

МАТЕМАТИКА И МУЗИКА¹

dr Madarász Sz. Rozália, Нови Сад

КАКВЕ ВЕЗЕ ИМА МАТЕМАТИКА СА МУЗИКОМ?

Можемо рећи да математика има везе са свим областима људске активности које на било који начин укључују у себе простор или време. Када размишљамо о вези између математике и уметности, и специјално о вези између математике и музике, можемо приметити фундаменталну разлику између музике са једне стране и рецимо сликарства, вајарства или архитектуре с друге: музика је облик уметности који је суштински заснован на протоку времена, док су сликарство, вајарство или архитектура у том смислу статичке форме уметности.



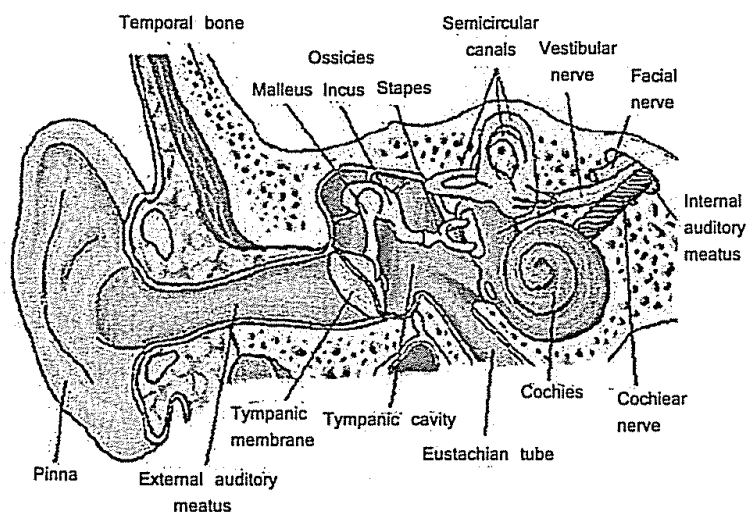
Дакле, с обзиром да музика има ту своју временску димензију, повезана је са делом математике који се бави функцијама. Но, оно што спаја математику и музику у најширем смислу јесте чињеница да обе покушавају да ухвате скривену структуру и хармонију у световима чији су објекти апстрактни.

Трагање за симетријом, хармонијом и поретком у наизглед хаотичном свету бесконачних могућности јесте прави смисао и математике и музике. „Глобални изоморфизам“ који постоји између математике и музике поткрепљује прегршт парцијалних изоморфизама на које наилазимо чим мало разгрнемо „шумове“ који сакривају наизглед потпуно различите концепте. Тада се уочава да је, на пример, однос између конкретне математичке структуре и њеног формалног записа истог типа као између конкретног музичког комада и одговарајуће партитуре. Обрнуто, интерпретацији неке формалне теорије у некој класи конкретних структура одговара интерпретација записаног музичког дела.

Као што можемо доказати да математику не можемо потпуно формализовати, музика исто измиче свим покушајима формализације. Математика и музика су богати примери светова који се опирају алгоритмизацији, јер траже суштински људски интелект, креативност и имагинацију. У том смислу треба схватити и овај текст - само као покушај да се укаже на математичке идеје и концепте које се налазе иза неких музичких појмова или као покушај да се макар мало расветли како математички начин размишљања може помоћи да се боље разуме свет музике.

¹Чланак је писан за *Први фестивал науке* одржан у Новом Саду 14-15. фебруара 2009. године.

ШТА ЈА ТО ЧУЈЕМ?



Човек је скоро стално окружен звуцима који допиру до њега из околине. Неких звукова смо свесни, а других нисмо. Чујемо их, али наш мозак их не обрађује свесно – ми те звуке доживљавамо као део амбијента где боравимо.

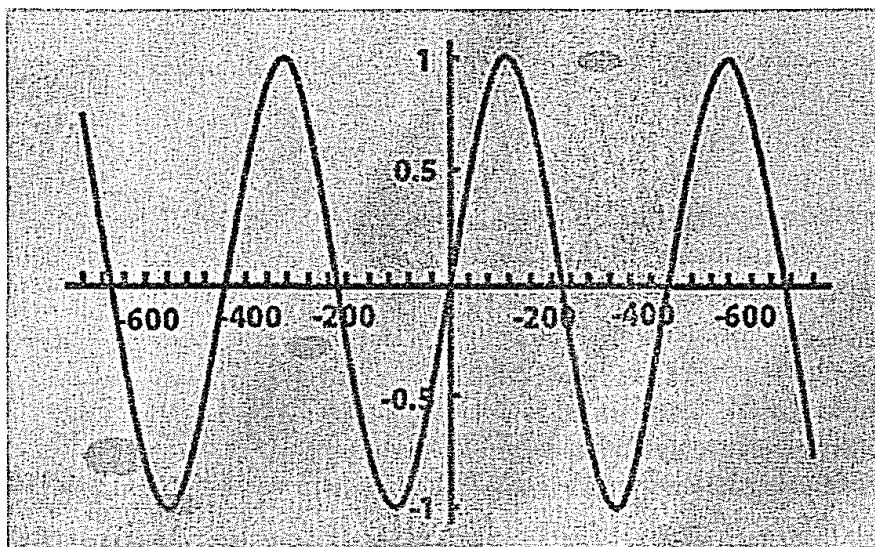
Звук је механички талас који настаје осциловањем (треперењем) неког тела (извора звука) у еластичној средини. При томе, осцила-

торно кретање је специјална врста периодичног кретања које се врши увек по истој путањи, са проласком кроз једну равнотежну тачку, у различитим смеровима. Човек производи звук треперењем (осциловањем) гласних жица које покреће ваздушна струја из плућа. Музички инструменти производе звук на различите начине: ударцем или ударањем (бубањ, добош, ксилофон, па и клавир), трзањем жице (гитара, харфа), трењем (гудачки инструменти), треперењем ваздуха (дувачки инструменти).

Када неки звучни извор својим осциловањем изазове формирање механичког таласа, еластична средина тај талас преноси до једне танке мембране (бубне опне), која се налази у дну канала ушне шкољке. Осциловање бубне опне се преноси преко слушних кошчица до унутрашњег уха, где се налазе завршеци специјалних нерава, тзв. чулни сензори. Чулни сензори тај надражај преносе у мозак, где се ствара доживљај звука.

ОД БУКЕ ДО МУЗИКЕ

Какав субјективан осећај ће човек имати приликом доживљаја звука зависи од тога како осцилује звучни извор. *Јачина звука* зависи од енергије која је пренета звучном извору - ако је та енергија већа, растојање између равнотежног положаја и најудаљенијег положаја до којег је тело доспело при осцилаторном кретању (тзв. *амплитуда*) је већа, и наш субјективан осећај је да чујемо јачи звук. Јачина звука се мери у *децибелима* (dB). Човек може да чује звуке јачине од 5 dB (праг чујности) до 130 dB (граница бола). Друга важна карактеристика осцилаторног кретања јесте број осцилација у секунди, тзв. *фреквенција* (учесталост). Јединица мере за фреквенцију је херц (Hz). На пример, најдебља Е жица на гитари има фреквенцију око 82 Hz, што значи да кад је окинемо, она направи око 82 померања тамо-назад преко равнотежног положаја. Што је фреквенција неког звучног таласа већа, наш субјективан осећај је да чујемо „виши“ звук. Људско чуло слуха може да региструје механичке таласе чија је фреквенција између 16 Hz и 20.000 Hz.



Слика: Звучни талас

Већина звукова који до нас допиру из околине је мешавина великог броја звучних таласа различитих фреквенција - ми их региструјемо као шуме или буку. Међутим, ако неки звучни извор осцилује правилно, стварајући звучне таласе тачно одређене фреквенције, ми ћемо тај звук регистровати као *специфичан (музички) тон*. Тон је дакле звук који има четири своје карактеристике: висину (која зависи од фреквенције звучног таласа), интензитет (који зависи од амплитуде таласа), трајање и боју (о чему ће бити више речи касније). И сад смо стигли до почетка: музички тонови су атоми од којих је састављена свака музичка композиција.

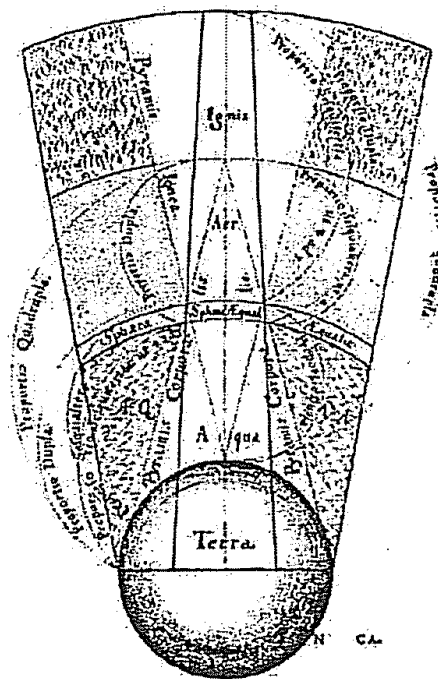
ШТА ЈЕ МУЗИКА?

Као што је тешко дефинисати шта је математика, имамо проблема и када треба дефинисати шта је музика. Музика је за многе људе невербална форма комуникације која дотиче људски интелект и може да изазове дубоке или бурне емоције. Други сматрају да је музика пре свега феномен природе, резултат принципа физике и математике, а да су људи само открили, препознали и научили да манипулишу с њом. Можемо такође рећи да је музика комбинација звукова који су организовани помоћу три димензије: *ритма*, *мелодије* и *хармоније*. Но, у том случају искључујемо на пример реп музику или рецимо музику Џона Кејџа. По неким екстремним дефиницијама, музика је било која комбинација звукова коју неко негде ужива да слуша.

ХАРМОНИЈА СВЕМИРА И КОРЕН ИЗ 2

Музика је представљала веома важан део живота у Старој Грчкој. Сматра се да су сви грађани имали неко музичко образовање и да су били у могућности да узму учешће у музичком животу који је пратио јавне догађаје у граду. Платон је музици доделио истакнуту улогу у образовању, твдећи да музика доприноси изградњи неке врсте унутрашње хармоније код човека.

Нажалост, немамо сазнања како је заправо звучала музика у којој су уживали Стари Грци. Уместо тога, остао је забележен њихов допринос теорији музике. Почети теорије музике се везују за грчког математичара Питагору и његове следбенике, Питагорејце (6. век пре н. е.). Полазећи од резултата које су добили изучавајући хармоније у музици, они долазе до закључка да је у основи свега постојећег - број. Сматрали су да су принципи математике - принципи свега и да се хармонија универзума заснива на хармоничним односима међу бројевима. Почетна тачка тог прилично генералног веровања била је откриће тзв. *закона малих бројева* који на математички начин описује разлику између нашег осећаја консонантности (хармоније) и дисонантности. Кратко речено, Питагорин закон малих бројева каже да су *два тона консонантна ако им фреквенције стоје у односу малих природних бројева*.



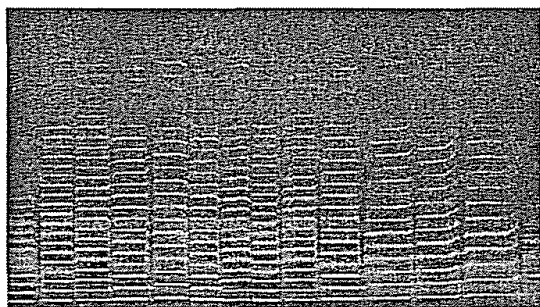
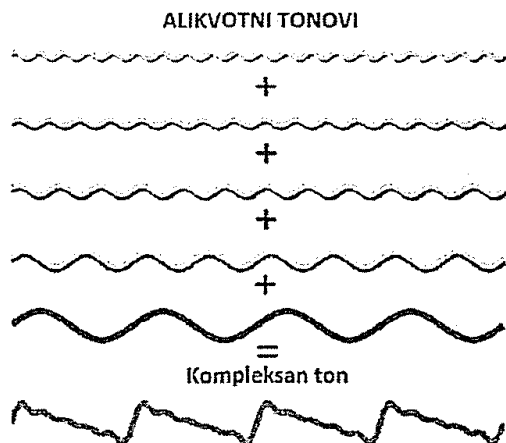
Слика: Хармонија универзума

Питагора је до тог закона дошао полазећи од резултата експеримената са затегнутим жицама различитих дужина или стакленим судовима у којима се налази различита количина воде. Ако кренемо од жице одређене дебљине, онда висина тона коју она производи зависи од њене дужине: што је жица краћа, то је тон виши. Ако жицу скратимо на њену половину (однос 2 : 1), тон ће скоčiti за октаву, ако је скратимо за једну трећину (однос 3 : 2), тон ће скоčiti за квинту, а ако жицу скратимо за једну четвртину (однос 4 : 3), тон ће бити виши за кварту. Кад скраћујемо дужину жице, повећавамо њену фреквенцију, а ми процењујемо растојање у „висини“ између два тона као однос њихових фреквенција. Тако, можемо рећи да су Питагорејци открили да је однос фреквенција између неког тона и тона који је за октаву виши 1 : 2, између тона и његове квинте 2 : 3, између тона и његове кварте 3 : 4, итд. Природно је запитати се како је наш субјективан осећај хармоније (консонантности) повезан са односима 1 : 2, 2 : 3, 3 : 4, ...? Зашто су управо ти односи пријатни за нас и да ли постоји неко рационално и научно објашњење овог феномена? Питагора и његови следбеници су као објашњење понудили свеобухватну теорију хармоније која је природно довела до потребе да се изучавају пре свега природни бројеви и њихови односи.

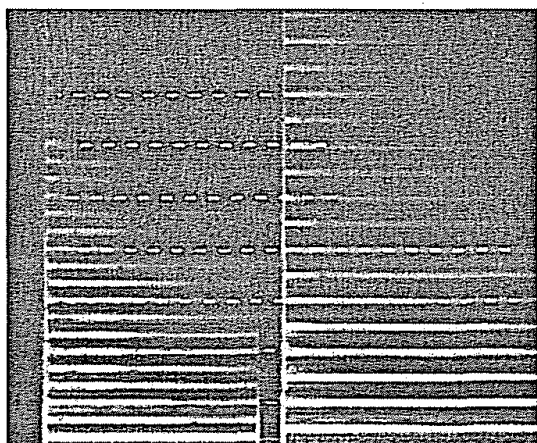
Интересантно је да су Питагорејци до открића ирационалности броја $\sqrt{2}$ дошли изучавајући један природан „музички проблем“. Знајући да октави одговара однос 1 : 2 између дужина одговарајућих затегнутих жица, колика је дужина жице чији тон дели ту октаву на два једнака дела? Ако ту непознату дужину означимо са x , долазимо до следеће једначине: $1 : x = x : 2$, тј. $x^2 = 2$. Наравно, ми сада знамо да је тада $x = \sqrt{2}$, што је ирационалан број, па је јасно зашто Питагорејци нису могли написати ту дужину као однос два природна броја. Откриће да ето већ тако једноставно дефинисана величина не може да се опише као

однос два природна броја проузроковало је праву кризу у питагорејској теорији и једно време је строго чувано као најмрачнија тајна.

АЛИКВОТЕ И ФУРИЈЕОВА АНАЛИЗА



Слика: Спектограм звука виолине – виде се основна фреквенција и фреквенције аликвотних тонова



Слика: Виолиниста је одсвирао савршену квинту - види се слагање фреквенција аликвотних тонова

Као што је комплексан светлосни зрак састављен од дугиних боја, звуци које ми уобичајено чујемо јесте комплексан звук, који је састављен од пуно „чистих“ звукова (само једне фреквенције). Наше чуло слуха ради као Фуријеов анализатор и раздваја комплексан звучни талас на спектар једноставних таласа. Боја људског гласа је због тога специфична: свако од нас производи свој „лични“ спектар звучних таласа, и када препознајемо нечији глас, ми уствари успевамо да детектујемо управо тај лични, специфични спектограм.

На исти начин, када неко одсвира одређен тон на флаути, виолини или клавиру, ми чујемо да су то тонови исте висине, али потпуно различите боје. За боју тона одговорни су тзв. *аликвотни тонови* (*виши хармоници*), који се чују поред основног тона. Ако је основни тон фреквенције f , аликвотни тонови које стварају наши инструменти јесте спектар тонова мање јачине чије су фреквенције целобројни умношци од f тј. $2f, 3f, 4f, \dots$ Од расподеле јачине тих аликвота зависи боја тона одређеног инструмента. И то сада објашњава Питагорин закон малих бројева: тонови који су у хармонији са основним тоном су управо тонови чије су фреквенције заступљене у спектру аликвотних тонова!

Иако су објашњење Питагориног закона малих бројева понудили још Галилео Галилеј и Хелмхолц, тек је недавно, после експеримената Пломпа и Левелта (1965) потпуно разјашњена математичка и физичка позадина која стоји иза феномена консонантности.

У књизи *On the sensation of tones*, Хелмхолц је понудио објашњење консонантности која се заснива на феномену резонантних удара.

Хелмхолц је претпостављао да је дисонанца два тона последица удара што их стварају блиске фреквенције њихових виших хармоника (аликвота). Консонантност је једноставно одсуство тих дисонантних удара. Резултати Пломпа и Левелта (1965) су потврдили да ако чујемо једноставне звуке (само једне фреквенције), онда се само звуци врло блиских фреквенција доживљавају као дисонантни, а класични музички интервали као што су квинта, кварта или терца уопште се не издвајају својом консонантношћу.

Данас електрични музички инструменти (као што је синтисајзер, електрична гитара) или разни додаци тим инструментима, могу вештачки да манипулишу звучним таласима различитих фреквенција, да их раздвајају и сабирају, да истичу или смање интезитет одређених аликвота, и тако синтетишу звуке нових боја који се не би могли добити на природан начин. На неки начин, то означава нову еру у музици, и ми смо, хтели то и не, сведоци те велике промене.

СКАЛЕ - КРОЋЕЊЕ БЕСКОНАЧНОГ

Скала је низ више узастопних тонова који се пењу од једног тона до другог, као по некој лествици (мердевини). То се у принципу може урадити на бесконачно много начина. У различитим културама широм света користе се различите скале, које за нас могу звучати веома чудно. Структура скале коју користе различите културе дају основну атмосферу коју зрачи њихова музика, јер се ноте тих скала користе за креирање мелодија и хармонија.



У основи западњачке музичке културе налазе се тзв. дијатонске скале. Све оне користе тонове једне октаве коју чини 12 полу-степенa. Постоји разне скале које су изграђене од различитих комбинација полу-степенa и целих степенa да би се попели за октаву. Најпознатије су дурска (јонска) и молска (еолска) скала. Обе ове скале можемо пронаћи још код Старих Грка.

Питагорејска скала, као сви тонови хроматске скале могу се добити једноставним математичким поступком који искључиво користи две чињенице: да се фреквенције основног тона и тона који је за октаву виши односе као $1 : 2$, а између тона његове квинте као $2 : 3$. Другим речима, ако основни тон има фреквенцију f , онда квинта горе има фреквенцију $\frac{3}{2}f$, а октава горе фреквенцију $2f$. Кад се попнемо у следећу октаву, можемо се вратити у нижу множећи дату фреквенцију са $\frac{1}{2}$. Ако фреквенцију тона C узмемо као основу тј. као 1, добијамо редом следеће фреквенције:

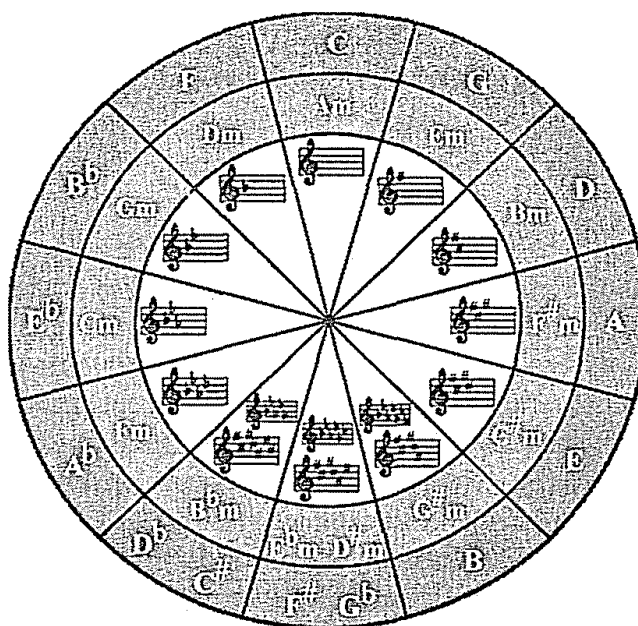
$$C = 1 \rightarrow G = \frac{3}{2} \rightarrow D' = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4},$$

$$\text{па октава доле } D = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}, \text{ из чега следи } A = \frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{16}, \text{ па } E' = \frac{27}{16} \cdot \frac{3}{2} = \frac{81}{32}, \text{ па}$$

октава доле $E = \frac{81}{32} \cdot \frac{1}{2} = \frac{81}{64}$ и $H = \frac{81}{64} \cdot \frac{3}{2} = \frac{243}{128}$.

Тон F добијамо када од C узмемо квинту надоле, $F' = \frac{2}{3}$, па октаву горе, $F = \frac{4}{3}$. Тако добијамо Питагорејску скалу чије су фреквенције у следећим односима:

C	D	E	F	G	A	H	C
1	9/8	81/32	4/3	3/2	27/16	243/128	2



Ако овај поступак наставимо, добићемо и све „међутонове“, (тј. црне дирке на клавијатури), да би на крају поново добили C. Од сваког од тих тонова можемо изградити дурску односно молску скалу. Ако кренемо од тона C, односно C-дур скале односно њој одговарајуће паралелне а-мол скале, и померамо се за квинту нагоре, због „чувања“ расподела целих степена односно полустепена унутар скале, редом ћемо морати да извршавамо корекције и то додавањем по једне повисилице на седми тон нове лествице. Како нас на крају тај поступак враћа на почетни тон, он се најлепше може илустровати помоћу тзв. *квинтиног круга*.

Питагорејска скала је математички перфектна у односу на почетни тон од кога смо кренули, али има своје недостатке чим за нотни центар узмемо неки други тон, тј. чим покушамо да променимо тоналитет. Тај недостатак су музичари у XVII веку исправљали тако што су сваки пут, када је требало свирати у другом тоналитету, штимери истрчавали на сцену и поново наштамавали инструменте, сада у том новом тоналитету. Овај хаос има своје прецизно математичко објашњење. Када кренете рецимо од тона C, и направите пун круг у квинтном кругу, када поново стижете до C, то није сасвим тачан C који је за седам октава виши од полазног. Наиме, он би морао имати фреквенцију која је $2^7 = 128$ пута већа од полазне, а ако идемо 12 квинтних скокова, добијамо фактор $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 129\,746$. Такође, полу-степени у хроматској скали која је добијена преко квинтних скокова нису исти.

Да би се превазишли ови проблеми, разни људи су предлагали различита решења. Међу њима је био и математичар Марин Мерсен (познат по простим бројевима облика $2^p - 1$,

где је p прост број) је у својој књизи *Harmonie Universelle* (1636-37) предложио једнако-темперирану скалу у којој сваки полу-степен у свакој октави има однос фреквенција дванаести корен из 2. Користећи овако темперiranу скалу композиције су се могле транспоновати („транслирати“) из једног тоналитета у други, а да при томе однос између тонова остане исти.

Наравно, цена овог јесте да рецимо квинте више нису сасвим математички префектне (можда је то разлог што музичари нису одмах прихватили једнако-темперiranу скалу), али одступања су толико мала, да само врло мали број људи примећује разлику. Добитак је да се на истом инструменту без поновног штимања могу свирати композиције у било ком од 12 дурских или 12 молских тоналитета. Јохан Себастијан Бах је био толико одушевљен тим новим начином штимања клавира, да је написао своје две чувене књиге „Добро Темперирани Клавир“ (1722), са по 24 прелудијума и фуга, свака у различитом тоналитету.

РИТАМ И ЛОГАРИТАМ

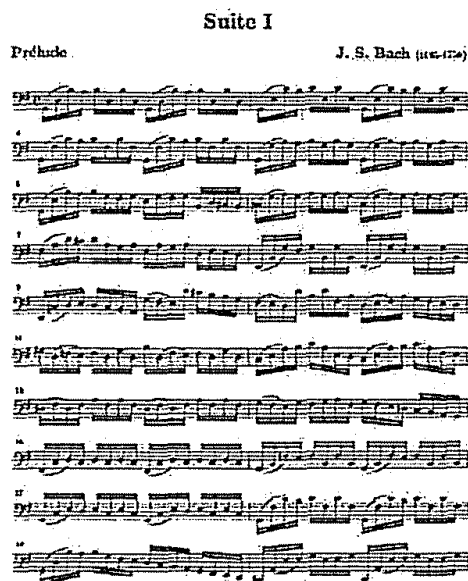
Да ли се сећате вашег првог сусрета са нотама – записом неког музичког дела? Да ли сте одмах разумели како се нешто што има мелодију и ритам може записати помоћу црних и белих нотних глава и линијског система од 5 линија? И ко је уопште измислио овај чудан начин записивања? Да ли сте икада покушали сами да измислите неки свој систем записивања мелодија које желите да запамтите? Можда измислите нешто згодно за будуће генерације!

Као што ни математичке ознаке нису одмах имале данашњи облик, и начин записивања музике се мењао током времена. У Месопотамији и Старој Грчкој су у ту сврху користили симболе алфавета. У средњем веку су се користиле тзв. неуме, које су се писале изнад текста и означавале су ритам и мелодију. У XI веку италијански бенедиктинац Гвидо из Арца ставља у употребу нотни систем са 4 линије и служи се првим слогом стихова латинске химне Светом Јовану Крститељу да би упамтио имена тонова и њихову висину - то је почетак солмизације. Цртане ноте се јављају у XIII веку – у то време нотне главе су имале облик црних квадратића и ромбова. Појава штампарства доприноси ширењу нотације, да би се у XVIII веку појавиле данашње нотне главе, овалне, беле или црне, у нотном систему од пет линија, са разним ознакама за динамику, темпо, итд.

Само учење вештине читања нота тј. музичког текста већ на самом почетку захтева извесно математичко предзнање, пре свега елементарне ствари о разломцима. Сви смо ми учили како се трајање тона означава нотним вредностима, како једна цела нота траје као две половине, свака половина по две четвртине, свака четвртина по две осмине, па се оне даље деле на шеснаестине итд. Но, оно чега вероватно већина људи није свесна јесте да је математичка позадина нотног текста у суштини график функције у модификованом семи-логаритамском координатном систему, где x оса представља проток времена, а y оса логаритам фреквенције тона. При томе су сва места на којима функција има константну вредност означени на специјалан начин, помоћу нотних вредности. Наиме, као што смо рекли раније, људи процењују растојање у висини између два тона као однос њихових фреквенција. На пример, по данашњим стандардима, тон A4 који се налази у првој октави, после средњег C, има фреквенцију 440Hz, тон A3 који је за октаву нижи фреквенцију 220Hz, а тон A2 који је још октаву нижи има фреквенцију 110Hz. Ако бисмо та три тона представили у координатном систему у коме је x оса време, а y оса фреквенција, имали бисмо различите размаке између тонова A2 и A3, односно између A3 и A4. Према томе, природно је да у графичком приказу музике у неку врсту координатног система бележимо логаритме фреквенција у зависности од времена.



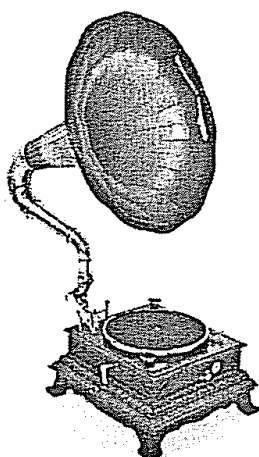
Слика: Неуме



У таквом приступу, ако су нам дата два по два тона са истим (музичким) размаком, редом са фреквенцијама f_1, f_2, f_3, f_4 , то математички можемо записати као $f_1 : f_2 = f_3 : f_4$, и у том случају ће разлика њихових логаритама бити иста, тј. $\log f_1 - \log f_2 = \log f_3 - \log f_4$.

Савршено, зар не? Или вам се завртело у глави? Да ли вам је превише математике? Истраживања која се спроводе у последње време (видети рецимо [11]) тврде да су математичке способности јако повезане са музичким способностима. Поједностављено речено, математика би требало да вам помогне да боље разумете музику, а већ и само слушање музике (специјално, Моцартове музике) би требало да побољша ваше математичке способности. Испробајте!

ОД ГРАМОФОНА ДО IPOD-A



Можда припадате генерацији која није имала прилике да уживо види грамофон, нити знате шта значи израз „лонг плејка“. У цепу можда држите све албуме ваше омиљене групе, а на малом одмору „пребацујете“ другару на његов телефон снимке концерта или „download-ујете“ са YouTube-а интересантан спот. Наравно, нова су времена.



Данас смо сведоци комплетне дигитализације свега, па и музике. И више него икад, потреба за математичким моделима у свим сферама музике постаје више него очигледна.

Свиђало се то нама или не, компјутери данас диктирају куда иду истраживања, па је музичка индустрија такође под снажним утицајем те опште атмосфере. Од 2000. године широм света основана су разна друштва, одржавају су конференције, покренути су нови часописи са темом музика-математика- рачунарство. Математичка репрезентација музике врло често има и геометријски приказ, а коришћењем дискретних и пробабилистичких метода постаје могућа аутоматска анализа музичке композиције. Одређују се области тоналитета, анализира се и препознаје ритам, а техникама које су инспирисане истраживањима ДНК молекула препознају се или раздвајају мелодије. Музичко компоновање и импровизација се моделују као специјални „constraint satisfaction“ проблеми, или проблеми из теорије графова, а за генерисање низова jazz акорда користе се специјалне формалне граматике. Постоје мишљења да изучавањем формалних математичких модела људских способности у креирању, анализи и репродукцији музике ми добијамо и посредне резултате који могу допринети дубљем разумевању људске природе, пре свега разумевању нивоа и врста људске креативности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] F. BAGI, *A matematika és a zene – az élet harmoniája*
<http://www.termesztvilaga.hu/tv2001/tv0110/bagi.html>
- [2] A. BARNETT, *The Mathematics of Music and Sound*
<http://math.dartmouth.edu/~m5s07/>
- [3] R. COOLMAN, *Why Twelve Tones?*
<http://oregonstate.edu/~coolmanr/WhyTwelve/>
- [4] E. CHEW, *Math & Music: The Perfect Match*, Operations Research Management Science Math & Music, June 2008
<http://www.lionhrtpub.com/orms/orms-6-08/music.html>
- [5] E. CHEW, *Modeling Tonality: Applications to Music Cognitions*
<http://www.rcf.usc.edu/~echew/papers/CogSci2001/EC-CogSci2001.pdf>
- [6] J. H. DAVID JR., *The Mathematics of Music*, 1995
<http://jackhdavid.thehouseofdavid.com/papers/math.html>
- [7] É. GYARMATHY, *Matematikai tehetségek*, Új Pedagógiai Szemle, 2002
<http://epa.oszk.hu/00000/00035/00060/2002-05-lk-Gyarmaty-Matematikai.html>
- [8] B. MOISEWITSCH, *Art, Mathematics and Music*
<http://www.am.qub.ac.uk/amtp/pers/moisewitsch/AMM/AMM.htm>
- [9] F. NICOLAS, *Questions of Logic: Writing, Dialectics and Musical Strategies*, in *Mathematics and Music*, Springer, 2002
<http://www.entretemps.asso.fr/Nicolas/TextesNic/QuestionsOfLogic.html>
- [10] R. PLOMP and J. M. LEVELT, *Tonal Consonance and Critical Bandwidth*, Journal of the Acoustical Society of America, 1965
www.lifesci.sussex.ac.uk/home/Chris_Darwin/PerMuSo/pdfs/PlompLevelt.pdf
- [11] RAUSCHER FH, SHAW GL, LEVINE LJ, WRIGHT EL, DENNIS WR, NEWCOMB RL., *Music training causes long-term enhancement of preschool childrens spatialtemporal reasoning*, Neurological Research, 1997, Vol.19, Febr. 2-8
<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/9090630>
- [12] Z. ŠIKIĆ, *Mathematics, Physics and Music - A Case Study*
www.fsb.hr/matematika/download/ZS-mathematics-and-music.pdf

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2010/11 година