ММО 2022

1. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со $x_1=2$ и $x_{n+1}=\frac{x_n(x_n+n)}{n+1}$, за секој $n\geq 1$. Докажи дека

$$n(n+1)>\frac{(x_1+x_2+...+x_n)^2}{x_{n+1}}. \qquad (1)$$

Решение. Прво да забележиме дека од $x_{n+1}=\frac{x_n(x_n+n)}{n+1}$ следува

$$(n+1)x_{n+1}-nx_n=x_n^2.$$

Затоа

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=\sum_{i=1}^{n}((i+1)x_{i+1}-ix_i)=(n+1)x_{n+1}-x_1<(n+1)x_{n+1}.$$

Конечно, од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина и горното неравенство следува неравенството

$$\frac{(x_1+x_2+...+x_n)^2}{n}\leq x_1^2+x_2^2+...+x_n^2<(n+1)x_{n+1},$$

кое е еквивалентно со неравенството (1).

2. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Нека E е средината на отсечката AC. Кружницата опишана околу $\triangle CDE$ по втор пат ја сече страната BC во точката F. Нека B' е симетричната точка на темето B во однос на точката F. Докажи дека EF е тангента на опишаната кружница околу триаголникот $B'DF$.

Решение. Од тетивноста на четириаголниците $ABCD$ $CDEF$ следува

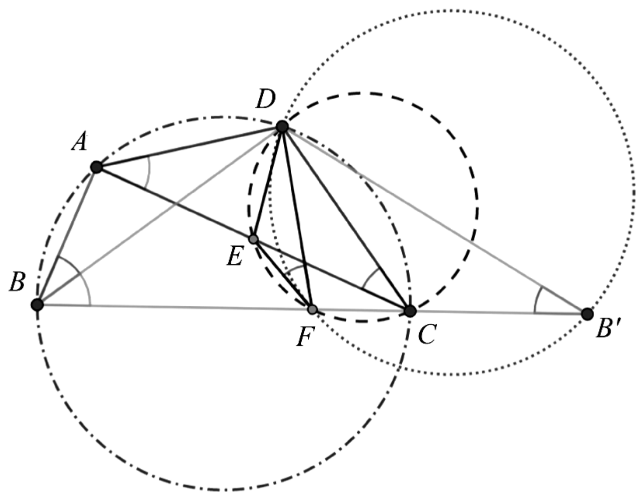
$$\measuredangle ABD = \measuredangle ACD = \measuredangle DCE = \measuredangle DFE.$$

Слично

$$\measuredangle ADB = \measuredangle ACB = \measuredangle ECF = \measuredangle EDF.$$

Оттука

$$\measuredangle ADE = \measuredangle ADB + \measuredangle BDE = \measuredangle EDF + \measuredangle BDE = \measuredangle BDF.$$



Од $\measuredangle ADE = \measuredangle BDF$ и $\measuredangle DAE = \measuredangle DBC$ заклучлуваме дека триаголниците ADE и BDF се слични. Од оваа сличност и фактот дека E и F се средините на AC и BB', соодветно, добиваме

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BF}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AC}}{\frac{1}{2}\overline{BB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BB'}}.$$

Сега, од $\measuredangle DAC = \measuredangle DB'B$ следува дека $\triangle DAC \sim \triangle DBB'$, па затоа $\measuredangle DCA = \measuredangle DB'B$. Конечно, добиваме

$$\measuredangle DB'F = \measuredangle DB'B = \measuredangle DCA = \measuredangle DCE = \measuredangle DFE,$$

од што следува дека EF е тангента на опишаната кружница околу триаголникот $B'DF$.

3. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со $a_1 = 2$ и $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$ за $n \geq 1$. За произволен природен број $m \geq 2$ со $L(m)$ да го означиме неговиот најголем прост делител. Докажи дека постои k таков што

$$L(a_k) > 1000^{1000}.$$

Решение. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека за секој n важи $L(a_n) \leq 1000^{1000}$. Нека $A = \{p \mid p \text{ е прост број и } p < 1000^{1000}\}$. Тогаш, за секој $n \geq 1$ множеството D_n од сите прости делители на a_n е подмножество од A.
Избираме $p \in A$. Нека $v_p(x)$ е експонентот на најголемиот степен на p што е делител на x. Ако $p \mid a_k$ за некој k, тогаш бидејќи $p \nmid a_k + 1$, добиваме

$$v_p(a_{k+1}) = v_p(a_k) + v_p(a_k + 1) = v_p(a_k).$$

и $p \mid a_{k+1}$. Значи, за секој $p \in D_k$ важи $v_p(a_{k+1}) = v_p(a_k)$ и притоа $a_{k+1} > a_k$. Според тоа, a_{k+1} има дополнителен прост делител $q \in A$, покрај сите прости делители p на a_k. Последното значи дека D_k е вистинско подмножество на D_{k+1}, за секој k. Но, тогаш имаме бесконечна низа вистински подмножества ограничена од горе со конечноот множество A:

$$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset A,$$

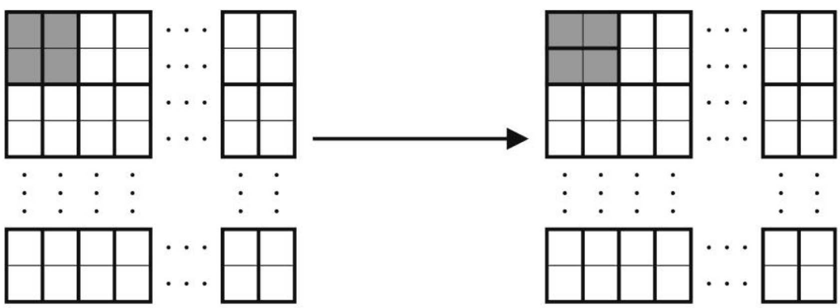
што е противречност.

4. Софија и Виктор на табла со димензии 2022×2022 ја играат следнава игра:
   - прво Софија целата табла ја покрива со домина што не се преклопуваат и не излегуваат надвор од таблата,
   - потоа Виктор на лист хартија запишува природен број n, без притоа да ја види поставеноста на домината на таблата, па ја разгледува таблата со домината на неа, избира n домина и ги фиксира (лепи) на таблата,
   - потоа Софија ги отстранува од таблата преостанатите (незалепените) домина, и се обидува да добие ново целосно покривање на таблата, кое ќе се разликува од почетното.

   Ако Софија успее да најде ново различно покривање, таа победува, а во спротивно победува Виктор.

   Определи ја најмалата можна вредност при која Виктор секогаш може да победи, без разлика какво е почетното покривање.

   Решение. Прво да забележиме дека $n \geq 1011^2$. Навистина, нека почетното покривање на Софија е конфигурација при која таблата прво е поделена на дисјунктни 2×2 квадрати, па секој од нив е покриен со точно две домина. За да победи Виктор мора да фиксира барем по едно домино од секој од овие 2×2 квадрати (види цртеж). Од друга страна, бројот на такви 2×2 квадрати е еднаков на $\frac{2022^2}{4} = 1011^2$.



Ќе докажеме дека овој број е доволен. Ги нумерираме редиците и колоните со 1, 2, ..., 2022 и на секое единечно квадратче му придружуваме пар целобројни координати (број на редица и број на колона). Потоа во црно го боиме секое единечно квадратче кај кое двете координати се непарни. Јасно, во секој 2×2 е содржан точно по едно црно квадратче и вкупниот број црни квадратчиња е еднаков на $\frac{2022^2}{4} = 1011^2$. Ќе го докажеме тврдењето:

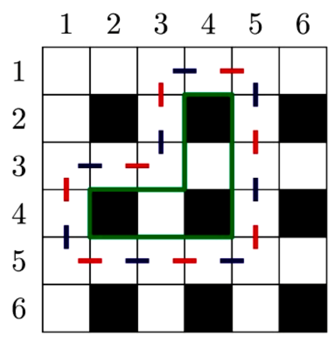
Ако при произволно почетно покривање на таблата Виктор го фиксира секое домино што покрива црно квадратче, тогаш Софија не може да добие ново покривање различно од почетното.

Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека Софија може да добие ново покривање. Конструираме два графа, син и црвен, чии темиња се единечните квадрати на таблата: имено, ги поврзуваме со сино рабро секои две темиња (единечни квадрати) кои се покриени со исто домино во почетната конфигурација, и додаваме по едно црвено ребро меѓу секои две темиња (единечни квадрати) кои се покриени со исто домино во новата конфигурација. Да забележиме дека и синиот граф $G_S = (V,E')$ и црвениот граф $G_C = (V,E'')$ се 1-регуларни, т.е. во секој од нив степенот на секое теме е 1. Земаме симетрична разлика на двата графа, односно го разгледуваме графот $G = (V, E'\Delta E'')$, при што ги игнорираме боите на ребрата. Бидејќи $E' \neq E''$, графот G не е празен, т.е. множеството ребра е $E'\Delta E'' \neq \varnothing$. Секое изолирано теме v во G има степен 2, бидејќи v е инцидентно со едно црвено и едно сино ребро. Оттука заклучуваме:

i) секое црно теме (единечен квадрат) е изолирано во G,

ii) $E'\Delta E''$ е дисјунктна унија од циклуси,

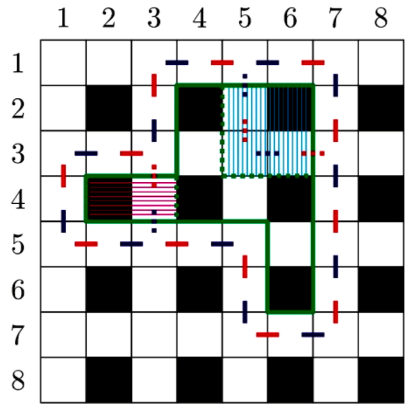
iii) секој таков циклус C има парна должина и неговите ребра последователно се обоени во различни бои (црвена и сина).



Да разгледаме произволен ваков циклус C во G. Тој претставува затворена искршена линија без самопресекување. Да ја разгледаме севкупноста од сите единечни квадрати кои целосно се содржани внатре во C, која ќе ја наречеме внатрешност на C и ќе ја означиме со $\mathrm{Int}(C)$.

Да забележиме дека при двете конфигурации површината на $\mathrm{Int}(C)$ е целосно покриена со домина кои не излегуваат надвор од неа, бидејќи $\mathrm{Int}(C)$ е изолирана од остатокот од таблата. Притоа $\mathrm{Int}(C)$ е непразна: имено мора да содржи барем едно црно единечно квадратче (бидејќи секој 2×2 квадрат на таблата содржи точно едно црно квадратче. Од истите причини секое ќоше (аголно единечно квадратче) од $\mathrm{Int}(C)$ е црно. Ќе докажеме дека не е можно површината на $\mathrm{Int}(C)$ да се покрие со домина кои не излегуваат надвор од неа. Имено, ќе го докажеме следново тврдење:

Плоштината на $\mathrm{Int}(C)$ *е непарна.*



Тврдењето ќе го докажеме со индукција по b, бројот на единечни црни квадратчиња содржани во $\mathrm{Int}(C)$. Јасно, тврдењето важи за $b=1$, бидејќи тогаш целата плоштина е еднаква на 1. Нека $b>1$ и да претпоставиме дека тврдењето важи за сите помали вредности од b. Ќошињата на $\mathrm{Int}(C)$ се црни и можеме да заобиколиме (изоставиме) едно од нив, со што ја намалуваме плоштината за 2 (ако црното квадратче е на ќош во двете насоки – на цртежот шрафирано со хоризонтални линии) или за 4 (ако црното квадратче е на ќош во една насока – на цртежот шрафирано со вертикални линии). Така парноста на плоштината останува непроменета, а вредноста на b се намалува за 1. Сега тврдењето следува од индуклтивната претпоставка.

Со ова докажавме дека $n \leq 1011^2$.

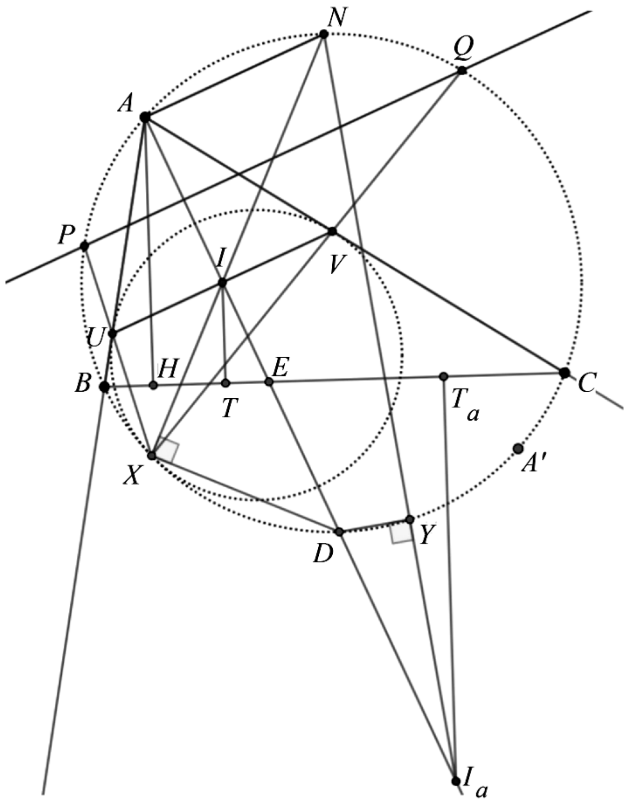
Претходно видовме дека $n \geq 1011^2$, па значи одговорот на задачата е $n = 1011^2$.

5. Даден е остроаголен триаголник $ABC\ (\overline{AB}<\overline{BC})$ со опишана кружница Γ. Нека I и I_a се центрите на впишаната и $A-$припишаната кружница, соодветно. Правата AI по втор пат ја сече Γ во D, а точката A' е дијаметрално спротивна на A во однос на Γ. Точките X и Y припаѓаат на Γ и се такви што $\measuredangle IXD=\measuredangle I_aYD=90^\circ$. Тангентите на Γ во X и Y се сечат во Z. Докажи дека точките A',D,Z се колинеарни.

Решение. *Прв начин*. Тврдењето ќе го докажеме во неколку чекори.

Чекор 1. Правите IX и I_aY се сечат на Γ.

Доказ. Нека N е средината на лакот BC што ја содржи A. Тогаш ND е дијаметар на Γ, па затоа $\measuredangle NXD=90^\circ$. Правите IX и NX се нормални на DX, па затоа IX минува низ N. Слично, $\measuredangle NYD=90^\circ$, т.е. $NY\perp YD$, што значи дека I_aY минува низ N. Конечно, IX и I_aY се сечат на Γ во точката N.



Чекор 2. Нека P и Q се средините на помалите лакови AB и AC. Нека правите PX и QX ги сечат правите AB и AC во точките U и V, соодветно. Тогаш опишаната кружница ω_1 околу $\triangle UXV$ е тангентна на AB, AC и Γ.

Доказ. Од теоремата на Паскал применета на шестаголникот $BACPXQ$ следува дека точките $BA \cap PX = U$, $AC \cap XQ = V$ и $CP \cap BQ = I$ се колинеарни, што значи дека I припаѓа на правата UV. Повторно, од теоремата на Паскал применета на шестаголникот $NABQPX$ следува дека точките $NA \cap PQ$, $AB \cap PX = U$ и $BQ \cap NX = I$ се колинеарни. Но, познато е дека $AN \| PQ$ (Докажи!). Тоа значи дека правите AN и PQ се сечат во бесконечна точка, па затоа правата IU е паралелна со правите AN и PQ.

Да воочиме дека $\measuredangle DAN = 90^\circ$, бидејќи DN е дијаметар, добиваме $AN \perp AI$. Оттука следува дека PQ и UV се нормални на AI.

Бидејќи $PQ \| UV$, постои хомотетија H со центар во X таква што $H(P) = U$ и $H(Q) = V$. Тангентата t_P на Γ во P е паралелна со AB заради симетрија, па затоа $H(t_P) = AB$. Слично, тангентата t_Q на Γ во Q е паралелна со AC, па затоа $H(t_Q) = AC$.

Од претходната дискусија заклучуваме дека $H(\Gamma) = (UXV)$ и (UXV) ги допира правите AB и AC. Фактот дека (UXV) ја допира Γ следува од $H(\Gamma) = (UXV)$.

Чекор 3. Нека ω_2 е тангентната кружница на AB и AC што ја допира Γ од надворешната страна. Тогаш ω_2 и Γ се допираат во Y.

Доказ. Доказот е аналоген со доказот од чекор 2, заради дуалноста меѓу впишаната и $A-$припишаната кружница.

Чекор 4. Четириаголникот $XDYA'$ е хармониски.

Доказ. Нека Ψ е композицијата на инверзијата со центар A и радиус $r = \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}$ со симетријата во однос на симетралата на аголот $\measuredangle BAC$. Јасно, $\Psi \circ \Psi$ е идентичното пресликување.

Нека H, T, T_a се нормалните проекции на A, I, I_a врз правата BC, соодветно. Нека E е пресечната точка на AD и BC. Имаме BI и BI_a се внатрешна и надворешна симетрала на $\measuredangle ABE$, па затоа двојниот однос $(A, E; I, I_a)$ е еднаков на -1, т.е. овие точки формираат хармониска четворка.

При ортогонална проекција се запазува двојниот однос, па затоа $(H,E;T,T_a)=-1$. Ако се искористи дека инверзијата и осната симетрија го запазуваат двојниот однос, доволно е да докажеме дека $\Psi(H)=A'$, $\Psi(E)=D$, $\Psi(T_a)=X$ и $\Psi(T)=Y$. Последното повлекува дека четириаголникот $A'DXY$ е хармониски (Ψ го запазува двојниот однос).
Лесно се гледа дека $\Psi(B)=C$ и $\Psi(C)=B$, па затоа $\Psi(BC)=\Gamma$. Исто така $E\in AD\cap BC$ повлекува $\Psi(E)\in\Psi(AD)\cap\Psi(BC)=AD\cap\Gamma$, што значи $\Psi(E)=D$.

Да забележиме дека $\triangle ABH\sim\triangle AA'C$, што значи $\overline{AH}\cdot\overline{AA'}=\overline{AB}\cdot\overline{AC}=r^2$ и $\measuredangle BAH=\measuredangle CAA'$, па е $\Psi(H)=A'$.

Сега ќе докажеме дека $\Psi(T_a)=X$. Бидејќи впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира правите AB,AC и BC, Ψ ја пресликува во кружницата што ги допира AB,AC и $\Gamma=\Psi(BC)$. Тоа значи дека $A-$припишаната кружница се пресликува или во ω_1 или во ω_2 (дефинирани во чекорите 2 и 3). Лесно се гледа дека $A-$припишаната кружница се пресликува во ω_1. Тоа значи дека $\Psi(T_a)$ истовремено лежи на ω_1 и на Γ, па затоа $\Psi(T_a)=X$. Слично се добива дека $\Psi(T)=Y$, бидејќи впишаната кружница се пресликува во ω_2.

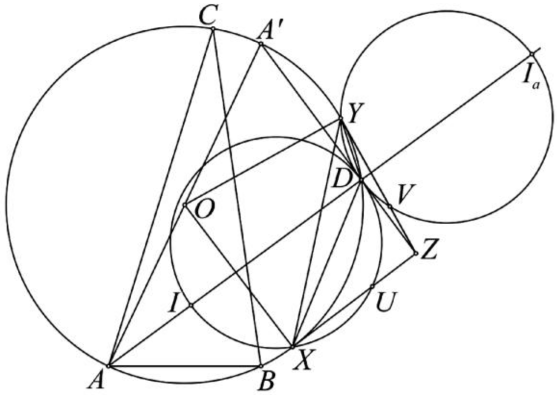
Докажавме дека $XDYA'$ е хармониски четириаголник. Како што знаеме тангентите на опишаната кружница на хармониски четириаголник повлечени во две спротивни темиња се сечат на дијагоналата која минува низ другите две темиња. Според тоа, тангентите на G во X и Y се сечат на правата $A'D$, што и требаше да се докаже.

Втор начин. Прво да забележиме дека AA' е дијаметар на опишаната кружница и оттука $\measuredangle ADA'=90^\circ$. Имаме

$$2\measuredangle DBI+\measuredangle BDA=2\measuredangle DBC+2\measuredangle CBI+\measuredangle BCA=180^\circ,$$

што повлекува дека $\triangle BDI$ е рамнокрак. Исто така, $\measuredangle IBI_a=90^\circ$, што значи дека D е средина на II_a, па затоа $\overline{DI}=\overline{DI_a}$.

Точките X и Y припаѓаат на кружниците k_1 со дијаметар ID и k_2 со дијаметар DI_a, соодветно., т.е. овие точки се вторите пресечни точки на k_1 и k_2 со опишаната кружница на триаголникот ABC (D е првиот пресек). Сега, користејќи дека $\measuredangle ADA'=90^\circ$, заклучуваме дека $A'D$ е заедничка тангента на k_1 и k_2.



Нека U и V се пресечните точки на k_1 со XZ и k_2 со YZ, соодветно. Имаме, $\triangle XUD \sim \triangle A'DX$ ($\measuredangle UXD = \measuredangle DA'X$ и $\measuredangle XUD = \measuredangle A'DX$), па затоа $\frac{\overline{XU}}{\overline{DX}} = \frac{\overline{A'D}}{\overline{XA'}}$ и $\triangle YVD \sim \triangle A'DY$ ($\measuredangle VYD = \measuredangle DA'Y$ и $\measuredangle YVD = \measuredangle A'DY$), па затоа $\frac{\overline{YV}}{\overline{DY}} = \frac{\overline{A'D}}{\overline{YA'}}$. Од последните две равенства следува

$$\begin{aligned}\frac{\overline{XU}}{\overline{YV}} &= \frac{\overline{DX}}{\overline{DY}} \cdot \frac{\overline{A'D}}{\overline{XA'}} \cdot \frac{\overline{YA'}}{\overline{A'D}} = \frac{\overline{DX}}{\overline{DY}} \cdot \frac{\overline{YA'}}{\overline{XA'}} = \frac{\overline{DX}}{\overline{DY}} \cdot \frac{\sin\measuredangle YDA}{\sin\measuredangle XDA} \\ &= \frac{\overline{DX}}{\overline{DY}} \cdot \frac{\sin\measuredangle YVD}{\sin\measuredangle XUD} = \frac{\overline{DX}}{\sin\measuredangle XUD} \cdot \frac{\sin\measuredangle YVD}{\overline{DY}} = \frac{\overline{DI}}{\overline{DI_a}} = 1,\end{aligned}$$

па затоа $\overline{XU} = \overline{YV}$. Сега, за степенот на Z во однос на k_1 и k_2 имаме:

$$\overline{ZX} \cdot \overline{ZY} = \overline{ZX} \cdot (\overline{ZX} - \overline{UX}) = \overline{ZY} \cdot (\overline{ZY} - \overline{VY}) = \overline{ZY} \cdot \overline{ZV}.$$

Оттука следува дека Z лежи на радикалната оска на кружниците k_1 и k_2, па затоа $ZD \perp II_a$, што заедно со $\measuredangle ADA' = 90^\circ$ повлекува дека Z, D и A' се колинеарни.