Групе у математици и ван ње

Филип Живановић, **Београд**

1. Историјат

Појам групе је један од фундаменталних појмова у математици. Користи се практично у свим областима математике, у алгебри нарочито. Сам термин „група" први је употребио брилијантан француски математичар Еварист Галуа, који се бавио овим структурама и њиховом везом са решавањем алгебарских једначина. Из његових радова (1830-тих) је проистекла читава област математике која данас носи назив Теорија Галуа, у част великог ума који је нажалост погинуо јако млад, у 20. години. Његове идеје су касније наставили Августин-Луј Коши и Артур Кејли, креирајући теорију група пермутација. Касније, групе налазе своју примену и у геометрији. Наиме, схватајући еуклидску геометрију као геометрију у којој су фундаментални појмови инваријанте изометријских трансформација, Феликс Клајн је иницирао Ерлангенски програм 1872. према коме би се разне геометрије посматрале кроз њихове групе изометрија. Касније Софус Ли, норвешки математичар, 1884. почиње да користи групе са диференцијалном структуром (данас се по њему оне називају Лијеве групе). Сем у овим областима, групе су најпре имплицитно, а после и експлицитно коришћене у алгебарској теорији бројева.

2. Појам групе

Група је за математичаре било која структура $(G, \bullet)$, при чему је G скуп, а $\bullet$ извесна бинарна операција на њему, која има „довољно лепе" особине. Наш следећи циљ је да овај епитет објаснимо и математички. Пре свега, бинарна операција $\bullet$ на скупу G је функција која уређеном пару елемента из G додељује трећи, такође из G, то јест $\bullet : G \times G \to G$. Да би $(G, \bullet)$ била група неопходно је да:

1) операција $\bullet$ задовољава *закон асоцијативности*: $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$, за све a, b, c из G;
2) операција $\bullet$ има *неутрал*, тј. постоји елемент e из скупа G такав да је $e \bullet g = g \bullet e = g$, за било који елемент g из G.
3) сваки елемент g из G има *инверз*, тј. постоји елемент g^{-1} такав да важи $g \bullet g^{-1} = g^{-1} \bullet g = e$.

Ако при томе операција $\bullet$ не разликује ко је са њене леве, а ко са десне стране, тј. ако за све елементе a, b из G важи $a \bullet b = b \bullet a$, онда за групу (и саму операцију $\bullet$) кажемо да је *комутативна*[1].

Читаоцу који се први пут сусреће са групама ова дефиниција може деловати сувише апстрактно, па због тога наводимо неке познате примере са којима се читалац сигурно упознао у досадашњем математичком школовању.

1. Скуп целих бројева $\mathbb{Z}$ заједно са операцијом сабирања $+$ образује једну групу – $(\mathbb{Z}, +)$. Још из основне школе знамо да је сабирање целих бројева асоцијативно, да је

[1] У математичкој литератури се уместо термина комутативна често среће и термин Абелова.

0 неутрал за сабирање, и да је инверз елемента n елемент $-n$. Тако је нпр. инверз од -3 једнак 3.

2. Остављамо читаоцу као задатак да се увери да групу образује и сваки од скупова $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ (рационалних, реалних и комплексних бројева) заједно са одговарајућом операцијом сабирања $+$.

3. Скуп не-нула реалних бројева $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ заједно са операцијом множења $\cdot$ чини групу. Множење реалних бројева је асоцијативно, неутрал је 1, док је инверз елемента r ($r \neq 0$) елемент $\frac{1}{r}$. Такође, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ и $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ су групе.

4. Скуп остатака при дељењу са n ($n > 1$), тј. $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ заједно са сабирањем по модулу n (које се означава са $+_n$ или само са $+$ када се подразумева да је реч о сабирању по модулу n) такође чини групу – $(\mathbb{Z}_n, +)$. За читаоца који се није сусрео са овом групом, у питању је операција изведена од сабирања у $\mathbb{Z}$, при чему се резултат коригује за цео број n-ова, тако да је резултат опет остатак по модулу n, тј. број између 0 и $n-1$. На пример, ако узмемо $n = 9$, тада у групи[2] $\mathbb{Z}_9$ важи:

$$5 + 7 = 12 - 9 = 3, \quad 8 + 5 = 13 - 9 = 4, \quad \text{итд.}$$

Својства 1), 2) и 3) за ову групу следе из одговарајућих својстава дељивости и својстава сабирања целих бројева, па остављамо читаоцу да их испита[3].

Осим наведених група бројева, постоје и разни други примери које ћемо описати у наставку.

3. Групе бијекција

За сваки скуп S, идентичко пресликавање

$$\mathrm{Id}_S : S \to S, \quad \mathrm{Id}_S(x) = x,$$

јесте једна бијекција[4]. Оно сваком елементу додељује њега самог, па отуд и назив. Приметимо још и да ако су пресликавања f и g бијекције, онда је то и њихова композиција. Такође, за сваку бијекцију f постоји инверзно пресликавање f^{-1} (пресликавање „уназад") које је такође бијекција и важи $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_S$. Следи да, ако на скупу $\mathrm{Sym}(S)$ свих бијекција скупа S посматрамо операцију композиције, онда је $(\mathrm{Sym}(S), \circ)$ једна група. Заиста, њен неутрал је Id_S, јер она компонована са било којим пресликавањем даје то исто пресликавање, тј. $\mathrm{Id}_S \circ f = f \circ \mathrm{Id}_S = f$.

3.1. Групе пермутација

Специјално, када је скуп S коначан, група његових бијекција зове се још и *група пермутација*. Наиме, свака бијекција (тј. пермутација) коначног скупа S је својеврсно премештање његових елемената. Ако при томе S има n елемената, можемо их обележити бројевима $1, 2, \ldots, n$. Пермутација скупа од n елемената укупно има

[2] Често ћемо за групе истицати само одговарајући скуп ако је јасно о којој операцији је реч.

[3] Имајући у виду овакво сабирање, интересантно би било играти познату игра картама *Табле* по модулу 14 (или неком другом).

[4] Пресликавање које је 1-1 и на, тј. обострано-једнозначна коресподенција домена и кодомена.

$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$, што је лако видети. Наиме, број 1 може да се слика у било који од бројева из $\{1, 2, \ldots, n\}$, 2 може да се слика у било који од $n - 1$ преосталих (јер је реч о бијекцији), броју 3 преостају $n - 2$ елемента, итд. Кад се све могућности измноже добијамо управо $n!$. Додајмо још и то да се група пермутација скупа од n елемената обележава $\mathbb{S}_n$. Више о групама пермутација, може се наћи у [1].

3.1. Групе изометрија

Посматрајмо сада дводимензионални Еуклидски простор $\mathbb{E}^2$. Још из основне школе су нам познате његове *изометријске трансформације*: коинциденција (идентичко пресликавање $\mathrm{Id}_{\mathbb{E}^2}$ или краће Id), осна рефлексија, ротација, централна симетрија (ротација за 180°), транслација и клизајућа рефлексија. Све оне су пресликавања I скупа $\mathbb{E}^2$ у себе која, осим што су бијекције, имају и својство да *чувају растојања* између тачака. У овом контексту то значи да је свака дуж AB подударна са својом сликом $I(A)I(B)$, тј. са дужи чије су крајње тачке $I(A)$ и $I(B)$. Доказује се да важи и супротно, тј. да једина пресликавања равни која чувају растојања између тачака јесу горе наведена[5]. Није тешко закључити да све изометрије равни заједно са композицијом чине једну групу:

1. композиција две изометријске трансформације је опет изометријска трансформација, јер обе чувају растојања између тачака, па ће чувати и њихова композиција;
2. коинциденција је неутрал;
3. инверз изометријске трансформације је такође изометријска трансформација, с обзиром на то да такође чува растојање.

Добијена гупа се назива и групом *симетрија еуклидске равни*, јер свака изометрија чува *структуру* еуклидске рави – растојања између тачака остају иста, праве се сликају у праве, чува се паралелност, односно углови између правих, једном речју *чува* се цела геометрија еуклидске равни.

Напоменимо да је овај начин гледања на геометрију довео до настанка (већ поменутог) Ерлангенског програма по коме се геометрија посматра као скуп инваријанти у односу на одређену групу, стога посматрањем различитих група добијамо различите просторе односно геометрије. Тако у односу на групу изометрија равни настаје Еуклидска геометрија, док у односу на неке друге групе настају Афина геометрија, Пројективна геометрија, Хиперболичка геометрија и друге. Више о Клајновом Ерлангенском програму и о његовом каснијем развоју се може прочитати у [3] и [4].

3.3. Групе симетрија

Ако бисте физичаре питали како виде групе, већина ће вам рећи – као симетрије разних објеката. У извесном смислу они су у праву. Наиме, треба схватити шта значи симетрија на језику математике. Лаички речено, ако имамо објекат S, његова *симетрија* је бијекција $f : S \to S$ која *чува структуру* овог објекта. То значи да се сва својства овог објекта чувају при функцији f.

[5] Са класификацијом изометријских трансформација еуклидског 3-димензионалног простора, читалац се може упознати у [5].

Тако на пример, када је S само скуп, без икакве додатне структуре, f треба да „чува" његове елементе, тј. да буде бијекција, и ништа више. При томе од раније знамо да бијекције чине групу $\mathrm{Sym}(S)$ коју сада можемо видети као *групу симетрија* скупа S.

Ако је објекат S нека група $(G, \bullet)$, онда он има и операцију $\bullet$, па симетрија f треба да чува и ову операцију, тј. да „производ претвара у производ". Математички речено, за све $a, b \in G$ треба да важи $f(a \bullet b) = f(a) \bullet f(b)$. Пресликавање f које задовољава овај услов називамо *хомоморфизмом* група. Лако закључујемо да f при томе чува и неутрал. Заиста, из $f(x) = f(e \bullet x) = f(e) \bullet f(x)$, множећи леву и десну страну ове једнакости са $f(x)^{-1}$, добијамо да је $f(e) = e$. Остављамо читаоцу да докаже да хомоморфизам такође чува и инверзе, тј. да је $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$, за све $x \in G$. Хомоморфизам групе који је уз то и бијекција називамо *изоморфизам*. Занимљиво је да је инверз изоморфизма такође изоморфизам, као и да је композиција два изоморфизма такође изоморфизам. Ово нам говори да је скуп свих изоморфизама такође група, и то је управо *група симетрија* групе.

Детаљније ћемо размотрити групе симетрија неких познатих фигура у равни. Без улажења у детаље, наводимо да под *симетријом фигуре* Π подразумевамо изометријску трансформацију такву да важи $f(\Pi) = \Pi$, где је $f(\Pi)$ фигура коју чине слике, при пресликавању f, свих тачака из Π. За сваку фигуру Π, њене симетрије опет чине групу коју означавамо $\mathrm{Sym}(\Pi)$. Одредимо ове групе за неке познате фигуре са којима се срећемо у геометрији, мислећи при томе на површи, а не на њихове границе.

2. Π је троугао ABC

2.1. Π је разностранични троугао

Како се најдужа страница, нпр. AB, слика у најдужу страницу, при било којој изометрији $f \in \mathrm{Sym}(\Pi)$, имамо два случаја.

1. При f се фиксирају и A и B. Тада се C слика у тачку D, такву да је $AC = AD$ и $BC = BD$. Из аксиома геометрије/здравог разума закључујемо или је $C = D$ или је D слика тачке C при рефлексији у односу на праву AB. Међутим из $f(\Pi) = \Pi$ закључујемо да је $C = D$, односно $f(C) = C$. При томе из елементарне геометрије знамо да изометрија у равни која фиксира 3 тачке фиксира и целу раван, те је $f = \mathrm{Id}$.
2. При f, A се слика у B и обратно. Из сличне дискусије као у претходном случају, C се слика у тачку D која јој је симетрична у односу на симетралу дужи AB или у тачку која је слика D при рефлексији у односу на праву AB. Међутим, ниједна од ових не припада Π тако да овакво f не постоји.

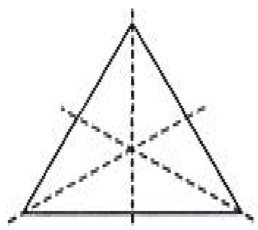
   Дакле, $\mathrm{Sym}(\Pi)$ је тривијална група, тј. група која садржи само један елемент – неутрал.

2.2. Π је једнакокраки, али не и једнакостранични троугао

Нека је нпр. AB основица. Тада се при произвољној симетрији, слично претходном, тачка C мора сликати у саму себе, док се A и B или фиксирају или мењају места. У првом случају имамо коинциденцију (јер има 3 фиксне тачке), или изометрију која фиксира C и средиште дужи AB, па фиксира праву одређену њима, тј. у питању је осна рефлексија σ у односу на висину из темена C. Изометрија σ припада $\mathrm{Sym}(\Pi)$, те је у овом случају $\mathrm{Sym}(\Pi)$ група са два елемента, $\mathrm{Sym}(\Pi) = \{\mathrm{Id}, \sigma\}$, при чему је $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}$. Ова група се назива још и цикличном групом реда 2, и обележава са C_2. Приметимо да је она изоморфна са $(\mathbb{Z}_2, +)$, у шта се једноставно можемо уверити.

2.3. П је једнакостранични троугао

Тада свака симетрија пермутује темена троугла ABC, и при томе за сваку од пермутација имамо једну симетрију: три од њих су ротације око центра за $0°, 120°$ и $240°$, а друге три су рефлексије у односу на симетрале страница (видети слику).



Укупно их има 6, и свака изометрија у равни је одређена сликом три неколинеарне тачке, па смо тиме и побројали све симетрије у овом случају. Из наведене коресподенције закључујемо да је група симетрија изоморфна групи пермутација скупа од 3 елемента, тј. $\mathrm{Sym}(\Pi) \cong \mathbb{S}_3$.

Из претходних разматрање видимо да што је троугао „правилнији", то је и његова група симетрија већа, тј. „богатија". То одговара интуитивном опису „симетричне" фигуре. Пређимо сада на мање детаљан приказ симетрија четвоуглова и правилних многоуглова, остављајући читаоцу да расправи детаље, сличне оним који су разматрани за троуглове.

3. П је конвексни четвороугао $ABCD$

3.1. П је разностранични четвроугао

Посматрајући највећу дуж међу страницама и дијагоналама – ту дуж називаћемо *дијаметар*, закључујемо да произвољна симетрија фигуре П мора бити осна симетрија дијаметра или његове симетрале. У случају да је дијаметар страница, добијамо да је П једнакокраки трапез, а у случају дијагонале да је делтоид. Ниједан од наведених није разностранични, и према томе не постоји нетривијална симетрија фигуре П, тј. слично као за разностранични троугао, $\mathrm{Sym}(\Pi) = \{\mathrm{Id}\}$.

3.2. П је паралелограм, али није ромб

Добро је познато да паралелограм осим коинциденције још једну симетрију – централно симетричан је. Лако закључујемо да нема других симетрија, јер се при истим чувају дијагонале, а самим тим и њихов пресек. Како нетривијална изометрија са фиксном тачком мора бити ротација или рефлексија, у односу на осу која садржи ту тачку, закључујемо да је једино решење ротација за $180°$, тј. централна симетрија. Дакле у овом случају је $\mathrm{Sym}(\Pi) \cong \mathbb{Z}_2$.

3.3. П је ромб

У овом случају, поред коинциденције и централне симетрије, имамо и рефлексије σ и τ у односу на дијагонале AC и BD. Композиција ове две рефлекције, при чему се лако проверава да је $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$, јесте централна симетрија, па закључујемо да је $\mathrm{Sym}(\Pi) = \{\mathrm{Id}, \sigma, \tau, \sigma \circ \tau\}$. Ова група је изоморфна *Декартовом производу* група $\mathbb{Z}_2$

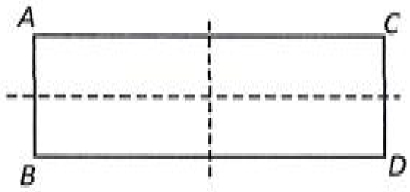
и $\mathbb{Z}_2$, тј. $\mathrm{Sym}(\Pi) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Образложимо овај појам: Декартов производ двеју група $(G, \bullet)$ и $(H, \cdot)$ јесте група над скупом $G \times H$ са операцијом

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 \bullet g_1, h_1 \cdot h_2), \quad g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H.$$

Оставља се читаоцу да се увери да је ово заиста група.

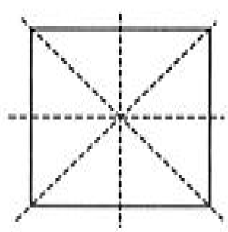
3.4. Π је правоугаоник, али није квадрат



У овом случају осим централне симетрије (јер је правоугаоник и паралелограм) и коинциденције имамо и рефлексије у односу на симетрале наспрамних страница (видети слику). Осим ових, других нема. Заиста, како симетрија слика дијагонале у дијагонале, њихов пресек, тј. центар се слика у самог себе.

Дакле, симетрије фигуре Π су ротације или рефлексије у односу на осу која садржи центар. Да би се нпр. теме A сликало у неко друго теме ротацијом, то мора бити теме D, тј. ротација за $180°$. Што се рефлексија тиче, означимо редом са σ и τ ону која слика A у B, односно A у C. Закључујемо да оне тачно одговарају двема осама на слици, док рефлексија која би сликала A у D би сликала B ван правоугаоника, што даје контрадикцију. Дакле, имајући у виду да је композиција ове две рефлексије централна симетрија, закључујемо да је као у претходном случају $\mathrm{Sym}(\Pi) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

3.5. Π је квадрат



Према претходном, овде очекујемо највише симетрија. У првом реду, то су ротације око центра за $0°$, $90°$, $180°$ и $270°$, затим рефлексије у односу на четири осе нацртане на слици. То су уједно и све симетрије, с обзиром на то да, према 3.4, симетрија квадрата је или ротација или рефлексија у односу на осу која садржи центар.

Ако ротацију око центра за $90°$ означимо ρ, а рефлексију у односу на симетралу праве σ, читаоцу остављамо да геометријски докаже да ће група симетрија бити баш

$$\mathrm{Sym}(\Pi) = \{\mathrm{Id}, \rho, \rho^2, \rho^3, \sigma, \sigma\rho, \sigma\rho^2, \sigma\rho^3\}.$$

Ова група се обележава $\mathbb{D}_4$. Она је некомутативна и има осам елемената.

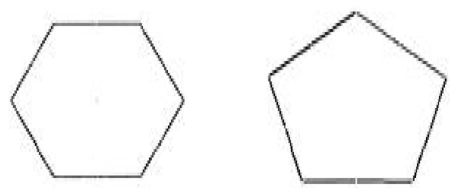
Дакле и на случају четвороугла уверили смо се да је група симетрија већа утолико је четвороугао „лепши”, тј. симетричнији, достижући максимум за квадрат који је, као и једнакостранични троугао, правилни многоугао. Пређимо зато сада на правилне многоуглове, а читаоцу остављамо да се позабави симетријама једнакокраког трапеза и делтоида (змаја).

4. Π је правилни n-тоугао $A_1 A_2 \ldots A_n$

Сада ћемо уопштити разматрања код једнакостраничног троугла и квадрата. С обзиром на то да се може описати круг око правилног n-тоугла, и да се темена (која припадају кругу) симетријом сликају у темена, тај круг се сваком симетријом фиксира, а самим тим и његов центар O, тзв. центар n-тоугла. Дакле, преостају нам ротације око тачке O, и рефлексије у односу на праве које садрже O.

За ротације следи сличан закључак као раније – има их тачно n, исто колико и могућих слика, нпр. темена A_1. Овде рачунамо и ротацију за $0°$, тј. коинциденцију.

Што се рефлексија тиче, ту долази до разлике када је n парно односно непарно. За парно n ситуација је слична као код квадрата, постоји једна оса за сваки пар наспрамних страница – њихова заједничка симетрала, као и по једна оса за сваки пар наспрамних темена. За непарно n је ситуација са рефлексијама другачија. И овде има укупно n рефлексија, с тим што су овде осе симетрале тачно по једне странице.



У оба случаја видимо да симетрија има укупно $2n$, и ако најмању ротацију око центра, за угао од $\frac{360°}{n}$, означимо са ρ, а рефлексију у односу на симетралу дужи A_1A_2 са σ, може се геометријски (слично као за квадрат) доказати да ће група симетрија правилног n-тоугла бити баш

$$\mathrm{Sym}(\Pi) = \{e, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, \sigma, \sigma\rho, \sigma\rho^2, \ldots, \sigma\rho^{n-1}\}.$$

Ову групу зовемо *диједарска група* степена n и означавамо $\mathbb{D}_n$. Она има $2n$ елемената и није комутативна.

Наведимо, без улажења у детаље, групе симетрија неких правилних полиедара (тзв. Платонових тела, в. нпр. [7], [8]):

- за правилни тетраедар $\mathrm{Sym}(\Pi) \cong \mathbb{S}_4$;
- за коцку или правилни октаедар $\mathrm{Sym}(\Pi) \cong \mathbb{S}_4 \times \mathbb{Z}_2$; итд.

На крају овог одељка, уводимо један важан појам који нам омогућава да било коју групу посматрамо као групу симетрија неког објекта – скупа у најједноставнијем случају. Нека је X произвољни скуп, а $(G, \bullet)$ група. Под *дејством групе* $(G, \bullet)$ са неутралом e на скуп X подразумева се хомоморфизам $\varphi : G \to \mathrm{Sym}(X)$, то јест пресликавање φ такво да су испуњени следећи услови:

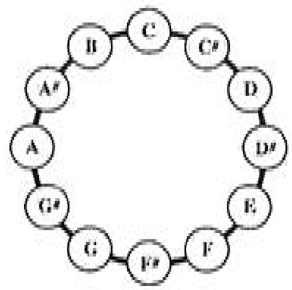
1. $\varphi(e)$ не помера ништа, тј. $\varphi(e) = \mathrm{Id}_X$,
2. $\varphi(g_1 \bullet g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$.

Група $\mathrm{Sym}(X)$ садржи бијекције скупа X, па нам дејство заправо омогућава да елементе групе G „видимо" као бијекције скупа X.

У наредном одељку наводимо неке занимљиве примере дејства.

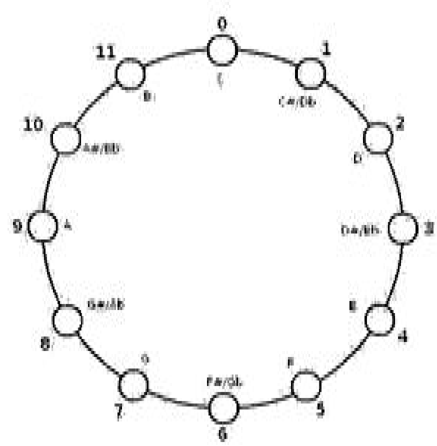
4. Музика

Свима је позната јака веза између математике и музике (видети [10]). Њу су проучавали још Стари Грци, кроз разне односе природних бројева (тада се још увек веровало да постоје само рационални бројеви). Од тада је математика доста узнапредовала, и у скорије време су се математичари заинтересовали за појаву група у музици (видети нпр. [11]). У музици постоји 12 тонова у једној октави (слика испод). Ако тонове на слици сматрамо тачкама, видимо да они чине правилни 12-угао, и отуда је природна примена групе његових симетрија, $\mathbb{D}_{12}$.



4.1. Акорди

Акорди у музици су сложени звуци сачињени од 3 истовремено одсвирана тона (на клавиру, гитари, . . .). Математички, ми их можемо видети као троуглове чија су темена тонови на слици. *Консонантни акорди* којима ћемо се овде бавити се деле на добро познате *дурске* и *молске* акорде. Остале врсте акорада (нпр. блуз акорде) не обухвата наредна прича, што би можда био правац могућег наставка ове теорије.



Говорићемо на језику геометрије 12-угла сачињеног од тонова. Ако нумеришемо тонове као на слици изнад, онда је сваки консонантни акорд (у даљем тексту само акорд) троугао и то облика $(n, n+4, n+7)$ ако је дурски, односно $(n, n+3, n+7)$

ако је молски. При томе се сабирање са 3, 4 и 7 врши по модулу 12. Акорд зовемо по првом тону у оваквом запису. Тако је на пример D-дур акорд $(2, 6, 9)$, док је F-мол $(5, 8, 1)$. Означимо овако дефинисан скуп акорада са S.

4.2. T/I група

У музици су познате тзв. *транспозиције* и *инверзије*, као својеврсни алати за компоновање. Ове креације су изражене на пример у Баховим[6] фугама – композиција почиње са главном мелодијом (тзв. темом); како композиција траје, тема почиње да се појављује у транспонованом и инвертованом облику.

Математички речено, транспозиција T_n реда n је мењање тонова за n полустепена[7] у смеру казаљке на сату на слици горе. Геометријски, она представља ротацију за n бројева модуло 12. Инверзија I_n реда n, када се сведе на геометријску трансформацију, представља рефлексију у односу на осу која је за n ротирана у односу на осу која пролази кроз темена 0-6. Дакле, I_0 врши рефлексију у односу на праву 0-6. Закључујемо да инверзије и транспозиције заједно чине групу, изоморфну групи $\mathbb{D}_{12}$, која дејствује на скуп тонова. Ова група се често назива T/I- група.

Логично, транспозиције и инверзије *чувају* акорде. То значи да када се примени нека од њих на троугао који чини акорд, он се слика у троугао који такође чини акорд. Међутим из музике знамо да је то тачно. Прецизније, транспозиције чувају род[8] акорада, сликају дурске у дурске и молске у молске акорде. То сада можемо закључити и математички, знајући да је транспозиција ротација. Насупрот томе, инверзије мењају дур за мол и обратно, што се такође може доказати. На пример I_0 слика C-дур у F-мол акорд (доказати!). Дакле, добро је дефинисано дејство групе T/I на скуп S.

4.3. PLR група

Осим наведених трансформација, у музици су познате и друге трансформације тонова, које је класификовао и строго дефинисао музички теоретичар 19. века Хуго Риман. За разлику од транспозиција и инверзија, ове трансформације дејствују само на акордима. То су пресликавања $P, L, R : S \to S$, дата са:

$$\begin{aligned} P(y_1, y_2, y_3) &= I_{y_1+y_3}(y_1, y_2, y_3), \\ L(y_1, y_2, y_3) &= I_{y_2+y_3}(y_1, y_2, y_3), \\ R(y_1, y_2, y_3) &= I_{y_1+y_2}(y_1, y_2, y_3). \end{aligned}$$

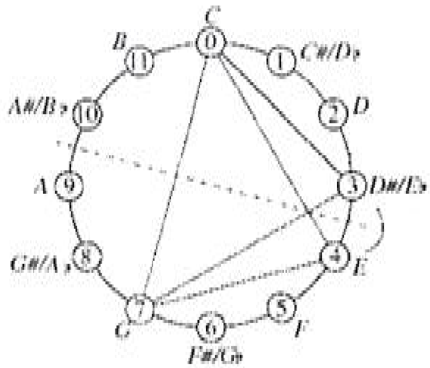
Зову се редом паралелно, промена главног тона и сродно[9].

Музички речено, трансформација P шаље дурски акорд у исти само молски и обратно (слика доле лево). На пример, $P(d) = D$ или $P(F) = f$. (На западу се дурски

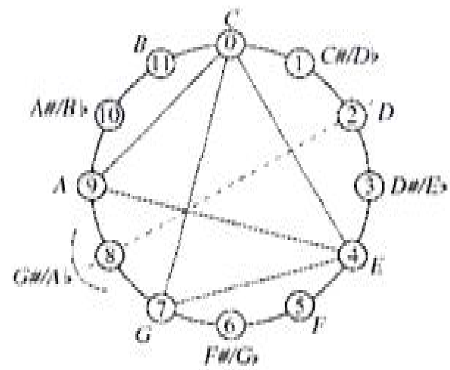
---

[6] J.C. Бах (1685–1750), славни немачки барокни композитор.
[7] Полустепеном се у музици назива разлика у висини звука између два узастопна тона.
[8] Род може бити дурски и молски.
[9] У оригиналу parallel, leading tone exchange и relative.

акорди обележавају великим, а молски малим словом, и ми ћемо се од овог места надаље држати ових ознака.)



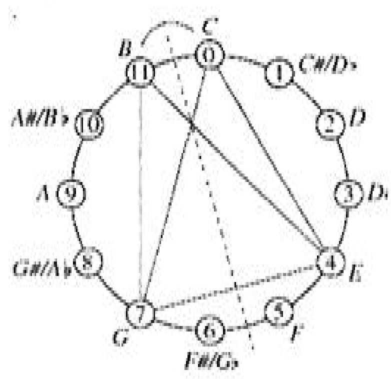
$PC = c$



$RC = a$

Трансформација R шаље акорд у његов музички сродан акорд супротног рода. Тако је нпр. познато да су C и a музички парњаци (слика горе десно). Прецизније, два акорда супротног рода су сродни ако је главни тон (то је први тон у уређеној тројци, по коме акорд носи назив) молског акорда за 3 полустепена нижи од дурског.

Трећа трансформација L, како јој само име у оригиналу каже, мења главни тон акорда, при чему чува остала два. То је геометријски гледано, рефлексија у односу на симетралу дужи које чине преостала два тона акорда (који се чувају). На слици је приказано како L делује на C.



$LC = e$

При све три трансформације се чувају два тона у акорду док се трећи мења. То је изводљиво на три начина, и то су тачно ове три трансформације. Оне су инволуције[10], при томе се могу компоновати, и као такве чине групу, подгрупу $\mathrm{Sym}(S)$, која се зове PLR група. Оно што је нарочито интересантно је да је ова група такође изоморфна

[10] Пресликавање је инволуција ако је само себи инверз.

диједарској!

Многе друге занимљиве чињенице читалац може наћи у интересантном раду [11].

5. Остало

На самом крају напоменимо и то да се теорија група користи у хемији и физици, прецизније у кристалним структурама које имају одређене симетрије, па отуда и примена група. Такође, теорија Лијевих група и њихових репрезентација[11] се користи за описивање тзв. стандардног модела у модерној физици елементарних честица. Математички је занимљива и група Рубикове коцке (видети [12]). Напослетку, теорија решивих група значајно је допринела решењу великог проблема у математици – решавању алгебарских једначина (споменуто на почетку овог текста).

Литература

[1] Г. Калајџић, *Алгебра*, Математички факултет, Београд, 2008.

[2] Г. Калајџић, *Линеарна алгебра*, Математички факултет, Београд, 2008.

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Klein_geometry

[4] R.W. Sharpe, *Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*, Springer, 1997.

[5] http://www.matf.bg.ac.rs/p/files/34-Geometrija_Dragomir_Lopandic.pdf

[6] http://poincare.matf.bg.ac.rs/~djankovic/AG.pdf

[7] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~john/geometry/Lectures/L10.html

[8] http://www.mit.edu/~yongwhan/projects/math109.pdf

[9] М. Марјановић, С. Врећица, *Топологија*, Завод за уџбенике, Београд, 2011.

[10] М. Чанак, *Математика и музика*, Завод за уџбенике, Београд, 2009.

[11] http://www-personal.umd.umich.edu/~tmfiore/1/CransFioreSatyendra.pdf

[12] http://en.wikipedia.org/wiki/Rubik

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2015/16 година