

ИДЕНТИТЕТИ СА БИНОМНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА

– ПРВИ ДЕО –

Борђе Баралић, Крагујевац

Биномни коефицијенти се срећу на сваком кораку у математици. Посебно су важни у комбинаторици, теорији бројева и анализи. Многи математички проблеми су везани за биномне коефицијенте, а често су формулисани као неки идентитет у коме фигуришу биномни коефицијенти.

У овом чланку покушаћемо да прикажемо неке елементарне методе за доказивање идентитета са биномним коефицијентима. Посебно истичемо да су проблеми овог типа веома популарни и на математичким такмичењима. За све оне којима се ова тема посебно допадне препоручујемо и сајт <http://binomial.csuhayward.edu/Identities> на коме се налазе база идентитета са биномним коефицијентима, као и многи други резултати о биномним коефицијентима.

ОСНОВНИ ИДЕНТИТЕТИ

У овом делу чланка доказаћемо неке елементарне идентитете са биномним коефицијентима које ћемо користити у доказивању сложенијих.

Дефиниција 1. Биномни коефицијент $\binom{n}{k}$ је функција променљивих n и k , дајући помоћу:

$$(1) \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (n-i)}{k!}, \quad n, k \in \mathbb{Z}, \quad n \geq k > 0,$$

$$(2) \binom{n}{k} = 1, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0, \quad k = 0,$$

$$(3) \binom{n}{k} = 0, \quad n, k \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0 \text{ и } k < 0 \text{ или } k > n.$$

Теорема 1. (Неуређени избори без понављања или комбинације без понављања) Нека је A коначан скуп, а k ненегативан цео број и $n = |A|$. Тада је број k -точланих подскупова скупа A једнак $\binom{n}{k}$.

Доказ. Тврђење је очигледно ако је $k = 0$ или $k > n$. Нека је $k \leq n$. Тада k елемената из скупа A можемо изабрати на $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ начина. Тих k елемената можемо распоредити на укупно $k!$ начина па је укупан број подскупова $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$, јер свака комбинација одређује тачно један подскуп.

Теорема 2. (Неуређени избори са понављањем или комбинације са понављањем) Сваком неуређеном избору k елемената из скупа $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ одговара n -торка целих бројева $(s_1, s_2, \dots, s_n)$, $s_i \geq 0$ за $i = 1, 2, \dots, n$, таквих да је $s_1 + s_2 + \dots + s_n = k$, при чему је сваки a_i изабран тачно s_i пута, $i = \overline{1, n}$. Укупан број оваквих избора је $\binom{n+k-1}{n-1}$.

Доказ. Уочимо један произвољан избор и са s_i означимо број појављивања броја a_i у том избору. Очигледно је да сваком оваквом избору одговара n -торка $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ и за њу

важи $\sum_{i=1}^n s_i = k$. Дакле, укупан број избора са понављањем је једнак укупном броју решења једначине $\sum_{i=1}^n s_i = k$ у скупу целих бројева већих или једнаких нула. Приметимо да сваком избору можемо придружити број са $n + k - 1$ цифром такав да је:

$$v = \underbrace{111 \dots 111}_{s_1} 0 \underbrace{222 \dots 222}_{s_2} 0 \dots 0 \underbrace{nnn \dots nnn}_{s_n}$$

тако да нам 0 раздвајају низове бројева $1, 2, \dots, n$. Јасно, сваки распоред $n - 1$ нуле нам даје једно решење једначине које тражимо и обратно да сваком решењу једначине одговара један овакав број, па је укупан број решења $\binom{n+k-1}{n-1}$ што је и требало доказати.

Теорема 3. За целе бројеве n и k , $n \geq k \geq 0$ важи: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Доказ. Имамо да је по дефиницији 1:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \dots 2 \cdot 1} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)(n-k)(n-k-1) \dots 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \end{aligned}$$

што је и требало доказати.

Теорема 4. (Услови симетричности) За целе бројеве n и k , $n \geq 0$ важи: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Доказ. Ако је $k < 0$ или $k > n$ тврђење следи из дефиниције 1. Нека је $n \geq k \geq 0$. Имамо да је према теорему 3:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k},$$

што је и требало доказати.

Дефиниција 2. За природне бројеве n и k нека је $\binom{-n}{k} \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$.

Теорема 5. (Адициона формула) За целе бројеве n и k важи: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Доказ. Према теорему 3 је:

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!(k-1)!} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right) \\ &= \frac{(n-1)!n}{(n-k-1)!(k-1)!k(n-k)} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}, \end{aligned}$$

што је и требало доказати.

Теорема 6. За целе бројеве n , m и k важе следеће једнакости:

$$\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{m-k} \binom{n-m+k}{k}.$$

Доказ. Имамо да је по теорему 3:

$$\begin{aligned} \binom{n}{m} \binom{m}{k} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{n!}{(n-m)!(m-k)!k!}, \\ \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!(m-k)!k!}, \\ \binom{n}{m-k} \binom{n-m+k}{k} &= \frac{n!}{(m-k)!(n-m+k)!} \frac{(n-m+k)!}{k!(n-m)!} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!(m-k)!k!}, \end{aligned}$$

па из ових једнакости очигледно следи тражени низ једнакости.

Теорема 7. За целе бројеве n и k , $k \neq 0$ важи: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{n-k} \binom{n-1}{k}.$

Доказ. Имамо да је по теорему 3 и дефиницији 1:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

Према теорему 4 је:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)(n-k-1)!k!} = \frac{n}{n-k} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{n}{n-k} \binom{n-1}{k},$$

што је и требало доказати.

ДОКАЗИВАЊЕ ИДЕНТИТЕТА УЗ ПОМОЋ МАТЕМАТИЧКЕ ИНДУКЦИЈЕ

Математичка индукција је незаобилазна у доказивању многих важних теорема. Расуђивање индукцијом срећемо на сваком кораку и оно нам се само намеће где год нам се појављују природни бројеви. Тако и у проблемима које овде разматрамо од велике користи нам може бити индукција. Ипак, овај метод има два врло битна недостатка:

(а) индукцијом доказујемо готов образац или образац који смо емпиријски добили, а то је јако тешко у случају сложенијих идентитета;

(б) доказ индукцијом нам не открива комбинаторну природу и значење идентитета.

Биномна теорема. За сваки ненегативан цео број n важи: $(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$.

Доказ. За $n = 0$ добијамо идентитет $1 = 1$ који је тачан. Претпоставимо да је тврђење тачно за неки ненегативан цео број n и докажимо да је тврђење тачно и за број $n + 1$.

Како је $(x + y)^{n+1} = (x + y)(x + y)^n$, користећи индуктивну хипотезу добијамо

$$\begin{aligned} (x + y)(x + y)^n &= (x + y) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i+1} y^i + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^{i+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^{n-i+1} y^i + y^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} x^{n-i} y^{i+1} \\ &= \binom{n+1}{0} x^{n+1} y^0 + \binom{n+1}{n+1} x^0 y^{n+1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left(\binom{n}{i} x^{n-i+1} y^i + \binom{n}{i-1} x^{n-i+1} y^i \right) \\ &= \binom{n+1}{0} x^{n+1} y^0 + \binom{n+1}{n+1} x^0 y^{n+1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right) x^{n-i+1} y^i \end{aligned}$$

и користећи теорему 5 добијамо да је ово заправо

$$\binom{n+1}{0} x^{n+1} y^0 + \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} x^{n+1-i} y^i + \binom{n+1}{n+1} x^0 y^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} x^{n+1-i} y^i,$$

што је и требало доказати.

Последице ове теореме су бројне, а преко ње се доказују и многе теореме у анализи, комбинаторици, теорији бројева итд. На пример, из биномне формуле за $x = y = 1$ добија

се $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$, а за $x = 1$ и $y = -1$: $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = 0$.

Сумационе формуле. За целе бројеве n и m важе једнакости:

$$\sum_{i=0}^n \binom{m+i}{i} = \binom{m+n+1}{n} \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^n \binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Доказ. Најпре ћемо доказати прву једнакост. За $n = 0$ једнакост важи. Претпоставимо да је једнакост тачна за неки ненегативан цео број n . За $n + 1$ по индуктивној хипотези и

адитивној формули важи:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} \binom{m+i}{i} &= \sum_{i=0}^n \binom{m+i}{i} + \binom{m+n+1}{n+1} = \binom{m+n+1}{n} + \binom{m+n+1}{n+1} \\ &= \binom{m+n+2}{n+1}.\end{aligned}$$

Докажимо још другу једнакост. За $n = 0$ она очигледно важи. Претпоставимо да је једнакост тачна за неки ненегативан цео број n . За $n + 1$ по индуктивној хипотези и адитивној формули важи:

$$\sum_{i=0}^{n+1} \binom{i}{m} = \sum_{i=0}^n \binom{i}{m} + \binom{n+1}{m} = \binom{n+1}{m+1} + \binom{n+1}{m} = \binom{n+2}{m+1},$$

што је и требало доказати.

Сада ћемо доказати неколико идентитета коришћењем претходно доказаних идентитета.

1.1. Доказати да за сваки природни број n важе једнакости:

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k k \binom{n}{k} = 0.$$

Доказ. На основу теореме 7 и биномне теореме важи:

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n2^{n-1}$$

и

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (-1)^k k \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^n (-1)^k k \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=1}^n (-1)^k n \binom{n-1}{k-1} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k} = 0.\end{aligned}$$

1.2. Доказати да за сваки природан број n важе једнакости:

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} \binom{n}{i} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{1}{i+1} \binom{n}{i} = \frac{1}{n+1}.$$

Доказ. Означимо $S_1 = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} \binom{n}{i}$ и $S_2 = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{1}{i+1} \binom{n}{i}$. Тада је:

$$(n+1)S_1 = (n+1) \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n \frac{n+1}{i+1} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i+1} = 2^{n+1} - 1$$

и

$$\begin{aligned}(n+1)S_2 &= (n+1) \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{1}{i+1} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{n+1}{i+1} \binom{n}{i} \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n+1}{i+1} = 1,\end{aligned}$$

где смо користили теорему 7 и биномну теорему. Из ових једнакости јасно следе тражене.

- 1.3. Доказати да за сваки природан број n важи: $\sum_{i=0}^n \frac{1}{i+2} \binom{n}{i} = \frac{n2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}$.

Доказ. Нека је $S = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+2} \binom{n}{i}$. Тада је:

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)S &= (n+1)(n+2) \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+2} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n \frac{(n+1)(n+2)}{i+2} \binom{n}{i} \\ &= \sum_{i=0}^n (i+1) \frac{(n+1)(n+2)}{(i+1)(i+2)} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n (i+1) \binom{n+2}{i+2} \\ &= \sum_{i=0}^n (i+2) \binom{n+2}{i+2} - \sum_{i=0}^n \binom{n+2}{i+2},\end{aligned}$$

а из идентитета 1.1. је $\sum_{i=0}^n (i+2) \binom{n+2}{i+2} = (n+2)2^{n+1} - (n+2)$, а по биномној теорему је $\sum_{i=0}^n \binom{n+2}{i+2} = 2^{n+2} - (n+3)$, па је $(n+1)(n+2)S = n2^{n+2} + 1$, одакле следи тражени идентитет.

- 1.4. Ако су x и y реални бројеви такви да је $x + y = 1$ и m и n ненегативни цели бројеви, тада важи једнакост: $x^{m+1} \sum_{j=0}^n y^j \binom{m+j}{j} + y^{n+1} \sum_{i=0}^m x^i \binom{n+i}{i} = 1$.
(Предлог за ММО 1975.)

Доказ. За $n = 0$ имамо

$$x^{m+1} + y \sum_{i=0}^m x^i = x^{m+1} + (1-x) \sum_{i=0}^m x^i = \sum_{i=0}^{m+1} x^i - \sum_{i=1}^{m+1} x^i = 1,$$

па у овом случају тврђење важи.

Претпоставимо да је тврђење тачно за неки ненегативан цео број n и докажимо да тврђење важи за $n+1$. Имамо да је:

$$\begin{aligned}& x^{m+1} \sum_{j=0}^{n+1} y^j \binom{m+j}{j} + y^{n+2} \sum_{i=0}^m x^i \binom{n+1+i}{i} \\ &= x^{m+1} \sum_{j=0}^n y^j \binom{m+j}{j} + x^{m+1} y^{n+1} \binom{m+n+1}{n+1} + y^{n+2} + y^{n+2} \sum_{i=1}^m x^i \binom{n+1+i}{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^{m+1} \sum_{j=0}^n y^j \binom{m+j}{j} + x^{m+1} y^{n+1} \binom{m+n+1}{n+1} + y^{n+2} + y^{n+2} \sum_{i=1}^m x^i \binom{n+i}{i} \\
&\quad + y^{n+2} \sum_{i=1}^m x^i \binom{n+i}{i-1} = x^{m+1} \sum_{j=0}^n y^j \binom{m+j}{j} + y^{n+1} \sum_{i=1}^m x^i \binom{n+i}{i} \\
&\quad - y^{n+1} \sum_{i=1}^m x^{i+1} \binom{n+i}{i} + y^{n+2} \sum_{i=1}^m x^i \binom{n+i}{i-1} + y^{n+2} + x^{m+1} y^{n+1} \binom{m+n+1}{n+1} \\
&= x^{m+1} \sum_{j=0}^n y^j \binom{m+j}{j} + y^{n+1} \sum_{i=0}^m x^i \binom{n+i}{i} - y^{n+1} \sum_{i=1}^m x^{i+1} \binom{n+i}{i} \\
&\quad + y^{n+2} \sum_{i=1}^m x^i \binom{n+i}{i-1} + y^{n+2} + x^{m+1} y^{n+1} \binom{m+n+1}{n+1} - y^{n+1} \\
&= x^{m+1} \sum_{j=0}^n y^j \binom{m+j}{j} + y^{n+1} \sum_{i=0}^m x^i \binom{n+i}{i} \\
&\quad + y^{n+1} \left(y \sum_{i=1}^m x^i \binom{n+i}{i-1} + x^{m+1} \binom{m+n+1}{n+1} - \sum_{i=1}^m x^{i+1} \binom{n+i}{i} - 1 \right) \\
&= x^{m+1} \sum_{j=0}^n y^j \binom{m+j}{j} + y^{n+1} \sum_{i=0}^m x^i \binom{n+i}{i} \\
&\quad + y^{n+1} \left(\sum_{i=1}^m x^i \binom{n+i}{i-1} - \sum_{i=1}^m x^{i+1} \binom{n+i}{i-1} - \sum_{i=1}^m x^{i+1} \binom{n+i}{i} \right. \\
&\quad \left. - x + x^{m+1} \binom{m+n+1}{n+1} \right) \\
&= x^{m+1} \sum_{j=0}^n y^j \binom{m+j}{j} + y^{n+1} \sum_{i=0}^m x^i \binom{n+i}{i} \\
&\quad + y^{n+1} \left(\sum_{i=1}^m x^i \binom{n+i}{i-1} - \sum_{i=1}^m x^{i+1} \binom{n+i+1}{i} - x + x^{m+1} \binom{n+m+1}{m} \right) \\
&= x^{m+1} \sum_{j=0}^n y^j \binom{m+j}{j} + y^{n+1} \sum_{i=0}^m x^i \binom{n+i}{i} \\
&\quad + y^{n+1} \left(\sum_{i=0}^{m-1} x^{i+1} \binom{n+i+1}{i} - \sum_{i=1}^m x^{i+1} \binom{n+i+1}{i} - x + x^{m+1} \binom{m+n+1}{m} \right) \\
&= x^{m+1} \sum_{j=0}^n y^j \binom{m+j}{j} + y^{n+1} \sum_{i=0}^m x^i \binom{n+i}{i} \\
&\quad + y^{n+1} \left(\sum_{i=1}^{m-1} x^{i+1} \binom{n+i+1}{i} - \sum_{i=1}^{m-1} x^{i+1} \binom{n+i+1}{i} \right) \\
&= x^{m+1} \sum_{j=0}^n y^j \binom{m+j}{j} + y^{n+1} \sum_{i=0}^m x^i \binom{n+i}{i} = 1,
\end{aligned}$$

по индуктивној хипотези. Овим је доказ завршен.

1.5. Ако је $0 \leq k < m$, тада важи једнакост:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+m} + \binom{n}{k+2m} + \dots = \frac{2^n}{m} \sum_{0 \leq j < m} \cos^n \frac{j\pi}{m} \cos \frac{j(n-2k)\pi}{m}.$$

Доказ. Нека је $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}} = \cos \frac{2\pi}{m} + i \sin \frac{2\pi}{m}$ тј. ε је m -ти корен из 1, различит од 1, па из $\varepsilon^m = 1$ следи $\varepsilon^m - 1 = (\varepsilon - 1)(\varepsilon^{m-1} + \varepsilon^{m-2} + \dots + \varepsilon + 1) = 0$, што нам даје $\varepsilon^{m-1} + \varepsilon^{m-2} + \dots + \varepsilon + 1 = 0$. По биномној формули важе следеће једнакости:

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon^0)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} \\ (1 + \varepsilon)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \varepsilon + \binom{n}{2} \varepsilon^2 + \dots + \binom{n}{n} \varepsilon^n \\ (1 + \varepsilon^2)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \varepsilon^2 + \binom{n}{2} \varepsilon^4 + \dots + \binom{n}{n} \varepsilon^{2n} \\ &\dots \dots \dots \\ (1 + \varepsilon^{m-1})^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \varepsilon^{m-1} + \binom{n}{2} \varepsilon^{2(m-1)} + \dots + \binom{n}{n} \varepsilon^{n(m-1)}. \end{aligned}$$

Ако ове једнакости помножимо редом са $\varepsilon^0, \varepsilon^{-k}, \varepsilon^{-2k}, \dots, \varepsilon^{-(m-1)k}$, а затим их саберемо и искористимо једнакост

$$1 + \varepsilon^{j-k} + \varepsilon^{2(j-k)} + \dots + \varepsilon^{(m-1)(j-k)} = \begin{cases} m, & j \equiv k \pmod{m}, \\ 0, & j \not\equiv k \pmod{m}, \end{cases}$$

добивамо:

$$\sum_{j=0}^{m-1} (1 + \varepsilon^j)^n \varepsilon^{-kj} = m \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k+m} + \binom{n}{k+2m} + \dots \right].$$

Леву страну последње једнакости можемо трансформисати на следећи начин:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1} (1 + \varepsilon^j)^n \varepsilon^{-kj} &= \sum_{j=0}^{m-1} (\varepsilon^{\frac{j}{2}} + \varepsilon^{-\frac{j}{2}})^n \varepsilon^{\frac{jn}{2} - jk} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \left(2 \cos \frac{j\pi}{m} \right)^n \left[\cos \frac{j(n-2k)\pi}{m} + i \sin \frac{j(n-2k)\pi}{m} \right]. \end{aligned}$$

Како је лева страна реалан број, то је и сума уз имагинарну јединицу 0, па одавде непосредно следи тражена једнакост.

Стављајући у ове идентитете фиксне вредности за неке од параметара, добијамо комбинаторне идентитете који су само специјалан случај горе наведених.

ЗАДАЦИ

1. Доказати да за сваки природан број n важе једнакости:

$$\sum_{k=1}^n (k+1) \binom{n}{k} = (n+2)2^{n-1}; \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k (k+1) \binom{n}{k} = 0.$$

2. Доказати следећи идентитет

$$\binom{n}{0} - \frac{1}{3} \binom{n}{1} + \frac{1}{5} \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} \binom{n}{n} = \frac{n!2^n}{(2n+1)!}.$$

3. Израчунати следећу суму у функцији од n :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k^3 + 9k^2 + 26k + 24} \binom{n}{k}.$$

4. Доказати да за природне бројеве m и n важи:

$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \binom{n+m}{k}^{-1} = \frac{n+m+1}{(m+1)(m+2)}.$$

5. Доказати да за све целе бројеве n и m , такве да је $n \geq m \geq 0$ важе једнакости:

$$\sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}$$

и

$$\sum_{k=m}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \begin{cases} (-1)^n, & n = m, \\ 0, & n > m. \end{cases}$$

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија тангента во 2007/08 година