Nelinearne diofantske jednadžbe

Krešimir Burazin*

Sažetak. *Prikazane su neke elementarne metode rješavanja nelinearnih diofantskih jednadžbi.*

Ključne riječi: *diofantske jednadžbe, nelinearne jednadžbe*

Nonlinear Diophantine equations

Abstract. *Some elementary methods for solving nonlinear Diophantine equations are presented.*

Key words: *Diophantine equations, nonlinear equations*

Diofantskom jednadžbom nazivamo algebarsku jednadžbu s dvjema ili više nepoznanica s cijelim koeficijentima, kojoj se traže cjelobrojna (najčešće) ili pak racionalna rješenja. Linearnom diofantskom jednadžbom s n nepoznanica nazivamo jednadžbu oblika

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b\,,$$

gdje su $x_1, x_2, \cdots, x_n$ nepoznanice, te $a_1, a_2, \cdots, a_n, b$ cjelobrojni koeficijenti. Primjerice $2x + 3y = 7$ je linearna diofantska jednadžba s dvije nepoznanice. Sve diofantske jednadžbe koje nisu linearne nazivamo nelinearnim diofantskim jednadžbama. U njima se nepoznanice pojavljuju u članovima višeg reda, kao na primjer u jednadžbi

$$x^2 + 2y^3 = 8\,,$$

gdje se nepoznanice x i y pojavljuju u članovima drugog, odnosno trećeg reda. U ovome će radu biti prikazane neke elementarne metode rješavanja nelinearnih diofantskih jednadžbi (neke od tih metoda možda je čak preambiciozno nazivati "metodama", prije možda "male ideje" ili "trikovi" za rješavanje nelinearnih diofantskih jednadžbi). Zajednički nazivnik svim tim metodama je metoda razlikovanja slučajeva. Jednadžba se najčešće prvo mora zapisati u odgovarajući oblik, da bi se kroz razlikovanje dopuštenih slučajeva mogao suziti skup potencijalnih rješenja, te konačno i naći sama rješenja. U zavisnosti od toga kakav zapis jednadžbe koristimo, ili pak po kojoj osnovi razlikujemo slučajeve dobivamo različite (pod)metode za rješavanje nelinearnih diofantskih jednadžbi. Neki od prezentiranih zadataka mogu se riješiti na više načina, koristeći razne metode, ili pak kombinacije nekoliko metoda. Na čitatelju ostaje da otkrije te druge puteve u rješavanju pojedinog zadatka, ili možda da barem poneko postojeće rješenje "olakša" i učini elegantnijim.

*Odjel za matematiku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijek, kburazin@mathos.hr

Metoda faktorizacije

Metoda faktorizacije sastoji se u tome da se jedna strana jednadžbe zapiše u obliku produkta cjelobrojnih vrijednosti, pa uzimajući u obzir drugu stranu jednadžbe promatramo moguće slučajeve.

Zadatak 1. *Nađite sve prirodne brojeve n i proste brojeve p za koje vrijedi*

$$n^3 + 7n^2 + 14n + 8 = 6p\,.$$

Rješenje:
Uočimo da je

$$\begin{aligned} n^3 + 7n^2 + 14n + 8 &= n^3 + n^2 + 6n^2 + 6n + 8n + 8 \\ &= n^2(n+1) + 6n(n+1) + 8(n+1) \\ &= (n+1)(n^2 + 2n + 4n + 8) \\ &= (n+1)[n(n+2) + 4(n+2)] = (n+1)(n+2)(n+4)\,, \end{aligned}$$

te da je $6p = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot p$ potpun rastav broja $6p$. Kako je $n+4 > n+2 > n+1 > 1$, to slijedi da je $n+1 = 2$, $n+2 = 3$, i $n+4 = p$ jedini mogući slučaj, pa lako dobivamo $n = 1$, $p = 5$ kao jedino rješenje.

Zadatak 2. *Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe*

$$3xy + 2y = 7\,.$$

Rješenje:
Jednadžbu zapišemo u obliku

$$y(3x+2) = 7\,,$$

pa kako su y i $3x+2$ cijeli brojevi imamo sljedeće mogućnosti:

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & y = 1, \quad 3x+2 = 7 & \Rightarrow \quad x = 5/3 \notin \mathbb{Z}, \quad y = 1\,; \\ \text{II.} & y = -1, \quad 3x+2 = -7 & \Rightarrow \quad x = -3, \quad y = -1\,; \\ \text{III.} & y = 7, \quad 3x+2 = 1 & \Rightarrow \quad x = -1/3 \notin \mathbb{Z}, \quad y = 7\,; \\ \text{IV.} & y = -7, \quad 3x+2 = -1 & \Rightarrow \quad x = -1, \quad y = -7\,. \end{array}$$

Slijedi da imamo dva rješenja: $(-3, -1)$ i $(-1, -7)$.

Zadatak 3. *Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe*

$$2x^2 + xy - 3y^2 = 17\,.$$

Rješenje:
Lijevu stranu jednadžbe zapišemo u obliku produkta dva cijela broja:

$$\begin{aligned} 2x^2 + xy - 3y^2 &= 2x^2 + 3xy - 2xy - 3y^2 \\ &= x(2x+3y) - y(2x+3y) = (2x+3y)(x-y)\,, \end{aligned}$$

te razlikujemo sljedeće slučajeve:

$$\begin{array}{lll}
\text{I.} & 2x+3y=17, & x-y=1\,; \\
\text{II.} & 2x+3y=1, & x-y=17\,; \\
\text{III.} & 2x+3y=-17, & x-y=-1\,; \\
\text{IV.} & 2x+3y=-1, & x-y=-17\,.
\end{array}$$

Rješavanjem pripadnih sustava linearnih jednadžbi u slučaju I. dobivamo $x = 4$, $y = 3$; u slučaju II. $y = -33/5 \notin \mathbb{Z}$; u slučaju III. $y = 19/5 \notin \mathbb{Z}$; te u slučaju IV. $y = 33/5 \notin \mathbb{Z}$. Prema tome imamo samo jedno rješenje $x = 4$ i $y = 3$.

Zadatak 4. *Pokažite da jednadžba*

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 35$$

nema cjelobrojnih rješenja.

Rješenje:

Lijevu stranu jednadžbe rastavimo u produkt:

$$\begin{aligned}
&(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 \\
&\quad = (x-y+y-z)\big[(x-y)^2 - (x-y)(y-z) + (y-z)^2\big] - (x-z)^3 \\
&\quad = (x-z)\big[(x-y)^2 - (x-y)(y-z) + (y-z)^2 - (z-x)^2\big] \\
&\quad = (x-z)\big[(x-y)(x-2y+z) + (y-2z+x)(y-x)\big] \\
&\quad = (x-z)(x-y)(3z-3y) = 3(x-z)(x-y)(z-y)\,,
\end{aligned}$$

pa slijedi da je lijeva strana jednadžbe djeljiva s 3. Kako 35 nije djeljivo s 3, to jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Zadatak 5. *Odredite sve prirodne brojeve n za koje je $n^2 - 4n + 16$ potpun kvadrat nekog prirodnog broja.*

Rješenje:

Za neki prirodni broj m mora vrijediti

$$m^2 = n^2 - 4n + 16 = n^2 - 4n + 4 + 12 = (n-2)^2 + 12\,.$$

Odavde slijedi da je

$$12 = m^2 - (n-2)^2 = (m+n-2)(m-n+2)\,.$$

Kako su zbroj i razlika dva cijela broja uvijek iste parnosti (u ovom slučaju to su brojevi m i $n-2$), te $m+n-2 \geq 0$ (zbog $m, n \geq 1$), razlikujemo dva slučaja:

$$\begin{array}{lll}
\text{I.} & m+n-2=2, & m-n+2=6\,; \\
\text{II.} & m+n-2=6, & m-n+2=2\,.
\end{array}$$

U prvom slučaju dobivamo $m = 4$, $n = 0$, a u drugom $m = 4$, $n = 4$. Kako nula nije prirodan broj, imamo samo jedno rješenje $n = 4$.

Zadatak 6. *Neka je $p > 2$ fiksan prost broj. Nađite $x, y \in \mathbb{Z}$ takve da vrijedi*

$$x^2 + 2py - y^2 = 0\,.$$

Rješenje:
Jednostavnim transformacijama polazne jednadžbe dobivamo

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 2py - p^2 &= -p^2 \\ x^2 - (y^2 - 2py + p^2) &= -p^2 \\ x^2 - (y-p)^2 &= -p^2 \\ (x+y-p)(x-y+p) &= -p^2 \,. \end{aligned}$$

Budući da su jedini djelitelji broja $-p^2$ brojevi ± 1, $\pm p$ i $\pm p^2$, to razlikujemo šest slučajeva:

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & x+y-p=-1, & x-y+p=p^2\,; \\ \text{II.} & x+y-p=p^2, & x-y+p=-1\,; \\ \text{III.} & x+y-p=1, & x-y+p=-p^2\,; \\ \text{IV.} & x+y-p=-p^2, & x-y+p=1\,; \\ \text{V.} & x+y-p=-p, & x-y+p=p\,; \\ \text{VI.} & x+y-p=p, & x-y+p=-p\,. \end{array}$$

Rješavanjem pripadnih sustava linearnih jednadžbi u slučaju I. dobivamo $x = \frac{p^2-1}{2}$, $y = -\frac{(p-1)^2}{2}$; u slučaju II. $x = \frac{p^2-1}{2}$, $y = \frac{(p+1)^2}{2}$; u slučaju III. $x = -\frac{p^2-1}{2}$, $y = -\frac{(p+1)^2}{2}$; u slučaju IV. $x = -\frac{p^2-1}{2}$, $y = -\frac{(p-1)^2}{2}$; u slučaju V. $x = 0$, $y = 0$; te u slučaju VI. $x = 0$, $y = 2p$. Kako je p neparan, to su i rješenja u prva četiri slučaja cjelobrojna, pa ukupno imamo šest rješenja.

Metoda kvocijenta

Osnovna ideja ove metode slična je kao kod metode faktorizacije, samo što sada jednu stranu jednadžbe zapisujemo u obliku kvocijenta (razlomka) dviju cjelobrojnih vrijednosti, dok s druge strane jednadžbe imamo također cjelobrojnu vrijednost. Zbog toga nazivnik tog razlomka mora dijeliti brojnik, što nam daje klasifikaciju mogućih slučajeva. Spomenuti kvocijent u praksi najčešće dobijemo tako da se jedna nepoznanica izrazi kao racionalna funkcija druge.

Zadatak 7. *Nađite sve prirodne brojeve n za koje $n+2$ dijeli n^4+2.*

Rješenje:
Treba naći prirodne brojeve n za koje je i $\dfrac{n^4+2}{n+2}$ prirodan broj. Budući da je

$$\begin{aligned} \frac{n^4+2}{n+2} &= \frac{n^4+2n^3-2n^3-4n^2+4n^2+8n-8n-16+16+2}{n+2} \\ &= \frac{n^3(n+2)-2n^2(n+2)+4n(n+2)-8(n+2)+18}{n+2} \\ &= \frac{(n+2)(n^3-2n^2+4n-8)+18}{n+2} = n^3-2n^2+4n-8+\frac{18}{n+2}\,, \end{aligned}$$

nužno je i dovoljno da je $\dfrac{18}{n+2}$ prirodan broj. Uzimajući u obzir da je $n+2 \geq 3$ slijedi da je $n+2 \in \{3,6,9,18\}$, odnosno $n \in \{1,4,7,16\}$.

Zadatak 8. *Nađite sve dvoznamenkaste brojeve koji su tri puta veći od produkta svojih znamenki.*

Rješenje:
Označimo li s $\overline{ab}$ traženi dvoznamenkasti broj, tada mora vrijediti $\overline{ab} = 3ab$, odnosno $10a + b = 3ab$. To je ekvivalentno s $10a = b(3a-1)$, odakle dijeljenjem s $3a - 1 \neq 0$ dobivamo

$$\begin{aligned} b &= \frac{10a}{3a-1} \\ &= \frac{9a-3+a+3}{3a-1} \\ &= \frac{3(3a-1)+a+3}{3a-1} = 3 + \frac{a+3}{3a-1}\,. \end{aligned}$$

Sada slijedi da $\frac{a+3}{3a-1}$ mora biti cijeli broj, pa kako je $a \in \{1, 2, \cdots, 9\}$ provjerom za $a = 1$ dobivamo $b = 5$, za $a = 2$ dobivamo $b = 4$, dok za $a \geq 3$ vrijedi $3a-1 > a+3$, pa $\frac{a+3}{3a-1}$ ne može biti cjelobrojan. Dakle, imamo dva dvoznamenkasta broja s traženim svojstvom: 15 i 24.

Metoda zbroja

Metoda zbroja je slična metodi faktorizacije, samo što sada jednu stranu jednadžbe zapisujemo u obliku zbroja (najčešće nenegativnih) cijelih brojeva, te dalje diskutiramo slučajeve koji mogu nastupiti.

Zadatak 9. *Postoje li dva cijela broja sa svojstvom da je njihova suma dvostruko manja od sume njihovih kvadrata.*

Rješenje:
Označimo li ta dva broja s x i y, tada vrijedi

$$x^2 + y^2 = 2(x + y)\,,$$

ili drugačije zapisano

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 &= 2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 &= 2\,. \end{aligned}$$

Jedini način da se broj 2 napiše kao suma kvadrata dvaju cijelih brojeva je kao suma dviju jedinica, pa slijedi da je $(x-1)^2 = (y-1)^2 = 1$, odnosno $x - 1 = \pm 1 = y - 1$. Sada lako dobivamo da su x i y jednaki 0 ili 2, te su parovi brojeva koji zadovoljavaju uvjet zadatka dani skupom $\{(0,0), (0,2), (2,0), (2,2)\}$.

Zadatak 10. *Nađite $x, y \in \mathbb{Z}$ koji zadovoljavaju*

$$5x^2 + 5y^4 + 4x + 4xy^2 = 5\,.$$

Rješenje:
Jednostavnim transformacijama jednadžbu zapisujemo u obliku

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x + 1 + x^2 + 4xy^2 + 4y^4 + y^4 &= 6 \\ (2x+1)^2 + (x+2y^2)^2 + y^4 &= 6\,. \end{aligned}$$

Uočimo da na lijevoj strani gornje jednadžbe imamo sumu triju nenegativnih brojeva. Ukoliko bi bilo $|y| > 1$, vrijedilo bi i $y^4 \geq 16$, pa bi lijeva strana jednadžbe bila veća od 6. Dakle, nužno je $y \in \{-1, 0, 1\}$.

Ako je $y = 0$ dobivamo

$$\begin{aligned}(2x+1)^2 + x^2 &= 6\\ 5x^2 + 4x - 5 &= 0\,.\end{aligned}$$

Rješenje te kvadratne jednadžbe je $x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{29}}{5} \notin \mathbb{Z}$, pa u ovom slučaju nema rješenja.

Ako je $y = \pm 1$ naša jednadžba postaje

$$\begin{aligned}(2x+1)^2 + (x+2)^2 + 1 &= 6\\ 5x^2 + 8x &= 0\\ x(5x+8) &= 0\,,\end{aligned}$$

pa je $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{-8}{5} \notin \mathbb{Z}$. Stoga imamo dva rješenja $x = 0$, $y = 1$, te $x = 0$, $y = -1$.

Metoda ostataka

Metode produkta, kvocijenta i zbroja su koristile sličnu ideju da se različitim transformacijama jednadžba (ili njezin dio) zapiše u odgovarajućem obliku (produkta, kvocijenta, odnosno zbroja), te se taj zapis koristi kao baza za ispitivanje mogućih slučajeva. Metoda ostataka koristi drugačiju ideju: razlikovanje slučajeva se vrši ispitivanjem ostataka koje daju dijelovi jednadžbe pri dijeljenju s nekim cijelim brojem (najčešće nekim od brojeva $2, 3, 4, 5, 10$), te njihovim uspoređivanjem.

Metoda posljednje znamenke

Metoda posljednje znamenke je podmetoda metode ostataka koja koristi ispitivanje ostataka pri dijeljenju brojem 10. Preciznije, razdvajanje slučajeva se vrši promatranjem zadnje znamenke nekih dijelova jednadžbe, te njihovim usklađivanjem.

Zadatak 11. *U cijelim brojevima riješite jednadžbu*

$$x^2 + 10y = 1234567\,.$$

Rješenje:
Poznato je da kvadrat cijelog broja uvijek završava nekom od znamenaka $0, 1, 4, 5, 6, 9$. Kako $10y$ završava znamenkom 0, to slijedi da $x^2 + 10y$ može završavati nekom od znamenaka $0, 1, 4, 5, 6, 9$. Budući da broj 1234567 završava znamenkom 7, to slijedi da jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Zadatak 12. *Postoje li prirodni brojevi m i n koji zadovoljavaju jednadžbu*

$$n! + 5m^2 = 147926\,?$$

Rješenje:
Uočimo da $5m^2$ može završavati znamenkama 0 i 5. Kako za $n \geq 5$, $n!$ završava znamenkom 0, to slijedi da u tom slučaju $n! + 5m^2$ može završavati znamenkama 0 i

5. Budući da 147926 ne završava tim znamenkama, to slijedi da za $n \geq 5$ jednadžba nema rješenja. Preostaje ispitati što se dešava kada je n jedan od brojeva $1, 2, 3, 4$:

$$\begin{array}{llllll} n = 1 & \Rightarrow & 1 + 5m^2 = 147926 & \Rightarrow & m = \sqrt{29585} \notin \mathbb{Z}\,; \\ n = 2 & \Rightarrow & 2 + 5m^2 = 147926 & \Rightarrow & m = \sqrt{147924/5} \notin \mathbb{Z}\,; \\ n = 3 & \Rightarrow & 6 + 5m^2 = 147926 & \Rightarrow & m = 172\,; \\ n = 4 & \Rightarrow & 24 + 5m^2 = 147926 & \Rightarrow & m = \sqrt{147902/5} \notin \mathbb{Z}\,. \end{array}$$

Dakle jedino rješenje je $n = 3$, $m = 172$.

Zadatak 13. *Nađite cjelobrojna rješenja jednadžbe*

$$5^x + y^4 = 194482\,.$$

Rješenje:

Ako je $x < 0$ tada 5^x nije cijeli broj, a kako y^4 i 194482 to jesu, slijedi da u ovom slučaju nema rješenja.

Ako je $x = 0$ onda je $y^4 = 194481$, što povlači da je $y = 21$.

Ako je $x > 0$ tada 5^x završava znamenkom 5, pa budući da y^4 nužno završava nekom od znamenaka $0, 1, 5, 6$, to slijedi da $5^x + y^4$ mora završavati jednom od znamenaka $5, 6, 0, 1$. Kako 194482 završava znamenkom 2, to slijedi da u ovom slučaju nema rješenja.

Dakle jedino rješenje je $x = 0$, $y = 21$.

Metoda parnosti

Metoda parnosti je također podmetoda metode ostataka koja koristi ispitivanje ostataka pri dijeljenju brojem 2. Najšečće se razlikuju dva slučaja: kada je neka od nepoznanica parna, odnosno neparna, te se odvojeno vrše daljnja ispitivanja.

Zadatak 14. *Postoje li cijeli brojevi m i n koji zadovoljavaju jednadžbu*

$$n^4 + 16m = 7993\,?$$

Rješenje:

Ako bi n bio paran broj tada bi lijeva strana jednadžbe također bila parna, a kako je 7993 neparan, to ne bismo imali rješenja. Stoga je, ako rješenje postoji, nužno $n = 2k + 1$ za neki cijeli broj k. Uvrstimo li taj izraz u našu jednadžbu dobivamo

$$\begin{aligned} (2k+1)^4 + 16m &= 7993 \\ (4k^2 + 4k + 1)^2 + 16m &= 7993 \\ 16k^4 + 16k^2 + 1 + 32k^3 + 8k^2 + 8k + 16m &= 7993 \\ 8(2k^4 + 2k^2 + 4k^3 + k^2 + k) + 16m &= 7992 \quad | : 8 \\ 2(k^4 + k^2 + 2k^3 + m) + k(k+1) &= 999\,. \end{aligned}$$

Budući da je produkt dva uzastopna cijela broja uvijek djeljiv s 2 (dakle 2 dijeli $k(k+1)$), to slijedi da je cijela lijeva strana u zadnjoj jednakosti parna. Kako je 999 neparan, znači da jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Metoda karakterističnih ostataka

Promatraju se ostaci pri dijeljenju bilo kojim cijelim brojem (osim već diskutiranih brojeva 2 i 10).

Zadatak 15. *Pokažite da jednadžba*

$$x^2 + y^2 = 2006$$

nema cjelobrojnih rješenja.

Rješenje:

Prvo uočimo da je kvadrat parnog broja uvijek djeljiv s 4 ($4|4k^2 = (2k)^2$), dok kvadrat neparnog broja pri dijeljenju s 4 daje ostatak 1 ($(2k+1)^2 = 4(k^2+k)+1 \equiv 1 \pmod 4$). Budući da 2006 pri dijeljenju s 4 daje ostatak 2, slijedi da su i x i y neparni. Označimo li $x = 2m+1$, $y = 2n+1$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) iz jednadžbe slijedi

$$\begin{aligned} (2m+1)^2 + (2n+1)^2 &= 2006 \\ 4(m^2+m+n^2+n) &= 2004 \quad | : 4 \\ \underbrace{m(m+1)+n(n+1)}_{\text{parno}} &= 501\,. \end{aligned}$$

Budući da su lijeva i desna strana u zadnjoj jednakosti različite parnosti, to slijedi da jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Zadatak 16. *Za koje cijele brojeve x i y broj $x^4 + y^4$ pri dijeljenju s 25 daje ostatak 3?*

Rješenje:

Tražimo brojeve x i y takve da je $x^4 + y^4 = 25m + 3$ za neki $m \in \mathbb{Z}$. Uočimo da tada $x^4 + y^4$ i pri dijeljenju s 5 daje ostatak 3. Pogledajmo sada kakve sve ostatke pri dijeljenju s 5 može davati četvrta potencija cijelog broja:

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & x \equiv 0 \pmod 5 & \Rightarrow \quad x^4 \equiv 0 \pmod 5\,; \\ \text{II.} & x \equiv \pm 1 \pmod 5 & \Rightarrow \quad x^4 \equiv (\pm 1)^4 = 1 \pmod 5\,; \\ \text{III.} & x \equiv \pm 2 \pmod 5 & \Rightarrow \quad x^4 \equiv (\pm 2)^4 = 16 \equiv 1 \pmod 5\,. \end{array}$$

Dakle, x^4 i y^4 pri dijeljenju s 5 mogu dati samo ostatke 0 ili 1, pa onda $x^4 + y^4$ pri dijeljenju s 5 može davati ostatke $0, 1$ ili 2, a nikako 3. Slijedi da traženi cijeli brojevi x i y ne postoje.

Zadatak 17. *Koliko rješenja u skupu cijelih brojeva ima jednadžba*

$$3^x - 2^y = 5\,?$$

Rješenje:

Iz $3^x = 5 + 2^y > 5$ slijedi da je $x \geq 2$, pa onda $2^y = 3^x - 5 \geq 3^2 - 5 = 4$ povlači da je i $y \geq 2$.

Za $y = 2$ iz $3^x = 5 + 2^2 = 9$ slijedi $x = 2$.

Za $y > 2$ je 2^y djeljivo s 8, pa je $5 + 2^y \equiv 5 \pmod 8$. Pogledajmo sada kakve ostatke pri dijeljenju s 8 daje 3^x. Razlikujemo dva slučaja, kada je x paran, odnosno neparan:

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & x = 2k & \Rightarrow \quad 3^x = 3^{2k} = 9^k \equiv (1)^k = 1 \pmod 8\,; \\ \text{II.} & x = 2k+1 & \Rightarrow \quad 3^x = 3^{2k+1} = 3 \cdot 9^k \equiv 3 \cdot (1)^k = 3 \pmod 8\,. \end{array}$$

Slijedi da $3^x = 5 + 2^y$ pri dijeljenju s 8 ne može dati ostatak 5 pa stoga za $y > 2$ rješenja nema i jedino rješenje je $x = 2$, $y = 2$.

Metoda nejednakosti

Ova metoda se često koristi da bi se smanjio skup mogućih rješenja dane jednadžbe, a zatim se na tom smanjenom skupu razlikuju slučajevi. Metoda nejednakosti se često koristi i u kombinaciji s nekom drugom metodom za rješavanje nelinearnih diofantskih jednadžbi kao primjerice u Zadatku 10 s metodom zbroja.

Zadatak 18. *U skupu prirodnih brojeva riješite jednadžbu*

$$a! + b! = c!\,.$$

Rješenje:

Očito mora biti $a < c$ i $b < c$. Bez smanjenja općenitosti neka je i $a \leq b$. Jednostavnom transformacijom iz jednadžbe dobivamo

$$a!\big(1 + \frac{b!}{a!} - \frac{c!}{a!}\big) = 0\,,$$

a kako je $a! > 0$ to je nužno

$$1 + \frac{b!}{a!} - \frac{c!}{a!} = 0\,,$$

odnosno

$$1 = \frac{c!}{a!} - \frac{b!}{a!} = \underbrace{\frac{b!}{a!}}_{\in\mathbb{Z}}\underbrace{\big(\frac{c!}{b!} - 1\big)}_{\in\mathbb{Z}}\,.$$

Za $a < b$ bilo bi $\frac{b!}{a!} > 1$ pa gornja jednakost ne bi mogla vrijediti, te je stoga nužno $a = b$ pa je

$$\frac{c!}{b!} = 2\,.$$

Zbog $c > b \geq 1$ gornja jednadžba nema rješenja za $c > 2$, te joj je $c = 2$, $b = 1$ jedino rješenje. Naravno, tada je i $a = 1$ te smo dobili jedinstveno rješenje polazne jednadžbe.

Zadatak 19. *U skupu prirodnih brojeva riješite jednadžbu*

$$a + b + c = abc\,.$$

Rješenje:

Bez smanjenja općenitosti neka je $a \leq b \leq c$. Tada je

$$abc = a + b + c \leq 3c\,,$$

odnosno $ab \leq 3$, pa razlikujemo tri slučaja:

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & a = 1, & b = 1\,; \\ \text{II.} & a = 1, & b = 2\,; \\ \text{III.} & a = 1, & b = 3\,. \end{array}$$

Uvrštavajući te vrijednosti u polaznu jednadžbu I. slučaj vodi na kontradikciju ($2 = 0$), II. daje $c = 3$, a III. daje $c = 2$ što je pak kontradikcija s $b \leq c$. Dakle, jedino rješenje je $(1, 2, 3)$.

Zadatak 20. *Nađite sve prirodne brojeve a, b, c za koje je*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 .$$

Rješenje:

Uočimo prvo da svaki od traženih brojeva mora nužno biti veći od 1. Bez smanjenja općenitosti neka je $1 < a \leq b \leq c$. Tada iz

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{3}{a}$$

slijedi da je $a \leq 3$, odnosno a može biti 2 ili 3.

Ako je $a = 2$, tada iz

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{2}{b}$$

slijedi da je $b \leq 4$, odnosno b može biti jedan od brojeva $2, 3, 4$. Sada se lako izračuna da $b = 2$ vodi na kontradikciju ($\frac{1}{c} = 0$); $b = 3$ daje $c = 6$; dok iz $b = 4$ dobivamo $c = 4$.

Ako je $a = 3$, tada iz

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{2}{b}$$

slijedi da je $b \leq 3$, pa je (zbog $3 = a \leq b$) nužno $b = 3$, te lako dobivamo i $c = 3$. Dakle, ukupno imamo tri rješenja $(2, 3, 6), (2, 4, 4)$ i $(3, 3, 3)$.

Zadaci za vježbu

Zadatak 1. *Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe*

$$y^2 = xy + 3 .$$

Zadatak 2. *Nađite sve prirodne brojeve n i proste brojeve p koji zadovoljavaju*

$$3p^2 + 4 = n^4 .$$

Zadatak 3. *Nađite sve pravokutne trokute s cjelobrojnim duljinama stranica kojima je opseg jednak površini.*

Zadatak 4. *Nađite sve nenegativne cijele brojeve x i y za koje je*

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2 .$$

Zadatak 5. *Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe*

$$(x+y)^2 = x^3 + y^3 \,.$$

Zadatak 6. *Dokažite da jednadžba*

$$x^5 - y^2 = 4$$

nema cjelobrojnih rješenja.

Zadatak 7. *Nađite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe*

$$2x^2 + 5y = 1001 \,.$$

Zadatak 8. *Nađite sve prirodne brojeve m, n za koje je*

$$m^2 - n! = 2001 \,.$$

Zadatak 9. *Nađite sve prirodne brojeve k, m, n za koje je*

$$3(km + mn + nk) = 4kmn \,.$$

Zadatak 10. *Dokažite da jednadžba*

$$(x+1)^4 - (x-1)^4 = y^3$$

nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

Literatura

[1] T. Andreescu, D. Andrica, *An Introduction to Diophantine Equations*, GIL, Zalau 2002.

[2] V. Andrić, *Nelinearne diofantske jednačine (Neke metode rešavanja - zbirka zadataka)*, Arhimedes, Beograd 1988.

[3] I. Gusić, *Matematički rječnik*, Element, Zagreb 1995.

[4] B. Pavković, B. Dakić, P. Mladinić, *Elementarna teorija brojeva*, HMD i Element, Zagreb 1994.