a_1 = \frac{5}{2}$ и $d = -\frac{3}{2}$.

964. Из $a_n = a_1 + (n-1)d = m$ и $a_m = a_1 + (m-1)d = n$, одузимањем једначина добијемо: $(m-n)d = n-m$, одакле је $d = -1$. Сада лако израчунамо да је $a_1 = m+n-1$, па је $a_p = m+n-p$.

965. Ако уведемо ознаке: $d = 2x$ и $a_2 + a_3 = y = a_1 + a_4$, добићемо: $4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{10} = (a-3x)^3 + (a-x)^3 + (a+x)^3 + (a+3x)^3 = 4a^3 + 60ax^2$. Одавде је $x = \frac{1}{20}$ или $x = -\frac{1}{20}$. Решења су: $a_1 = \frac{1}{10} = d$ и $a_1 = \frac{2}{5}$, $d = -\frac{1}{10}$.

966. *Упутство:* треба применити формулу за S_n.

967. $\frac{x+1}{2}$.

968. $a_1 = -2$, $a_{14} = 63$, итд. Решење: 3, 8, ..., 58.

969. $S_1 = a_1 = 3$, $S_2 = 8 = a_1 + a_2$, па је $a_2 = 5$ и $a_3 = 7$, $a_4 = 9$, итд.

970. Слично претходном задатку: 5, 9, 13, ...

971. Дискриминанта једначине, уз ознаке: $a = b - d$, $c = b + d$, је $D = 4d^2 \geqslant 0$.

972. Из услова $S_m = S_n$, $m \neq n$, тј. из $\frac{m}{2}(2a_1 + (m-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$, добијамо: $d = -\frac{2a}{m+n-1}$, па је $S_{m+n} = 0$.

973. Ако би $\sqrt{5}$ и 5 били чланови аритметичког низа, онда бисмо имали једнакости: $\sqrt{5} = 2 + (m-1)d$ и $5 = 2 + (n-1)d$, где је d разлика низа и $m, n \in N$. Из ових једнакости добијамо: $d = \frac{\sqrt{2}-2}{m-1}$ и $d = \frac{3}{n-1}$. Даље, из $\frac{\sqrt{2}-2}{m-1} = \frac{3}{n-1}$ добијамо: $\sqrt{5} = 2 + \frac{3(m-1)}{n-1}$, што није могуће, јер је десна страна једнакости рационалан број, а $\sqrt{5}$ је ирационалан. Дакле, $\sqrt{5}$ и 5 не могу бити чланови датог аритметичког низа.

974. Израчунајмо дате разлике: $a_1 = f(x+1) - f(x) = 2x - 2$, $a_2 = 2x$ и $a_3 = 2x + 2$, ..., $a_k = f(x+k+1) - f(x+k) = 2x + 2k - 2$. Збир првих пет чланова је: $S_5 = 10x + 10 = 60$, одакле је $x = 5$.

975. Користимо једнакост: $a_1 + a_3 = 2a_2$, односно $7x - 2 = 2(3x+4)$. Одавде је $x = 10$, па је $a_1 = 17$, $d = 17$. Тражени збир је: $S_{10} = 935$.

976. Из $\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=n^2$, добијамо: $2a_1-d=n(2-d)$. Како лева страна једнакости не зависи од n, мора бити $2-d=0$, тј. $d=2$. Сада следи да је $a_1=1$, па је једини низ који испуњава захтеве: 1, 3, 5, ...

977. Стављајући у формулу за збир $d=2$, добићемо: $S_n=n(a_1+n-1)$ и $S_{3n}=3n(a_1+3n-1)$. Треба да буде: $S_{3n}:S_n=\frac{3(a_1+3n-1)}{a_1+n-1}=c$, где је c константа. Одавде добијамо једнакост: $n(9-c)=(a_1-1)(c-3)$. Како десна страна не зависи од n, мора бити $c=9$, а због тога је и $a_1-1=0$, тј. $a_1=1$. Дакле, само низ: 1, 3, 5, ... задовољава постављене захтеве.

978. Из $\dfrac{\frac{m}{2}(2a_1+(m-1)d)}{\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)}=\dfrac{m^2}{n^2}$, добијамо $a_1=\dfrac{d}{2}$. Сада је $\dfrac{a_m}{a_n}=$
$\dfrac{\frac{d}{2}+(m-1)d}{\frac{d}{2}+(n-1)d}=\dfrac{2m-1}{2n-1}$.

979. $(a+b)^2-(a^2+b^2)=a^2+b^2-(a-b)^2$.

980. Бројеви a^2, b^2 и c^2 задовољавају услов: $b^2-a^2=c^2-b^2$. Доказаћемо да је $\frac{1}{a+c}-\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+c}$. Заиста: $\frac{1}{a+c}-\frac{1}{b+c}=\frac{b-a}{(a+c)(b+c)}=\frac{(b-a)(a+b)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$ и $\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+c}=\frac{c-b}{(a+b)(a+c)}=\frac{(c-b)(b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$. Тиме је тврђење доказано.

981. Ставимо $a_1=a^2$, $a_2=b^2$ и $a_3=c^2$ и сводимо на претходни.

982. Слично задацима 980 и 981.

983. Из $S_n=an^2+bn+c$ је $S_1=a_1=a+b+c$, па из $S_2=a_1+a_2=4a+2b+c$ је $a_2=3a+b$. Тако добијемо и $a_3=5a+b$. Из услова $a_1+a_3=2a_2$ следи $c=0$. Према томе, ако је $a_1=a+b$ и $d=2a$, збир прогресије је $S_n=an^2+bn$.

984. $\dfrac{1}{a_1a_n}=\dfrac{a_1+a_n}{a_1a_n(a_1+a_n)}=\dfrac{1}{a_1+a_n}\left(\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_1}\right)$. Слично применимо и на све остале сабирке са леве стране једнакости и водећи рачуна о чињеници да је $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots=a_n+a_1$, добијамо тражену једнакост.

985. Нека $x_1,x_2,\ldots,x_n$ чине аритметичку прогресију. Тада је $x_2-x_1=x_3-x_2=\cdots=x_n-x_{n-1}=d$ и $x_n=x_1+(n-1)d$, па је: $\dfrac{1}{x_1x_2}+\dfrac{1}{x_2x_3}+\cdots+$

$\dfrac{1}{x_{n-1}x_n}=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{d}{x_1x_2}+\dfrac{d}{x_2x_3}+\cdots+\dfrac{d}{x_{n-1}x_n}\right)=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}+\dfrac{x_3-x_2}{x_2x_3}+\cdots+\dfrac{x_n-x_{n-1}}{x_{n-1}x_n}\right)=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_3}+\cdots+\dfrac{1}{x_{n-1}}-\dfrac{1}{x_n}\right)=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_n}\right)=\dfrac{1}{d}\cdot\dfrac{(n-1)d}{x_1x_n}=\dfrac{n-1}{x_1x_n}$.

Обрнуто, ако је испуњен дати услов за $n\geqslant 3$, доказаћемо да $x_1, x_2, \ldots, x_n$ чине аритметичку прогресију. За $n=3$ се непосредно уверавамо да из $\dfrac{1}{x_1x_2}+\dfrac{1}{x_2x_3}=\dfrac{2}{x_1x_3}$ добијамо: $x_2-x_1=x_3-x_2$. Даље, тврђење се доказује математичком индукцијом.

986. *а)* Из $b_6=b_1q^5$, тј. из $96=-3\cdot q^5$, добијамо: $q^5=-32$ па је $q=-2$.
б) $b_1q^2=2$ и $b_1q^5=54$, па је $\dfrac{b_1q^5}{b_1q^2}=\dfrac{54}{2}$. Одавде је $q^3=27$, тј. $q=3$. Следи да је $b_1=\dfrac{2}{9}$.

в) $3=b_1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$. Следи да је $b_1=24$.

г) Из $b_1q^3-b_1q^2=60$ и $b_1q^4+b^1q^5=80$, добијамо: $\dfrac{b_1q^2(q-1)}{b_1q^4(1+q)}=\dfrac{60}{80}$, односно $\dfrac{q-1}{q^2+q^3}=\dfrac{3}{4}$ или $3q^3+3q^2-4q+4=0$. Помоћу Безуовог става утврдимо да је $q=-2$ једно решење. Даље је $(3q^3+3q^2-4q+4):(q+2)=3q^2-3q+2\neq 0$. Дакле, $q=-2$, па је $b_1=60:(q^3-q^2)=-5$.

987. Из $635=\dfrac{b_1(2^7-1)}{2-1}$, добијамо $b_1=5$, па је $b_7=5\cdot 2^6=320$.

988. Из датог услова имамо: $b_1+b_1q^4=51$ и $b_1q+b_1q^5=102$. Поделимо ове две једначине и добијемо $q=2$. Даље је $b_1=3$ и $3069=\dfrac{3\cdot(2^n-1)}{2-1}$, одакле је $2^n=1024$ и $n=10$.

989. $b_1q^2-b_1=9$ и $b_1q-b_1q^3=18$. Поделимо ове једначине и добијемо: $q=-2$, па је $a_1=3$. Тражени бројеви су: $3, -6, 12, -24$.

990. $b_1=1$ и $b_5=256$, итд. Уметнули смо бројеве: $4, 16, 64$.

991. Дато је $b_1^3q^3=1728$, одакле је $b_1q=12$ и $b_1+b_1q+b_1q^2=63$. Одавде је $\dfrac{12}{q}+12+12q=63$, што даје $q=4$ или $q=\dfrac{1}{4}$. Решења су: $b_1=3$, $q=4$, или $b_1=48$, $q=\dfrac{1}{4}$.

992. Дато је $b_1(1+q+q^2)=62$ и $\log b_1+\log b_1q+\log b_1q^2=3$. Други услов трансформишемо: $\log b_1^3q^3=3$, односно $\log b_1q=1$, па је $b_1q=10$, итд. Резултати: $b_1 = 2$ и $q = 5$ или $b_1 = 50$, $q = \frac{1}{5}$.

993. $b_6 = 96$.

994. Резултати: 3, 6 и 12 или 12, 6 и 3.

995. $b_5 = 729$.

996. $b_1 + b_1q + b_1q^2 = 195$ и $b_1q^2 - b_1 = 120$, итд. Решење: $195 = 15+45+135$.

997. Из датог услова закључујемо да је $\log m \cdot \log p = (\log n)^2$. Користећи особину $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$, добијамо нпр. $\log_m x = \frac{\log x}{\log m}$. Отуда следи: $\log_m x \cdot \log_n x = \frac{\log x}{\log m} \cdot \frac{\log x}{\log n} = \frac{(\log x)^2}{(\log n)^2} = \left(\frac{\log x}{\log n}\right)^2 = (\log_n x)^2$.

998. Дат је услов: $\frac{b_1(q^{2000} - 1)}{q-1} = 0$, одакле је $q = -1$ (јер је $b_1 \neq 0$ и $q \neq 1$). Даље, из: $\frac{b_1((-1)^{2001} - 1)}{-1-1} = 1$, добијамо $b_1 = 1$. Тражена прогресија је: $1, -1, 1, -1, \ldots$

999. Таквих прогресија има бесконачно много. Наиме, ако је $q > 1$, тада прогресија: $q^9, q^8, q^7, q^6, q^5, q^4, q^3, q^2, q, 1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \ldots$ испуњава тражени услов.

1000. Ако је $\overline{aaa\ldots aa}$ број са n цифара једнаких a, тада је: $\overline{aaa\ldots aa} = a \cdot \overline{111\ldots 11} = \frac{a}{9} \cdot 999\ldots 99 = \frac{a}{9}(10^n - 1)$. Према томе: $S = \frac{a}{9}(10-1) + \frac{a}{9}(10^2 - 1) + \frac{a}{9}(10^3 - 1) + \cdots + \frac{a}{9}(10^n - 1) = \frac{a}{9}(10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n - n) = \frac{a}{9}\left(10 \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n\right) = \frac{a}{81}(10^{n+1} - 9n - 10)$.

1001. Дато је $b_1 + b_1q^2 + b_1q^4 = 455$ и $b_1q + b_1q^3 + b_1q^5 = 1365$. Поделимо ове једнакости и добијемо $q = 3$. Резултат: 5, 15, 45, 135, 405, 1215.

1002. Израчунајмо најпре s и t по формулама за збир геометријске прогресије: $s = a_1 \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$ и $t = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1q} + \cdots + \frac{1}{a_1q^{n-1}} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1 - \frac{1}{q^n}}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{1}{a_1q^{n-1}} \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$. Одавде следи да је $\frac{s}{t} = a_1^2 q^{n-1}$. Даље је:

$p = a_1 \cdot a_1q \cdots a_1q^{n-1} = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = (a_1^2 q^{n-1})^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{n}{2}}$.

1003. Ако су 1, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ чланови геометријског низа, онда је $\sqrt{2} = q^m$ и $\sqrt{3} = q^n$, односно $2 - q^{2m}$ и $3 = q^{2n}$. Тада би важило: $2^n = 3^m$, што није могуће. Одговор је: не могу!

1004. *Упутство:* треба доказати да је $b(2b - a) = c^2$.

1005. Дати су услови: $b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = 91$ и $(b_1 + 25) + (b_1 q^2 + 1) = 2(b_1 q + 27)$. Други услов се своди на $b_1(q-1)^2 = 28$. Поделимо ове једначине, итд. Решења су: $b_7 = \dfrac{7}{81}$ или $b_7 = 5103$.

1006. Дати су бројеви: b_1, $b_1 q$, $24 - b_1 q$ и $32 - b_1$, који задовољавају услове: $b_1(24 - b_1 q) = (b_1 q)^2$ и $b_1 q + 32 - b_1 = 2(24 - b_1 q)$. Решавањем овог система једначина налазимо: $b_1 = 2$ или $b_1 = 32$ и $q = 3$ или $q = \dfrac{1}{2}$. Тражени бројеви су: 2, 6, 18, 32 или 32, 16, 8, 0.

1007. Користећи услов $ac = b^2$ добијамо: $\log_N a + \log_N c = 2\log_N b$, а одавде је $\dfrac{1}{\log_a N} + \dfrac{1}{\log_c N} = \dfrac{2}{\log_b N}$.

1008. Дати су бројеви: 2, $2q$, $2q + 4$, $2q^2$. Из услова $2 + 2q^2 = 2(2q + 4)$ добијамо $q = 3$ (друго решење $q = -1$, не задовољава услове задатка). Имамо бројеве: 2, 6, 10, 18.

1009. Дати су бројеви: b_1, $b_1 q$, $b_1 q^2$, $b > 0$, $q > 0$, $q \neq 1$. Из услова имамо везе: $b_1 + b_1 q^2 = 2(b_1 q + 8)$ и $b_1(b_1 q^2 + 64) = (b_1 q + 8)^2$. Елиминишемо b_1 и добијемо једначину: $q^2 + 2q - 15 = 0$, чија су решења $q = 3$ или $q = -5$. Због $q > 0$ је $q = 3$, па је $a_1 = 4$. Дати су бројеви: 4, 12, 36.

1010. Чланови аритметичког низа су a_1, $a_1 + d$, $a_1 + 2d$, ... Први, трећи и седми члан су у релацији: $a_1(a_1 + 6d) = (a_1 + 2d)^2$. Следи: $a_1 = 2d$, па је $q = \dfrac{a_1 + 2d}{a_1} = \dfrac{4d}{2d} = 2$. Четврти члан геометријског низа је $a_1 q^3 = 16d = 2d + 14d = a_1 + 14d$, а то је петнаести члан аритметичког низа.

1011. Слично задатку 1009. Решење: 1, 5, 9, 13, ... и 1, 3, 9, 27, ...

1012. Дати су бројеви $a - d$, a, $a + d$. Из датог збира добијамо: $a = 7$. Из услова за геометријски низ сада добијамо једначину: $9^2 = (7 - d)(7 + d + 16)$, чија су решења: $d = 4$ или $d = -20$. Резултат: 3, 7, 11, ... или 27, 7, −13, ...

1013. Из датог услова: $(a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 3d)$ добијамо: $a_1 = d$. Према томе: $a_4 = a_1 + 3d = 4d$, $a_6 = 6d$ и $a_9 = 9d$, па је $q = \dfrac{a_6}{a_4} = \dfrac{a_9}{a_6} = \dfrac{3}{2}$.

1014. Уведимо ознаке: $a_2 = a$, $a_1 = a - d$, $a_3 = a + d$ и слично $b_2 = b$,

$b_1 = b - h$, $b_3 = b + h$. Сада из $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$ добијамо $a = b$, односно $a_2 = b_2$. Геометријски низ формирају бројеви: $a_1 + b_1 = 2a - (d+h)$, $a_2 + b_2 = 2a$ и $a_3 + b_3 = 2a + d + h$, па је $4a^2 = 4a^2 - (d+h)^2$. Следи да је $d + h = 0$, тј. $d = -h$. Отуда следи остатак тврђења задатка.

1015. Како је $a_k = a_1 + (k-1)d$ и $b_k = b_1 q^{k-1}$, за $1 \leqslant k \leqslant n$, то је $a_k b_k = a_1 b_1 q^{k-1} + b_1 d(k-1)q^{k-1}$, па је тражени збир: $S_n = a_1 b_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) + b_1 dq(1 + 2q + 3q^2 + \cdots + (n-1)q^{n-2}) = a_1 b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1} + b_1 dq \dfrac{(n-1)q^n - nq^{n-1} + 1}{(1+q)^2}$. (Збир $s_n = 1 + 2q + 3q^2 + \cdots + (n-1)q^{n-1}$ налазимо из $s_n - qs_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2} - (n-1)q^{n-1}$, итд.)

1016. *Упутство:* треба доказати да је:

а) $n + 2 = (n+1) + 1$; *б)* $2^{n+4} = 2 \cdot 2^{n+3}$; *в)* $\dfrac{1}{2} \cdot 3^n = \dfrac{1}{2} 3^{n-1} + 3^{n-1}$;

г) $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$; *д)* $2^{n+2} = 5 \cdot 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n$; *ђ)* $3^{n+2} = 5 \cdot 3^{n+1} - 6 \cdot 3^n$;

е) $\dfrac{\sin \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} = \dfrac{\sin \frac{n}{2} x \cdot \sin \frac{n-1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} + \sin nx$;

ж) $\dfrac{\sin 2^{n+1} x}{2^{n+1} \sin x} = \dfrac{\sin 2^n x}{2^n \sin x} \cdot \cos 2^n x$.

1017. *а)* Збир једнакости $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d$, $\ldots$, $a_n = a_{n-1} + d$, даје: $a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + d + d + \cdots + d$, одакле $a_n = a_1 + (n-1)d$. Решење је сваки аритметички низ са разликом d.

б) $a_n = a_1 + \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1) \cdot n} = a_1 + \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n} = a_1 + 1 - \dfrac{1}{n}$, где је a_1 произвољан реалан број.

в) $a_n = a_1 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = a_1 + \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$, $a_1 \in R$.

г) $a_n = a_1 + b_1 + b_1 + \cdots + b_{n-1}$, $a_1 \in R$.

1018. Ако је $a_1 = 0$, онда је $a_n = 0$. Нека је $a_1 \neq 0$. Тада је:

а) $a_2 = a_1 \cdot q$, $a_3 = a_2 \cdot q$, $a_n = a_{n-1} \cdot q$. Множењем левих и десних страна добијених једнакости добијамо $a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot q^{n-1}$, одакле је $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Решење је сваки геометријски низ са количником q.

б) $a_n = a_1 \cdot (n-1)!$, $a_1 \in R$;

в) $a_n = a_1 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdots 2^{n-1} = a_1 \cdot 2^{1+2+3+\cdots+(n-1)} = a_1 \cdot 2^{\frac{(n-1) \cdot n}{2}}$, $a_1 \in R$;

г) $a_n = a_1 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdots b_{n-1}$, $a_1 \in R$.

1019. *а)* $a_1 = 2$, $a_2 = a_1^3 = 2^3$, $a_3 = a_2^3 = (2^3)^3 = 2^{3^2}$, $a_4 = a_3^3 = 2^{3^3}$. Очигледно је $a_n = 2^{3^{n-1}}$. Коректан доказ се спроводи математичком индукцијом. Нека је T_n: $a_n = 2^{3^{n-1}}$. t_1: $a_1 = 2^{3^0} = 2^1 = 2$ је тачно. Дока-

жимо да из T_n следи T_{n+1}: $a_{n+1}=2^{3^n}$. $a_{n+1}=a_n^3=(2^{3^{n-1}})^3=2^{3\cdot 3^{n-1}}=2^{3^n}$.
б) Нека је $x_n=t\cdot a_n$, за све $n\in N$. Тада је $x_1=t\cdot 1=t$ и $a_{n+1}=\dfrac{x_{n+1}}{t}=\dfrac{x_n}{t}(2-x_n)$, $x_{n+1}=2x_n-x_n^2$, $x_1=t$, односно $1-x_{n+1}=1-2x_n+x_n^2=(1-x_n)^2$. Нека је $y_n=1-x_n$. Тада је низ y_n решење диференцне једначине $y_{n+1}=y_n^2$, које задовољава почетни услов $y_1=1-x_1=1-t$. Слично као у *а)* њено решење је $y_n=(1-t)^{2^{n-1}}$, па је $x_n=1-y_n=1-(1-t)^{2^{n-1}}$ и $a_n=\dfrac{x_n}{t}=\dfrac{1-(1-t)^{2^{n-1}}}{t}$.

1020. *а)* $a_2=2a_1+3$, $a_3=2a_2+3=2^2a_1+2\cdot 3+3$, $a_4=2a_3+3=2^3a_1+2^2\cdot 3+2\cdot 3+3,\ldots, a_n=2^{n-1}\cdot a_1+2^{n-2}\cdot 3+2^{n-2}\cdot 3+\cdots+2\cdot 3+3$ (треба доказати математичком индукцијом), па је $a_n=2^{n-1}\cdot a_1+3\cdot\dfrac{2^{n-1}-1}{2-1}=(a_1+3)\cdot 2^{n-1}-3$;
б) $a_2=x\cdot a_1+1$, $a_3=x\cdot a_2+2=x^2a_1+x+2$, $a_4=x\cdot a_3+3=x^3a_1+x^2+2x+3$, $\ldots, a_n=x^{n-1}\cdot a_1+x^{n-2}+2x^{n-3}+3x^{n-4}+\cdots+(n-2)x+(n-1)$ (треба доказати математичком индукцијом). Уведимо ознаку: $s=x^{n-2}+2x^{n-3}+3x^{n-4}+\cdots+(n-2)x+(n-1)$. Тада је $x\cdot s=x^{n-1}+2x^{n-2}+3x^{n-3}+\cdots+(n-1)x$. Одузимањем прве једначине од друге добијамо: $(x-1)s=x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x-n+1$. За $x\neq 1$ је $s=\dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{x^n-1}{x-1}-n\right)$ и $a_n=a_1x^{n-1}\dfrac{x^n-1}{(x-1)^2}-\dfrac{n}{x-1}$, а за $x=1$ је $a_n=a_1+1+2+\cdots+(n-1)=a_1+\dfrac{n(n-1)}{2}$.
в) $a_n=x^{n-1}a_1+x^{n-2}b_1+x^{n-3}b_2+\cdots+xb_{n-2}+b_{n-1}$.

1021. *а)* Дата једначина је еквивалентна са једначином $a_{n-2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$, односно $b_{n+1}=b_n$, где је $b_n=a_{n+1}-a_n$. Специјално $b_1=a_2-a_1$. Решење последње диференцне једначине је $b_n=b_1$, па је $b_1=a_{n+1}-a_n$, односно $a_{n+1}=a_n+b_1$. Решење ове диференцне једначине је $a_n=a_1+(n-1)b_1$ (видети задатак 1017 *а)*), па је $a_n=a_1+(n-1)(a_2-a_1)=(n-2)a_2+(2-n)a_1$, $a_1\in R$, $a_2\in R$, коначно решење.
б) $a_{n+2}+2a_{n+1}=-2(a_{n+1}+2a_n)$. Означимо $b_n=a_{n+1}+2a_n$. Тада је $b_{n+1}=-2b_n$, $b_n=(-2)^{n-1}b_1$ (видети задатак 1018 *а)*) и $a_{n+1}=-2a_n+b_n$, $a_n=(-2)^{n-1}\cdot a_1+(-2)^{n-2}\cdot b_1+(-2)^{n-3}\cdot b_2+\cdots+(-2)b_{n-2}+b_{n-1}$ (видети задатак 1020 *б)*), $a_n=(-2)^{n-1}\cdot a_1+(-2)^{n-2}\cdot b_1+(-2)^{n-3}\cdot(-2)b_1+\cdots+(-2)\cdot(-2)^{n-3}b_1+(-2)^{n-2}b_1=(-2)^{n-1}\cdot a_1+(n-1)(-2)^{n-2}\cdot b_1=(-2)^{n-2}(-2a_1+(n-1)(a_2+2a_1))=((n-1)a_2+(2n-4)a_1)(-2)^{n-2}$;
в) $a_{n+2}-p\cdot a_{n+1}=p(a_{n+1}-pa_n)$. Нека је $b_n=a_{n+1}-pa_n$. Тада је $b_{n+1}=pb_n$, $b_n=p^{n+1}\cdot b_1$, $a_{n+1}=p\cdot a_n+b_n$, $a_n=p^{n-1}\cdot a_1+p^{n-2}\cdot b_1+p^{n-3}b_2+\cdots+pb_{n-2}+b_{n-1}=p^{n-1}\cdot a_1+p^{n-2}\cdot b_1+p^{n-3}\cdot pb_1+\cdots+p\cdot p^{n-3}b_1+p^{n-2}b_1=p^{n-1}\cdot a_1+(n-1)p^{n-2}\cdot b_1=p^{n-2}(pa_1+(n-1)\cdot(a_2-pa_1))=p^{n-2}((n-1)a_2-(n-2)pa_1)$ (видети задатак *б)*).
г) Претпоставимо да је $a_n=r^n$. Тада је $r^n=\dfrac{1}{2}(r^{n-1}+r^{n-2})$, а одавде

је $2r^2 - r - 1 = 0$. Добијамо $r_1 = 1$ и $r_2 = -\dfrac{1}{2}$. Према томе: $a_n = 1^n$ или $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$. Уопште је $a_n = c_1\cdot 1^n + c_2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$, где су c_1 и c_2 произвољне константе. Дато: $a_0 = 1$ и $a_1 = 4$, одређују c_1 и c_2. За $n = 0$ је $a_0 = 4 = c_1 + c_2$ и за $n = 1$ је $a_1 = 1 = c_1 - \dfrac{c_2}{2}$. Одавде $c_1 = c_2 = 2$, па је $a_n = 2 + 2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

1022. *а)* Слично као у претходном задатку добијамо: $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n)$, $b_{n+1} = 3b_n$, где је $b_n = a_{n+1} - 2a_n$, $b_n = 3^{n-1}\cdot b_1$ и $a_{n+1} = 2a_n + b_n$, $a_n = 2^{n-1}\cdot a_1 + 2^{n-2}\cdot b_1 + 2^{n-3}\cdot b_2 + \cdots + 2\cdot b_{n-2} + b_{n-1} = 2^{n-1}\cdot a_1 + 2^{n-2}\cdot b_1 + 2^{n-3}\cdot 3\cdot b_1 + \cdots + 2\cdot 3^{n-3}\cdot b_1 + 3^{n-2}\cdot b_1 = 2^{n-1}\cdot a_1 + 2^{n-2}\cdot b_1\left[1 + \dfrac{3}{2} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-2}\right] = 2^{n-1}\cdot a_1 + (3^{n-1} - 2^{n-1})b_1 = 2^{n-1}(a_1 - b_1) + 3^{n-1}\cdot b_1 = 2^{n-1}(a_1 - a_2 + 2a_1) + 3^{n-1}(a_2 - 2a_1) = (3a_1 - a_2)\cdot 2^{n-1} + (a_2 - 2a_1)\cdot 3^{n-1}$, $a_1, a_2 \in R$;

б) $a_{n+2} + a_{n+1} = 2(a_{n+1} + a_n)$, $b_{n+1} = 2b_n$, $b_n = a_{n+1} + a_n$, итд. $a_n = 2^{n-1}\dfrac{a_1 + a_2}{3} + (-1)^n\dfrac{a_2 - 2a_1}{3}$, $a_1, a_2 \in R$;

в) $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$, $b_{n+1} = \beta b_n$, $b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$, $b_n = \beta^{n-1}\cdot b_1$, $a_{n+1} = \alpha a_n + b_n$, $a_n = \alpha^{n-1}\cdot a_1 + \alpha^{n-2}\cdot b_1 + \alpha^{n-3}\cdot b_2 + \cdots + b_{n-1} = \alpha^{n-1}\cdot a_1 + \alpha^{n-2}\cdot b_1 + \alpha^{n-3}\cdot \beta b_1 + \cdots + \alpha\cdot\beta^{n-3}b_1 + \beta^{n-2}b_1 = \alpha^{n-1}\cdot a_1 + \alpha^{n-2}\cdot b_1\left[1 + \dfrac{\beta}{\alpha} + \cdots + \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n-2}\right] = \alpha^{n-1}a_1 + \alpha^{n-2}b_1\cdot\dfrac{1 - \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}{1 - \dfrac{\beta}{\alpha}} = \alpha^{n-1}\dfrac{a_2 - \beta a_1}{\alpha - \beta} - \beta^{n-1}\dfrac{a_2 - \alpha a_1}{\alpha - \beta}$, $a_1, a_2 \in R$.

1023. $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$, $b_{n+1} = 2b_n + 1$, $b_n = a_{n+1} - a_n$, $b_n = 2^{n-1}\cdot b_1 + 2^{n-2}\cdot 1 + 2^{n-3}\cdot 1 + \cdots + 1 = 2^{n-1}b_1 + 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1}(1 + b_1) - 1$, $a_{n+1} = a_n + b_n$, $a_n = a_1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} = a_1 + 2^0(1 + b_1) - 1 + 2^1(1 + b_1) - 1 + \cdots + 2^{n-2}(1 + b_1) - 1 = a_1 + (2^{n-1} - 1)(1 + b_1) - (n - 1) = 2^{n-1}(1 + a_2 - a_1) + 2a_1 - a_2 - n$. За $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ добијамо $a_n = 3\cdot 2^{n-1} + 1 - n$.

1024. Дата једначина је специјалан случај из задатка 1022 *в)*, ако је $\alpha + \beta = 1$ и $\alpha\cdot\beta = -1$, односно ако су α и β решења квадратне једначине $x^2 - x - 1 = 0$ (упоредите добијену квадратну једначину са задатом диференцном једначином). Њена решења су $x = \alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ и $x = \beta = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$, па је решење диференцне једначине $a_n = \alpha^{n-1}\cdot\dfrac{1 - \beta}{\alpha - \beta} - \beta^{n-1}\dfrac{1 - \alpha}{\alpha - \beta} = \left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} - \left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n -$

$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

1025. $a_n = 2^{\frac{n-2}{2}}\left[n(1-\sqrt{2})+2\sqrt{2}-1\right]$. (Видети задатак 1021 *в)*.)

1026. *а)* Доказаћемо да није за свако $\varepsilon > 0$ испуњен услов $\left|\frac{n+1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Нека је $\varepsilon = 0,5$. Тада је $\left|\frac{n+1}{n} - 0\right| = \frac{n+1}{n} > \frac{n}{n} = 1 > \frac{1}{2}$, за свако n. Дакле, не постоји $n_0 \in N$, такво да је $\forall n > n_0$ испуњен услов $\left|\frac{n+1}{n} - 0\right| < \frac{1}{2}$.

б) Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Тада из $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$, добијамо $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, односно $\frac{1}{n} < \varepsilon$, одакле за свако позитивно ε је $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Ако је n_0 цео део броја $\frac{1}{\varepsilon}$ *), тада је за свако $n > n_0$ испуњен услов $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$. Следи да је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, по дефиницији.

1027. *а)* За произвољно $\varepsilon > 0$ доказаћемо да постоји $n_0 \in N$ из дефиниције граничне вредности: $\left|\frac{3n+4}{5n+6} - \frac{3}{5}\right| < \varepsilon$, своди се на $\frac{2}{5(5n+6)} < \varepsilon$, одакле је $n > \frac{2}{25\varepsilon} - \frac{6}{5}$. Нека је $n_0 = \left[\frac{2}{25\varepsilon} - \frac{6}{5}\right]$. Тада је за свако $n \in N$, $n > n_0$, испуњен услов: $\left|\frac{3n+4}{5n+6} - \frac{3}{5}\right| < \varepsilon$.

б) Неједнакост $\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$ еквивалентна је са $n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$, па за произвољно $\varepsilon > 0$ и $n_0 = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right]$, почетна неједнакост важи за $n > n_0$.

в) $|10^{10-n} - 0| < \varepsilon$ еквивалентно је са $n > 10 - \log\varepsilon$, итд.

г) $\left|\frac{2n^2+3n+4}{n^2+2n+3} - 2\right| = \left|\frac{-n-2}{n^2+2n+3}\right| = \frac{n+2}{n^2+2n+3} < \frac{n+2}{n^2+2n} = \frac{1}{n}$, па је $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, итд.

д) $\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right| = \frac{1}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} < \frac{1}{n\left(\sqrt{1+0}+1\right)} = \frac{1}{2n}$, па за $\varepsilon > 0$, узмомо $n_0 \in N$, $n_0 > \frac{1}{2\varepsilon}$. Тада из $n > n_0$

*) $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$

следи: $n > \frac{1}{2\varepsilon}$, $\frac{1}{2n} < \varepsilon$ и $\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon$. Користили смо монотоност функције $f(x) = \sqrt{x}$ на основу које из $1+0 < 1+\frac{1}{n}$ следи $\sqrt{1+0} < \sqrt{1+\frac{1}{n}}$.

ђ) Докажимо да за свако $A \in R$, постоји $n_0 \in N$такво да из $n > n_0$ следи $3^n > A$. Нека је A произвољно. Ако је $A \leqslant 0$, онда је $3^n > A$ за свако n, па можемо узети $n_0 = 1$. Ако $A > 0$, $3^n > A \iff n > \log_3 A$ (функција $y = 3^x$ је растућа па је $3^n > A \iff \log_3 3^n > \log_3 A \iff n > \log_3 A$), па узмимо $n_0 \in N$, $n_0 > \log_3 A$. Тада из $n > n_0$ следи $n > \log_3 A$, односно $3^n > A$.

е) $\log n > A \iff n > 10^A$, па за n_0 можемо узети било који природан број већи од 10^A. Тада из $n > n_0$ следи $\log_{10} n > A$.

ж) Нека је $A \in R$ произвољно. Ако је $A \leqslant 0$, онда $|(-1)^n \cdot n| = n > A$ за свако $n \in N$, па можемо узети $n_0 = 1$. Ако је $A > 0$, онда $|(-1)^n \cdot n| > A \iff n > A$ и за n_0 можемо узети било који природан број већи од A.

з) $\left|\frac{n+(-1)^n}{n^2} - 0\right| = \frac{|n+(-1)^n|}{n^2} \leqslant \frac{|n|+|(-1)^n|}{n^2} = \frac{n+1}{n^2} \leqslant \frac{n+n}{n^2} = \frac{2}{n}$, па за $\varepsilon > 0$ узмимо $n_0 \in N$, $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$, $\frac{2}{n} < \varepsilon$ и коначно $\left|\frac{n+(-1)^n}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$.

1028. *а)* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1 + 0 = 1.$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} = 1.$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-100) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\frac{100}{n}\right) = +\infty$, јер је $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{100}{n}\right) = 1.$

г) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3-n^2-20) = \lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(1-\frac{1}{n}-\frac{20}{n^3}\right) = +\infty$, јер је $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{20}{n^3}\right) = 1.$

д) $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^5+100n^4-n+1) = \lim\limits_{n\to\infty} n^5\left(-1+\frac{100}{n}-\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^5}\right) = -\infty.$

ђ) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(2+\frac{3}{n}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}.$$

е) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n+5}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}\cdot\frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0\cdot 1 = 0.$$

ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2n^2+1}{-n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{n^2} \cdot \dfrac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}{-1+\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \dfrac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}{-1+\frac{1}{n^2}} = -\infty.$

з) $\dfrac{2}{3}$.

и) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$, па је $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \cdot \dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1-\frac{3}{\sqrt{n}}} = 1.$

ј) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} =$
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = 0$, јер је $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+2} = +\infty$
$(= \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+2} + \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n})$.

1029. Слично претходном задатку:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p\left(a_p+\frac{a_{p-1}}{n}+\cdots+\frac{a_1}{n^{p-1}}+\frac{a_0}{n^p}\right)}{n^q\left(b_q+\frac{b_{q-1}}{n}+\cdots+\frac{b_1}{n^{q-1}}+\frac{b_0}{n^q}\right)} = \lim_{n\to\infty} n^{p-q} \cdot \frac{a_p+\frac{a_{p-1}}{n}+\cdots+\frac{a_1}{n^{p-1}}+\frac{a_0}{n^p}}{b_q+\frac{b_{q-1}}{n}+\cdots+\frac{b_1}{n^{q-1}}+\frac{b_0}{n^q}} =$$

$\lim\limits_{n\to\infty} n^{p-q} \cdot \dfrac{a_p}{b_q}$, $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$. Даље закључујемо: 1° за $p=q$ је $L = \dfrac{a_p}{b_q}$; 2° за $p>q$ је $n^{p-q} \to +\infty$ и $L \to +\infty$; 3° за $p<q$ је $n^{p-q} \to 0$ и $L = 0$.

1030. *а)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)}{2n^2} = \dfrac{1}{2}$.

б) 1. *в)* $\dfrac{1}{3}$.

г) Упутство: $n(n+1)(n+2) = n^3+3n^2+2n$, па је $\dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)} =$

$$\frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}{1^3+2^3+\cdots+n^3+3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+2(1+2+\cdots+n)},$$ итд. Резултат: 1.

д) Слично претходном задатку. Резултат: $\dfrac{3}{5}$.

ђ) Упутство: $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1+n-n}{n(n+1)} = \dfrac{1+n}{n(n+1)} - \dfrac{n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.
Резултат: 1.

е) Полазећи од $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{A}{n} + \dfrac{B}{n+1} + \dfrac{C}{n+2}$, добијамо да је:
$\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2(n+2)}$. Сада ово разлагање применимо

на све сабирке у загради:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)$$
$$\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)$$
$$\vdots \qquad \vdots\ \vdots\ \vdots$$
$$\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot (n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\frac{1}{n\cdot (n+1)(n+2)\cdot}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

Видимо да се на десној страни врши поништавање редом: трећи сабирак у једном реду, плус други сабирак у другом реду, плус први сабирак у трећем реду. (Нпр.: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)$.) На крају остане: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{4}$.

ж) Слично претходним задацима. Резултат: $\frac{1}{2}$.

1031. *а)* Трансформисаћемо бројилац $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$. Следи да је $a_n=\dfrac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}}=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$. (Видети и задатак 934 *н)*.)

б) Поступимо слично претходном задатку. Решићемо случај кад је n непаран број, а читаоцима препуштамо случај кад је n паран број: $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots-(n-1)^2+n^2=1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(n-1)^2+n^2-2(2^2+4^2+\cdots+(n-1)^2)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2\cdot 2^2\left(1^2+2^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right)$.

Како је n непаран број, то је $\frac{n-1}{2}$ цео број, па применивши још једном формулу за збир квадрата узастопних природних бројева (од 1 до $\frac{n-1}{2}$), добијамо: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-8\cdot\dfrac{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot n}{6}=\frac{n(n+1)}{2}$. Заменимо, итд.

(Видети задатак 934. *о*).)

в) Видети задатак 934. *п*).

г) Видети задатак 935. *б*).

д) Раставимо све биноме на чиниоце: $2^3-1=(2-1)(2^2+2+1)$, $2^3+1=(2+1)(2^2-2+1)$, $3^3-1=(3-1)(3^2+3+1)$, $3^3+1=(3+1)(3^2-3+1)$, $\ldots$, $(n-1)^3-1=(n-2)(n^2-n+1)$, $(n-1)^3+1=n(n^2-3n+1)$, $n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$ и $n^3+1=(n+1)(n^2-n+1)$. Заменимо, испремештамо и добијемо: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{3\cdot 4\cdot 5\cdots(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}\cdot\dfrac{7\cdot 13\cdot 21\cdots(n^2-n+1)(n^2+n+1)}{3\cdot 7\cdot 13\cdots(n^2-n+1)}=$
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 2}{n(n+1)}\cdot\dfrac{n^2+n+1}{3}=\dfrac{2}{3}$.

1032. *а)* За $q>1$ је $q=1+h$, $h>0$, па је $q^n=(1+h)^2>1+n\cdot h$ (Бернулијева неједнакост). Како је $\lim\limits_{n\to\infty}(1+nh)=+\infty$, то је $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=+\infty$.

За $q=1$ је $q^n=1^n=1$, па је $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=1$.

За $0<q<1$ је $q^n=\dfrac{1}{p}$ $p>1$, па је $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{p^n}=0$.

За $q=0$ је $q^n=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

За $-1<q<0$ је $|q|\in(0,1)$ и $-|q|^n\leqslant q^n\leqslant|q|^n$, па како је $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n=0$, то је $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

За $q=-1$ низ $q^n=(-1)^n$ дивергира.

За $q<-1$ је $q=-p$, где је $p>1$, $|q^n|=|(-p)^n|=|p^n|>A$, за свако $n>n_0$, па је $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\infty$.

б) За $q=1$ је $1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=n$, па је $\lim\limits_{n\to\infty}(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})=+\infty$.

Нека је $q\neq 1$. Тада је $1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\dfrac{q^n-1}{q-1}$, па на основу претходног задатка (*а*)) добијамо:

За $q>1$ је $\lim\limits_{n\to\infty}(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})=+\infty$, јер $q^n\to+\infty$ и $q-1>0$.

За $|q|<1$ важи: $q^n\to 0$, па је $\lim\limits_{n\to\infty}(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})=\dfrac{1}{1-q}$.

За $q=-1$ гранична вредност не постоји, а за $q<-1$ гранична вредност је ∞.

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2\cdot 4^n}{3\cdot 3^n+2^{2n+3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n\left(\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+2\right)}{4^n\left(3\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^4+8\right)}=\dfrac{1}{4}$. ($\dfrac{3}{4}<1$, па је $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n=0$.)

г) За $a>1$ $\sqrt[n]{a}>1$, $\sqrt[n]{a}=1+h_n$ где је $h_n>0$, $a=(1+h_n)^n>1+nh_n$, $0<h_n<\dfrac{a-1}{n}$. Како је $\lim\limits_{n\to\infty}0=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a-1}{n}=0$, то је $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+h_n)=1+0=1$. За $a=1$ $\sqrt[n]{a}=1$, па је $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$. За

$a < 1$ је $a = \dfrac{1}{b}$, где је $b > 1$, па је $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{b}} = \dfrac{1}{1} = 1$.

д) Први од n сабирака унутар граничне вредности је највећи, а последњи најмањи. Зато је $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Како је (видети задатак 1027 *д)*): $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} = \dfrac{1}{1} = 1$ и

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}} = 1$, то је $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1$.

ђ) Нула, јер је $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\sin n!}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

е) Нула, јер је $0 < \dfrac{1}{n!} < \dfrac{1}{n}$.

ж) Нула, јер је $0 < \dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{2}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdots\dfrac{2}{n} < 2\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdots\dfrac{2}{3} = 2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$.

1033. Нека је $a_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \dfrac{3}{3^3} + \cdots + \dfrac{n}{3^n}$. Тада је $\dfrac{1}{3}a_n - a_n = \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{2}{3^3} + \dfrac{3}{3^4} + \cdots + \dfrac{n}{3^{n+1}} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3^2} - \dfrac{3}{3^3} - \cdots - \dfrac{n}{3^n} = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{3^3} - \cdots - \dfrac{1}{3^n} + \dfrac{n}{3^n} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1-\dfrac{1}{3^n}}{1-\dfrac{1}{3}} + \dfrac{n}{3^{n+1}}$, одакле је $a_n = \dfrac{3}{4}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right) + \dfrac{n}{3^{n+1}}$, па је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{3}{4}$.

1034. *а)* $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n!} = \dfrac{1}{n+1}\cdot a_n < a_n$, па је низ монотоно опадајући. Даље је $0 \leqslant a_n \leqslant 1$ за све $n \in N$, па је низ ограничен, и према томе је конвергентан. Нека је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тада је и $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$, јер је (a_{n+1}) низ чији је n-ти члан једнак $(n+1)$-ом члану низа a_n, па ако је за све $n > n_0$ испуњено $|a_n - a| < \varepsilon$, онда је и $n+1 > n_0$, па је и $|a_{n+1} - a| < \varepsilon$.

Из $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\cdot a_n$ следи: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1}\cdot a_n$, односно $a = 0\cdot a = 0$. Дакле, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

б) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{c^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{c^n} = \dfrac{c}{n+1}$. За довољно велико n је $n+1 > c$, па је $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, односно $a_{n+1} < a_n$. Низ (a_n) је опадајући за довољно велико n и позитиван, па је конвергентан. Чињеница да није опадајући за све $n \in N$, не утиче на његову конвергенцију, јер низ који се добије одбацивањем првих неколико чланова је конвергентан низ ако и само ако је конвергентан низ (a_n).

Нека је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Тада из $a_{n+1} = \dfrac{c}{n+1}\cdot a_n$ добијамо $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c}{n+1}\cdot a_n$, односно $a = 0\cdot a$ и $a = 0$.

в) Низ $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ је растући и има граничну вредност $e \in (2,3)$, па је $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$ за све $n \in N$. Зато је $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}\cdot\dfrac{3^n n!}{n^n} = \dfrac{(n+1)^n}{3n^n} = \dfrac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}{3} = \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{3} < \dfrac{e}{3} < 1$. Низ је опадајући и позитиван, па постоји $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Граничне вредности леве и десне стране једнакости $a_{n+1} = \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{3}\cdot a_n$ су једнаке, па $a = \dfrac{e}{3}\cdot a$, одакле је $a = 0$.

г) $a_{n+1} = \dfrac{15}{3}\cdot\dfrac{16}{5}\cdots\dfrac{n+14}{2n+1}\cdot\dfrac{n+15}{2n+3} = a_n\cdot\dfrac{n+15}{2n+3}$. Како је $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+15}{2n+3} = \dfrac{1}{2} < 1$, то је и $\dfrac{n+15}{2n+3} < 1$ за довољно велико n, па је низ опдајући и позитиван. Дакле, постоји $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Из $a_{n+1} = a_n\cdot\dfrac{n+15}{2n+3}$, следи: $a = a\cdot\dfrac{1}{2}$, односно $a = 0$.

д) Показано је да је (a_n) растући низ и да је мањи од 2 (видети задатак 936 *ђ)*) па постоји $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Из $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ следи $a_{n+1}^2 = 2+a_n$ и $a_{n+1} \geqslant 0$, па је $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}\cdot a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(2+a_n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} \geqslant 0$, односно $a\cdot a = 2+a$ и $a \geqslant 0$. Ненегативно решење добијене квадратне једначине је $a = 2$.

1035. *а)* По услову низ је ограничен. Доказаћемо и да је монотоно растући. Заиста, иа $a_{n+1}(1-a_n) \geqslant \dfrac{1}{4}$ следи: $\sqrt{a_{n+1}(1-a_n)} \geqslant \dfrac{1}{2}$. На основу познате неједнакости између аритметичке и геометријске средине, добијамо: $\sqrt{a_n(1-a_n)} \leqslant \dfrac{1-a_n+a_n}{2} = \dfrac{1}{2}$. Отуда је $\sqrt{a_{n+1}(1-a_n)} \geqslant \sqrt{a_n(1-a_n)}$, па је $a_{n+1} \geqslant a_n$. Коначно, постоји гранична вредност: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. На основу задате везе је $a(1-a) \geqslant \dfrac{1}{4}$, односно $\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0$, па је $a = \dfrac{1}{2} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

б) Јасно је да је $a_n > 0$ за свако n, па је низ дефинисан. Користећи неједнакост између средина, слично претходном задатку, добијамо: $a_{n+1} \geqslant$

$\sqrt{a_n \cdot \dfrac{c}{a_n}} = \sqrt{c}$, за све $n \in N$. Дакле, из $a_n > \sqrt{c}$ следи $a_n^2 > c$ и $a_n > \dfrac{c}{a_n}$. Затим закључујемо да је $2a_n > a_n + \dfrac{c}{a_n}$, тј. $a_n > \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{c}{a_n}\right)$, што значи да је $a_n > a_{n+1}$. Дакле, низ је монотоно опадајући и ограничен.

Нека је $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$. Тада из $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{c}{a_n}\right)$ и $a_n \geqslant \sqrt{c}$ добијамо: $a = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{c}{a}\right)$ и $a \geqslant \sqrt{c}$, што даје: $a = \sqrt{c}$.

в) По услову је $a_1 > 0$ и $c > 0$, па је (a_n) низ са позитивним члановима. Користећи неједнакости међу срединама добијамо: $a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_n + \dfrac{c}{a_n^2}}{3} \geqslant \sqrt[3]{a_n \cdot a_n \cdot \dfrac{c}{a_n^2}} = \sqrt[3]{c}$. Одавде следи и да је $a_n^3 - c \geqslant 0$. Такође важи да је $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{3a_n^2}(c - a_n^3) \leqslant 0$, тј. $a_{n+1} \leqslant a_n$, па је низ опадајући. Дакле, низ је монотон и ограничен, па је и конвергентан (монотоно опада, а одозго је ограничен са $\sqrt[3]{c}$). Нека је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Ако у једнакости $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2a_n + \dfrac{c}{a_n^2}\right)$ пређемо на гранична вредност кад $n \to \infty$, добијамо: $a = \dfrac{1}{3}\left(2a + \dfrac{c}{a^2}\right)$, односно $a^3 = c$. Одавде добијамо $a = \sqrt[3]{c}$, односно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[3]{c}$.

г) Слично као у задатку под *б)* добијамо $a_n > 0$ за све $n \in N$ и $a_{n+1} = \dfrac{1}{k}\left(a_n + a_n + \cdots + a_n + \dfrac{c}{a_n^{k-1}}\right) \geqslant \sqrt[k]{a_n \cdot a_n \cdots a_n \cdot \dfrac{c}{a_n^{k-1}}} = \sqrt[k]{c}$. Из $a_n > \sqrt[k]{c}$ следи $a_n^k > c$, $a_n > \dfrac{c}{a_n^{k-1}}$, $ka_n > (k-1)a_n + \dfrac{c}{a_n^{k-1}}$, $a_n > \dfrac{1}{k}\left((k-1)a_n + \dfrac{c}{a_n^{k-1}}\right) = a_{n+1}$, па постоји $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Добијамо $a = \sqrt[k]{c}$.

д) Функција $y = 2x - x^2$ пресликава интервал $(0,1)$ на интервал $(0,1)$ (нацртајте њен график), па се индукцијом може доказати да је $0 < a_n < 1$ за све $n \in N$. Из овога следи $a_n > a_n^2$, $a_n - a_n^2 > 0$, $2a_n - a_n^2 > a_n$, $a_{n+1} > a_n$. Низ (a_n) је монотон и ограничен па је конвергентан. Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$, онда из $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(2a_n - a_n^2)$ добијамо $a = 2a - a^2$, тј. $a^2 - a = 0$, па је $a = 0$ или $a = 1$. Како је (a_n) растући низ, то $a = 0$ не може бити његова гранична вредност, те је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

ђ) $\dfrac{1}{2}$.

е) Очигледно је $a_n > 0$ за све $n \in N$. Даље, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2}{a_{n+2}} < 1$, па је низ

(a_n) опадајући и постоји $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Добијамо $a = \dfrac{2a}{a+2}$, односно $a = 0$.

ж) Претпоставимо да низ (a_n) има граничну вредност a. Тада је $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n-4}{a_n-5}$. Дакле: $a = \dfrac{a-4}{a-5}$, односно: $a^2+4a+4=0$, па је $a=-2$. Докажимо да је -2 гранична вредност низа a_n. Математичком индукцијом докажимо да је $a_n > -2$ за све $n \in N$. T_1: $a_1 > -2$ је тачно. Ако је T_n: $a_n > -2$ тачно, докажимо да је T_{n+1}: $a_{n+1} > -2$ тачно. Како је $a_{n+1} = 1 - \dfrac{9}{a_n+5}$, то из $a_n > -2$ следи $a_n + 5 > 3$, тј. $\dfrac{9}{a_n+5} < \dfrac{9}{3} = 3$. Дакле $1 - \dfrac{9}{a_n+5} > 1-3 = -2$, па је $a_{n+1} > -2$. Докажимо да је (a_n) опадајући низ. Како је $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n-4}{a_n+5} - a_n = -\dfrac{(a_n+2)^2}{a_n+5} < 0$ за $a_n > -2$, то је $a_{n+1} < a_n$ за све $n \in N$. Низ је монотон и ограничен па има гранична вредност. Већ је показано да је она једнака -2.

з) -2; *и)* -1.

1036. *а)* $q = \dfrac{1}{2} < 1$ и $S = \dfrac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4$.

б) $q = -\dfrac{1}{2}$, $|q| < 1$ и $S = \dfrac{12}{1+\frac{1}{2}} = 8$.

в) $q = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$, ред дивергира.

г) $2^x \cdot 2^{3x^2} \cdot 2^{9x^3} = 2^{x+3x^2+9x^3+\cdots}$. Ред у изложиоцу има количник $q = 3x$, па за $|x| < \dfrac{1}{3}$ конвергира. Тада је збир: $2^{\frac{x}{1-3x}}$.

д) $q = -\dfrac{x}{y}$. За $|x| < 3|y|$ ред конвергира и збир је $\dfrac{x}{x+y}$.

ђ) $\log_2\left(2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \cdot 3 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 \cdots\right) = \log_2 2 - 2\log_2 2 + 3\log_2 2 - 4\log_2 2 + \cdots = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots$, ред дивергира.

1037. Из $S = \dfrac{b_1}{1-q}$ добијамо $6 = \dfrac{b_1}{1-\frac{2}{3}}$. Одавде је $b_1 = 2$, па је дат збир: $2 + \dfrac{4}{3} + \dfrac{8}{9} + \cdots = 6$.

1038. $q = \dfrac{b_2}{3}$, па из $2 = \dfrac{3}{1-\frac{b_2}{3}}$ добијамо $b_2 = -\dfrac{3}{2}$, па је $q = -\dfrac{1}{2}$. Дата је прогресија: $3 - \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{4} - \cdots = 2$.

1039. Из $a^{\frac{1}{x}+\frac{2}{3x}+\frac{4}{9x}+\cdots}=a^{3x}$, добијамо: $\frac{1}{x}+\frac{2}{3x}+\frac{4}{9x}+\cdots=3x$ односно $\frac{3}{x}=3x$ или $x^2=1$. Решење је $x=1$. (Не може бити $x=-1$, јер изложилац корена може бити само природан број.)

1040. Из $\frac{1}{1-\log_2\cos x}=\frac{2}{3}$, добијамо: $\log_2\cos x=-\frac{1}{2}$, па је $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Дакле, $x=\pm\frac{\pi}{4}$.

1041. Збир чланова са непарним редним бројем је: $b_1+b_3+b_5+\cdots=36$, а збир осталих је: $b_2+b_4+b_6+\cdots=12$, односно $b_1q+b_3q+b_5q+\cdots=12$ или $q(b_1+b_3+b_5+\cdots)=12$. Одавде је $q\cdot 36=12$, па је $q=\frac{1}{3}$. Даље, користећи збир целе прогресије добијамо: $48=\dfrac{b_1}{1-\frac{1}{3}}$, одакле је $b_1=32$.

1042. Према услову је $b_1q^3+b_1q^4+b_1q^5+\cdots=2$, тј. $\frac{b_1q^3}{1-q}=2$ и $b_1+b_q+b_1q^2+b_1q^3+b_1q^4+b_1q^5=3$, односно $b_1\big(1+q+q^2+q^3(1+q+q^2)\big)=3$, па је $b_1=\frac{3}{1+q+q^2+q^3(1+q+q^2)}$. Елиминишемо b_1 и добијемо: $\frac{3q^3}{(1-q)\big(1+q+q^2+q^3(1+q+q^2)\big)}=2$ и после сређивања: $\frac{3q^3}{1-q^6}=2$. Нека је $q^3=t$. Имамо једначину $\frac{3t}{1-t^2}=2$, тј. $2t^2+3t-2=0$. Решења за t су $t_1=\frac{1}{2}$ и $t_2=-2$. Геометријска прогресија је конвергентна па је $|q|<1$ и не може бити $t=-2$. Дакле: $t=q^3=\frac{1}{2}$. Сада из $\frac{b_1q^3}{1-q}=2$ добијамо $\frac{b_1}{1-q}=\frac{2}{q^3}$, односно $S=\frac{2}{q^3}=4$.

1043. По услову је збир од шестог члана па „до краја“ једнак 32, па је збир од петог члана једнак 48, тј. $\frac{b_5}{1-q}=48$, односно $\frac{16}{1-q}=48$. Одавде је $q=\frac{2}{3}$. Дата је прогресија: $81+54+36+24+16+\cdots=243$.

1044. Слично задатку 1042. Услов можемо записати као: $\frac{b_1q^6}{1-q}=\frac{1}{7}b_1\big(1+q+q^2+q^3(1+q+q^2)\big)$, односно $7q^6=(1-q)\big(1+q+q^2+q^3(1+q+q^2)\big)$. Одавде је $q^6=\frac{1}{8}$, па је $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$ или $q=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

1045. Слично претходном задатку. Резултат: $q = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1046. Дато је $b_1 + b_1q + b_1q^2 + \cdots = 56$ и $b_1^2 + b_1^2q^2 + b_1^2q^4 + \cdots = 448$, одакле је $\dfrac{b_1}{1-q} = 56$ и $\dfrac{b_1^2}{1-q^2} = 48$. Квадрирамо прву једнакост и поделимо са другом. Добићемо: $\dfrac{1+q}{1-q} = 7$. Одавде је $q = \dfrac{3}{4}$, па је $b_1 = 14$. Тражени збир је: $14 + \dfrac{21}{2} + \dfrac{63}{8} + \cdots$

1047. Површина датог троугла је $P_1 = \dfrac{1}{4}$. Следећи (други) троугао је сличан првом и има коефицијент сличности $k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, па је његова површина $P_2 = k^2 \cdot P_1 = \dfrac{1}{8}$, итд. Тражени збир је: $S = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \cdots = \dfrac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$.

1048. Слично претходном задатку. Резултати:
Збир површина је $S_p = 2a^2$ и збир обима $S_o = 4a(2+\sqrt{2})$.

1049. Слично претходном задатку: $q = \dfrac{5}{9}$, па је $S = \dfrac{9a^2}{4}$.

1050. Низ полупречника је r, $\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{r}{2}$, ..., па је збир полупречник $S_r = r\sqrt{2}(1+\sqrt{2})$, а збир површина $S_p = 2\pi r^2$.

1051. Слично претходном задатку: $S_o = \dfrac{2a\pi\sqrt{3}}{3}$, $S_p = \dfrac{a^2\pi}{9}$.

1052. Видети решење задатка 388 и сл. 132. Резултат: $S = \dfrac{2\pi r^2 H^3}{3(4r^2 + 2H^2)}$.

1053. $S = 2a^2H$.

1054. $S = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2(3\sqrt{3}-1)}$.

1055. $S = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{10}} \cdot a^{\frac{1}{20}} \cdot a^{\frac{1}{100}} \cdots = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{20}+\frac{1}{200}+\cdots} \cdot a^{\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\cdots} = a^{\frac{5}{9}} \cdot a^{\frac{1}{9}} = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$.

1056. Како је $\dfrac{1}{(2+3n)(5+3n)(8+3n)} = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{(2+3n)(5+3n)} - \dfrac{1}{(5+3n)(8+3n)}\right)$

тражени збир се своди на $S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2\cdot 5} - \frac{1}{(5+3n)(8+3n)}\right) = \frac{1}{60}$.

1057. Дату једнакост: $T_n = 1 + 3q + 5q^2 + \cdots + (2n+1)q^n$ помножимо са $-q$ и $-qT_n = -q - 3q^2 - 5q^3 - \cdots - (2n-1)q^n - (2n+1)q^{n+1}$ и ове једнакости саберемо. Добићемо: $(1-q)T_n = 1 + 2q + 2q^2 + \cdots + 2q^n - (2n+1)q^{n+1} = 2(1+q+q^2+\cdots+q^n) - 1 - (2n+1)q^{n+1} = \frac{2(1-q^{n+1})}{1-q} - 1 - (2n+1)q^{n+1}$. Одавде је: $T_n = \frac{2(1-q^{n+1}) - (1-q) + (2n+1)(q-1)q^{n+1}}{(1-q)^2} = \frac{1+q-(2n-1)q^{n+1}+(2n+1)q^{n+2}}{(1-q)^2}$, па је $\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1+q}{(1-q)^2}$.

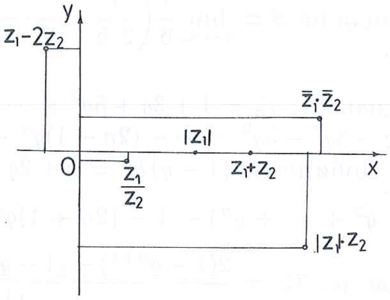
1058. Трансформисаћемо дати збир на следећи начин: $S_n = (1 + q + q^2 + \cdots + q^n) + (3q + 3q^2 + \cdots + 3q^n) + (5q^2 + \cdots + 5q^n) + \cdots + (2n+1)q^n = \cdots = \frac{2(1-q^{n+1})}{(1-q)^3} - \frac{1+(2n+1)q^{n+1}}{1-q^2} - \frac{(n+1)^2q^{n+1}}{1-q}$ (видети решење претходног задатка). Сада налазимо: $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{(1-q)^3} - \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1+q}{(1-q)^3}$.

1059. Како је $|r| < 1$ биће и $|r|^2 < 1$, а из $|a| > 1$ закључујемо да је и $|a|^n > 1$. Знамо да је $S_k = \frac{a^k}{1-r^k}$, па је: $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \cdots = \frac{1-r}{a} + \frac{1-r^2}{a^2} + \frac{1-r^3}{a^3} + \cdots = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \cdots\right) - \left(\frac{r}{a} + \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{r}{a}\right)^3 + \cdots\right) = \frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}} - \frac{\frac{r}{a}}{1-\frac{r}{a}} = \frac{1}{a-1} - \frac{r}{a-r} = \frac{a(1-r)}{(a-1)(a-r)}$.

1060. По формули нађемо: $s = \frac{1}{1-q}$, одакле је $s(1-q) = 1$, а одавде је $q = \frac{s-1}{s}$. Слично добијемо: $Q = \frac{\sigma-1}{\sigma}$. Даље је: $S = 1 + qQ + q^2Q^2 + \cdots = \frac{1}{1-qQ} = \frac{1}{1 - \frac{s-1}{s}\cdot\frac{\sigma-1}{\sigma}} = \frac{s\sigma}{s+\sigma-1}$.

1061. *а)* $z_1 + z_2 = 5$; *б)* $z_1 - 2z_2 = -1 + 3i$; *в)* $|z_1| = \sqrt{3^2+1} = \sqrt{10}$; *г)* $|z_1|\cdot z_2 = \sqrt{10}(2-i) = 2\sqrt{10} - i\sqrt{10}$; *д)* $\frac{z_1}{z_2} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}i$; *ђ)* $\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2 = (3-i)\cdot(2+i) = 7+i$.

На сл. 268 су приказани ови бројеви



Сл. 268.

1062. *а)* $i^{1998}=i^{4\cdot 499+2}=(i^4)^{499}\cdot i^2=1^{499}\cdot(-1)=-1$;
б) $i^{-15}=i^{-15}\cdot\dfrac{i^{16}}{i^{16}}=\dfrac{i^1}{1}=i$.
в) $(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i$.
г) $(1+i)^{17}=(1+i)^{16}\cdot(1+i)=\left((1+i)^2\right)^8\cdot(1+i)=(2i)^8(1+i)=256i^8(1+i)=256\cdot 1(1+i)=256+256i$.
д) $-2-2\sqrt{3}$; *ђ)* -8; *е)* 8^{666}.

1063. $z_n=\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}\cdot\dfrac{(1+i)^{n-2}}{(1+i)^{n-2}}=\dfrac{(1+i)^{2n-2}}{2^{n-2}}=\dfrac{\left((1+i)^2\right)^{n-1}}{2^{n-2}}=\dfrac{(2i)^{n-1}}{2^{n-2}}=2i^{n-1}$. За $n=4k+1$ је $z_n=2$, за $n=4k+2$ је $z_n=2i$, за $n=4k+3$ је $z_n=-2$ и за $n=4k$ је $z_n=-2i$.

1064. Из $(1+i)^m=(1-i)^m$ следи: $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^m=1$, а одавде је $\left(\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right)^m=\left(\dfrac{1+2i+i^2}{1^2-i^2}\right)^m=i^m=1$. Следи да је $m=4k$.

1065. $\omega^2=\dfrac{1-2i\sqrt{3}+i^2\cdot 3}{4}=\dfrac{-2-2i\sqrt{3}}{4}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Даље је: $(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)=\left(a-\dfrac{b}{2}(1-i\sqrt{3})-\dfrac{c}{2}(1+i\sqrt{3})\right)\left(a-\dfrac{b}{2}(1+i\sqrt{3})-\dfrac{c}{2}(1-i\sqrt{3})\right)$. Сређивањем добијемо: $(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$. Једноставним множењем уверавамо се да је дата једнакост тачна.

1066. *а)* Нека је $z=x+iy$. Једначина $z^2=i$ је еквивалентна са: $x^2+2xyi+y^2i^2=i$, односно еквивалентна је систему једначина: $x^2-y^2=0$ и $2xy=1$. Решења су: $z_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ и $z_2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.
б) $z_1=2-i$, $z_2=-2+i$. *в)* $z_1=3-i$, $z_2=-1+2i$.
г) Ако је $z=x+iy$, дата једначина је еквивалентна са: $\sqrt{x^2+y^2}-x+iy=1+2i$. Одавде је $\sqrt{x^2+y^2}-x=1$ и $y=2$. Даље решавамо ирационалну

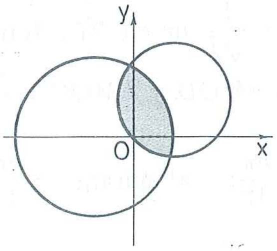
једначину: $\sqrt{x^2+4} = 1+x$, која је за $x+1 \geqslant 0$, тј. за $x \geqslant -1$, еквивалентна са: $x^2+4=(x+1)^2$, итд. Решење је: $x=\dfrac{3}{2}$, $y=2$, па је $z=\dfrac{3}{2}+2i$.

д) $z=\dfrac{3}{4}+i$.

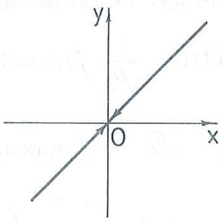
ђ) Решења су све тачке на кругу $x^2+y^2=4$, тј. тачке $\left(x, \pm\sqrt{4-x^2}\right)$.

1067. Нека је $z=x+iy$, где су x и y реални бројеви. Тада је $\bar{z}=x-iy$, па прва једначина даје $x=2$. Друга једначина је: $\sqrt{4+y^2}=1$, односно $y^2=-3$, што нема решења у скупу реалних бројева.

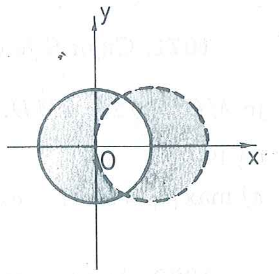
1068. *а)* Нека је $z=x+iy$. Тада $|z|<1$ прелази у $\sqrt{x^2+y^2}<1$, односно $x^2+y^2<1$. Траженом скупу бројева z одговара унутрашњост круга $x^2+y^2=1$.
б) Слично претходном задатку: $x^2+(y-1)^2 \leqslant 4$.
в) За $z=x+iy$, дате неједнакости су еквивалентне са: $(x+1)^2+y^2 \leqslant 4$ и $(x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant 2$. Скуп одговарајућих тачака је осенчен на сл. 269.



Сл. 269.



Сл. 270.



Сл. 271.

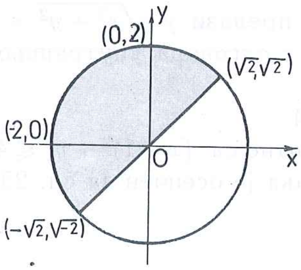
г) $\dfrac{z}{1+i}=\dfrac{(x+iy)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{y+x}{2}i$, па из $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z}{1+i}\right)<1$ добијамо: $\dfrac{x+y}{2}<1$ или $x+y-2<0$. Тражени скуп комплексних бројева представља дату полураван одређену правом $x+y-2=0$.

д) $\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{x+iy}{x-iy}=\dfrac{(x+iy)^2}{x^2+y^2}=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\dfrac{2xy}{x^2+y^2}i$. Дата неједнакост је еквивалентна са $\dfrac{2xy}{x^2+y^2} \geqslant 1$. Решавањем добијемо: $(x-y)^2 \leqslant 0$ и $x^2+y^2 \neq 0$, односно $y=x \neq 0$, сл. 270.

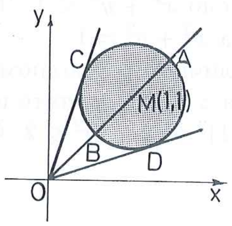
ђ) $\dfrac{|z|-1}{|z-1|-1} \leqslant 0 \iff \big(|z| \leqslant 1$ и $|z-1|>1\big)$ или $\big(|z| \geqslant 1$ и $|z-1|<1\big)$, итд. Решење је: $(x^2+y^2 \leqslant 1$ и $(x-1)^2+y^2>1)$ или $(x^2+y^2 \geqslant 1$ и $(x-1)^2+y^2<1)$, сл. 272.

1069. *а)* Тачка $M(3,0)$ припада (затвореном) I квадранту, па је $\arg z = \sphericalangle(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = 0$.
б) $\frac{\pi}{2}$; *в)* π; *г)* $-\frac{\pi}{2}$; *д)* $\frac{\pi}{4}$; *ђ)* $-\frac{3\pi}{4}$; *е)* $\frac{2\pi}{3}$; *ж)* $-\frac{\pi}{3}$;
з) није дефинисан.

1070. Нека је $z = x + iy$. Тада је $z(1+i) = x - y + i(x+y)$, па је $|z| \leqslant 2$ еквивалентно са $x^2 + y^2 \leqslant 4$, а $\operatorname{Re}(z(1+i)) \leqslant 0$ са $y \leqslant x$. Према сл. 272 лако одредимо решења:
а) $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$; *б)* $z = -2$; *в)* $z = 2i$; *г)* $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.



Сл. 272.



Сл. 273.

1071. Скуп S је осенчен круг полупречника $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, на сл. 273. Како је $MO = \sqrt{2} = 2MD$, то је $OB = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $OA = 3\sqrt{2}$ и $\sphericalangle MOD = \sphericalangle MOC = \frac{\pi}{6}$, па је:
а) $\max|z| = 3\sqrt{2}$; *б)* $\min|z| = \sqrt{2}$; *в)* $\max \arg z = \frac{5\pi}{12}$; *г)* $\min \arg z = \frac{\pi}{12}$.

1072. Ако је $z = x + iy$, тада је $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$, па решавањем система једначина: $\frac{x}{x^2+y^2} = 1$ и $-\frac{y}{x^2+y^2} = 1$, добијамо $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, тј. $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, одакле следи да је $\arg z = -\frac{\pi}{4}$.

1073. Довољно је доказати да је $\bar{z} = z$. При томе користимо услове $z_1 \cdot \bar{z}_1 = |z|^2 = 1 = |z_2|^2 = z_2 \cdot \bar{z}_2$. На основу датог услова је $\bar{z} = \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_1}{1 + \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2} \cdot \frac{z_1 z_2}{z_1 z_2} = \frac{(\bar{z}_1 z_1) z_2 + z_1 (z_2 \bar{z}_2)}{z_1 z_2 + (\bar{z}_1 z_1) \cdot (\bar{z}_2 z_2)} = \frac{z_2 + z_1}{z_1 z_2 + 1} = z$.

1074. Дати су услови: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ и $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_1 - z_3|$. Уочимо да је $|z_1 z_2 - z_2 z_3| = |z_2| \cdot |z_1 - z_3| = |z_1 - z_3|$, затим $|z_2 z_3 - z_3 z_1| = |z_3| \cdot |z_2 - z_1| = |z_2 - z_1|$ и $|z_3 z_1 - z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_3 - z_2| = |z_3 - z_2|$. Следи да је $|z_1 z_2 - z_2 z_3| = |z_2 z_3 - z_3 z_1| = |z_3 z_1 - z_1 z_2|$, одакле закључујемо да вектори

z_1z_2, z_2z_3 и z_3z_1 одређују темена једнакостраничног троугла.

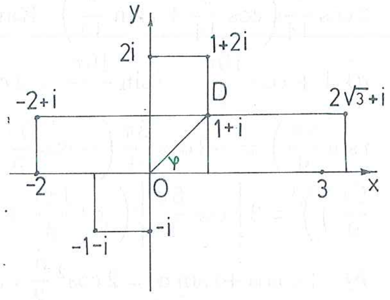
1075. Ако су $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, $y_1y_2 \neq 0$, тада је $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ и $z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$. Како су $z_1 + z_2$ и z_1z_2 реални бројеви, биће $y_1 + y_2 = 0$, тј. $y_1 = -y_2$ и $x_1y_2 + x_2y_1 = 0$. Заменимо $y_1 = -y_2$ и добијемо: $y_2(x_1 - x_2) = 0$, одакле је $x_1 = x_2$. Отуда $z_1 = \bar{z}_2$. Обрнута импликација се лако доказује.

1076. Видети сл. 274.

а) Очигледно је $r = 3$ и $\varphi = 0$, па је $3 = 3(\cos 0 + i \sin 0)$.

б) $-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$.

в) $r = 2$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, па је $2i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$.



Сл. 274.

д) Очигледно је $r = OD = \sqrt{2}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, па је $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$. До овог израза могли смо доћи чисто рачунски. Наиме, $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{1}{1} = 1$, а како је $a = 1 > 0$, то је $\varphi = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

ђ) $r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{-1}{-1} = 1$, а како је $a = -1 < 0$, то је $\varphi = \pi + \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{5\pi}{4}$, па је $-1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$.

е) $r = \sqrt{12 + 4} = 4$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $a = 2\sqrt{3} > 0$, па је $\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{7\pi}{6}$ и $2\sqrt{3} + 2i = 4\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

ж) $r = \sqrt{5}$, $\operatorname{tg}\varphi = 2$, $a > 0$, па је $1 + 2i = \sqrt{5}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где је $\varphi = \operatorname{arctg} 2$.

з) $r = \sqrt{5}$, $\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{1}{2}$, $a < 0$, $\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $-2 + i = \sqrt{5}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

1077. *а)* Написаћемо дати број у облику $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где је $r > 0$. Како је $\sin\alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$ и $\cos\alpha = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$, то је $\sin\alpha + i\cos\alpha = 1\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$.

б) $\cos\alpha - i\sin\alpha = 1(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha))$.

в) $\sin\alpha - i\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right] + i\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right] = 1\left[\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

г) $1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7} = 1+\cos 2\cdot\frac{\pi}{14}+i\sin 2\cdot\frac{\pi}{14} = 2\cos^2\frac{\pi}{14}+i\cdot 2\sin\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{\pi}{14} = 2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right)$. Како је $\cos\frac{\pi}{14}>0$ то је $r=2\cos\frac{\pi}{14}$, $\varphi=\frac{\pi}{14}$.

д) $1+\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9} = 2\cos^2\frac{5\pi}{9}+i\cdot 2\sin\frac{5\pi}{9}\cdot\cos\frac{5\pi}{9} = 2\cos\frac{5\pi}{9}\left(\cos\frac{5\pi}{9}+i\sin\frac{5\pi}{9}\right) = -2\cos\frac{5\pi}{9}\left(-\cos\frac{5\pi}{9}-i\sin\frac{5\pi}{9}\right) = 2\left|\cos\frac{5\pi}{9}\right|\left(\cos\left(\pi+\frac{5\pi}{9}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{5\pi}{9}\right)\right) = 2\left|\cos\frac{5\pi}{9}\right|\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$, јер је $\cos\frac{5\pi}{9}<0$.

ђ) $1+\cos\alpha+i\sin\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}+i\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$, ако је $\cos\frac{\alpha}{2}>0$, односно $\alpha\in(-\pi+4k\pi,\pi+4k\pi)$, $k\in Z$. Ако је $\cos\frac{\alpha}{2}<0$, односно $\alpha\in(\pi+4k\pi,3\pi+4k\pi)$, онда је $1+\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2} = -2\cos\frac{\alpha}{2}\left(-\cos\frac{\alpha}{2}-i\sin\frac{\alpha}{2}\right) = 2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|\left(\cos\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\right)$. Ако је $\alpha=\pi+2k\pi$, онда је $1+\cos\alpha+i\sin\alpha=0$, па такав комплексан број нема тригонометријски облик.

1078. *а)* $z_1\cdot z_2 = 2\cdot 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right) = 6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 6i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i$.

б) $z_1\cdot z_2 = 2\cdot 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\right) = 8(\cos 0+i\sin 0) = 8$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -1-i\sqrt{3}$.

в) $z_1\cdot z_2 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)\right)\cdot 1\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{z_1}{z_2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos 0+i\sin 0 = 1$.

г) $z_1\cdot z_2 = r\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)\cdot r(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)) = r^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\right)$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{r}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\alpha\right)\right) = \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} = i.$

д) $z_1 = \frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, $z_2 = \frac{1}{\sin\alpha}(\sin\alpha+i\cos\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$, па је $z_1\cdot z_2 = \frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\sin 2\alpha}\cdot i$, $\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{tg}\alpha\left(\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \operatorname{tg}\alpha(\sin 2\alpha - i\cos 2\alpha).$

1079. *а)* $z = 1\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z^2 = 1^2\left(\cos\frac{2\cdot\pi}{4}+i\sin\frac{2\cdot\pi}{4}\right) = i.$

б) $z = 1\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$, $z^2 = 1^2\left(\cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2}\right) = i.$

в) $z^3 = 1^3(\cos 0 + i\sin 0) = 1.$

г) $z = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $z^3 = 1^3\left(\cos\frac{6\pi}{3}+i\sin\frac{6\pi}{3}\right) = 1.$

д) $z = 1\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$, $z^3 = 1^3\left(\cos\frac{12\pi}{3}+i\sin\frac{12\pi}{3}\right) = \cos 4\pi + i\sin 4\pi = 1.$

ђ) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z^{1998} = 2^{1998}\left(\frac{1998\pi}{6}+i\sin\frac{1998\pi}{6}\right) = 2^{1998}\left(\cos 333\pi + i\sin 333\pi\right) = -2^{1998}.$

е) $z=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$, $z^{1997}=2^{1997}\left(\cos\left(-\frac{1997\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{1997\pi}{6}\right)\right) = 2^{1997}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}-333\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}-333\pi\right)\right) = 2^{1997}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right) = -2^{1996}\cdot\sqrt{3} - i\cdot 2^{1996}.$

ж) $z = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right) = 1\left(\frac{5\pi}{14}+i\sin\frac{5\pi}{14}\right)$, па је $z^7 = 1^7\left(\cos\frac{7\cdot 5\pi}{14}+i\cdot\sin\frac{7\cdot 5\pi}{14}\right) = \cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2} = i.$

з) $z = 2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right)$, па је $z^{1988} = 2^{1988}\cos^{1988}\frac{\pi}{14}(\cos 142\pi + i\sin 142\pi) = 2^{1988}\cdot\cos^{1988}\frac{\pi}{14}.$

1080. *а)* $z = r(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi))$, па је $z^n = r^n(\cos(-n\varphi)+i\sin(-n\varphi)) = r^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi).$

б) За $n\in N$ тврђење је тачно на основу Муаврове формуле. За $n=0$ са обе стране једнакости налази се 1. За $n<0$, $-n\in N$, па је $z^n =$

$\dfrac{1}{z^{-n}} = \dfrac{1\cdot(\cos 0 + i\sin 0)}{r^{-n}\big(\cos(-n)\varphi + i\sin(-n)\varphi\big)} = r^n\big(\cos\big(0-(-n)\big)\varphi + i\sin\big(0-(-n)\big)\varphi\big) =$ $r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

в) $z = r\cdot 1(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, па је на основу *б)* $z^n = r^n\cdot[1(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n =$ $r^n\cdot 1^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

1081. $\left(\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n = \left(\dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha}\right)^n = \dfrac{\cos n\alpha + i\sin n\alpha}{\cos n\alpha - i\sin n\alpha} = \dfrac{1+i\operatorname{tg} n\alpha}{1-i\operatorname{tg} n\alpha}$. (На крају смо поделили бројилац и именилац са $\cos n\alpha$.) Овде смо користили претходни задатак под *а)*.

1082. На основу задатка 1080. *в)* добијамо $(1+\cos\alpha + i\sin\alpha)^n =$ $\left[2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} + i\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)\right]^n = 2^n\cos^n\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{n\alpha}{2} + i\sin\dfrac{n\alpha}{2}\right)$.

1083. Дата једначина је еквивалентна једначини $z^2 - 2\cos\alpha\cdot z + 1 = 0$. Њена решења су $z = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$, па је $\dfrac{1}{z} = \cos\alpha \mp i\sin\alpha$ и $z^n + \dfrac{1}{z^n} =$ $(\cos n\alpha \pm i\sin n\alpha) + (\cos n\alpha \mp i\sin n\alpha) = 2\cos n\alpha$.

1084. *а)* $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left[\dfrac{2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)}\right]^{20} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{12} +\right.\right.$ $\left.\left. i\sin\dfrac{7\pi}{12}\right)\right]^{20} = (\sqrt{2})^{20}\left(\cos\dfrac{140\pi}{12} + i\sin\dfrac{140\pi}{12}\right) = 2^{10}\left(\cos\left(12\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(12\pi -\right.\right.$ $\left.\left.\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = 2^9(1-i\sqrt{3})$.

б) $1 - \dfrac{\sqrt{3}-i}{2} = 1 - \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6} = 1 + \cos\dfrac{7\pi}{6} - i\sin\dfrac{7\pi}{6} = 2\cos^2\dfrac{7\pi}{12} -$ $2i\sin\dfrac{7\pi}{12}\cos\dfrac{7\pi}{12} = 2\cos\dfrac{7\pi}{12}\left(\cos\dfrac{7\pi}{12} + i\sin\dfrac{7\pi}{12}\right)$, па је $\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24} =$

$\left(2\cos\dfrac{7\pi}{12}\right)^{24}\left(\cos\dfrac{7\cdot 24\pi}{12} + i\sin\dfrac{7\cdot 24\pi}{12}\right) = \left(2\cos\dfrac{7\pi}{12}\right)^{24} = \left(2\sqrt{\dfrac{1+\cos\dfrac{7\pi}{6}}{2}}\right)^{24} =$ $2^{12}\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12} = (2-\sqrt{3})^{12}$.

в) -64.

1085. *а)* У једнакост $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \dfrac{1-z^5}{1-z}$ ставимо $z = \cos\dfrac{2\pi}{5} +$ $i\sin\dfrac{2\pi}{5}$. Како је $z^2 = \cos\dfrac{4\pi}{5} + i\sin\dfrac{4\pi}{5}$, $z^3 = \cos\dfrac{6\pi}{5} + i\sin\dfrac{6\pi}{5}$, $z^4 = \cos\dfrac{8\pi}{5} +$

$i\sin\dfrac{8\pi}{5}$ и $z^5=\cos\dfrac{10\pi}{5}+i\sin\dfrac{10\pi}{5}=1$, то је $1+\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}+i\sin\dfrac{4\pi}{5}+\cos\dfrac{6\pi}{5}+i\sin\dfrac{6\pi}{5}+\cos\dfrac{8\pi}{5}+i\sin\dfrac{8\pi}{5}=0$. Изједначавањем реалних делова бројева на левој и десној страно последње једнакости добијамо $0=1+\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}+\cos\dfrac{8\pi}{7}=1+\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{2\pi}{7}$, односно $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}$.

б) $-\dfrac{1}{2}$, слично као под *а)*.

в) $-\dfrac{1}{2}$.

г) У једнакост $z+z^3=z(1+z^2)=\dfrac{z(1-z^4)}{1-z^2}=\dfrac{z-z^5}{1-z^2}$ ставимо $z=\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$. Добијамо $\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}+\cos\dfrac{3\pi}{5}+i\sin\dfrac{3\pi}{5}=\dfrac{z-\cos\pi-i\sin\pi}{1-z^2}=$

$$\frac{z+1}{(1-z)(1+z)}=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}}\cdot\frac{1-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}}{1-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}}=$$

$$\frac{1-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}}{\left(1-\cos\frac{\pi}{5}\right)^2+\sin^2\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{2\left(1-\cos\frac{\pi}{5}\right)},$$ па је $\cos\dfrac{\pi}{5}+\cos\dfrac{3\pi}{5}=\dfrac{1}{2}$.

д) $\dfrac{1}{2}$. У једнакост $z+z^3+z^5=z\cdot\dfrac{1-z^6}{1-z^2}=\dfrac{z-z^7}{1-z^2}$ ставити $z=\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$.

ђ) $\dfrac{1}{2}$.

1086. *а)* и *б)* Ако је $z=\cos\dfrac{x}{2}+i\sin\dfrac{x}{2}$, тада је $S_1+iS_2=z^2+z^4+\cdots+z^{2n}=$

$$z^2\cdot\frac{z^{2n}-1}{z^2-1}=z^{n+1}\cdot\frac{z^n-z^{-n}}{z-z^{-1}}=z^{n+1}\frac{\cos n\frac{x}{2}+i\sin n\frac{x}{2}-\cos\left(-n\frac{x}{2}\right)-i\sin\left(-n\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}-\cos\left(-\frac{x}{2}\right)-i\sin\left(-\frac{x}{2}\right)}=$$

$$\left(\cos\frac{n+1}{2}x+i\sin\frac{n+1}{2}x\right)\cdot\frac{2i\sin n\frac{x}{2}}{2i\sin\frac{x}{2}},$$ одакле добијамо: $S_1=\dfrac{\cos\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ и $S_2=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

в) Ако суми S_3 додамо $iT_3=i(2\sin x+2^2\sin 2x+\cdots+2^n\sin nx)$, добићемо: $S_3+iT_3=1+2(\cos x+i\sin x)+2^2(\cos 2x+i\sin 2x)+\cdots+2^n(\cos nx+i\sin nx)=$

$1+z+z^2+\cdots+z^n=\dfrac{z^{n+1}-1}{z-1}$, где смо са z означили комплексан број $z=2(\cos x+i\sin x)$. Сада је S_3 једнако реалном делу броја: $\dfrac{2^{n+1}(\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x)-1}{2(\cos x+i\sin x)-1}$. Сређивањем добијамо:
$S_3=\dfrac{2^{n+2}\cos nx-2^{n+1}\cos(n+1)x-2\cos x+1}{5-4\cos x}$.

1087. *а)* $\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2=\cos^2\alpha+2i\sin\alpha\cos\alpha+i^2\sin^2\alpha$, па је $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2 a$ и $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.
б) $\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3=\cos^3\alpha+3i\cos^2\alpha\sin\alpha+3\cos\alpha\cdot i^2\sin^2\alpha+i^3\sin^3\alpha$, па је $\cos 3\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha$ и $\sin 3\alpha=3\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha$.
в) Слично претходним задацима: $\sin 4\alpha=4\sin\alpha\cos^3\alpha-4\sin^3\alpha\cos\alpha$ и $\cos 4\alpha=\sin^4\alpha-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

1088. *а)* $i=1\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\sqrt{i}=\sqrt{1}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}+i\sin\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)$, $k\in\{0,1\}$. За $k=0$ добијамо корен $z_0=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt2}{2}+i\dfrac{\sqrt2}{2}$, а за $k=1$ $z_1=1-\dfrac{\sqrt2}{2}-i\dfrac{\sqrt2}{2}$.

б) $\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{1}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$, $k\in\{0,1,2\}$. За $k=0$ добијамо $z_0=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt3}{2}+i\dfrac{i}{2}$, за $k=1$ $z_1=\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{-\sqrt3+i}{2}$, а за $k=2$ $z_2=i$.

в) $2-2i=2\sqrt2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$, па је $\sqrt[3]{2-2i}=$
$\sqrt[3]{(\sqrt2)^3}\left(\cos\dfrac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)$, $k\in\{0,1,2\}$. $z_0=\sqrt2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right)=\sqrt2\left(\cos\dfrac12\cdot\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac12\cdot\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1+\cos\dfrac{\pi}{6}}-i\cdot\sqrt{1-\cos\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{1+\sqrt3}{2}-\dfrac{\sqrt3-1}{2}i$, $z_1=\sqrt2\left(\cos\dfrac{7\pi}{12}+i\sin\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{1-\sqrt3}{2}+\dfrac{1+\sqrt3}{2}i$, $z_3=\sqrt2\left(\cos\dfrac{15\pi}{12}+i\sin\dfrac{15\pi}{12}\right)=-1-i$.

г) $-4=4(\cos\pi+i\sin\pi)$, $\sqrt[4]{-4}=\sqrt[4]{4}\left(\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{4}\right)$, $k\in\{0,1,2,3\}$.

$z_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i,\ z_1=1-i,\ z_2=-1-i,\ z_3=-1+i.$

д) $1=\cos 0+i\sin 0,\ \sqrt[6]{1}=\cos\frac{0+2k\pi}{6}+i\sin\frac{0+2k\pi}{6},\ k\in\{0,1,2,3,4,5\}.$
$z_0=\cos 0+i\sin 0=1,\ z_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_2=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2},\ z_3=-1,\ z_4=-z_2,$ $z_5=-z_1.$

ђ) $-27=27(\cos\pi+i\sin\pi),\ \sqrt[6]{-27}=\sqrt[6]{27}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\right),\ k\in$ $\{0,1,2,3,4,5\}.\ z_0=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_1=i\sqrt{3},\ z_2=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$

$z_3=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_4=-i\sqrt{3},\ z_5=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

1089. *а)* $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}=\sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}}=$

$\sqrt[6]{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)}=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{72}+\frac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{72}+\frac{k\pi}{3}\right),\right.$ $k\in\{0,1,2,3,4,5\}.$

б) $\frac{1}{\sqrt[16]{2}}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{96}+\frac{k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{96}+\frac{k\pi}{4}\right),\ k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}.\right.$

в) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right),\ k\in\{0,1,2,3,4,5\}\right.$, итд.

г) $(-1+i\sqrt{3})^7=\left(2\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^7=2^7\left(\cos\frac{14\pi}{3}+i\sin\frac{14\pi}{3}\right),\ (1-i)^4+$ $4i\sqrt{3}=-4+4i\sqrt{3}=8\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),\ \sqrt[6]{\frac{(-1+i\sqrt{3})^7}{(1-i)^4+4i\sqrt{3}}}=$

$\sqrt[6]{16(\cos 0+i\sin 0)}=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6}\right),\ k\in\{0,1,2,3,4,5\}$, итд.

д) $\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4},\ k\in\{0,1,2,3\}$, итд.

1090. $\sqrt[n]{1}=\sqrt[n]{1(\cos 0+i\sin 0)}=\cos\frac{0+2k\pi}{n}+i\sin\frac{0+2k\pi}{n},\ k\in\{0,1,2,\dots,n-$ $1\}.\ z_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},\ z_2=\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}=z_1^2,\ z_k=\cos k\cdot\frac{2\pi}{n}+i\sin k\cdot\frac{2\pi}{n}=$ $z_1^k,\ k\in\{1,2,\dots,n-1\},\ z_0=\cos 0+i\sin 0=\cos n\cdot\frac{2\pi}{n}+i\sin n\cdot\frac{2\pi}{n}=z_1^n.$

1091. $1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}=\dfrac{1-z^n}{1-z}=\dfrac{1-\cos\pi-i\sin\pi}{1-\cos\frac{\pi}{n}-i\sin\frac{\pi}{n}}=$

$$=\frac{2(1-\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n})}{(1-\cos\frac{\pi}{n})^2+\sin^2\frac{\pi}{n}}=\frac{2(1-\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n})}{2(1-\cos\frac{\pi}{n})}=1+i\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\cos\frac{\pi}{n}}.$$

1092. *а)* Нека је $z_1=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$. Остали n - ти корени из 1 једнаки су $1,\ z^2,\ \ldots,\ z^{n-1}$, па је $z_0+z_1+\ldots+z_{n-1}=1+z_1+z_1^2+\ldots+z_1^{n-1}=\dfrac{1-z_1^n}{1-z_1}=\dfrac{1-\cos 2\pi-i\sin 2\pi}{1-z_1}=0.$

б) $z_0\cdot z_1\cdot\ldots\cdot z_{n-1}=1\cdot z_1\cdot z_1^2\cdot\ldots\cdot z_1^{n-1}=z_1^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Ако је n непарно, $\dfrac{n-1}{2}$ је цео број, па је $z_1^{\frac{n(n-1)}{2}}=(z_1^n)^{\frac{n-1}{2}}=1^{\frac{n-1}{2}}=1$. Ако је $n=2k$, $z_1^{\frac{n(n-1)}{2}}=(z_1^k)^{2k-1}=\left(\cos\dfrac{2k\pi}{2k}+i\sin\dfrac{2k\pi}{2k}\right)^{2k-1}=(-1)^{2k-1}=-1.$

1093. Решења дате једначине по непознатој $\overline{z}$ је $\overline{z}=1+\sqrt[3]{4(1+i\sqrt{3})}=1+\sqrt[3]{8\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)}=1+2\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}+\sin\dfrac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}\right)$, па је $z=1+2\cos\dfrac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}-i\sin\dfrac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}$, $k\in\{0,1,2\}$.

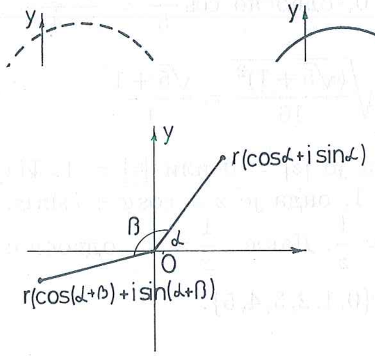
1094. Дата једначина еквивалентна је једначини: $(z^3-1)^2=-1$, одавде је $z^3-1=\sqrt{-1}=\pm i$, $z^3=1\pm i$ и $z=\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}$ или $z=\sqrt[3]{1-i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)\right)}$, па је

$$z=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right),\ k\in\{0,1,2\}\text{ или}$$

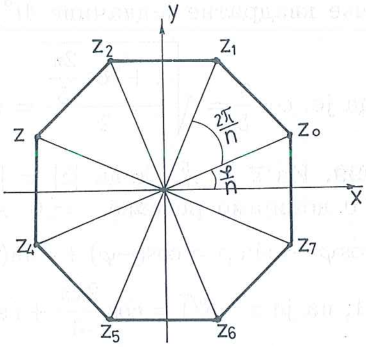
$$z=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right),\ k\in\{0,1,2\}.$$

1095. Множењем произвољног комплексног броја $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ бројем $z_\beta=\cos\beta+i\sin\beta$ вршимо у комплексној равни његову ротацију за угао β око тачке $O(0,0)$. Наиме број $z\cdot z_\beta=r(\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta))$ има исту апсолутну вредност r као и број z, а угао $\alpha+\beta$ је за β већи од угла α (сл. 275). Сва решења једначине $z^n=z_1=r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ дата су са $z = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)$

Решења z_k, $k \in \{1,2,3,\dots,n-1\}$ добијају се множењем решења $z_0 = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n})$ бројем $\cos(k\cdot\frac{2\pi}{n})+i\sin(k\cdot\frac{2\pi}{n})$, односно његовом ротацијом за углове $k\cdot\frac{2\pi}{n}$ око тачке $O(0,0)$, па се налазе у теменима правилног n - тоугла (на сл. 276 је приказан случај $n=8$).



Сл. 275



Сл. 276

1096. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9$. Како је $1 = \cos 0 + i\sin 0$, то су решења једначине $z^3 = 1$ комплексни бројеви $z_k = \cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$, $k\in\{0,1,2\}$, при чему је $z_2 = z_1^2$, $z_0 = z_1^3 = 1$. Тада је $(2+z_1^2)(2+z_2^2)(2+z_3^2) = (z+z_1^2)(2+z_1^4)\cdot 3 = (2+z_1^2)(2+z_1\cdot z_1^3)\cdot 3 = 3(2+z_1^2)(2+z_1) = 3(4+2z_1+2z_1^2+z_1^3) = 9+3\cdot 2(1+z_1+z_1^2) = 9+6\cdot\frac{z_1^3-1}{z_1-1} = 9+6\cdot 0 = 9$.

1097. Из $|z| = |\frac{1}{z}| = |1-z|$ следи $|z| = \frac{1}{|z|}$, $|z|^2 = 1$, $|z| = |1-z| = 1$, $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1-x)^2+y^2} = 1$, $x^2+y^2 = 1$ и $(1-x)^2+y^2 = 1$. Решења добијеног система једначина су $x = \frac{1}{2}$, $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, па наведене услове задовољавају комплексни бројеви $z = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $z = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. У оба случаја је $z+\frac{1}{z}+i = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, па је $\sqrt[3]{\left(z+\frac{1}{z}+i\right)^5} = \sqrt[3]{(\sqrt{2})^5\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4}\right)} = \sqrt[6]{32}\left(\cos\frac{(8k+5)\pi}{12}+i\sin\frac{(8k+5)\pi}{12}\right)$, $k = 0,1,2$.

1098. Дата једначина је еквивалентна са $\frac{z^5-1}{z-1} = 0$, односно са $z^5 =$

$1 \wedge z \neq 1$. Њена решења су $z = \sqrt[5]{1} = \cos\frac{0+2k\pi}{5} + i\sin\frac{0+2k\pi}{5}$, $k \in \{1,2,3,4\}$. Стављајући $z = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$ у дату једначину добијамо: $1 + \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5} = 0$, одакле је $1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos 2\cdot\frac{2\pi}{5} = 0$, $1+\cos\frac{2\pi}{5}+4\cos^2\frac{2\pi}{5}-2 = 0$, па је $\cos\frac{2\pi}{5}$ позитивно решење квадратне једначине $4t^2 + 2t - 1 = 0$, односно $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Отуда је: $\cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{2\pi}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{16}} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

1099. Из $\overline{z} = z^5$ следи $|\overline{z}| = |z| = |z|^5$, па је $|z| = 0$ или $|z| = 1$. Из $|z| = 0$ добијамо решење $z = 0$. Ако је $|z| = 1$, онда је $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\overline{z} = \cos\varphi - i\sin\varphi = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = z^{-1} = \frac{1}{z}$. Дакле: $\frac{1}{z} = z^5$, односно: $z^6 = 1$, па је $z = \sqrt[6]{1} = \cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}$, $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

1100. *а)* $z = 1$ није решење дате једначине, па је она еквивалентна једначини $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^8 = 1$, одакле је $\frac{z+1}{z-1} = \sqrt[8]{1}$, тј. $z = \frac{\sqrt[8]{1}+1}{\sqrt[8]{1}-1} = \frac{1+\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}}{-1+\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}} = i\cdot\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{8}$, $k \in \{0,1,...,7\}$.

б) Слично претходном задатку $z = \operatorname{ctg}\frac{k\pi}{8}$.

1101. *а)* $P(z)+Q(z) = 2z^4 - z^3 + 2z^2 - 2z + 2$, $P(z) - Q(z) = 2z^4 - z^3 + 4z$, $P(z)\cdot Q(z) = 2z^6 - 7z^5 + 6z^4 - 3z^3 - z^2 - 2z + 1$;

б) $z^3 + 2z^2 - 3z - 2$, $z^3 + z$, $z^5 - z^4 - 4z^3 + 3z + 1$;

в) $(1+i)z^2+(2+i)z+2$, $(1-i)z^2-(2+i)z$, $iz^4+(2+i)z^3+(1+i)z^2+(2+i)z+1$;

г) $(2+i)z + 2 + 2i$, $iz + 2 - 4i$, $(1+i)z^2 + (2i-1)z + 3 + 6i$.

1102. *а)* $2x^2 + 3x + 11$ и $25x - 5$; *б)* $\frac{3}{9}x - \frac{7}{9}$ и $-\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}$;

в) $2x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 39x + 109$ и -327; *г)* $4x^2 - (3+4i)x - 1 + 7i$ и $8 - 6i$;

д) $x^2 + ix$ и $x + 1$.

1103. Из једнакости $P(x) = (x-a)\cdot Q(x) + R = b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - ab_{n-1})\cdot x^{n-1} + (b_{n-3} - ab_{n-2})\cdot x^{n-2} + ... + (b_0 - ab_1)x + R - ab_0$, добијамо: $a_n = b_{n-1}$, $a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1}$, $a_{n-2} = b_{n-3} - ab_{n-2}, \ldots, a_1 = b_0 - ab_1$ и $a_0 = R - ab_0$, или $b_{n-1} = a_n$, $b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$, $b_{n-3} = a_{n-2} + ab_{n-2}, \ldots, b_o = a_1 + ab_1$ и $R = a_0 + ab_0$. Хорнерова шема има облик:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_2	a_1	a_0
a	a_n	$a_{n-1}+ab_{n-1}$	$a_{n-2}+ab_{n-2}$	$\dots$	a_2+ab_2	a_1+ab_1	a_0+ab_0
	$\Vert$	$\Vert$	$\Vert$	$\dots$	$\Vert$	$\Vert$	$\Vert$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}		b_1	b_0	R

1104. *а)*

	1	-2	4	-6	8
1	1	$-2+1\cdot 1$	$4+1(-1)$	$-6+1\cdot 3$	$8+1(-3)$
	1	-1	3	-3	5

па је количник x^3-x^2+3x-3, а остатак 5.

б)

	1	2	3	4	5
-1	1	1	2	2	3

Количник је x^3+x^2+2x+2, а остатак 3.

в)

	1	-1	-1	0
$-1+2i$	1	$-2+2i$	$-3-6i$	15

па је количник $x^2+(-2+2i)x+(-3-6i)$, а остатак 15.

г)

	1	$1+2i$	0	$-1-3i$	0	7
$-2-i$	1	$-1+i$	$3-i$	$-8-4i$	$12+16i$	$-1-44i$

Количник је $x^4+(-1+i)x^3+(3-i)x^2+(-8-4i)x+(12+16i)$, а остатак је $-1-44i$.

1105. Ако је $P(x)=b_n(x-x_0)^n+b_{n-1}(x-x_0)^{n-1}+\ldots+b_2(x-x_0)^2+b_1(x-x_0)+b_0$ разлагање полинома $P(x)$ по степенима од $x-x_0$, онда је $P(x)=(((b_n(x-x_0)+b_{n-1})(x-x_0)+\ldots+b_2)(x-x_0)+b_1)(x-x_0)+b_0$, односно b_0 је остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $x-x_0$, b_1 остатак при дељењу добијеног количника са $x-x_0$, итд, па за одређивање коефицијента b_0, $b_1,\ldots,b_n$ можемо користити Хорнерове шеме:

а)

	1	2	-4	-4	1
-1	1	1	-5	1	0
-1	1	0	-5	6	
-1	1	-1	-4		
-1	1	-2			
-1	1				

$$x^4+2x^3-4x^2-4x+1=1\cdot(x+1)^4-2(x+1)^3-4(x+1)^2+6(x+1)+0.$$

б) $x^5=(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1.$

в)

	1	$2i$	$-1-i$	-3	$7+i$
$-i$	1	i	$-i$	-4	$7+5i$
$-i$	1	0	$-i$	-5	
$-i$	1	$-i$	$-1-i$		
$-i$	1	$-2i$			
$-i$	1				

$x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i=1(x+i)^4-2i(x+i)^3+(-1-i)(x+i)^2-5(x+i)+(7+5i)$.

г) $x^4+(3-8i)x^3+(21+18i)x^2-(33+20i)x+7+18i=1\cdot(x+1-2i)^4-1\cdot(x+1-2i)^3+0(x+1-2i)^2+2(x+1-2i)+1$.

1106. *а)* Одредимо, помоћу Хорнерове шеме, остатке при дељењу полинома и добијених количника са $x-2$.

	1	-5	7	-2	4	-8
2	1	-3	1	0	4	0
2	1	-1	-1	-2	0	
2	1	1	1	0		
2	1	3	7			

Добијамо $x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8=(x-2)(x^4-3x^3+x^2+4)=(x-2)^2\cdot(x^3-x^2-x-2)=(x-2)^3(x^2+x+1)$. Како је $x^2+x+1=7$ за $x=2$, то је $x=2$ корен трећег реда.

б)

	1	$3+2i$	$2+4i$	$-2i$
$-1-i$	1	$2+i$	$1+i$	0
$-1-i$	1	1	0	
$-1-i$	1	i		

$x=-1-i$ је корен другог реда.

1107. *а)* Полином $P(x)$ задовољава следеће једнакости: $P(x)=(x-1)\cdot Q_1(x)+2$, $P(x)=(x-2)\cdot Q_2(x)+3$ и $P(x)=(x-1)(x-2)\cdot Q_3(x)+ax+b$, јер је остатак полином мањег степена од количника. Стављајући $x=1$ у прву и трећу једнакост, а $x=2$ у другу и трећу, добијамо систем једначина: $a+b=2\wedge 2a+b=3$, чије је решење $a=b=1$. Остатак је $x+1$.

б) Стављајући у трећу једнакост $Q_3(x)=0$ добијамо једини полином првог степена $P(x)=x+1$, а стављајући $Q_3(x)=A$, све полиноме другог степена $P(x)=A(x-1)(x-2)+x+1=Ax^2+(1-3A)x+2A+1$, где је A произвољан комплексан број различит од нуле.

1108. Стављајући $x=i$ и $x=-1+i$ у једнакост $P(x)=(x-i)(x+1-i)\cdot Q(x)+ax+b$ добијамо: $P(i)=ai+b=2i$ и $P(-1+i)=a(-1+i)+b=i$. Решење добијеног система једначина је $a=i$, $b=1+2i$, па је тражен остатак једнак $i\cdot x+1+2i$.

1109. Стављајући $x = 1$, $x = i$ и $x = -i$ у једнакости: $P(x) = (x-1)Q_1(x)+1$, $P(x) = (x^2+1)Q_2(x)+x+2$ и $P(x) = (x-1)(x^2+1)\cdot Q_3(x)+ax^2+bx+c$ добијамо систем једначина: $P(1) = a+b+c = 1 \wedge P(i) = -a+bi+c = i+2 \wedge P(-i) = -a-bi+c = -i+2$. Сабирањем и одузимањем друге и треће једначине уместо њих добијамо: $-2a+2c = 4 \wedge 2bi = 2i$ односно $-a+c = 2 \wedge b = 1$. Решење добијеног система је $a = -1$, $b = c = 1$, па је тражени остатак једнак $-x^2+x+1$.

Напомена: Ако је $P(x)$ полином са реалним коефицијентима, онда су и количник и остатак такви, па изједначавањем реалних и имагинарних делова једнакости $P(i) = -a+bi+c = i+2$ одмах добијамо $-a+c = 2 \wedge b = 1$.

1110. *а)* При дељењу полинома $P(x)$ са $x-1$ остатак је $P(1) = 6$, а са $x+1$ остатак је $P(-1) = 4$. Ако у једнакост $P(x) = (x^2-1)\cdot S(x)+ax+b$ заменимо $x = 1$ и $x = -1$ добијемо систем једначина чије је решење $a = 1$, $b = 5$, па је тражени остатак једнак $x+5$.

б) $P(i) = 3+i$, $P(-i) = 3-i$, $P(x) = (x^2+1)\cdot S(x)+ax+b$, $ai+b = 3+i \wedge -ai+b = 3-i$, $a = 1$, $b = 3$, па је остатак $x+3$.

II начин: Нека је $P_1(t) = t^{999}$. $P_1(-1) = -1$ па је $P_1(t) = (t+1)\cdot S_1(t)-1$. Специјално $P_1(x^2) = x^{1998} = (x^2+1)\cdot S_1(x^2)-1 = (x^2+1)\cdot S_2(x)-1$. Слично је $x^{100} = (x^2+1)\cdot S_2(x)+1$, па је $p(x) = x^{1998}+3\cdot x^{100}+x+1 = (x^2+1)\cdot S_2(x)-1+3(x^2+1)\cdot S_3(x)+3+x+1 = (x^2+1)(S_1(x)+3S_3(x))+x+3$. Остатак је $x+3$;

в) $Q(x) = (x+1+i)(x+1-i)$. Остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $x+1+i$ једнак је $P(-1-i) = (-1-i)^{2\cdot 999}+3(-1-i)^{2\cdot 50}+(-1-i)+1 = +2^{999}i^{999}+3\cdot 2^{50}i^{50}-i = (-2^{999}-1)i-3\cdot 2^{50}$. $P(-1+i) = (2^{999}+1)i+3\cdot 2^{50}$, па из једнакости $P(x) = (x^2+2x+2)\cdot S(x)+ax+b$ добијамо $a\cdot(-1-i)+b = -3\cdot 2^{50}-(2^{999}+1)\cdot i \wedge a(-1-+i)+b = -3\cdot 2^{50}+(2^{999}+1)i$, $a = 2^{999}+1 \wedge b = 2^{999}-3\cdot 2^{50}+1$. Остатак је $(2^{999}+1)x+2^{999}-3\cdot 2^{50}+1$;

г) $x^{1998} = x^3\cdot x^{7\cdot 285}$. Нека је $P_1(t) = t^{285}$. Како је $P_1(-1) = -1$, то је на основу Безуове теореме $P_1(t) = (t+1)\cdot S_1(t)-1$, односно $P_1(x^7) = x^{7\cdot 285} = (x^7+1)\cdot S_1(x^7)-1 = (x^7+1)\cdot S_2(x)-1$, одакле добијамо: $x^{1998} = x^3\cdot P_1(x^7) = (x^7+1)\cdot x^3\cdot S_2(x)-x^3$. Слично је $x^{100} = x^2\cdot x^{7\cdot 14} = (x^7+1)\cdot x^2\cdot S_3(x)+x^2$, па је $P(x) = (x^7+1)\cdot x^3\cdot S_2(x)-x^3+3\cdot(x^7+1)\cdot x^2\cdot S_3(x)+3x^2+x+1 = (x^7+1)(x^3\cdot S_2(x)+3x^2\cdot S_3(x))-x^3+3x^2+x+1$. Остатак је $-x^3+3x^2+x+1$.

1111. *а)* Полином $P(x)$ дељив је са $x-1$ акко је $P(1) = 0$. Добијамо $P(1) = A+B+1 = 0$, $B = -A-1$ и $P(x) = Ax^4-(A+1)x^3+1 = Ax^4-Ax^3-x^3+1 = Ax^3(x-1)-(x-1)(x^2+x+1) = (x-1)(Ax^3-x^2-x-1) = (x-1)\cdot Q(x)$, где је $Q(x) = Ax^3-x^2-x-1$. Полином $P(x)$ дељив је са $(x-1)^2$, ако је полином $Q(x)$ дељив са $x-1$, акко је $Q(1) = A-3 = 0$. Дакле, $A = 3$, $B = -4$;

б) Слично као под *а)* је $P(i) = A-Bi+1 = 0$, $A = Bi-1, P(x) = (x-i)\cdot Q(x)$ где је $Q(x) = Bix^3-(x^2-1)(x+i)$, $Q(i) = B+4i = 0$, $B = -4i$, $A = 3$;

в) $A = -\dfrac{3}{4}$, $B = 1+i$.

1112. Како је $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, то слично претходном задатку добијамо $A = n$, $B = -n - 1$.

1113. *а)* Полином $P(x)$ дељив је са $x - a$, па је $P(a) = a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots + a_2 a^2 + a_1 a + a_0 = 0$. Из последње једнакости изразимо a_0 па заменимо у $P(x)$. Добијамо: $P(x) = a_n(x^n - a^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - a^{n-1}) + \ldots + a_2(x^2 - a^2) + a_1(x - a) = a_n(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}\cdot a + \ldots + a^{n-1}) + a_{n-1}(x-a)(x^{n-2} + x^{n-3}\cdot a + \ldots + a^{n-2}) + a_2(x-a)(x+a) + a_1(x-a) = (x-a)\cdot Q(x)$ где је $Q(x) = a_n(x^{n-1} + x^{n-2}\cdot a + \ldots + a^{n-1}) + a_{n-1}(x^{n-2} + x^{n-3}\cdot a + \ldots + a^{n-2}) + \ldots + a_2(x+a) + a_1$. Како је $Q(a) = na_n a^{n-1} + (n-1)a_{n-1}a^{n-1}\cdot a^{n-2} + \ldots + 2a_2 + a_1 = P'(a)$ то је: $P(x)$ дељив са $(x-a)^2$, акко је $Q(x)$ дељив са $x - a$, акко је $Q(a) = 0$, акко је $P'(a) = 0$, акко је $P'(x)$ дељив са $x - a$;

б) Одредимо (на пример) комплексне бројеве A и B такве да полином $P(x) = Ax^4 + Bx^3 + 1$ буде дељив са $(x-i)^2$. На основу *а)* и Безуове теореме је $P'(x) = 4Ax^3 + 3Bx^2$ дељив са $x - i$, $P(i) = A - Bi + 1 = 0$ и $P'(i) = -4Ai - 3B = 0$. Решење добијеног система једначина је $A = 3$, $B = -4i$;

в) Нека је $x = a$ вишеструка нула полинома $P(x)$. Тада је он дељив са $(x-a)^2$ па је $P'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 7$ дељив са $x - a$. Зато је са $x - a$ дељив полином $4\cdot P(x) - x\cdot P'(x) = x^3 - 28x + 27$ и полином $Q(x) = 4(4P(x) - xP'(x)) - P'(x) = -3x^2 - 112x + 115$, па је $Q(a) = 0$. Нуле квадратног тринома $Q(x)$ су 1 и $-\dfrac{115}{3}$. Непосредно се проверава да 1 јесте нула полинома $P(x)$ и $P'(x)$, а $-\dfrac{115}{3}$ није,па је $x = 1$ једина вишеструка нула полинома $P(x)$. Како је $P(x) = (x-1)^2(x^2 + 3x + 5)$, то је $x = 1$ двострука нула;

г) Мора бити $P(-1) = -1 - a + a + 1 = 0$ и $P'(-1) = 5(-1)^4 - 2a(-1) - a = 0$, па је $a = -5$.

1114. За $A = B = 0$, $x = 0$ је петоструки корен. За $B = 0 \neq A$, $x = 0$ је троструки корен.Нека је $B \neq 0$. $x = a$ је вишеструки корен акко је $P(a) = a^5 + A\cdot a^3 + B = 0$ и $P'(a) = 5a^4 + 3A\cdot a^2 = 0$ како је $a \neq 0$ (у противном из прве једначине следи $B = 0$) то је $A = -\dfrac{5}{3}a^2$ и $B = \dfrac{2}{3}a^5$ па је $\left(-\dfrac{3A}{5}\right)^5 = \left(\dfrac{3B}{2}\right)^2$ односно $108A^5 + 3125B^2 = 0$.

1115. *а)* НЗД $(P(x), Q(x)) = (x-1)^2(x-2)^2$, НЗС $(P(x), Q(x)) = (x-1)^3(x-2)^4(x+1)$;

б) $Q(x) = (x-i)^2(x+i)^2(x+1)^2$ па је НЗД $(P(x), Q(x)) = (x-i)^2(x+1)$, а НЗС $(P(x), Q(x)) = (x-i)^3(x+i)^2(x+1)^2$.

1116. $Q(x) = 0$ за $x = \dfrac{-i + \sqrt{i^2 - 8}}{2} = \dfrac{-i + \sqrt{-9}}{2} = \dfrac{-i \pm 3i}{2}$, па је $Q(x) = (x-i)(x+2i)$.Докажимо да је $P(x)$ дељив са $x - i$ и са $x + 2i$, односно да је $P(i) = P(-2i) = 0$. $P(i) = i^3 - (3+i) + (2+3i)\cdot i + 6 = 0$, $P(-2i) = -8i^3 -$

$4(3+i)-2i(2+3i)+6=0$. $R(x)=(x-i)(x+i)$, па како је $P(-i)=6-2i\neq 0$, полином $P(x)$ није дељив са $x+i$, па није дељив са $R(x)$.

1117. Нека је $x^2+x+1=(x-x_1)(x-x_2)$. Докажимо да је полином $P(x)$ дељив са $x-x_1$ (слично се доказује да је дељив са $x-x_2$). Имамо: $x_1^2+x_1+x=0$ па је $x_1^3=x_1^3-1+1=(x_1-1)\cdot(x_1^2+x+1)+1=1$. Даље је $P(x_1)=(x_1^3)^m+(x_1^3)^n\cdot x_1+(x_1^3)^p\cdot x_1^2=1+x_1+x_1^2=0$, па је полином $P(x)$ дељив са $x-x_1$. Како је дељив са $x-x_2$, то је дељив и са x^2+x+1.

1118. Слично као у претходном задатку из $Q(x_1)=0$ следи $x_1^2=x_1-1$ и $x_1^3=-1$, па је $P(x_1)=(-1)^m-(-1)^n x_1+(-1)^p x_1^2=(-1)^m-(-1)^n x_1+(-1)^p(x_1-1)=(-1)^m-(-1)^p+x_1\cdot((-1)^p-(-1)^n)=(-1)^m-(-1)^p+\alpha((-1)^p-(-1)^n)+i\beta((-1)^p-(-1)^n)$, где су α и β различити од нуле реални бројеви. Полином $P(x)$ је дељив са $x-x_1$ акко је $P(x_1)=0$, односно $(-1)^p=(-1)^n=(-1)^m$, односно акко су m, n и p исте парности. Тада ће полином $P(x)$ бити дељив и са $x-x_2$.

1119. Како је $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)\cdot(x^2-x+1)$, а полиноми x^2+x+1 и x^2-x+1 немају једнаких нула, па је њихов НЗД једнак 1, то ће полином $P(x)$ бити дељив са x^4+x^2+1 акко је дељив са x^2+x+1 и x^2-x+1. Слично као у претходна два задатка може се показати да је полином $P(x)$ дељив са x^2+x+1 за све $m,\ n,\ p\in N$ а са x^2-x+1 акко су m, $n+1$ и p исте парности.

1120. За $m=3k+1$ или $m=3k+2$, $P(x)=x^{3\cdot 0}+x^{3\cdot k+1}+x^{3\cdot 2k+2}$ односно $P(x)=x^{3\cdot 0}+x^{3(2k+1)+1}+x^{3\cdot k+2}$, па је дељив полиномом x^2+x+1 на основу задатка **1117.** Нека је $x_1^2+x_1+1=0$ тада је $x_1^3=1$, па за $m=3k$ добијамо да је $P(x_1)=x_1^{6k}+x_1^{3k}+1=(x_1^3)^{2k}+(x_1^3)^k+1=3$. Дакле, x_1 није нула полинома $P(x)$ и $P(x)$ није дељив са $x-x_1$ па ни са x^2+x+1.

1121. *а)* Ако је $Q(x_1)=0$, онда је $x_1^3=1$ и $x_1+1=-x_1^2$, па је $P(x_1)=(x_1+1)^m-x_1^m-1=(-1)^m\cdot x_1^{2m}-x_1^m-1$.

За $m=6k$ је $P(x_1)=(x_1^3)^{4k}-(x_1^3)^{2k}-1=-1\neq 0$,
За $m=6k+1$ је $P(x_1)=-x_1^{12k}\cdot x_1^2-x_1^{6k}\cdot x_1-1=-(x_1^2+x_1+1)=0$,
За $m=6k+2$ је $P(x_1)=x_1^{12k+3}\cdot x_1-x_1^{6k}\cdot x_1^2-1=-(x_1^2-x_1+1)\neq 0$,
За $m=6k+3$ је $P(x_1)=-3\neq 0$,
За $m=6k+4$ је $P(x_1)=x_1^2-x_1+1\neq 0$,
За $m=6k+5$ је $P(x_1)=-x_1-x_1^2-1=0$,

Дакле за $m=6k\pm 1$, $P(x_1)=0$ и $P(x)$ је дељив са $x-x_1$ (слично и са $x-x_2$), па је дељив са $Q(x)$. За остале m није дељив са $Q(x)$.

б) За $m=6k\pm 2$.

в) Ако је $x_1^2+x_1+1=0$, $P(x)$ је дељив са $(x-x_1)^2$ акко је $P(x_1)=0$ и $P'(x_1)=m(x_1+1)^{m-1}-mx^{m-1}=0$. Слично под *а)* добијамо $m=6k+1$.

г) $m=4k-2$.

1122. Знамо да је $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)$, а по основном ставу алгебре је $x^n-1=(x-1)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})$. Дакле: $(x-$

$a_1)(x-a_2)...(x-a_{n-1}) = x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1$. Ова два полинома су једнака, па за $x=1$ добијемо тражену једнакост.

1123. *а)* $x^4+4=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)=(x-1-i)(x-1+i)\cdot(x+1-i)(x+1+i)$.

б) $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2-x+1)(x^2+x+1)=$
$$=\left(x-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

в) Решења једначине $x^{12}=-1=1(\cos\pi+i\sin\pi)$ су $x_k=\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{12}$, $k\in\{0,1,...,11\}$, па је $x^{12}+1=1(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{11})=$
$$\left(x-\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\left(x-\cos\frac{3\pi}{12}-i\sin\frac{3\pi}{12}\right)...\left(x-\cos\frac{23\pi}{12}-i\sin\frac{23\pi}{12}\right)=$$
$$=\prod_{k=0}^{11}\left(x-\cos\frac{\pi+2k\pi}{12}-i\sin\frac{\pi+2k\pi}{12}\right),\text{ где је }\prod_{k=0}^{n}a_k=a_0\cdot a_1\cdot...\cdot a_n.$$

г) $x^{12}+2x^6+1=(x^6+1)^2=0$ акко је $x^6=-1=\cos\pi+i\sin\pi$, при чему је свака нула двострука. Нуле датог полинома су $x_k=\cos\dfrac{\pi+2k\pi}{6}+$
$$+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6},\ k\in\{0,1,...,5\},\text{ па је}x^{12}+2x^6+1=\prod_{k=0}^{5}(x-x_k)^2=$$
$$=\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^2\cdot(x-i)^2\cdot\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^2\cdot\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^2\cdot(x+i)^2\cdot$$
$$\cdot\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^2.$$

д) Једначина $x^6+(2-2i)x^3-2i=0$, посматрана као квадратна једначина по x^3, има двоструко решење $x^3=-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$, па су сва решења дате једначине:
$$x_k=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right),\ k\in\{0,1,2\},$$ при чему је свако решење двоструко. Зато је $x^6+(2-2i)x^3-2i=(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2)^2=$
$$=\left(x-\sqrt[6]{2}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\right)^2\left(x-\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)\right)^2\cdot$$
$$\cdot\left(x-\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)\right)^2.$$

ђ) Сва решења једначине $x^n = 1$, осим решења $x = 1$ су нуле датог полинома: $x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$, па је $x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1 = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{n-1})$.

е) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 = \left(x - \cos\frac{2\pi}{6} - i\sin\frac{2\pi}{6}\right)\left(x - \cos\frac{4\pi}{6} - i\sin\frac{4\pi}{6}\right)(x- \cos\pi - i\sin\pi)\left(x - \cos\frac{8\pi}{6} - i\sin\frac{8\pi}{6}\right)\left(x - \cos\frac{10\pi}{6} - i\sin\frac{10\pi}{6}\right) =$

$= \left(x - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x+1)\left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

1124. Нека је $P(x_i) = Q(x_i)$, $i = 1, 2, ..., n+1$. Полином $R(x) = P(x) - Q(x)$, степена $k \leq n$, има $(n+1)$ - у међусобно различиту нулу. Ако је $k \geq 1$ онда мора бити $n + 1 \leq k \leq n$, па је полином $R(x)$ константа, а како је $R(x_1) = 0$, то је $R(x) = 0$ и $P(x) = Q(x) + 0 = Q(x)$.

1125. За $x = 0$ добијамо $P(0) = 0$, за $x = i$ је $P(i) = \frac{i}{-3i}P(0) = 0$, за $x = 2i$ је $P(2i) = \frac{2i}{-2i}P(i) = 0$ и за $x = 3i$ је $P(3i) = \frac{3i}{-i}P(2i) = 0$. Дакле $P(x) = x(x-i)(x-2i)(x-3i)\cdot Q(x)$, па дата једнакост постаје: $x(x-i)(x-2i)(x-3i)(x-4i)Q(x-i) = (x-4i)\cdot x\cdot(x-i)(x-2i)(x-3i)Q(x)$. Нека је n степен полинома $Q(x)$ (и $Q(x-i)$). Полиноми $Q(x)$ и $Q(x-i)$ имају једнаке вредности за више од n комплексних бројева (за све осим: 0, i, $2i$, $3i$ и $4i$), па је на основу претходног задатка $Q(x) = Q(x-i)$, за свако комплексно x. Из последње једнакости добијамо: $Q(0) = Q(i) = Q(2i) = ... = Q(ni)$, па полиноми $Q(x)$ и $S(x) = Q(0)$ ($S(x)$ је константа), степена не већег од n, имају једнаке вредности за $x = 0, 1, ..., n$, па је на основу претходног задатка $Q(x) = Q(0)$ за све комплексне вредности x и $P(x) = Q(0)\cdot x\cdot(x-i)(x-2i)(x-3i) = ax(x-i)(x-2i)(x-3i)$, где је a произвољан комплексан број.

1126. $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$, па је $(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n) = P(1) = 1 + a_1 + a_2 + ... + a_4 = 1 + (a_1 + a_3 + ...) + (a_2 + a_4 + ...)$ реалан број и $(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) = (-1)^n P(-1) = (-1)^n(1 + (-1)^{n-1}(a_1 + a_3 + ...) + (-1)^n(a_2 + a_4 + ...))$ такође реалан број. Даље је $Q(x) = (x - x_1^2)(x - x_2^2)...(x - x_n^2)$, па је $b_1 + b_2 + ... + b_n = Q(1) - 1 = (1 - x_1^2)(1 - x_2^2)...(1 - x_n^2) - 1 = [(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n)]\cdot[(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)] - 1$ реалан број.

Напомена: Из доказа се види да тврђење остаје на снази ако реч ,,реалан" свугде заменимо речју ,,рационалан" или речју ,,цео".

1127. Доказ вршимо математичком индукцијом по степену полинома. Нека је T_n исказано тврђење за полином n - тог степена. Докажимо T_0. Ако полином $P(x) = a$ узима целобројну вредност за $x = k$, онда је a цео број, па $P(x)$ узима целобројну вредност a за свако целобројно x. Нека је T_n тачно тврђење, и нека полином $P(x)$ степена $n+1$ узима целобројне вредности за $x = k,\ k+1,\ \ldots,\ k+n,\ k+n+1$. Тада полином $Q(x) = P(x+1) - P(x)$ степена n (проверите) узима целобројне вредности за $x = k,\ k+1,\ \ldots,\ k+n$, па на основу T_n следи да је $Q(x)$ цео број за сваки цео број x. Како је $P(k)$ цео број, то стављајући у $P(x+1) = P(x) + Q(x)$, $x = k,\ k+1,\ k+2,\ \ldots$ добијамо да је $P(x)$ цео број за сваки цео број $x \geq k$, а стављајући $x = k-1, k-2, \ldots$ у $P(x+1) - Q(x)$, добијамо да је $P(x)$ цео број за сваки цео број $x < k$. Тиме је доказано T_{n+1}, а тиме и t_n за све $n \in N \cup \{0\}$.

1128. *а)* $x_1 = -\frac{b}{a}$; *б)* $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$;

в) $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$, $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$;

г) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a}$, $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a}$, $x_1x_2x_3x_4 = \frac{b}{a}$.

1129. *а)* $-\frac{3}{2}$; *б)* $\frac{5}{2}$; *в)* $-\frac{7}{2}$;

г) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = (-\frac{3}{2})^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} = -\frac{11}{4}$;

д) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} = -\frac{5}{7}$;

ђ) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3) + 3x_1x_2x_3 = -\frac{3}{2}(-\frac{11}{4} - \frac{5}{2}) + 3 \cdot (-\frac{7}{2}) = -\frac{21}{8}$;

е) $x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3)x_1x_2x_3 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{11}{4}\right) = -2$.

1130. Како је $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{0}{1} = 0$, то је $x_3 = -3$, па је $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -6$.

1131. $x_1 + x_2 + x_3 - x_1x_2x_3 = -\frac{0}{8} - (-\frac{-125}{8}) = -\frac{125}{8}$.

1132. *а)* Нека је $y_1 = \frac{1}{x_1}$, $y_2 = \frac{1}{x_2}$ и $y_3 = \frac{1}{x_3}$. Тада је $y_1 + y_2 + y_3 = \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} = -\frac{3}{4}$, $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2x_3} = \frac{2}{4}$ и $y_1y_2y_3 = \frac{1}{x_1x_2x_3} = -\frac{1}{4}$, па је једна од једначина $(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) = y^3 - (y_1 + y_2 + y_3)y^2 + (y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3)y - y_1y_2y_3 = y^3 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{2}{4}y + \frac{1}{4} = 0$.

б) Нека је $y = x_1 + x_2$, $y_2 = x_2 + x_3$ и $y_3 = x_3 + x_1$. Тада је $y_1 + y_2 + y_3 = 2(x_1 + x_2 + x_3) = -4$, $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 7$, $y_1y_2y_3 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - x_1x_2x_3 = -2$. Једначина је: $y^3 + 4y^2 + 7y + 2 = 0$.

1133. Нека је $x_2 = 2x_1$. Из Вијетових формула добијамо $3x_1 + x_3 = 0$, $2x_1^2 + 3x_1x_3 = 7$ и $2x_1^2x_3 = \lambda$. Заменом $x_3 = -3x_1$ у другу једначину добијамо $-7x_1^2 = 7$, $x_1 = \pm i$, $x_3 = \pm 3i$.Из треће једначине добијамо $\lambda = 2 \cdot (-1) \cdot (\pm 3i) = \pm 6i$.

1134. Нека је $x_1 + x_2 = 1$. Тада је $x_1 + x_2 + x_3 = 1 + x_3 = \dfrac{1}{2}$, одакле је: $x_3 = -\dfrac{1}{2}$. Даље је: $2 \cdot \dfrac{-1}{8} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{7}{2} + \lambda = 0$ и $\lambda = -3$.

1135. *а)* -2; *б)* 3; *в)* -4; *г)* 5;
д) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \dfrac{1}{x_4} = \dfrac{x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4}{x_1x_2x_3x_4} = -\dfrac{4}{5}$;
ђ) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) = 4 - 6 = -2$;

1136. Из $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$ добијамо $x_3 + x_4 = 3$, па су x_3 и x_4 решења једначине $t^2 - 3t + 2 = 0$, односно $x_3 = 1$, $x_4 = 2$. Замењујући x_3 и x_4 у дату једначину добијамо систем једначина по α и β: $-2 + \alpha + \beta = 0 \land -12 + 2\alpha + \beta = 0$ чије је решење $\alpha = 10$, $\beta = -8$.

1137. Нека је $x_1 \cdot x_2 = 2$. Тада је $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 4$, односно $x_3 \cdot x_4 = 2$, па су x_1 и x_2 решења једначине $x^2 + px + 2 = 0$, а x_3 и x_4 једначине $x^2 + qx + 2 = 0$, па је $(x^2 + px + 2)(x^2 + qx + 2) = x^4 + (p+q)x^3 + (4+pq)x^2 + 2(p+q)x + 4 = x^4 - (3+i)x^3 + (4+3i)x^2 + ax + 4$. Изједначавањем коефицијената уз исте степене добијамо систем једначина $p+q = -3-i$ и $4+pq = 4+3i$ и $2(p+q) = a$, па је $a = -6-2i$, а p и q су решења квадратне једначине $t^2 - (p+q)t + pq = t^2 + (3+i)t + 3i = 0$, односно $p = -i$, $q = -3$. Решавајући једначине $x^2 - i \cdot x + 2 = 0$ и $x^2 - 3x + 2 = 0$ добијамо $x_1 = -i$, $x_2 = 2i$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$.

1138. На основу Вијетових формула имамо $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, па је $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3) = 0$.

1139. Нека су $a - 2d$, $a - d$, a, $a + d$ решења дате једначине из $a - 2d + a - d + a + a + d = 0$ добијамо $4a - 2d = 0$, $d = 2a$, па су решења дате једначине $-3a$, $-a$, a, $3a$. Тада друга и четврта Вијетова формула гласе: $(-3a)(-a) + (-3a) \cdot a + (-3a)(3a) + (-a) \cdot a + (-a) \cdot 3a + a \cdot 3a = -10a^2 = -(3p+2)$ и $(-3a)(-a)a \cdot 3a = 9a^4 = p^2$, итд. Добијамо $p = 6$ или $p = -\dfrac{6}{19}$.

1140. Дати бројеви су решења једначине $P(x) = 0$, где је $P(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$. Како за свако $x \leq 0$ је $P(x) < 0$, то су решења a, b и c позитивна.

1141. Ако решења x_1, x_2, x_3 дате једначине образују аритметичку прогресију, онда је $x_1 + x_3 = 2x_2$, па из прве Вијетове везе добијамо $x_1 + x_2 + x_3 = 3x_2 = 3p$, односно $x_2 = p$ је једно решење дате једначине.

Тада је $P(p) = -2p^3 + 2p = 0$ одакле добијамо $p = 0$ или $p = 1$ или $p = -1$, итд.

1142. $x_3 = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} \Leftrightarrow (x_1x_2 \neq 0 \wedge x_1x_2x_3 = x_1 + x_2) \Leftrightarrow (x_1x_2 \neq 0 \wedge -q = x_1 + x_2 + x_3 - x_3) \Leftrightarrow (x_1 \cdot x_2 \neq 0 \wedge x_3 = q) \Leftrightarrow (x_1 \cdot x_2 \neq 0 \wedge q^3 + pq + q = 0) \Leftrightarrow (x_1 \cdot x_2 \neq 0 \wedge q(q^2 + p + 1) = 0) \Leftrightarrow (q = x_3 = 0 \vee p = -1 - q^2)$.

1143. На основу Вијетових формула добијамо:
$b + c = 0$, $bc = b$, $abc = c$. Из друге једначине следи: $b = 0$ или $c = 1$. За $b = 0$ добијамо решење $(a, 0, 0)$, $a \in C$, а за $c = 1$ је $(-1, -1, 1)$.

1144. Нека су x_1, x_2, x_3, x_4 нуле датог полинома. Из Вијетових формула и неједнакости између аритметичке и геометријске средине добијамо: $\dfrac{1}{4} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}$, $\dfrac{16b}{4a} =$
$= \dfrac{x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4}{4} \geq \sqrt[4]{x_1^3 \cdot x_2^3 \cdot x_3^3 \cdot x_4^3}$, па је $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{16b}{4a} \geq x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{b}{a}$. Дакле аритметичка и геометријска средина бројева x_1, x_2, x_3 и x_4 су једнаке, па је $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

1145. Ако су α, β и γ решења једначине $r^2x^3 + q^3x + q^3 = 0$, онда је $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = \dfrac{q^3}{r^3}$ и $\alpha\beta\gamma = \dfrac{q^3}{r^3}$. Ако уведемо ознаке: $\alpha_1 = \dfrac{\alpha r}{q}$, $\beta_1 = \dfrac{\beta r}{q}$ и $\gamma = \dfrac{\gamma r}{q}$, биће: $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0$, $\alpha_1\beta_1 + \beta_1\gamma_1 + \alpha_1\gamma_1 = q$ и $\alpha_1\beta_1\gamma_1 = r$, што значи да су бројеви α_1, β_1 и γ_1 решења једначине $x^3 + qx + r = 0$. Можемо претпоставити да је $\alpha_1 = u$, $\beta_1 = v$ и $\gamma_1 = w$, па из $u + v + w = 0$, $uv + vw + uw = q$ и $uvw = -r$, добијамо: $\alpha = \dfrac{u^2}{vw} - 1$, $\beta = \dfrac{v^2}{uw} - 1$, $\gamma = \dfrac{w^2}{uv} - 1$.

1146. *а)* Како је $a = b = 2$, то из претпоставке да полином има три реална корена следи $a^2 = 2^2 \geq 3b = 6$, што није тачно.(Видети решење задатка 1170.).

б) За полином $\dfrac{1}{2}P(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$ је $a = \dfrac{3}{2} = b$ па $a^2 = \dfrac{9}{4}$ није веће од $3b = \dfrac{9}{2}$.

в) Слично претходном задатку.

1147. Одредимо тражене полиноме код којих је $a_n = 1$, а остале добијамо множењем нађених са -1. За $n = 0$ полином $P(x) = 1$ нема нула, па је тачно да су све његове нуле реалне. За $n = 1$ описана својства имају полиноми $x - 1$ и $x + 1$. Нека је $n \geq 2$ и нека су x_1, x_2,...,x_n нуле траженог полинома. На основу Вијетових формула је $(x_1x_2...x_n)^2 = a_0^2 = 1$ и $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n) = \dfrac{a_{n-1}^2}{1^2} - 2\dfrac{a_{n-2}}{1} = 1 - 2a_{n-2} \geq 0$, па a_{n-2} не може бити једнако 1. Дакле, $a_{n-2} = -1$

и $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=3$. Даље је $\frac{3}{n}=\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}\geq\sqrt[n]{(x_1x_2x_n)^2}=1$, па је $n\leq 3$.

За $n=2$ имамо $a_2=1$, $a_0=-1$, $a_1=\pm1$. Оба полинома x^2+x-1 и x^2-x-1 имају обе нуле реалне (проверите).

За $n=3$ имамо $a_3=1$, $a_1=-1$, $a_2=\pm1$, $a_0=\pm1$, па имамо четири полинома: x^3+x^2-x-1, x^3+x^2-x+1, x^3-x^2-x-1 и x^3-x^2-x+1. Први има реалне нуле 1, -1, -1,а четврти 1, 1, -1. Други и трећи полином немају све три нуле реалне (види претходни задатак), па су сви тражени полиноми: ±1, $\pm(x-1)$, $\pm(x+1)$, $\pm(x^2+x-1)$, $\pm(x^2-x-1)$, $\pm(x^3+x^2-x-1)$, $\pm(x^3-x^2-x+1)$.

1148. Нека је $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Тада је $P(-1)=-2-a-b=(-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)$. Одакле добијамо $a+b=(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\geq 2\sqrt{x_1}\cdot2\sqrt{x_2}\cdot2\sqrt{x_3}-2=8\sqrt{x_1x_2x_3}-2=8-2=6$. Једнакост се достиже за $x_1=x_2=x_3=1$. Тада је $a=b=3$.

1149. Ако су $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{11}$ корени дате једначине, тада је $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{11}=6$ и $\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+...+\alpha_1\alpha_{11}+...+\alpha_{10}\alpha_{11}=5$, као и $\alpha_i=\alpha_1+(i-1)d$, за $i=1,2,...,11$. Из првог збира добијамо: $11a_1+55d=6$, одакле је $\alpha_1=\frac{6}{11}-5d$. Комбинујући оба збира добијемо: $\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_{11}^2=(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{11})^2-2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+...+\alpha_1\alpha_{11}+...+\alpha_{10}\alpha_{11})=36-2\cdot5=26$. Отуда је $11\alpha_1^2+110\alpha_1^2d+385d^2=26$. Систем једначина по α_1 и d даје решење: $d=\frac{5}{11}$ и $\alpha_1=-\frac{19}{11}$, па је $\alpha_i=-\frac{19}{11}=(i-1)\frac{5}{11}$. Означимо са $P(x)$ леву страну дате једначине. Тада је $P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)=(x+\frac{19}{11})(x+\frac{14}{11})...(x-\frac{31}{11})$. Знамо да је збир коефицијената полинома једнак $P(1)$, а како је једна од заграда с десне стране једнакости $(1-\frac{11}{11})=0$, то је $P(1)=0$.

1150. *а)* Друго решење је $x_2=\overline{x_1}=-1-i$, па је полином на левој страни једначине дељив са $(x-x_1)(x-x_2)=x^2+2x+2$. Дељењем добијамо $3x^3+11x^2+16x+10=(x^2+2x+2)(3x+5)=0$, па су сва решења дате једначине $x_1=-1+i$, $x_2=-1-i$, $x_3=\frac{5}{3}$.

б) $x^4+5x^3+10x^2+10x+4=(x^2+2x+2)(x^2+3x+2)=0$, па је $x_1=-1+i$, $x_2=-1-i$, $x_3=-1$, $x_4=-2$.

в) $x^4+4x^3+8x^2+8x+4=(x^2+2x+2)(x^2+2x+2)=0$, па су $x_{1,2}=-1\pm i$ двострука решења дате једначине.

1151. Нека је $x_1=a+ai$ то решење. Тада је $x_1^2=2a^2i$, $x_1^3=-2a^3(1-i)$ и $x_1^4=-4a^4$, па је $x^4-2x^3+3x^2-2x+2=-4a^4+4a^3(1-i)+6a^2i-2a(1+i)+2=0$. Одавде следи да је $-4a^4+4a^3-2a+2=0$ и $-4a^3+6a^2-2a=0$. Заједничко решење је $a=1$, па је једно решење $x=1+i$, друго $x=1-i$. Даље је

$(x-x_1)(x-x_2)=x^2-2x+2$, $x^4-2x^3+3x^2-2x+2=(x^2-2x+2)(x^2+1)$ па су сва решења дате једначине $x_{1,2}=1\pm i$, $x_{3,4}=\pm i$.

1152. *а)* $x^4+4=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$.

б) $x^6+27=(x^2+3)(x^4-3x^2+9)=(x^2+3)((x^2+3)^2-(3x)^2)=(x^2+3)(x^2-3x+3)(x^2+3x+3)$.

в) $x^7-1=0$ за $x=\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}$, $k=0,1,2,...,6$, па је $x^7-1=(x-1)(x-\cos\frac{2\pi}{7}-i\sin\frac{2\pi}{7})(x-\cos\frac{4\pi}{7}-i\sin\frac{4\pi}{7})(x-\cos\frac{6\pi}{7}-i\sin\frac{6\pi}{7})(x-\cos\frac{8\pi}{7}-i\sin\frac{8\pi}{7})(x-\cos\frac{10\pi}{7}-i\sin\frac{10\pi}{7})(x-\cos\frac{12\pi}{7}-i\sin\frac{12\pi}{7})$. Групишимо 2. и 7., 3. и 6., 4. и 5. чинилац, и искористимо да је $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$, $\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$. Добијамо: $x^7-1=(x-1)(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{7}+1)(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{7}+1)(x^2-2x\cos\frac{6\pi}{7}+1)$.

г) $(x-1)(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{2n+1}+1)(x^2-2x\frac{\cos 4\pi}{2n+1}+1)...(x^2-2x\cos\frac{2n\pi}{2n+1}+1)$.

д) $x^4+4x^3+4x^2+1=(x^2+2x)^2+1=((x+1)^2-1)^2+1=0$ акко је $(x+1)^2-1=\pm i$, тј. $(x+1)^2=1\pm i$, одакле: $x+1=\sqrt{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$ или $x+1=\sqrt{\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}\right)}$, итд. $x^4+4x^3+4x^2+1=$
$\left[\left(x+1+\sqrt[4]{2}\cos\frac{\pi}{8}\right)^2+\sin^2\frac{\pi}{8}\right]\cdot\left[\left(x+1+\sqrt[4]{2}\cos\frac{7\pi}{8}\right)^2+\sin^2\frac{7\pi}{8}\right]$.

ђ) Користећи једнакост $x^4+6x^3+9x^2+100=(x^2+3)^2+100$ добијамо да су све нуле датог полинома $x_{1,2}=1\pm 2i$, $x_{3,4}=-4\pm 2i$. Зато је $x^4+6x^3+9x^2+100=[(x-x_1)(x-x_2)]\,[(x-x_3)(x-x_4)]=$
$=\left[(x-1)^2+4\right]\cdot\left[(x+4)^2+4\right]=(x^2-2x+5)(x^2+8x+20)$.

е) $x^4+2x^2-24x+72=x^4+2(x-6)^2$, па су све нуле датог полинома $x_{1,2}=2\pm i\sqrt{2}$, $x_{3,4}=-2\pm 2\sqrt{2}i$. Зато је $x^4+2x^2-24x+72=(x^2-4x+6)(x^2+4x+12)$.

1153. *а)* Кандидати за целобројне корене су делиоци броја -14, а то су: 1,-1,2,-2,7,-7,14,-14. Једино је $P(2)=0$, да је $x=2$ једини целобројни корен.

Слично се решавају и остали случајеви.

б) $x=-3$. *в)* и *г)* Нема целих корена. *д)* 1 и -3. *ђ)* 3 и -1.

1154. *а)* $P(x)=(x-2)\cdot Q(x)$ где је $Q(x)=x^2-4x+7$. Како је $Q(2)=3\neq 0$, то је $x=2$ корен првог реда полинома $P(x)$.

Слично поступамо у осталим случајевима.

б) 1. реда.

д) 0, 1 и -3 су нуле другог реда.

ђ) $x=3$ је нула првог, а $x=-1$ четвртог реда.

Напомена: Најлакше је делити полиноме Хорнеровом шемом.

1155. *а)* Кандидати су бројеви облика $\frac{p}{q}$, при чему се p садржи у -4 и q се садржи у 2, тј. кандидати су: $\frac{1}{1}$, $\frac{-1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{2}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{-2}{1}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{-4}{1}$. (Нису наведени бројеви који су се већ појавили, нпр. $\frac{2}{2}$). Једино је $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, па је $\frac{1}{2}$ једини рационални корен, и то првог реда.

б) Једини корен је $\frac{-1}{2}$, и то другог реда.

в) Једноструки рационални корени су -3 и $\frac{1}{2}$.

1156. *а)* Једначина има целобројна решења $x_1 = 2$, $x_2 = -3$. Како је $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = (x-2)(x+3)(x^2+x+1)$, то су $x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

б) $x = 1$ је двоструко решење. $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 5x + 2 = (x-1)^2(x^2 - x + 2)$. $x_{1,2} = 1$ $x_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

в) Једино решење је $x = \frac{1}{2}$, $2x^3 + 3x^2 + 6x - 4 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 4x + 8)$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

1157. Тражени бројеви су решења једначине $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 - (z_1 + z_2 + z_3) \cdot z^2 + (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)z - z_1 z_2 z_3 = z^3 + z - 2 = 0$. $z_1 = 1$ је једно целобројно решење. Како је $z^3 + z - 2 = (z-1)(z^2 + z + 2)$, то је $z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

1158. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = = \frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\right] = \frac{1}{2}\left[(2-a)^2 - (a^2 - b)\right] = 6 - 2a$, $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = x_1x_2x_3x_4(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}) = 5 \cdot (2 - \frac{a}{5}) = 10 - a$, па су x_1, x_2, x_3, x_4 решења једначине $P(t) = 0$, где је $P(t) = t^4 + (a-2)t^3 + (6-2a)t^2 + (a-10)t + 5$. Кандидати за целобројна решења последње једначине су ± 1, ± 5. $t = 1$ је једно решење, па је $P(t) = (t-1)Q(t)$,где је $Q(t) = t^3 + (a-1)t^2 + (5-a)t - 5$.Како је $Q(1) = 0$, то је $P(t) = (t-1)^2 \cdot S(t)$ и $S(t) = t^2 + at + 5$. Дакле, $t = 1$ је двострука нула полинома $P(t)$, па су од бројева x_1, x_2, x_3, x_4 два једнака 1. Да би још један од њих био једнак 1, мора бити $S(1) = 1 + a + 5 = 0$ односно $a = -6$. Тада је $P(t) = (t-1)^3 \cdot (t-5)$, па међу бројевима x_1, x_2, x_3, x_4, три су једнака 1, а четврти 5. Не могу бити сва четири међусобно једнака.

1159. Кандидати за рационалну нулу су бројеви: ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, ± 13, $\pm\frac{13}{2}$. Како је $P(1) = 18$, $P(-1) = -30$, $P(\frac{1}{2}) = 0$, то је $t = \frac{1}{2}$ рационална нула полинома $P(t)$, па је $P(t) = (t - \frac{1}{2})(2t^2 + 8t + 26)$. Остале две нуле полинома $P(t)$ су решења једначине $2t^2 + 8t + 26 = 0$, а то су: $t_{1,2} = -2 \pm 3i$.

1160. Кандидати за рационалне нуле су ± 1, $\pm\frac{1}{3}$, ± 2, $\pm\frac{2}{3}$. Провером утврђујемо да је једина рационална нула полинома $P(t)$ једнака $\frac{2}{3}$. Имамо $P(t) = (t - \frac{2}{3})Q(t)$ где је $Q(t) = 3t^2 - 6t - 3$, па су преостале две нуле $t = 1 \pm \sqrt{2}$. Из датог система једна чина добијамо решења $t^3 - \frac{8}{3}t^2 + \frac{1}{3}t + \frac{2}{3} = 0$, односно $P(t) = 0$. Једно решење датог система је $(x, y, z) = (-\frac{2}{3}, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$, а осталих пет се добија пермутацијом непознатих.

1161. Полином $P(x) = 0$ задовољава дате услове. Нека је $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$. Коефицијенти уз x^{2n} са обе стране дате једнакости су једнаки: $16a_n = 2^{2n}an^2$, па је $a_n = \frac{16}{4^n}$. Како је a_n цео број, n може бити $0, 1$ или 2. За $n = 0$ је $a_n = a_0 = 16$. За $n = 1$ је $a_n = 4$ и $P(x) = 4x + a_0$, па из дате једнакости добијамо $16(4x^2 + a_0) = (8x + a_0)^2$, односно $a_0 = 0$. За $n = 2$ је $a_n = 1$ и $16(x^4 + a_1 x^2 + a_0) = (4x^2 + 2a_1 x + a_0)^2$, одакле је $a_1 = a_0 = 0$. Тражени полиноми су: $0, 16, 4x, x^2$.

1162. За $n = 0$ коефицијент уз x^0 мора бити и $0!$ и $(-1)^0 \cdot 0 \cdot 1$, што је немогуће. За $n > 0$ из $x_n \geq k$ и Вијетових формула следи $n! \leq x_1 x_2 ... x_n = (-1)^n \cdot (-1)^n \frac{n(n+1)}{(n!)}$, тј. $(n!)^2 \leq n(n+1)$, што је тачно само за $n = 1$ и $n = 2$. За $n = 1$ полином $P(x) = x - 2$, задовољава услов $x_1 = 2 \in [1, 2]$. За $n = 2$, квадратни трином $P_2(x) = 2x^2 + a_1 x + 6$ има нуле $x_1 \in [1, 2]$ и $x_2 \in [2, 3]$ акко је $P_2(1) = a_1 + 8 \geq 0$, $P_2(3) = 3a_1 + 24 \geq 0$ и $P_2(2) = 2a_1 + 14 \leq 0$. Целобројна решења последњег система неједначина су $a_1 = -7$ и $a_1 = -8$, тако да су тражени полиноми $x - 2$, $2x^2 - 7x + 6$ и $2x^2 - 8x + 6$.

1163. Нека је $P(x) = Q(x) \cdot R(x)$, где су $Q(x)$ и $R(x)$ полиноми са целим коефицијентима при чему је степен једног од њих, нпр. $R(x)$, мањи или једнак 3. Из $P(x_k) \in \{-1, 1\}$, $k = 1, 2, ..., 7$ следи $R(x_k) \in \{-1, 1\}$, $k = 1, 2, ..., 7$, па на основу Дирихлеовог принципа, у четири тачке, нпр. x_1, x_2, x_3, x_4, $R(x)$ узима исту вредност, нпр. 1. Тада полином $R(x) - 1$, степена 1, 2 или 3, има 4 међусобно различите нуле, што је немогуће.

1164. Раставимо полином $P(x)$ линеарне чиниоце. Свака реална нула мора бити парног реда, јер би у противном чинилац $(x - x_0)^{2k+1}$ био различитом знака за $x > x_0$ и $x < x_0$, тако да не би било $P(x) \geq 0$ за све x. За сваку комплексну нулу x_1 постоји и комплексна нула $\overline{x}_1$ тако да линеарне факторе који одговарају комплексним нулама можемо поделити на две групе (у прву можемо узети на пример оне код којих су имагинарни делови позитивни, а у другу негативни). Нека је Q_1 производ линеарних фактора прве, а Q_2 друге групе. Како је $\overline{Q}_1 = Q_2$, то је $Q_1 = a(x)+ib(x)$, а $Q_2 = a(x)-ib(x)$, па је $Q_1 \cdot Q_2 = (a(x))^2+(b(x))^2$. Производ свих реалних фактора је потпун квадрат $c^2(x)$ па је и $P(x) = a_n(c(x))^2((a(x))^2 + (b(x))^2) = (\sqrt{a_n}c(x) \cdot a(x))^2 + (\sqrt{a_n}c(x) \cdot b(x)^2) = Q^2(x) + R^2(x)$.

1165. У датој једначини заменимо дато решење $P(a)$ и добијемо: $Q(a) = -P(a) - \dfrac{(a^4+1) \cdot P(a) + a^3 + a}{P(a)^2}$. Пошто је $Q(a)$ полином по a, мора бити $(a^4+1) \cdot P(a) + a(a^2+1)$ дељиво са $(P(a))^2$, односно мора бити дељив са $P(a)$. Одатле закључујемо да је и $a(a^2+1)$ дељиво са $P(a)$. Сада имамо следеће могућности:

1^o $P(a) = ca(a^2+1)$, $c \neq 0$, али тада $Q(a) = -c(a^3+ca) - \dfrac{a^4+1+\frac{1}{c}}{ac(a^2+1)}$ није полином, јер $a^4+1+\frac{1}{c}$ није дељиво са $ac(a^2+1)$.

2^o $P(a) = c(a^2+1)$, $c \neq 0$, али ни тада $Q(a) = -c(a^2+1) - \dfrac{a^4+1+\frac{a}{c}}{c(a^2+1)}$ није полином.

3^o $P(a) = ac$, $c \neq 0$ и $Q(a) = -ac - \dfrac{a^4+1+(a^2+1)\cdot\frac{1}{c}}{ac} = -ac - \dfrac{1}{c}a^3 - \dfrac{1}{2}a - \dfrac{1+\frac{1}{c}}{ac}$. За $c=-1$ је $P(a) = -a$ и $Q(a) = a^3$, па је $Q(a)$ полином.

4^o $P(a) = c$, $c \neq 0$ и $Q(a) = -c - \dfrac{1}{c}a^4 - \dfrac{1}{c} - \dfrac{a^3}{c^2} - \dfrac{a}{c^2}$, па је опет $Q(a)$ полином.

1166. Претпоставимо да постоји полином P са реалним коефицијентима, такав да за сваки реалан број x важи: $P(\cos x) = \sin x$. Уведимо ознаку $\cos x = t$, $-1 \leq t \leq 1$. Тада је $P^2(t) = \sin^2 x = 1 - t^2$, што значи да је $P(t)$ облика: $P(t) = at + b$. Но, то значи да је: $a^2t^2 + 2atb + b^2 = 1 - t^2$. Ово није могуће, јер је очигледно $b = 1$ или $b = -1$, али тада би следило да је $a = 0$ и $a^2 = -1$. Ова контрадикција обара претпоставку. Дакле, не постоји тражени полином P.

1167. Тврђење је тачно за $n = 0$: $P_0(2\cos\varepsilon) = \dfrac{\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon} = 1$ и за $n = 1$: $P_1(2\cos\varepsilon) = 2\cos\varepsilon = \dfrac{2\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon} = \dfrac{\sin 2\varepsilon}{\sin\varepsilon}$. Даље се доказ изводи математичком индукцијом.

1168. Ако је x_0 заједнички корен онда важи: $x_0^3+px_0+q=0$ и $x_0^3+p_1x_0+q_1=0$. Одузимањем ових једнакости добијамо: $(p-p_1)x_0+(q-q_1)=0$, одакле је $x_0=\dfrac{q_1-q}{p-p_1}$. Ако прву једначину помножимо са q_1, а другу са $(-q)$ и саберемо их, добићемо: $(q_1-q)x_0^3+(pq_1-qp_1)=0$. Заменимо овде нађену вредност за x_0 и добијемо тражену једнакост.

1169. $P(0)=a_n$ и $P(1)=a_1+a_2+...+a_n+1$, па на основу претпоставке следи да су a_n и збир $(a_1+a_2+...+a_{n-1})$ непарни бројеви. Нека је $P(x_0)=0$, тј. $x_0^n+a_nx_0^{n-1}+...+a_{n-1}x_0+a_n=0$, где је x_0 цео број. Тада је $x_0^n+...+a_{n-1}x_0$ непаран број, тј. $x_0(a_{n-1}+a_{n-2}x_0+...+a_1x_0^{n-2}+x_0^{n-1})$ је непаран број. Дакле, и x_0 мора бити непаран број и $a_{n-1}+a_{n-2}x_0+...+a_1x_0^{n-2}$ је парно. Ово је контрадикција са тврђењем да је a_n и $(a_1+a_2+...+a_{n-1})$ непарно. Заиста: $a_{n-1}+a_{n-2}x_0+...+x_0^{n-1}=2k+1-a_1-a_2-...-a_{n-2}+a_{n-2}x_0+...+a_1x_0^{n-2}=2k+1+a_1(x_0^{n-1}-1)+...+a_{n-2}(x_0-1)$, а ово је непарно јер су све заграде парни бројеви.

1170. Нека су x_1, x_2, x_3 реални корени датог полинома. Тада је на основу Вијетових формула: $a^2=(-x_1-x_2-x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)\geq 3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=3b$. Једнакост важи акко је $x_1=x_2=x_3$. (Доказ неједнакости видети у збирци задатака MATHEMATISKOP 3.)

1171. Уведимо смену $x+y=u$, $x\cdot y=v$. Тада је $x^3+y^3=(x+y)((x+y)^2-3xy)=u^3-3uv$, $x^2y+xy^2=xy(x+y)=u\cdot v$, итд. Решења су $(3,-2)$ и $(-2,3)$.

1172. Одузмимо прву једначину од друге. Добијамо: $x^4+y^2-x^2-y^4=(x-y)(x+y)(x^2+y^2-1)=0$ за $y-x=0$, односно за $y=x$ добијамо $x^4+x^2-20=0$, тј. $x=\pm 2$, па имамо два решења $(2,2)$, $(-2,-2)$. За $y+x=0$ имамо решења $(2,-2)$, $(-2,2)$. За $x^2+y^2-1=0$ имамо $x^2=1-y^2$, одакле следи: $1-y^2+y^4=20$, односно $y^4-y^2-19=0$. Добијамо: $y^2=\dfrac{1+\sqrt{77}}{2}$, $x^2=\dfrac{1-\sqrt{77}}{2}<0$, па нема решења.

1173. Уведимо смену $x^2=u$, $y^2=v$. Тада је друга једначина еквивалентна са $u^2-uv+v^2=13$, а прва са $u^3+v^3=65$, итд. Решења по x и y су $(1,2)$, $(1,-2)$, $(-1,2)$, $(-1,-2)$, $(2,1)$, $(2,-1)$, $(-2,1)$, $(-2,-1)$.

1174. Очигледно су $(1,0,...,0)$, $(0,1,...,0)$, ..., $(0,0,...,1)$ решења датог система. Ако је $n\geq 4$ и $(a_1,a_2,...,a_n)$ решење система које није наведено, из $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=1$ следи да је $a_i^2\in[0,1]$, $i=1,2,...,n$ и за бар једно k је $0<a^2k<1$. Тада је $a_i^2\geq a_i^4$ за све $i=1,2,...,n$ и $a_k^2>a_k^4$ па је $1=a_1^2+a_2^2+...+a_n^2>a_1^4+a_2^4+...+a_n^4=1$. Дакле, за $n\geq 4$ систем нема других решења. За $n=2$ систем $x_1+x_2=1$, $x_1^2+x_2^2=1$ има само решења $(0,1)$ и $(1,0)$. За $n=3$ је: $1=(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=1+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$, односно $1=x_1^3+x_2^3+x_3^3=$

$(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3)+3x_1x_2x_3 = 1\cdot 0+3x_1x_2x_3$, одакле добијамо: $x_1x_2x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$. Из последње две једнакости следи да су две непознате једнаке нули па трећа мора бити 1.

1175. Докажимо да је $x_1 = m$, ако је $(x_1, x_2, ..., x_{100})$ решење система. Ако је $x_1 > m$, тада из $x_1 + x_2 = m + n$ следи $x_2 < n$, из $x_2x_3 = nx_1$ следи $x_3 > x_1 > m$, итд. На крају следи да је $x_{100} < n$, а из $nx_1 = mx_{100}$ следи $x_1 < m$. Контрадикција! Слично се доказује да није $0 < x_1 < m$. Дакле $x_1 = m$, па из $x_1 + x_2 = m + n$ следи $x_2 = n$, а из $nx_1 = x_2x_3$ следи $x_3 = m$ итд. Дакле, ако систем има решења, онда је $(m, n, m, n..., m, n)$ једино решење.

1176. Ако од збира прве две једначине одузмемо трећу, па добијену једнакост поделимо са 2, добијамо $by = (y - x)(y - z)$. Слично је $ax = (x - y)(x - z)$ и $cz = (z - x)(z - y)$. Ако је $x = y$ тада из прве и друге једначине следи $y = x = 0$ а из треће $z = 0$ или $z = c$, па имамо два решења: $(0,0,0)$ и $(0,0,c)$. Слично се из претпоставке да је $x = z$ или $y = z$ добијају решења $(0, b, 0)$ и $(a, 0, 0)$. Нека је $x \neq y \neq z \neq x$. Множењем једначина последњег система добијамо $abcxyz = -(x - y)^2(x - z)^2(y - z)^2$. Из последње једнакости следи да међу бројевима x, y, z постоји један негативан а два позитивна, или да су сва три негативна. Нека је $x < 0$, $y > 0$, $z > 0$. На левој страни једнакости $ax = (x - y)(x - z)$ налази се негативан, а на десној позитиван број, па систем нема решења. Слично, систем нема решења ни ако је $y < 0$, $x > 0$, $z > 0$ или $z < 0$, $x > 0$, $y > 0$. Ако је $x < 0$, $y < 0$, $z < 0$, онда је на левој страни једнакости $ax + by = (x - y)^2$ негативан, а на десној позитиван број, па систем нема решења. Решења система су: $(0,0,0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $0, 0, c)$.

1177. $x \notin \{-1, 1\}$, јер у противном из прве једначине следи $x = 0$. Слично ни y ни z нису из $\{-1, 1\}$. Решавајући прву, другу и трећу једначине по y, z, x добијамо $y = \dfrac{2x}{1 - x^2}$, $z = \dfrac{2y}{1 - y^2}$, $x = \dfrac{2z}{1 - z^2}$.

Уведимо смену $x = \operatorname{tg}\alpha$, $\alpha \in R$. Тада је $y = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$, $z = \operatorname{tg}4\alpha$ и $x = \operatorname{tg}8\alpha$. Једначина $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}8\alpha$ има решења која задовољавају једнакост $8\alpha = \alpha + k\pi$, $k \in Z$, $\alpha = \dfrac{k\pi}{7}$, па су сва решења дата са $(\operatorname{tg}\dfrac{k\pi}{7},\ \operatorname{tg}\dfrac{2k\pi}{7},\ \operatorname{tg}\dfrac{4k\pi}{7})$, $k \in Z$. Међу њима има 7 различитих, која се добијају за $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$, а остала се поклапају са неким од њих.

1178. *a)* Прва једначина је еквивалентна са $x + y = -z$. Дизањем те једнакости на квадрат добијамо $x^2 + 2xy + y^2 = z^2$. (Напомена: Две горе написане једнакости нису еквивалентне. Наиме, ако су бројеви $x + y$ и $-z$ једнаки, онда су и њихови квадрати једнаки. Обрнуто не мора бити тачно. Нпр. ако је $x+y = 2$, $-z = -2$,тада је $x+y \neq -z$, а ипак је $(x+y)^2 = 4 = (-2)^2 = z^2$. У сваком случају, скуп решења система једначина, у коме је прва једначина $x^2+y^2+2xy=z^2$, садржи сва решења система једначина у коме је прва једначина $x+y=-z$, а остале једначине су исте. Зато за свако решење новодобијеног система треба проверити да ли је решење почетног.) Одузимањем прве једначине од друге добијамо $x\cdot y=-10$. Из треће и друге једначине следи $z^4+560=x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(z^2+20)^2-200$. Отуда је $z^2=9$, тј. $z=\pm3$. Из прве једначине почетног система и $x\cdot y=-10$ добијамо два система једначина:

$$\begin{aligned} z&=3 \\ x+y&=-3 \\ xy&=-10 \end{aligned} \qquad \text{и} \qquad \begin{aligned} z&=-3 \\ x+y&=3 \\ xy&=-10. \end{aligned}$$

Сва њихова решења су : $(-5,2,3)$, $(2,-5,3)$, $-5,-2,-3)$, $(-2,5,-3)$. Провером утврђујемо да су то решења почетног система.

б) Дизањем друге једначине на квадрат и заменом у прву добијамо $x^4+y^4=\dfrac{17}{4}x^2y^2$. За $x=0$ добијамо $y=0$. Провером утврдимо да је $(0,0)$ решење почетног система. Нека је $x\neq0$. Добијену једначину поделимо са x^4 и уведемо смену $\dfrac{y}{x}=t$. Добијамо биквадратну једначину $t^4-\dfrac{17}{4}t^2+1=0$, итд. Добијамо решења: $(0,0)$, $(3,6)$, $(1,-2)$, $(0,3)$ и $(-2,1)$.

в) Сабирањем прве и друге, прве и треће, друге и треће једначине, добијамо $x^3=xyz+2$, $y^3=xyz-3$, $z^3=xyz+3$. Множењем добијених једнакости и увођењем смене $xyz=t$ добијамо: $t^3=(t+2)(t-3)(t+3)$, односно $t=xyz=6$ или $t=xyz=\dfrac{3}{2}$. Тада је $x^3=8$, $y^3=3$, $z^3=9$ или $x^3=\dfrac{1}{2}$, $y^3=-\dfrac{9}{2}$, $z^3=\dfrac{3}{2}$. Решења су: $(2,\sqrt[3]{3},\sqrt[3]{9})$, $(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},-\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}},\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}})$. Провером утврђујемо да су то решења почетног система.

1179. Прва једначина се може написати у облику $(x^4-2)^2+(y^3+1)^2=0$, па из ње следи $x=\sqrt[4]{2}$, $y=-1$. Друга једначина постаје $z^3-6z^2+10z-4=0$. Она има целобројно решење $z_1=2$, и поред њега $z_{2,3}=2\pm\sqrt{2}$. Решења датог система су $(\sqrt[4]{2},-1,2)$, $(\sqrt[4]{2},-1,2+\sqrt{2})$, $(\sqrt[4]{2},-1,2-\sqrt{2})$.

1180. Да би систем једначина имао решење за свако реално b, мора имати и за $b=0$. Тада је $(x^2+1)^a=1$ и $a+x^2y=1$. Из прве једначине следи $a=0$ или $x=0$. Ако је $x=0$ из друге једначине следи $a=1$. Дакле, за $b=0$ реалних решења има само за $a=0$ или $a=1$. За те вредности посматрајмо систем једначина за свако b.

За $a=0$ систем постаје $(b^2+1)^y=1$, $bxy+x^2y=1$. Прва једнакост је тачна за свако b, само ако је $y=0$, а за ту вредност друга једнакост постаје $0=1$, па за $a=0$ систем нема решење за свако b.

За $a=1$ систем постаје $x^2+(b^2+1)^y=1$, $bxy+x^2y=0$. Он има решење $x=y=0$ (можда и још неко) за свако $b\in R$.