XXXVII РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VI одделение

1. Цената на една математичка книга во книжарницата А на почетокот од месец јануари 2012 година била повисока од цената на истата книга во книжарницата Б. На 15 февруари 2012 година цената на книгата во книжарницата А се намалила за 30%, а цената на истата книга во книжарницата Б се зголемила за 30%. Потоа на 15 март 2012 година, цената на книгата во книжарницата А се зголемила за 30%, а цената на книгата во книжарницата Б се намалила за 30%. Разликата во цените на книгата после промените на 15 март 2012 година била 273 денари. За колку била цената на математичката книга во книжарницата А повисока од цената на истата книга во книжарницата Б на почетокот од месец јануари 2012 година?

Решение. Нека цената на книгата во книжарницата А на почетокот од месец јануари 2012 година била x, а цената на истата книга во книжарницата Б била y. Ако цената z се намали за 30%, новата цена ќе биде $z-30\%z=z-0,3z=0,7z$, додека ако цената z се зголеми за 30%, новата цена ќе биде $z+30\%z=1,3z$.

	1 јануари	15 февруари	15 март
книжарница А	x	$0,7\cdot x$	$1,3\cdot 0,7\cdot x=0,91\cdot x$
книжарница Б	y	$1,3\cdot y$	$0,7\cdot 1,3\cdot x=0,91\cdot x$

Дадено е дека $x>y$, и затоа

$$0,91x-0,91y=0,91(x-y)=273$$

$$x-y=\frac{273}{0,91}=300.$$

Цената на математичката книга во книжарницата А, на почетокот од месец јануари 2012 година, била повисока од цената на истата книга во книжарницата Б за 300 денари.

2. Никола замислил три различни цифри различни од нула. Мартин ги запишал сите двоцифрени броеви користејќи ги тие цифри. Збирот на сите броеви кои ги запишал Мартин е еднаков на 231. Кои цифри ги замислил Никола?

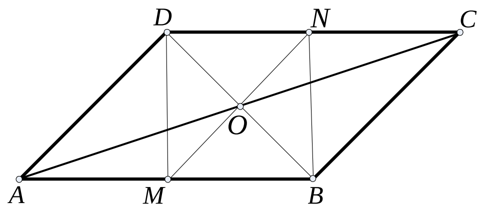
Решение. Нека a, b и c се трите цифри кои ги замислил Никола. Од тие три цифри можат да се запишат девет двоцифрени броеви: $\overline{aa}$, $\overline{bb}$, $\overline{cc}$, $\overline{ab}$, $\overline{ba}$, $\overline{bc}$, $\overline{cb}$, $\overline{ac}$, $\overline{ca}$. Нивниот збир е:

$$\begin{aligned}231 &= (10a+a)+(10b+b)+(10c+c)+(10a+b)+(10b+a)+\\ &\quad +(10b+c)+(10c+b)+(10a+c)+(10c+a)\\ &= 33a+33b+33c\\ &= 33(a+b+c)\end{aligned}$$

Оттука, $a+b+c=7$. Имајќи во предвид дека цифрите a, b и c се различни, цифрите кои ги замислил Никола се 1, 2, 4, бидејќи други можности нема.

3. Нека $ABCD$ е паралелограм таков што $AB > BC$. Правата p која го содржи пресекот на дијагоналите O и е нормална на дијагоналата BD, ја сече страната AB во точка M и страната CD во точка N. Докажи дека четириаголникот $MBND$ е ромб.

Решение. Триаголникот $\triangle MBO \cong \triangle NDO$ ($\measuredangle OBM = \measuredangle ODN$, како агли со паралелни краци, точката O е средина на дијагоналите, па $\overline{OB} = \overline{OD}$ и $\measuredangle BOM = \measuredangle DON = 90^\circ$).



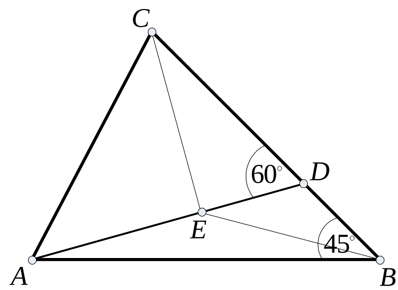
Следува $\overline{MB} = \overline{ND}$. Бидејќи овие страни се и паралелни следува четириаголникот $MBND$ е паралелограм. Неговите дијагонали се заемно нормални, па $MBND$ е ромб.

4. Дедо Стамен од својот овоштарник набрал 258 килограми круши и заминал на пазар. Тој ден еден дел од нив продал. Ако продадел уште 15 кг. би му останале уште шестина од вкупната количина круши. Притоа, $\frac{3}{8}$ од продадените круши и уште 5 кг. ги продал претпладне по цена 30 ден/кг. Попладне ја зголемил цената, и добил $1\frac{5}{8}$ пати повеќе пари одколку од крушите што ги продал претпладне. По која цена дедо Стамен ги продал крушите попладне?

Решение. Дедо Стамен тој ден продал $\frac{5}{6}258-15=200$ кг. круши. Претпладнето продал $\frac{3}{8}\cdot 200+5=80$ кг. круши и заработил

$80\cdot 30=2400$ денари. Попладнето продал $200-80=120$ кг. круши и за нив добил $2400\cdot 1\frac{5}{8}=2400\cdot\frac{13}{8}=3900$ денари. Тоа значи дека попладнето крушите ги продавал по цена од $3900:120=32,5$ денари.

5. Нека D е точка на страната $\overline{BC}$ од триаголникот $\triangle ABC$, таква што $\overline{DC}=\ 2\overline{BD}$. Да се одредат аглите на триаголникот ако $\measuredangle ABC=45^\circ$ и $\measuredangle ADC=60^\circ$.



Решение. Од услов имаме $\overline{DC}=2\overline{BD}$, $\measuredangle ABC=45^\circ$, $\measuredangle ADC=60^\circ$. Нека E е точка на $\overline{AD}$ таква што $\overline{CE}\perp\overline{AD}$. Јасно $\measuredangle ECD=90^\circ-60^\circ=30^\circ$, па добиваме дека $\overline{DC}=2\overline{DE}$, т.е $2\overline{DE}=2\overline{BD}$ од каде $\overline{DE}=\overline{BD}$.
Понатаму е

$$\measuredangle BDE=180^\circ-\measuredangle CDE=180^\circ-60^\circ=120^\circ$$

и бидејќи $\overline{DE}=\overline{BD}$ добиваме дека $\measuredangle DBE=\measuredangle DEB=30^\circ$.
Значи,

$$\measuredangle EBC=\measuredangle ECB=30^\circ \text{ т.е } \overline{EC}=\overline{EB}. \tag{1}$$

Сега

$$\measuredangle EBA=\measuredangle CBA-\measuredangle EBC=45^\circ-30^\circ=15^\circ \text{ и } \measuredangle BEA=180^\circ-30^\circ=150^\circ$$

па следува дека $\measuredangle EAB=15^\circ$ т.е $\triangle EAB$ е рамнокрак т.е

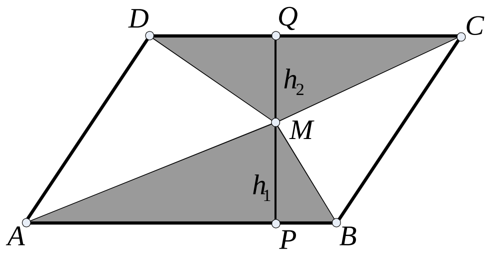
$$\overline{BE}=\overline{AE}. \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува дека $\overline{AE}=\overline{EC}$, т.е $\measuredangle ECA=\measuredangle EAC=45^\circ$.

Сега лесно се добива дека $\measuredangle BAC=60^\circ, \measuredangle CBA=45^\circ, \measuredangle BCA=75^\circ$.

VII одделение

1. Во внатрешноста на паралелограмот $ABCD$ е избрана произволна точка M. Докажи дека збирот на плоштините на триаголниците $\triangle ABM$ и $\triangle CDM$ е еднаков на збирот на плоштините на траиголниците $\triangle BCM$ и $\triangle DAM$.



Решение. Нека $h_1 = \overline{MP}$ е висината на $\triangle ABM$ и $P_1 = P_{\triangle ABM}$. Нека $h_2 = \overline{MQ}$ е висината на $\triangle CDM$ и $P_2 = P_{\triangle CDM}$. Доволно е да се докаже дека

$$P_1 + P_2 = \tfrac{1}{2} P,$$

каде P е плоштината на дадениот паралелограм. Точките P, M и Q се колинеарни. Ако h е висина на паралелограмот тогаш јасно е дека

$$h = \overline{PQ} = \overline{PM} + \overline{MQ} = h_1 + h_2$$

па според тоа

$$P_1 + P_2 = \tfrac{1}{2} a h_1 + \tfrac{1}{2} a h_2 = \tfrac{1}{2} a(h_1 + h_2) = \tfrac{1}{2} a h = \tfrac{1}{2} P.$$

2. Нека a, b и c се природни броеви такви што $\frac{a+b}{b+c} = \frac{b+c}{c+a} = \frac{c+a}{a+b}$. Докажи дека $a = b = c$!

Решение. *Прв начин.* Ако дадените дропки се еднакви, тогаш и дропката, чиј именител е збирот од именителите, а броител збирот од броителите на трите дропки, е еднаква на нив, т.е.

$$\frac{a+b}{b+c} = \frac{b+c}{c+a} = \frac{c+a}{a+b} = \frac{a+b+b+c+c+a}{b+c+c+a+a+b} = 1.$$

Од $1 = \frac{a+b}{b+c}$ следува $a = c$. Од $1 = \frac{c+a}{a+b}$ следува дека $b = a$. Значи $a = b = c$.

Втор начин. Нека $\frac{a+b}{b+c} = \frac{b+c}{c+a} = \frac{c+a}{a+b} = k$. Тогаш

$$a + b = k(b + c),\ b + c = k(c + a),\ c + a = k(a + b),$$

од каде

$$a + b = k(b + c) = k^2(c + a) = k^3(a + b),$$

односно $k^3 = 1$ т.е. $k = 1$. Од $1 = \frac{a+b}{b+c}$ следува $a = c$. Од $1 = \frac{c+a}{a+b}$ следува дека $b = a$.

Трет начин. Од $\frac{a+b}{b+c} = \frac{b+c}{c+a}$ имаме

$$ac + a^2 + ab = b^2 + bc + c^2. \tag{1}$$

Од $\frac{b+c}{c+a} = \frac{c+a}{a+b}$ имаме

$$ab + b^2 + bc = a^2 + ac + c^2 \tag{2}$$

Ако од (2) го одземеме (1) добиваме $b^2+bc-a^2-ac=a^2+ac-b^2-bc$ или $2(b^2-a^2+bc-ac)=0$ односно $(b-a)(b+a)+c(b-a)=0$, т.е.

$$(b-a)(a+b+c)=0.$$

Бидејќи $a+b+c\neq 0$ следува дека $b=a$. Аналогно од $\frac{b+c}{c+a}=\frac{c+a}{a+b}$ имаме $b=c$.

3. Еден наставник и неговите ученици тргнале со автобус на Републички натпревар по математика. Од 52-те седишта во автобусот тие седнале на седишта чии броеви се последователни природни броеви такви што нивниот збир е 54. Колку ученици носел наставникот со себе ако само еден од броевите на седиштата на кои што седеле е прост број?

Решение. *Прв начин.* Во автобусот има седишта со редни броеви од 1 до 52. Меѓу нив прости се броевите: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 и 47. Од овие броеви треба да најдеме еден кој собран со свои претходници и следбеници да дава збир 54. Со броевите 2, 3, 5, 7, 11, 23, 29, 31, 37, 41, 43 и 47 ова не може да се случи бидејќи збирот е или помал или поголем од 54. Од останатите три прости броеви 13, 17, 19, може да се добие 54 на следниве два начини: 12+13+14+15 или 17+18+19 но во вториот збир има два прости броја. Значи седиштата биле со редни броеви 12, 13, 14 и 15 што значи дека наставникот носел тројца ученици.

Втор начин. Нека се $k+1, k+2, \ldots, n$ броевите на седиштата на кои седеле наставникот и учениците, $k\in\mathbb{N}_0, n\in\mathbb{N}$ и $n-k>1$. Бидејќи збирот на овие броеви е 54, имаме

$$\frac{n(n+1)}{2}-\frac{k(k+1)}{2}=54$$
$$n^2+n-k^2-k=108$$
$$(n-k)(n+k)+(n-k)=108$$
$$(n-k)(n+k+1)=108$$

Бројот 108 се разложува на множители

$$108=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3,\quad n-k>1,\quad n+k+1>n-k,$$

па ги имаме следниве случаи:

прв: $n+k+1=54,\quad n-k=2$

втор: $n+k+1=36,\quad n-k=3\qquad n=19, k=16$

трет: $n+k+1=27,\quad n-k=4\qquad n=15, k=11$

четврти: $n+k+1=18, \quad n-k=6$

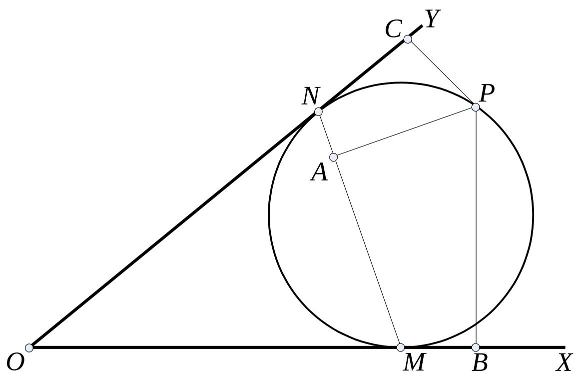
петти: $n+k+1=12, \quad n-k=9 \qquad n=10, k=1$

Од сите случаи во вториот и петтиот случај има повеќе прости броеви па останува третиот случај според кој редните броеви на седиштата во автобусот биле: 12, 13, 14 и 15, што значи дека наставникот носел тројца ученици.

4. Кружница k е впишана во остар агол $\measuredangle XOY$, при што k ги допира краците OX и OY во точките M и N соодветно. На поголемиот лак на кружницата k е избрана произволна точка P и од неа се спуштени нормалите кон краците на аголот и отсечката MN, $PB \perp OX$, $PC \perp OY$, $PA \perp MN$, при што $A \in MN$, $B \in OX$, $C \in OY$. Докажи дека

$$\overline{PA}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{PC}.$$

Решение. Аглите $\measuredangle MBP = \measuredangle MAP = 90^\circ$, па четириаголникот $AMBP$ е тетивен (точките A, M, B, P лежат на кружницата со дијаметар MP). Затоа $\measuredangle ABP = \measuredangle AMP$ како периферни над AP. Слично, $\measuredangle NAP = \measuredangle NCP = 90^\circ$, па четириаголникот $ANCP$ е тетивен (точките A, N, C, P лежат на на кружницата со дијаметар NP). Затоа $\measuredangle PAC = \measuredangle PNC$ како периферни над CP. Но, исполнето е равенството $\measuredangle PMC = \measuredangle PNC$, како агол кој го зафаќа тетивата PN со тангентата CN и периферниот агол над тетивата. Затоа е исполнето



$$\measuredangle ABP = \measuredangle AMP = \measuredangle NMP = \measuredangle PNC = \measuredangle PAC,$$

т.е. $\measuredangle ABP = \measuredangle CAP$. Слично се покажува дека $\measuredangle BAP = \measuredangle ACP$. Од последните две равенства, $\triangle BPA \sim \triangle APC$. Спорд тоа односот

$$\overline{PA} : \overline{PC} = \overline{PB} : \overline{PA}, \text{ т.е. } \overline{PA}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{PC}.$$

5. На табла се запишани пет цели броеви. Собирајќи ги по парови добиени се следните збирови: $0; 2; 4; 4; 6; 8; 9; 11; 13; 15$. Одреди ги целите броеви!

Дали може, тргнувајќи од пет цели броеви и собирајќи ги по парови да се добијат следните збирови: $12;13;14;15;16;16;17;17;18;20$?

Решение. Да забележиме дека меѓу петте цели броеви нема два еднакви броја, затоа што, во спротивно, ќе имаме повеќе од два пара еднакви збирови. Значи, бараните цели броеви се различни меѓу себе.

Ако ги собереме првите дадени збирови се добива

$$0+2+4+4+6+8+9+11+13+15=72.$$

Од условот на задачата имаме дека секој цел број од петте запишани на табла во овој збир учествува точно четири пати, па збирот на петте цели броеви е еднаков на $72:4=18$.

Да ги означиме петте цели броеви со a,b,c,d,e и притоа

$$a<b<c<d<e.$$

Од дадените збирови имаме дека најмалиот збир е 0, најголемиот збир е 15, а збирот на петте цели броеви е 18, па мора

$$c=18-(a+b)-(d+e)=18-0-15=3 \text{ т.е. } a<b<3<d<e.$$

Според вредностите на дадените збирови, вториот по ред збир е добиен од првиот и третиот цел број т.е. $a+c=2$, па $a=2-3=-1$. Бидејќи збирот на првите два цели броја е еднаков на 0, следува дека вториот цел број е еднаков на 1 т.е. $b=0-(-1)=1$. Аналогно, претпоследниот по ред збир е добиен од третиот и последниот цел број, т.е. $c+e=13$, па затоа $e=13-3=10$. Конечно од последниот збир добиваме дека $d=15-10=5$. Значи бараните броеви се: $-1;1;3;5;10$.

Ако, пак, ги собереме вторите дадени збирови се добива

$$12+13+14+15+16+16+17+17+18+20=158.$$

Но бројот 158 не е делив со 4 па такви цели броеви не постојат.

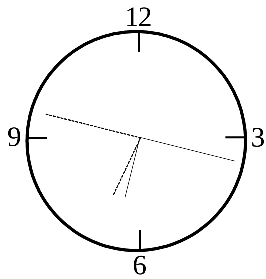
VIII одделение

1. Еден човек влегувајќи во берберница, по 6 часот наутро, забележал дека стрелките на часовникот зафаќаат агол од $90°$, а при излегува-њето, нешто пред 7 часот, забележал дека стрелките зафаќаат агол од $75°$. Колку време човекот се задржал во берберницата?

Решение. Нека часовната стрелка за тоа време изминала x степени; тогаш минутната стрелка минала од една страна $12x$ степени, а од другата страна

$$90°+x+75°.$$

Значи



$$165^\circ + x = 12x \Rightarrow x = 15^\circ$$

т.е. минутната стрелка со своето движење направила агол од

$$165^\circ + 15^\circ = 180^\circ .$$

Бидејќи секои 6° чинат една минута добиваме дека човекот се задржал 30 минути во берберницата.

2. Да се реши во множеството прости броеви равенката

$$3p^2 + 3p = 166 + q .$$

Решение. *Прв начин.* Имаме $3p^2 + 3p = 166 + q$ т.е $3p(p+1) = 166 + q$. Јасно $p(p+1)$ е парен број т.е $2|p(p+1)$ и бидејќи $2|166$ следува $2|q$.
Но од условот q е прост, па добиваме дека $q = 2$. Сега лесно се добива $p(p+1) = 56$, од каде $p = 7$.

Втор начин. Имаме $3p^2 + 3p = 166 + q$ т.е $3p(p+1) = 166 + q$. Јасно $p(p+1)$ е парен број т.е $2|p(p+1)$ и бидејќи $2|166$ следува $2|q$.
Но од условот q е прост, па добиваме дека $q = 2$.Сега лесно се добива $p(p+1) = 56$, од каде $p = 7$.

3. Дадени се 12 летви секоја со дожина $13\,\mathrm{dm}$. Секоја летва е поделена на неколку парчиња, од кои што се направени 13 триаголници. Секој од нив е направен од парчиња со должини $3\mathrm{dm}, 4\mathrm{dm}$ и $5\mathrm{dm}$.
На кој начин треба да се исечат 12 -те летви?
Решение. Периметарот на секој од триаголниците е

$$3\mathrm{dm} + 4\mathrm{dm} + 5\mathrm{dm} = 12\,\mathrm{dm} .$$

Збирот на сите периметри е $13 \cdot 12\mathrm{dm} = 156\,\mathrm{dm}$, т.е. еднаков на збирот на должините на сите стапчиња. Значи, сите стапчиња се иссечени така што секое делче кое е добиено е искористено.
Бројот 13 може да се запише како збир од 3-ки, 4-ки и 5-ки на следниве три начини

I начин:	$13 = 3+3+3+4$	(x-стапчиња)
II начин:	$13 = 4+4+5$	(y-стапчиња)
III начин:	$13 = 3+5+5$	(z-стапчиња)

Нека x-стапчиња се исечени на првиот начин, y-стапчиња се пресечени на вториот начин и z-стапчиња се пресечени на третиот начин.
Сега се добиваат равенствата

$x+y+z=12$, затоа што бројот на стапчиња е 12

$3x+z=13$, има 13 дела со должина 3 cm

$x+2y=13$, има 13 дела со должина 4 cm

$y+2z=13$, има 13 дела со должина 5 cm.

Веќе не е тешко да се определат вредностите за x, y и z. Навистина,

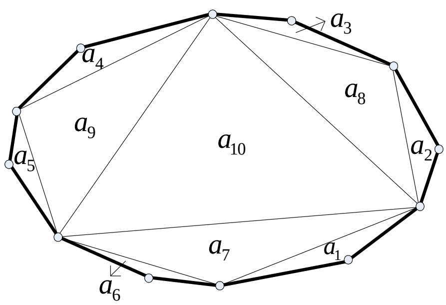
$$x=13-2y$$
$$z=13-3x=13-3(13-2y)=6y-26,$$

од каде добиваме

$$13-2y+y+6y-26=12$$
$$5y-13=12.$$

Значи, $y=5$ стапчиња треба да се исечат на делови $4\text{ dm}, 4\text{ dm}, 5\text{ dm}$, $x=3$ стапчиња треба да се исечат на четири дела со должини $3\text{ dm}, 3\text{ dm}, 3\text{ dm}, 4\text{ dm}$ и $z=4$ стапчиња треба да се исечат на три дела со должини $3\text{ dm}, 5\text{ dm}, 5\text{ dm}$.

4. Дали може внатрешноста на конвексен дванаесетаголник да биде поделена на десет триаголници, со повлекување на некои негови дијагонали, така што никои два немаат заедничка внатрешност, четири од таквите делбени триаголници се *заградени* триаголници и притоа важи следниот услов: Ако во секој триаголник е запишан реален број различен од нула и притоа бројот во секој *заграден* триаголникот е производ од броевите запишани во триаголниците конструирани над неговите три страни тогаш производот на сите запишани броеви во дванаесетаголникот е константен ?



(За еден триаголник велиме дека е *заграден* ако над секоја негова страна има конструирано нов триаголник)

Решение. Поделбата на дванаесетаголникот е единствена и е дадена на цртежот. Нека $a_1, a_2, ..., a_{10}$ се ненулти реални броеви запишани во делбените триаголниците. Од условот на задачата имаме

$$a_7 = a_1 \cdot a_6 \cdot a_{10}, a_8 = a_2 \cdot a_3 \cdot a_{10}, a_9 = a_4 \cdot a_5 \cdot a_{10} \text{ и } a_{10} = a_7 \cdot a_8 \cdot a_9$$

Оттука добиваме,

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_7 \cdot a_8 \cdot a_9 \\ &= (a_1 \cdot a_6 \cdot a_{10}) \cdot (a_2 \cdot a_3 \cdot a_{10}) \cdot (a_4 \cdot a_5 \cdot a_{10}) \\ &= a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_{10}^3 \end{aligned}$$

т.е.

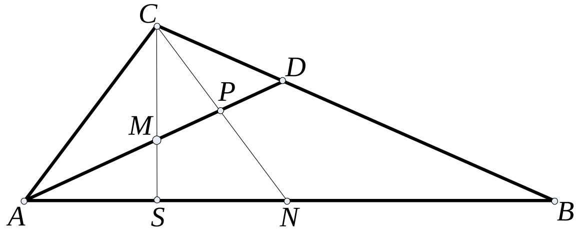
$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_{10}^2 = 1 \qquad (1)$$

Користејќи го (1) за производот на сите запишани броеви добиваме ,

$$\begin{aligned} & a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 \cdot a_9 \cdot a_{10} = \\ & = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot (a_1 \cdot a_6 \cdot a_{10}) \cdot (a_2 \cdot a_3 \cdot a_{10}) \cdot (a_4 \cdot a_5 \cdot a_{10}) \cdot a_{10} \\ & = a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot a_3^2 \cdot a_4^2 \cdot a_5^2 \cdot a_6^2 \cdot a_{10}^4 \\ & = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_{10}^2)^2 = 1 \end{aligned}$$

Значи производот на сите запишани броеви е константен и изнесува 1.

5. Даден е триаголник ABC. Симетралата на аголот при темето A ја сече страната BC во точка D, и притоа важи $\overline{BD} = 2 \cdot \overline{DC}$. Висината спуштена од темето C ја сече симетралата во точка M. Докажи дека $\overline{CM} = \frac{t_c^2}{2h_c}$, каде t_c е должината на тежишната линија, а h_c е должината на висината, спуштени од темето C.



Решение . Бидејќи AD е симетрала на аголот во теме A следува дека

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = 2,$$

односно $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AC}$. Нека N е средишна точка на страната AB , P е пресечна точка на симетралата AD и тежишната линија CN, и S е подножна точка на висината спуштена од темето C кон страната AB.

Тогаш јасно е дека

$$\overline{AN}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{AC},$$

односно триаголникот ANC е рамнокрак . Од очигледната складност на триаголниците ANP и ACP следува дека

$$\overline{CP}=\overline{PN}=\frac{t_c}{2} \text{ и } \measuredangle APC=90^\circ .$$

Правоаголните триаголници CPM и CSN се слични бидејќи имаат заеднички агол во темето C. Од сличноста следува $\frac{\overline{CN}}{\overline{CS}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{CP}}$, односно $\frac{t_c}{h_c}=\frac{\overline{CM}}{\frac{t_c}{2}}$. Оттука добиваме дека $\overline{CM}=\frac{t_c^2}{2h_c}$, што требаше да се докаже.