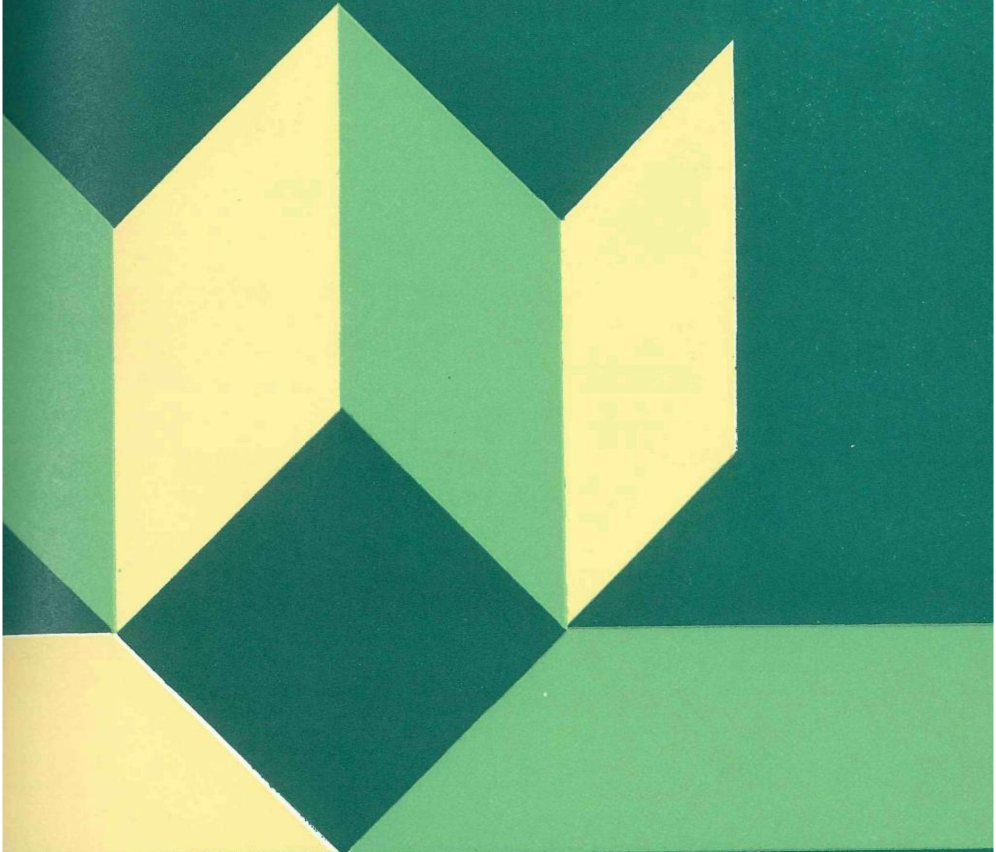
Глигор Тренчевски



ГЕОМЕТРИЈА

за VIII одделение

ГЛИГОР ТРЕНЧЕВСКИ

ГЕОМЕТРИЈА

ЗА VIII ОДДЕЛЕНИЕ

„ПРОСВЕТНО ДЕЛО"
СКОПЈЕ 1978

Уредник

Кирил Милчев

Рецензенти:

Асен Радојков, професор на Педагошката Академија „Гоце Делчев“ — Штип
Дафинче Ристески, советник по математика во Заводот за школство — Охрид
Љубица Симовска, наставник во основното училиште „Песталоци“ — Скопје

Со решение на Републичкиот педагошки совет бр. 03—41 од 10. IV. 1978 година се одобрува употребата на овој учебник

СЛИЧНОСТ

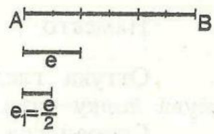
§ 1. ОДНОС НА ДВЕ ОТСЕЧКИ

Секоја отсечка има своја точно определена должина. Но покрај тоа должината на една иста отсечка може да биде изразена со различни броеви во зависност од изборот на единичната отсечка (мерната единица).

Ако за мерна единица ја земеме отсечката e (црт. 1), должината на отсечката AB, ја изразуваме со бројот $3e$, т.е. $\overline{AB} = 3e$. Ако пак за мерна единица земеме друга отсечка e_1, половината од првата мерна единица e, тогаш должината на дадената отсечка AB ја изразуваме со бројот $6e_1$, т.е. $\overline{AB} = 6e_1$.

Меѓутоа, при утврдена мерна единица должината на секоја отсечка се изразува со еден и само со еден позитивен број, кој може да биде цел, рационален или ирационален број. Тој број се вика *мерен број* на должината на отсечката.

Честопати е потребно да се споредат две отсечки. Тоа го правиме преку нивниот однос.



Црт. 1

Дефиниција: *Однос на две отсечки се вика односот на нивните должини, при услов да се мерени со една иста мерна единица.*

Односот на две отсечки AB и CD го запишуваме или во вид на количник $\overline{AB} : \overline{CD}$, или во вид на дропка $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$, при што отсечката AB се вика *прв член* на односот, а отсечката CD — *втор член* на односот.

Должините на отсечките AB и CD нека се изразени во сантиметри, на пример $\overline{AB}=7$ cm и $\overline{CD}=5$ cm. Тогаш нивниот однос ќе биде:

$$\overline{AB} : \overline{CD} = 7 \text{ cm} : 5 \text{ cm} \quad \text{или} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{7 \text{ cm}}{5 \text{ cm}}.$$

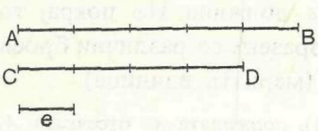
Бидејќи количникот на два истоимени броја е неименуван (апстрактен) број, тоа и односот на две отсечки секогаш е апстрактен број. Затоа наместо односот $\frac{7 \text{ cm}}{5 \text{ cm}}$ пишуваме $\frac{7}{5}$.

За односот на две отсечки важи следнава:

Теорема: *Односот на две отсечки не зависи од изборот на мерната единица со која тие се мерени.*

Доказ: Нека се дадени отсечките AB и CD со заедничка мерна единица — отсечката e (црт. 2). Нека мерната единица e се содржи во AB, на пример 5 пати, а во CD — 4 пати, т.е. $\overline{AB}=5e$ и $\overline{CD}=4e$. Во тој случај односот на отсечките AB и CD, ќе биде: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\dfrac{5e}{4e}=\dfrac{5}{4}$.

Ако за мерна единица на AB и CD земеме отсечка, на пример 3 пати помала од отсечката e, тогаш таа нова единица $e_1=\dfrac{e}{3}$ ќе се содржи во секоја од дадените отсечки 3 пати повеќе, отколку отсечката e. Тогаш должините на AB и CD ќе бидат $\overline{AB}=15e_1$ и $\overline{CD}=12e_1$ но нивниот однос $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\dfrac{15\,e_1}{12\,e_1}=\dfrac{15}{12}=\dfrac{5}{4}$ останува непроменет, штд.



Црт. 2

Пример: Дадени се отсечките AB и CD. а) Нека нивните должини се изразени во метри, на пример: $\overline{AB}=2$ m, $\overline{CD}=3$ m. Нивниот однос е еднаков: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\dfrac{2\text{ m}}{3\text{ m}}=\dfrac{2}{3}$

б) Нека нивните должини бидат изразени во сантиметри. Тогаш $\overline{AB}=200$ cm, $\overline{CD}=300$ cm. Нивниот однос: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\dfrac{200\text{ cm}}{300\text{ cm}}=\dfrac{200}{300}=\dfrac{2}{3}$ гледаме не се променил.

Односите $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ и $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ велиме се *обратни* или *реципрочни* еден на друг. Ако е $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=k$, тогаш $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{k}$

Наместо $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=k$ често пишуваме $\overline{AB}=k\cdot\overline{CD}$.

Оттука гледаме дека: бројот k — однос на отсечките AB и CD, покажува колку пати отсечката CD се содржи во првата отсечка AB.

Според тоа, ако за мерна единица на отсечките AB и CD ја земеме отсечката CD, тогаш од $\overline{AB}=k\cdot\overline{CD}$ следува дека бројот k е мерен број на должината на отсечката AB. Затоа можеме да кажеме дека:

Однос на две отсечки е мерниот број на првата отсечка, кога втората отсечка се зема за мерна единица.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Дадени се отсечките: $a=4$ cm и $b=8$ cm. Одреди го нивниот однос. Дали ќе се промени односот на дадените отсечки, ако бидат нивните должини изразени во дециметри (или во милиметри)?

2. На дадена права се нанесени последователно пет отсечки: $AB\cong BC\cong CD\cong DE\cong EF$. Одреди ги односите: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$, $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AF}}$, $\dfrac{\overline{CF}}{\overline{AD}}$, $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{CF}}$, $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{BE}}$

3. Ако мерните броеви на должините на две отсечки се 7 и 10, дали може да се тврди која од нив има поголема должина.

4. Помалата од две отсечки се содржи во поголемата 4 пати и останува остаток, кој пак се содржи во помалата отсечка точно 5 пати. Колку е долга поголемата отсечка, ако помалата отсечка е долга 1 cm?

5. Одреди го односот на отсечките, чии должини се: а) 4 cm и 12 cm, б) 4,5 cm и 9 cm, в) 5 cm и 2 dm, г) 1 m и 4 dm.

6. Дали ќе се промени односот на две отсечки, ако и двете отсечки ги: а) зголемиме 2 пати, б) намалиме 3 пати?

7. Во правоаголен триагоник еден од аглите изнесува 30°. На што е еднаков односот од помалата катета и хипотенузата?

8. Точката M ја дели отсечката AB во однос $\overline{AM} : \overline{MB} = 4 : 3$. Одреди ги односите $\overline{AM} : \overline{AB}$ и $\overline{AB} : \overline{MB}$.

9. Точката M ја дели отсечката AB во однос $\overline{AM} : \overline{MB} = 3 : 4$. Одреди ја должината на отсечките AB и MB, ако $\overline{AM} = 3{,}6$ cm.

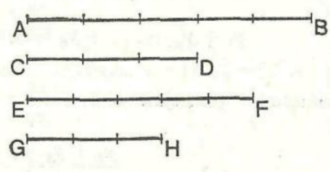
§ 2. ПРОПОРЦИОНАЛНИ ОТСЕЧКИ

Нека се дадени два пара отсечки AB, CD и EF, GH (црт. 3), такви што односот на првите две да е еднаков на односот на другите две отсечки, на пример: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{5}{3}$ и $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = \dfrac{5}{3}$.

Бидејќи односите $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ и $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$ се еднакви, тоа од нив може да се состави равенството $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$, кое се вика *геометриска пропорција.*

Дефиниција: ***Два пара отсечки (односно четири отсечки) се викаат пропорционални, ако односот на отсечките од едниот пар е еднаков на односот на отсечките од другиот пар.***

На пример: отсечките AB, CD, EF и GH (црт. 3) се пропорционални, бидејќи тие ја образуваат пропорцијата $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$.



Црт. 3

Секоја од четирите пропорционални отсечки се вика *четврта пропорционала* на другите три отсечки.

Во пропорцијата $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$ отсечките AB и GH се викаат *надворешни* (*крајни*) членови, а CD и EF — *внатрешни* (или *средни*) членови на пропорцијата.

Пропорцијата $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{EF}}$, во која отсечката CD се јавува двапати како внатрешен член, се вика *непрекината пропорција*, а отсечката CD се вика *средна геометриска пропорционала* или *геометриска средина* за отсечките AB и EF.

Бидејќи односот на две отсечки е однос на нивните должини, т.е. однос на броеви; затоа геометриските пропорции ќе ги имаат сите својства на пропорциите составени од броеви.

Ако имаме две множества од по n отсечки: $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ и $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ и нека односот од соодветните отсечки од едното и другото множество да е ист број k, т.е.

$$\frac{y_1}{x_1}=k, \quad \frac{y_2}{x_2}=k, \quad \frac{y_3}{x_3}=k, \ldots, \frac{y_n}{x_n}=k,$$

тогаш од нив можеме да ја образуваме пропорцијата:

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_3}{x_3}=\cdots=\frac{y_n}{x_n}=k,$$ која се вика *продолжена пропорција.*

Во тој случај за отсечките $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ велиме дека се *пропорционални* соодветно на отсечките $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, а бројот k се вика *коефициент на пропорционалноста.*

За продолжените пропорции важи следнава

Теорема: *Збирот на сите први членови на еднаквите односи кај продолжената пропорција се однесува кон збирот на сите нивни втори членови исто како секој прв член кон соодветниот втор член,* т.е.

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=\cdots=\frac{y_n}{x_n}=k \Rightarrow \frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}=\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=\cdots=\frac{y_n}{x_n}=k$$

Доказ: Од продолжената пропорција $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=\ldots=\frac{y_n}{x_n}=k$ следуваат равенствата: $y_1=kx_1,\ y_2=kx_2, \ldots, y_n=kx_n$.

Ако ги собереме соодветните страни на горниве равенства, добиваме:

$$y_1+y_2+\ldots+y_n=k\,(x_1+x_2+\ldots+x_n), \text{ или } \frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{x_1+x_2+\ldots+x_n}=k,$$

односно (бидејќи е $k=\frac{y_1}{x_1},\ k=\frac{y_2}{x_2}, \ldots$):

$$\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{x_1+x_2+\ldots+x_n}=\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=\ldots=\frac{y_n}{x_n}=k$$

Со тоа теоремата е докажана.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. При кој услов отсечките a, b, c, се соодветно пропорционални на отсечките a_1, b_1, c_1?

2. Дадени се три отсечки: $a=12$ cm, $b=5$ cm и $c=18$ cm. Одреди колку треба да биде долга четвртата отсечка d, така што тие четири отсечки да бидат пропорционални, т.е. да важи $a:b=c:$ d.

3. Дали се пропорционални отсечките a, b, c и d, ако тие се долги: а) $a=1{,}5$ dm $b=8$ cm, $c=7{,}5$ cm $d=4$ cm, б) $a=8$ cm, $b=5$ cm, $c=9$ cm, $d=6$ cm?

§ 3. ТЕОРЕМИ ЗА ПРОПОРЦИОНАЛНИ ОТСЕЧКИ

Теорема 1. *Ако по едниот крак на еден агол пренесеме неколку складни отсечки и низ нивните крајни точки повлечеме паралелни прави, што ќе го пресечат другиот крак на аголот; тогаш тие од другиот крак на аголот ќе отсечат складни една на друга отсечки.*

Доказ: Нека е даден аголот MON и од темето O по кракот OM нека се пренесени три складни отсечки $OA \cong AB \cong BC$ (црт. 4).

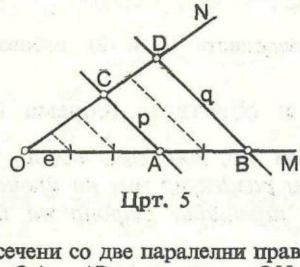
Ако низ точките A, B и C повлечеме паралелни прави, што ќе го пресечат другиот крак на аголот MON, тогаш и на тој крак ќе добиеме три отсечки: OD, DE и EF. Треба да докажеме дека: $OD \cong DE \cong EF$.

За да го покажеме тоа, низ точките D и E повлекуваме други две паралелни прави со кракот OM, па така ги добиваме триаголниците OAD, DKE и ELF. Тие имаат по една складна страна $OA \cong DK \cong EL$ (зошто?). А аглите што лежат на тие страни им се соодветно складни, т.е. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2 \cong \measuredangle 3$ (како согласни) и $\measuredangle 4 \cong \measuredangle 5 \cong \measuredangle 6$ (како агли со заемно паралелни краци). Според тоа: $\Delta OAD \cong \Delta DKE \cong \Delta ELF$.

Од складноста на тие триаголници следува дека и другите елементи им се складни, т.е. $OD \cong DE \cong EF$, штд., а исто така и $AD \cong KE \cong LF$.

Теорема 2-а. *Две паралелни прави што ги сечат краците на еден агол, отсекуваат од нив пропорционални отсечки.*

Црт. 4



Црт. 5

Доказ: Краците на аголот MON нека се пресечени со две паралелни прави p и q (црт. 5). При тоа се добиваат: на кракот OM отсечките OA и AB, а на кракот ON — отсечките OC и CD. Треба да докажеме дека важи пропорцијата $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{CD}}$.

Отсечките OA и AB нека имаат заедничка мерна единица — отсечката e, која во OA се содржи, на пример 3 пати, а во AB — на пример 2 пати. Во тој случај: $\overline{OA}=3e$, $\overline{AB}=2e$, а нивниот однос ќе биде $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \dfrac{3\,e}{2\,e} = \dfrac{3}{2}$.

Тој однос ни покажува дека, ако отсечката OA ја поделиме на три складни дела, отсечката AB ќе содржи два такви дела. Ако сега низ секоја разделна точка повлечеме прави паралелни со p и q, тогаш и отсечката OC ќе се раздели на три други складни дела, а отсечката CD на два такви дела. Значи: $\dfrac{\overline{OC}}{\overline{CD}} = \dfrac{3}{2}$

Според тоа, ја добиваме пропорцијата $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{CD}}$, а тоа знчи дек: отсечките OA, AB, OC и CD се пропорционални.

Меѓутоа, пропорционални се и отсечките OA, OB, OC и OD, што лежат една преку друга почнувајќи од темето на аголот MON, т.е.

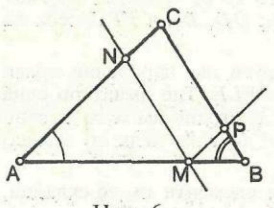
$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}, \quad \text{бидејќи} \quad \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{3}{5} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{3}{5}$$

Може да се покаже дека важи и обратната теорема:

Теорема 2-б. *Ако две прави отсекуваат од краците на некој агол пропорционални отсечки, тогаш тие прави се паралелни.*

Теорема 3-а. *Права, што е паралелна со една страна на триаголникот и ги сече другите две негови страни, отсекува од него триаголник чии страни се пропорционални на страните на дадениот триаголник.*

Доказ: Даден е ΔABC и $MN \| BC$ (црт. 6). Треба да докажеме дека:



Црт. 6

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$$

Гледаме дека аголот BAC е пресечен со паралелните прави MN и BC, па согласно теоремата 2-а имаме:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} \tag{1}$$

Низ точката M да повлечеме права MP паралелна со страната AC на ΔABC, која ќе ја пресече страната BC во точката P (црт. 6). Во тој случај за аголот ABC и $MP \| AC$, согласно теоремата 2-а, ќе биде:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{BC}}, \quad \text{но бидејќи } PC \cong MN, \text{ тоа } \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}} \tag{2}$$

Од пропорциите (1) и (2) добиваме $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$

Важи и обратната теорема на теоремата 3-а.

Теорема 3-б. *Ако една права, при пресекувањето на две страни на триаголникот ги разделува нив на пропорционални отсечки, тогаш таа права е паралелна на третата страна на триаголникот.*

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Краците на еден агол MON се пресечени со две паралелни прави AB и CD при што точките A и C се од едниот крак, а точките B и D од другиот крак. Одреди ја должината на отсечката OB, ако е: а) $\overline{OA}=4$ cm, $\overline{OC}=6$ cm, $\overline{OD}=8$ cm, б) $\overline{OA}=3$ cm, $\overline{AC}=4$ cm, $\overline{BD}=6$ cm.

2. Краците на аголот MON пресечени се со две прави p и q, при што на кракот OM се добиени отсечките OA и AB, а на кракот ON — отсечките OC и CD. Испитај дали правите p и q се паралелни или не, ако: а) $\overline{OA}=3{,}2$ cm, $\overline{AB}=2$ cm, $\overline{OC}=4{,}8$ cm и $\overline{CD}=3$ cm, б) $\overline{OA}:\overline{AB}=4:3$, $\overline{OC}=3{,}2$ cm и $\overline{CD}=2{,}8$ cm!

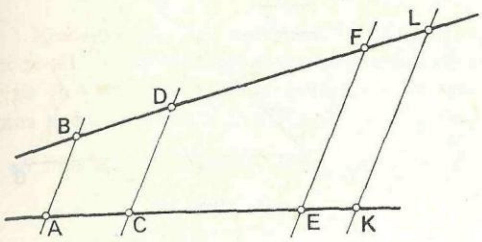
3. На едниот крак на аголот MON од темето O нанесени се едно по друго отсечките OA, AB и BC, кои се однесуваат како $1:2:3$. На другиот крак е нанесена отсечката $\overline{OA_1}=4$ cm, а низ точките B и C повлечени се прави BB_1 и CC_1 паралелни на AA_1. Одреди ги должините на отсечките A_1B_1 и B_1C_1.

4. Даден е триаголникот ABC. Точката M ја разделува страната AC на две отсечки $\overline{AM}=6$ cm и $\overline{MC}=3$ cm. Одреди го односот на растојанијата на точките M и C од страната AB на тој триаголник!

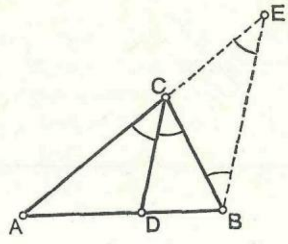
5. Во трапезот $ABCD$ краците AD и BC се продолжени до пресекот во точката M. Одреди $\overline{DM}$, ако е $\overline{AD}=2$ dm, $\overline{BC}=1{,}5$ dm, $\overline{CM}=1{,}2$ dm!

6. На цртежот 7 е: $AB \| CD \| EF \| KL$, $\overline{AC}=1{,}5$ cm, $\overline{CE}=3$ cm, $\overline{EK}=1$ cm. Одреди ги должините на отсечките BD, DF, FL, ако $\overline{BL}=6{,}6$ cm.

7. Докажи дека: Бисектрисата на внатрешниот агол на триаголникот ја дели спротивната страна на делови, што се пропорционални на страните кои го образуваат тој агол. Притоа користи го цртежот 8, на којшто CD е бисектриса на аголот C, $BE \parallel CD$, а точката E е пресек на правата BE и продолжението на страната AC.



Црт. 7



Црт. 8

8. Даден е триаголник ABC, во кој BD е бисектриса на аголот B. Одреди ги должините на отсечките AD и DC, ако страните на триаголникот се долги: $AB=5$ cm, $BC=7{,}5$ cm и $AC=10$ cm.

§ 4. КОНСТРУКЦИЈА НА ПРОПОРЦИОНАЛНИ ОТСЕЧКИ

Врз основа докажаните теореми 1, 2 и 3 (во § 3) можат да се решат низа конструктивни задачи. Еве некои од нив:

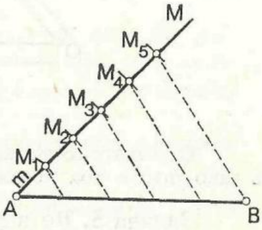
Задача 1. Дадена отсечка AB да се раздели на n складни делови.

Решение: Дадената отсечка AB нека треба да се раздели, на пример на 5 складни дела. За таа цел од точката A ќе повлечеме произволна полуправа AM и на неа со шестар почнувајќи од A ќе пренесеме 5 пати некоја произволна отсечка m. Така на полуправата AM добиваме 5 точки: M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5. Последната точка M_5 ја осоединуваме со крајната точка B на дадената отсечка AB, а низ точките M_1, M_2, M_3, и M_4 повлекуваме прави паралелни со BM_5. Тие прави, согласно теорема 1, ќе ја разделат дадената отсечка AB на 5 складни дела (црт. 9).

На ист начин која и да е отсечка може да се раздели на колку што сакаме складни делови.

Задача 2. Дадена отсечка AB да се раздели во даден однос $m:n$, каде што m и n се природни броеви.

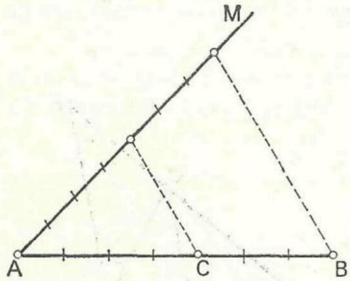
Решение: На отсечката AB треба да се одреди точка C, таква што $\overline{AC} : \overline{CB} = m : n$. Дадениот однос нека е на пример 4 : 3. Дадената отсечка AB за да ја разделиме во однос 4 : 3, прво ќе ја разделиме на $4+3=7$ складни делови (како во задача 1). Потоа на отсечката AB ќе ја издвоиме отсечката AC, која содржи 4 такви дела (црт. 10).



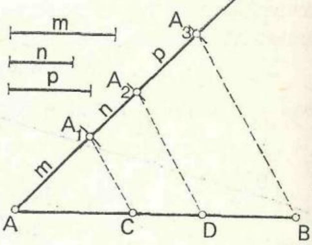
Црт. 9

Навистина имаме: $\overline{AC} : \overline{CB} = 4 : 3$.

Задача 3. Дадена отсечка AB да се раздели на делови, што се пропорционални на отсечките m, n и p.



Црт. 10



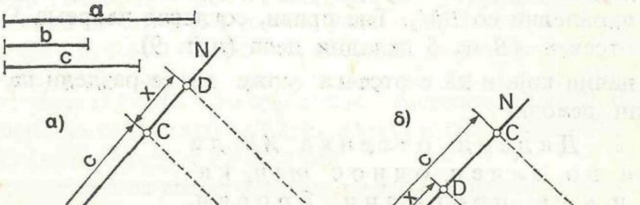
Црт. 11

Решение: Од точката A повлекуваме полуправа AM, која со отсечката AB зафаќа некој агол. Потоа на полуправата AM ги пренесуваме едно по друго дадените отсечки m, n и p (црт. 11). Притоа на полуправата AM ги добиваме точките A_1, A_2 и A_3. Точката A_3 ја соединуваме со B, а низ точките A_1 и A_2 повлекуваме прави паралелни со A_3B. Тие ќе ја пресечат отсечката AB во точките C и D. Согласно теоремата 2-а, имаме

$$\overline{AC} : \overline{CD} : \overline{DB} = m : n : p, \quad \text{односно} \quad \frac{\overline{AC}}{m} = \frac{\overline{CD}}{n} = \frac{\overline{DB}}{p}$$

Задача 4. Дадени се отсечки со должини a, b, c. Да се конструира четвртата пропорционала со должина x, така што $a : b = c : x$.

Решение: Нацртуваме еден произволен агол MON и од темето O по едниот негов крак ги пренесуваме отсечките $\overline{OA} = a$ и $\overline{AB} = b$, а по другиот крак ја пренесуваме отсечката $\overline{OC} = c$ (црт. 12-а). Потоа ги сврзуваме точките A и C, а низ точката B повлекуваме права паралелна со AC, која ќе го пресече кракот AN во некоја точка D. Отсечката $\overline{CD} = x$ е бараната четврта пропорционала на дадените отсечки со должини a, b, c; бидејќи таа ја задоволува пропорцијата $a : b = c : x$.



Црт. 12

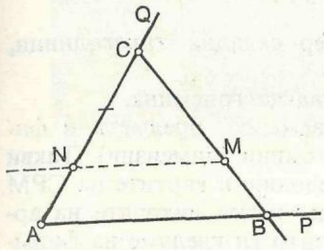
Отсечките со должина a и b можеме да ги пренесеме по кракот AM и една преку друга како што е тоа покажано на цртеж 12-б.

Задача 5. Во внатрешната област на даден агол дадена е точка M. Низ точката M да се повлече права, таква што отсечката од таа права зафатена од краците на аголот со точката M да биде разделена во однос $1 : 2$.

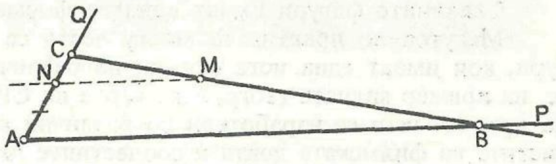
Решение. Анализа: Да претпоставиме дека задачата е решена. BC нека е бараната отсечка (црт. 13), т.е. $\overline{BM}:\overline{MC}=1:2$. Ако низ точката M повлечеме права $MN \parallel AB$, тогаш врз основа теорема 2-а, ќе имаме:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{AN}}{\overline{NC}}=\frac{1}{2}. \text{ Според тоа: } \overline{NC}=2\cdot\overline{AN}.$$

Конструкција: Од направената анализа следува следнава конструкција: Низ дадената точка M повлекуваме права паралелна со кракот AP, која ќе го пресече другиот крак AQ во точката N. Потоа од точката N по крkот AQ ја пренесуваме отсечката $\overline{NC}=2\cdot\overline{AN}$, па низ добиената точка C и точката M повлекуваме права CM, која ќе го пресече кракот AP во точката B. Отсечката BC е бараната отсечка, бидејќи: $\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{AN}}{\overline{NC}}=\frac{1}{2}$



Црт. 13



Црт. 14

Доказот следува од самата анализа и конструкцијата.

Дискусија: Задачата има две решенија, бидејќи можеме да земеме дека: $\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}}=\frac{2}{1}$.

Во тој случај ќе биде $\overline{NC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AN}$ (црт. 14).

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Раздели ја отсечката $\overline{AB}=10$ cm на три складни дела.

2. Дадена отсечка AB раздели ја на: а) 5, б) 7 складни делови.

3. Дадена отсечка AB раздели ја на два дела во однос $2:7$.

4. Дадена отсечка $\overline{AB}=9$ cm раздели ја на два дела, кои се пропорционални на отсечките $a=2{,}5$ cm и $b=5$ cm.

5. Раздели ја отсечката $\overline{MN}=8$ cm на три дела, што се соодветно пропорционални на отсечките: $a=1$ cm, $b=2$ cm и $c=3$ cm.

6. Конструирај ја четвртата пропорционала за отсечките: а) $a=3$ cm, $b=5$ cm, $c=7$ cm од пропорцијата $a:b=c:x$, б) $a=2$ cm, $b=5$ cm, $c=3{,}5$ cm од пропорцијата $a:b=x:c$.

7. Дадена е отсечка со должина p. Конструирај рамностран триаголник, чиј периметар е еднаков на p.

8. Дадена е отсечка со должина p. Конструирај триаголник, чиј периметар е еднаков на p, а страните да се однесуваат како $2:3:4$.

9. Дадена е отсечка со должина a. Конструирај ги отсечките чии должини се $\frac{3}{4}a$ и $\frac{7}{5}a$.

10. Дадена е отсечка $\overline{AB}=6$ cm. На нејзиното продолжение одреди точка C, таква што $\overline{AC} : \overline{BC}=5 : 2$.

11. Дадени се три отсечки со должини a, b, c. Конструирај отсечка, чија должина е еднаква на: а) $x = \dfrac{ab}{c}$, б) $x = \dfrac{ac}{b}$, в) $x = \dfrac{bc}{a}$

12. Конструирај правоаголник, чиј периметар е $L=24$ cm, а страните да му се однесуваат како 5 : 3.

13. Конструирај две кружници со центри во точките A и B, така што тие да се допираат однадвор, а радиусите да им се однесуваат како 3 : 2.

14. Растојанието меѓу две места на географската карта изнесува 2,5 cm. Колкаво е стварното растојание на тие места во природата, ако картата е работена во размер (однос) 1 : 10000?

15. Дадена е отсечка со должина a. Конструирај отсечка чија должина е $x=a^2$, користејќи ја пропорцијата $1 : a=a : x$.

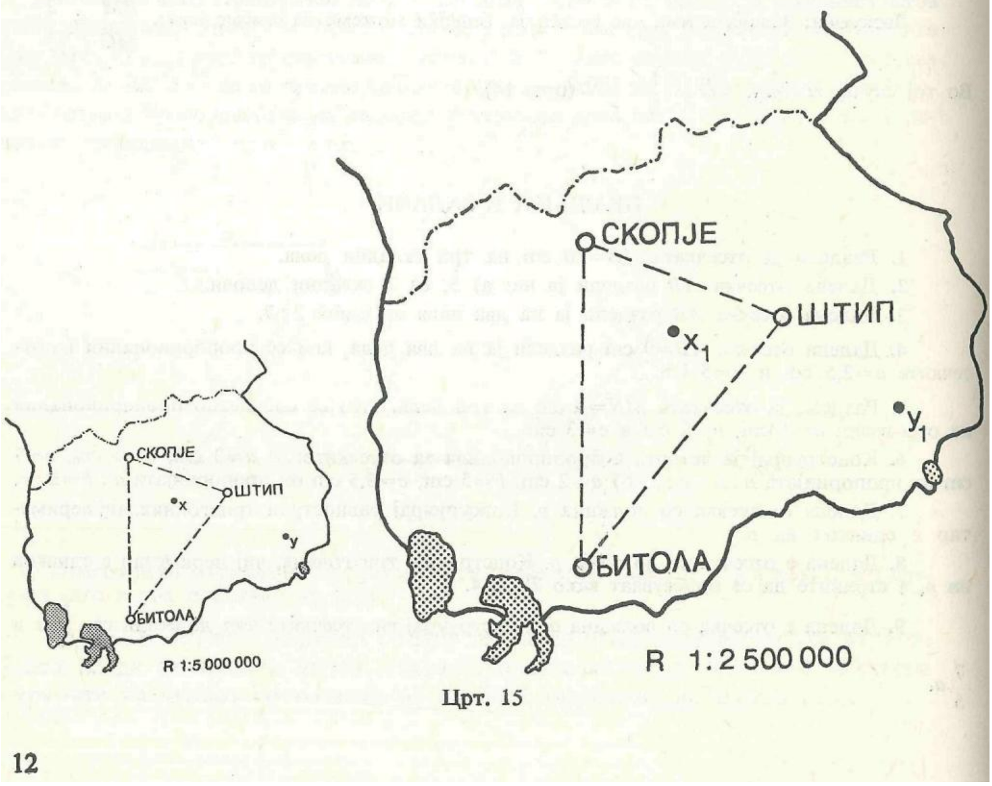
§ 5. ПОИМ ЗА СЛИЧНИ ФИГУРИ

Познат ви е поимот складни фигури, на пример складни триаголници, складни квадрати, складни кружници, итн.

Складните фигури имаат еднаква форма и еднаква големина.

Меѓутоа во практиката многу често се среќаваме со предмети и фигури, кои имаат една иста форма, но различни големини (димензии). Такви се, на пример ѕидната географска карта на СР Македонија и картите на СРМ на црт. 15, што се изработени во различни размери, потоа ликовите на артистите на филмската лента и соодветните ликови, што ги гледаме на филмското платно; фотоснимките направени од ист негатив во различни димензии (црт. 16), итн. Такви се и фигурите на црт. 17.

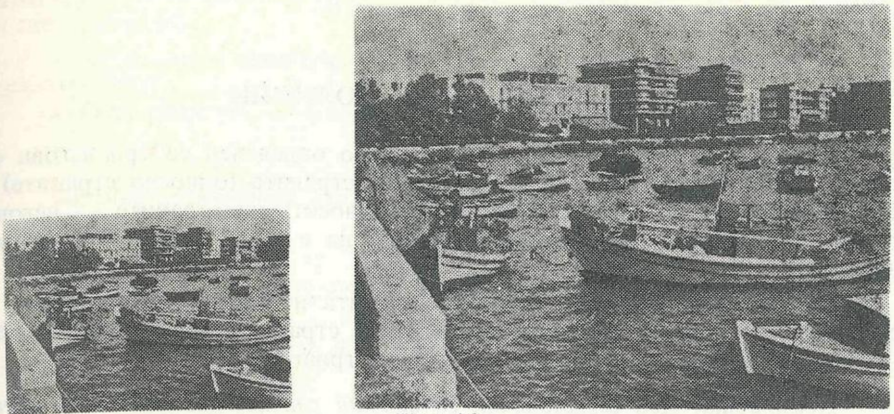
Фигурите, кои имаат иста форма, се викаат *слични фигури*.



Црт. 15

Промената на големината на дадена фигура без да се измени нејзината форма, насетуваме дека претставува нов вид пресликување, кое се вика *пресликување на сличност* или само *сличност*.

Да видиме што ги карактеризира сличните фигури.



Црт. 16

Од двете карти на СРМ на црт. 15, ако ги споредиме растојанијата: Скопје—Битола (СБ), Битола—Штип (БШ) и Штип—Скопје (ШС) од втората карта со соодветните растојанија од првата карта на СРМ, ќе забележиме

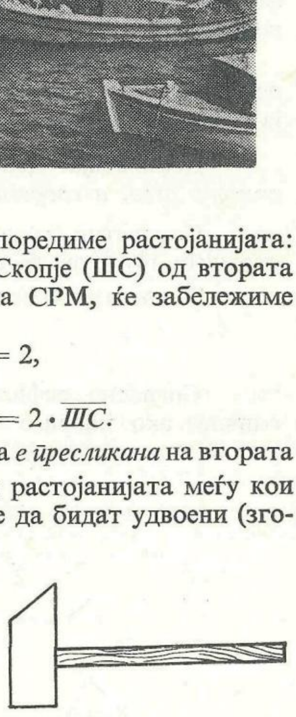
дека: $$\frac{\overline{С'Б'}}{\overline{СБ}} = \frac{\overline{Б'Ш'}}{\overline{БШ}} = \frac{\overline{Ш'С'}}{\overline{ШС}} = 2,$$

односно: $\overline{С'Б'} = 2 \cdot \overline{СБ}$; $\overline{Б'Ш'} = 2 \cdot \overline{БШ}$ и $\overline{Ш'С'} = 2 \cdot \overline{ШС}$.

Според тоа, можеме да кажеме дека првата карта *е пресликана* на втората така што не само растојанијата $\overline{СБ}$, $\overline{БШ}$ и $\overline{ШС}$, туку и растојанијата меѓу кои и да е две точки од првата карта при тоа пресликвање да бидат удвоени (зголемени 2 пати).

Значи, две произволни точки X и Y од првата карта се пресликани во точките X_1 и Y_1 на втората карта, така што:

$$\frac{\overline{X_1 Y_1}}{\overline{XY}} = 2 \text{ или } \overline{X_1 Y_1} = 2 \cdot \overline{XY}$$



Црт. 17

Велиме дека: втората карта на СРМ *е слична* на првата карта со коефициент на сличност $k = 2$ (црт. 15).

Дефиниција: *Ако фигурата Ф на некој начин може да се преслика на фигурата* $Ф_1$ *така што за секои две точки* X *и* $У$ *од фигурата Ф и нивните слики* X_1 *и* Y_1 *од фигурата* $Ф_1$ *да важи релацијата*

$$\frac{\overline{X_1 Y_1}}{\overline{XY}} = k \text{ или } \overline{X_1 Y_1} = k \cdot \overline{XY} \ (k > 0),$$

тогаш велиме дека фигурата $Ф_1$ *е слична на фигурата Ф со коефициент на сличност* k.

Ако фигурата Φ_1 е слична на фигурата Φ, тогаш пишуваме $\Phi_1 \sim \Phi$

Ако пак сакаме да истакнеме дека фигурата Φ_1 е слична на фигурата Φ со коефициент на сличност k, тогаш пишуваме $\Phi_1 \overset{k}{\sim} \Phi$

Разгледувањето на сличните фигури ќе го започнеме од триаголниците.

§ 6. СЛИЧНИ ТРИАГОЛНИЦИ

Знаете дека триаголникот е еднозначно определен со три негови елементи, од кои барем еден да е страна. Од страната (односно страните) зависи големината на триаголникот, а од односите на страните — неговата форма. Но, формата на триаголникот зависна е и од големината на неговите агли.

Според тоа, пресудна улога за формата на триаголникот играат големината на аглите и односите на неговите страни. Затоа целисходно е да ја усвоиме следнава дефиниција за слични триагоници:

Дефиниција: *Два триаголника се викаат слични, ако имаат соодветно складни агли, а соодветните (хомологни) страни им се пропорционални.*

Соодветни (хомологни) страни на два слични триаголници се сметаат страните што лежат спроти складните агли.

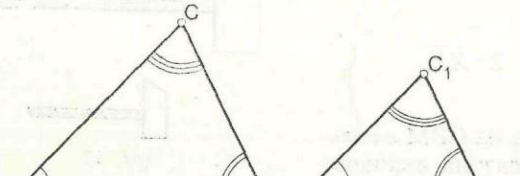
За да означиме дека $\Delta A_1 B_1 C_1$ е сличен на ΔABC, пишуваме

$$\Delta A_1 B_1 C_1 \sim \Delta ABC$$

Согласно дефиницијата триаголниците $A_1 B_1 C_1$ и ABC (црт. 18) се слични, ако нивните елементи (агли и страни) ги исполнуваат следниве услови:

$$1°. \quad \sphericalangle A_1 \cong \sphericalangle A, \ \sphericalangle B_1 \cong \sphericalangle B, \ \sphericalangle C_1 \cong \sphericalangle C$$

$$2°. \quad \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1 C_1}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A_1 C_1}}{\overline{AC}} = k,$$



Црт. 18

каде што k се вика *коефициент на сличност* на $\Delta A_1 B_1 C_1$ во однос на ΔABC и покажува со кој позитивен број треба да се помножат должините на страните на ΔABC за да се добијат должините на соодветните страни на $\Delta A_1 B_1 C_1$.

Ако $\Delta A_1 B_1 C_1 \overset{k}{\sim} \Delta ABC$ и $k > 1$, тогаш од $\frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1 C_1}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A_1 C_1}}{\overline{AC}} = k$ следува дека $\Delta A_1 B_1 C_1$ има k пати поголеми страни отколку ΔABC.

Ако пак $k < 1$ тогаш $\Delta A_1 B_1 C_1$ ќе има $\frac{1}{k}$ пати помали страни отколку ΔABC.

Во специјален случај при $k = 1$, јасно е дека соодветните (хомологни) страни на триаголниците $A_1 B_1 C_1$ и ABC ќе бидат складни, па според тоа и тие се складни.

Значи, складните триаголници се и слични со коефициент на сличност $k=1$. Со тоа покажавме дека:

а) ***Секој триаголник е сличен сам на себе со коефициент на сличност*** $k=1$, т.е.

$$\Delta ABC \sim \Delta ABC$$

Согласно дефиницијата, ако се исполнети условите 1° и 2°, тогаш

$$\Delta A_1B_1C_1 \overset{k}{\sim} \Delta ABC$$

Но, условите 1° и 2° можеме да ги запишеме и во следниот вид:

$$1°.\ \sphericalangle A \cong \sphericalangle A_1, \sphericalangle B \cong \sphericalangle B_1, \sphericalangle C \cong \sphericalangle C_1; \quad 2°.\ \frac{\overline{AB}}{\overline{A_1 B_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A_1 C_1}} = \frac{1}{k},$$

а тоа значи дека

$$\Delta ABC \overset{1/k}{\sim} \Delta A_1B_1C_1$$

Оттука следува својството:

б) Ако $\Delta A_1B_1C_1$ е сличен на ΔABC со коефициент на сличност k, тогаш и ΔABC е сличен на $\Delta A_1B_1C_1$ но со коефициент на сличност $k' = \frac{1}{k}$, т.е.

$$\Delta_1 \overset{k}{\sim} \Delta \Rightarrow \Delta \overset{1/k}{\sim} \Delta_1$$

Може да се докаже дека сличните триаголници го имаат уште и следново својство:

в) Ако триаголникот Δ_1 е сличен на триаголникот Δ со коефициент k_1, а триаголникот Δ_2 е сличен на триаголникот Δ_1 со коефициент k_2, тогаш триаголникот Δ_2 е сличен на триаголникот Δ со коефициент $k=k_1 \cdot k_2$, т.е. ($\Delta_1 \overset{k_1}{\sim} \Delta$ и $\Delta_2 \overset{k_2}{\sim} \Delta_1$) $\Rightarrow \Delta_2 \overset{k_1 \cdot k_2}{\sim} \Delta$.

Својствата (*а*), (б) и (в) покажуваат дека релацијата сличност „$\sim$" на триаголниците е рефлексивна, симетрична и транзитивна. А од алгебрата знаете дека секоја релација што е рефлексивна, симетрична и транзитивна, се вика релација на еквивалентност.

Според тоа ќе важи следнава:

Теорема: *Релацијата сличност „$\sim$" е релација на еквивалентност.*

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. За кои две фигури велиме дека се слични?

2. Наведи неколку примери на слични фигури!

3. Фигурите Φ_1 и Φ_2 се складни. Дали тие се и слични?

4. Дали секои два складни триаголници се и слични? Дали може два нескладни триаголници да бидат слични?

5. Што може да се каже за соодветните агли на два слични триаголници, а што за соодветните страни?

6. Колкави се аглите на ΔABC, ако тој е сличен на ΔBCA?

7. Какви се помеѓу себе два триаголника, ако секој од нив поодделно е сличен со некој трет триаголник?

8. За две фигури познато е дека $\Phi_1 \overset{k}{\sim} \Phi_2$ и $\Phi_2 \overset{k}{\sim} \Phi_1$. За која вредност на k тоа е можно?

9. Колкав е коефициентот на сличноста на триаголникот Δ_1 во однос на Δ_2, ако е познато дека коефициентот на сличноста на Δ_2 во однос на Δ_1 е еднаков на $\frac{5}{8}$?

10. Планот на една иста месност нацртан е двапати, еднаш во размер 1 : 100 и вторпат во размер 1 : 500. На што се еднакви коефициентите на сличност на тие планови еден во однос на друг?

11. Дали се точни следниве тврдења: а) $(\Delta_1 \cong \Delta_2$ и $\Delta_2 \sim \Delta_3) \Rightarrow \Delta_1 \sim \Delta_3$ б) $(\Delta_1 \sim \Delta_2$ и $\Delta_2 \cong \Delta_3) \Rightarrow \Delta_1 \sim \Delta_3$, в) $(\Delta_1 \sim \Delta_2$ и $\Delta_2 \sim \Delta_3) \Rightarrow \Delta_1 \sim \Delta_3$.

§ 7. ПРИЗНАЦИ ЗА СЛИЧНОСТ НА ТРИАГОЛНИЦИТЕ

Дефиницијата за сличност на два триаголника вклучува во себе споредување на сите шест основни елементи (трите страни и трите агли) на едниот триаголник со елементите на другиот триаголник. Меѓутоа постојат минимум услови, кои ако се исполнети, триаголниците да се слични. Тие услови се викаат *признаци за сличност на триаголниците* и важат за кои и да било два триаголника.

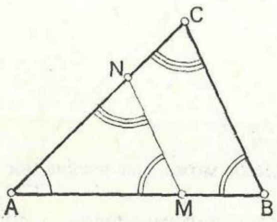
Постојат четири признаци за сличност на триаголниците, за чие што докажување неопходно е претходно да ја докажеме следнава помоќна теорема (лема):

Лема: *Ако пресечеме две страни на еден триаголник (или нивните продолженија) со права паралелна на третата негова страна, добиваме триаголник што е сличен на дадениот.*

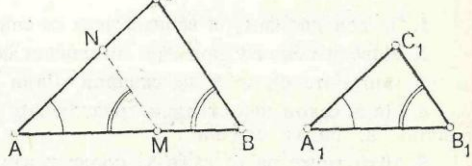
Доказ: Нека е даден ΔABC и $MN \| BC$ (црт. 19). Од цртежот гледаме: $\sphericalangle A$ е заеднички на двата триаголника ABC и AMN, а $\sphericalangle AMN \cong \sphericalangle B$ и $\sphericalangle ANM \cong \sphericalangle C$ (како согласни). А врз основа теорема 3-а (во §3), имаме: $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = k$. Според тоа: $\Delta AMN \sim \Delta ABC$, штд.

Теорема 1. (*прв признак*): *Ако два агла од еден триаголник се соодветно складни на два агла од друг триаголник, тогаш тие триаголници се слични* (црт. 20), т.е.

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle A \cong \sphericalangle A_1 \\ \sphericalangle B \cong \sphericalangle B_1\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\, ABC \sim \Delta\, A_1 B_1 C_1$$



Црт. 19



Црт. 20

Доказ: Нека се дадени ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, $\sphericalangle A \cong \sphericalangle A_1$ и $\sphericalangle B \cong \sphericalangle B_1$ (црт. 20).

Од $\sphericalangle A \cong \sphericalangle A_1$ и $\sphericalangle B \cong \sphericalangle B_1$ следува дека и $\sphericalangle C \cong \sphericalangle C_1$

Нека, на пример, $AB > A_1B_1$. Ако врз страната AB нанесеме отсечка $AM \cong A_1B_1$ и низ точката M повлечеме права $MN \| BC$, ќе добиеме ΔAMN. Согласно лемата имаме: $\Delta AMN \sim \Delta ABC$.

Ќе покажеме дека $\Delta AMN \cong \Delta A_1B_1C_1$.

Навистина: $AM \cong A_1B_1$ (по конструкција), $\measuredangle A \cong \measuredangle A_1$ (по услов) и $\measuredangle M \cong \measuredangle B_1$ (бидејќи $\measuredangle M \cong \measuredangle B$, а $\measuredangle B \cong \measuredangle B_1$). Според тоа, согласно признакот за складност ACA, ќе биде $\Delta AMN \cong \Delta A_1 B_1 C_1$.

Бидејќи: $\Delta ABC \sim \Delta AMN$ и $\Delta AMN \cong \Delta A_1B_1C_1$, тоа $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, штд.

Од теоремата 1 следуваат следниве последици:

Последица 1. **Сите рамнострани триаголници се слични меѓу себе.**

Последица 2. **Сите рамнокраки правоаголни триаголници се слични меѓу себе.**

Последица 3. **Два рамнокраки триаголници се слични, ако тие имаат по еден складен агол при врвот или при основата.**

Последица 4. **Два правоаголни триаголници се слични, ако тие имаат по еден складен остар агол.**

Теорема 2. (*втор признак*): *Ако две страни од еден триаголник се пропорционални на две страни од друг триаголник и аглите, што се зафатени од тие страни, се соодветно складни; тогаш тие триаголници се слични* (црт. 21), т.е.

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A_1 B_1}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A_1 C_1}} \\ \measuredangle A \cong \measuredangle A_1\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1 B_1 C_1$$

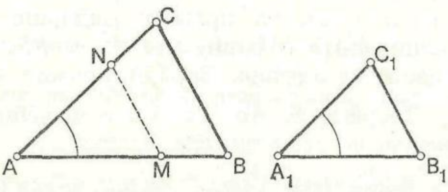
Доказ: Нека се дадени ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A_1 B_1}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A_1 C_1}}$ и $\measuredangle A \cong \measuredangle A_1$.

Нека, на пример $AB > A_1 B_1$. Ако врз страната AB нанесеме отсечка $AM \cong A_1B_1$ и низ точката M повлечеме права $MN \parallel BC$, ќе добиеме ΔAMN. Тогаш согласно лемата, имаме $\Delta AMN \sim \Delta ABC$, откаде $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AN}}$.

Меѓутоа по услов имаме дека $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A_1 B_1}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A_1 C_1}}$, а по конструкција: $A_1 B_1 \cong AM$. Според тоа, левите односи на тие две пропорции се еднакви, а тоа значи дека и десните односи им се еднакви, т.е. $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AN}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A_1 C_1}}$, а тоа е можно само ако $AN \cong A_1 C_1$

Од $AM \cong A_1B_1$, $AN \cong A_1C_1$ и $\measuredangle A \cong \measuredangle A_1$ согласно признакот CAC за складност на триаголниците, имаме дека $\Delta AMN \cong \Delta A_1B_1C_1$.

Бидејќи: $\Delta ABC \sim \Delta AMN$ и $\Delta AMN \cong \Delta A_1 B_1 C_1$, тоа $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, штд.



Црт. 21

Последица 5. **Два правоаголни триаголници се слични, ако катетите на едниот се пропорционални на катетите од другиот.**

Теорема 3. (*трет признак*): *Ако трите страни на еден триаголник се пропорционални на трите страни на друг триаголник, тогаш тие триаголници се слични* (црт. 22), т.е.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1 B_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1 C_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A_1 C_1}} = k \Rightarrow \Delta ABC \sim A_1 B_1 C_1$$

Доказ: Нека се дадени ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, чии страни се соодветно пропорционални (црт. 22), т.е. $\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}} = k.$

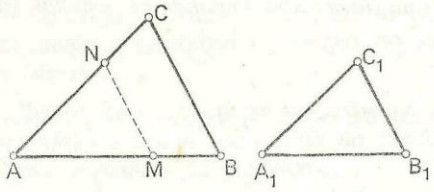
Нека, на пример $AB > A_1B_1$. Врз страната AB нанесуваме отсечка $AM \cong A_1B_1$ и низ точката M повлекуваме права $MN \| AB$. Добиваме ΔAMN.

Согласно лемата имаме $\Delta AMN \sim \Delta ABC$, откаде $\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AN}}$,

а по услов имаме: $\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}}$

Бидејќи $AM \cong A_1B_1$ (по конструкција), тоа првите односи на горниве две продолжени пропорции се еднакви. Оттука следува дека и другите односи се еднакви меѓу себе, т.е.

$\frac{\overline{BC}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}}$, откаде $MN \cong B_1C_1$ и $\frac{\overline{AC}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}}$, откаде $AN \cong A_1C_1$.



Црт. 22

Според тоа, трите страни на ΔAMN се соодветно складни на трите страни на $\Delta A_1B_1C_1$, а тоа значи дека $\Delta AMN \cong \Delta A_1B_1C_1$.

Бидејќи: $\Delta ABC \sim \Delta AMN$ а $\Delta AMN \cong \Delta A_1B_1C_1$, тоа $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, штд.

Последица 6. **Два рамнокраки триаголници се слични, ако основата и кракот на едниот се пропорционални на основата и кракот од другиот.**

Постои уште еден признак за сличност на триаголниците, кој ќе го наведеме без доказ.

Теорема 4 (*четврти признак*): *Ако две страни од еден триаголник се пропорционални на две страни од друг триаголник и аглите, што лежат спроти поголемите од тие страни, се соодветно складни; тогаш тие два триаголника се слични.*

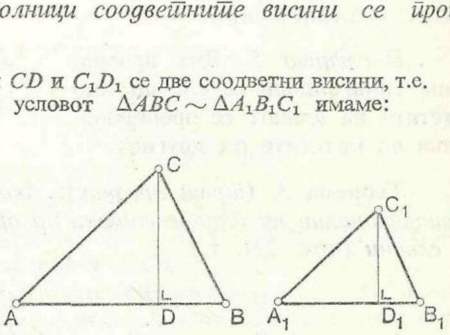
Последица 7. **Два правоаголни триаголници се слични, ако хипотенузата и една катета од едниот се пропорционални на хипотенузата и една катета од другиот.**

Лесно може да се докаже дека кај сличните триаголници и сите соодветни отсечки, на пример: медијаните, бисектрисите, височините, радиусите на впишаните и радиусите на опишаните кружници се пропорционални на соодветните страни. Заради пример ќе ја докажеме само следнава:

Теорема 5. *Кај сличните триаголници соодветните висини се пропорционални на соодветните страни.*

Доказ: Нека $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ во кои CD и C_1D_1 се две соодветни висини, т.е. $CD \perp AB$ и $C_1D_1 \perp A_1B_1$ (црт. 23). Од условот $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ имаме: $\sphericalangle A \cong \sphericalangle A_1$ и

$\frac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}}$



Црт. 23

Правоголните тригоници ADC и $A_1D_1C_1$ се слични, бидејќи имаат по еден складен остар агол ($\sphericalangle A \cong \sphericalangle A_1$).

Од нивната сличност следува дека $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{C_1D_1}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}}$, а по услов е

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}}.$$

Според тоа: $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{C_1D_1}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}}$, штд.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Испитај дали се слични два триаголника, чии страни се долги:
а) 8 cm, 9 cm, 15 cm и 4 dm, 45 cm, 7,5 dm; б) 1 dm, 15 cm, 7 cm и 5 cm, 3,5 cm, 7,5 cm; в) 6 cm, 9 cm, 12 cm и 2 cm, 3 cm, 5 cm.

2. Страните на триаголникот се долги: 9 cm, 15 cm и 18 cm. Одреди ги страните на триаголник, што е сличен на дадениот, ако најголемата негова страна е складна со најмалата страна на дадениот триаголник.

3. Еден правоаголен триаголник има агол 27°, а друг правоаголен триаголник има агол 63°. Дали се слични тие траиголници?

4. Два равнокраки триаголници имаат: а) складни тапи агли, б) складни прави агли. Дали се слични тие триагоници?

5. Во правоаголниот триаголник повлечена е висината од темето на правиот агол кон хипотенузата. Колку парови слични триагоници се образувани при тоа? Запиши?

6. Докажи дека: трите средни линии на еден триголник образуваат триаголник сличен на дадениот.

7. Докажи дека во два слични триаголника соодветните: а) бисектриси, б) медијани се пропорционални на соодветните страни.

8. Аголот при врвот на даден равнокрак триаголник има 36°. Докажи дека бисектрисата на еден агол при основата на тој триаголник отсекува од него триаголник, што е сличен на дадениот.

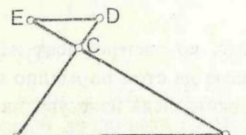
9. Даден е триаголник ABC, чии страни се долги: 9 cm, 15 cm, 21 cm. Одреди ги страните на $\Delta A_1B_1C_1$, ако $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ со коефициент на сличност $k = \dfrac{4}{3}$.

10. Страните на еден триаголник се долги: 13 cm, 10 cm и 12 cm, а најголемата страна на нему сличен триаголник е долга 19,5 cm. Одреди ги должините на другите две страни на вториот триаголник.

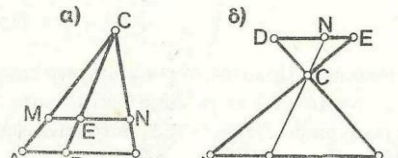
11. На црт. 24 е $DE \parallel AB$. а) Покажи дека $\Delta ABC \sim \Delta CDE$, б) Запиши ја пропорционалноста на соодветните страни и одреди го коефициентот на сличноста, ако $\overline{BE}=8$ cm и $\overline{CE}=2$ cm.

12. Колку пара слични триагоници има на: а) црт. 25-а $(MN \parallel AB)$ б) црт. 25-б $(ED \parallel AB)$? Запиши!

13. Зошто секои два: а) равнострани триаголници, б) равнокраки правоаголни триаголници се слични?



Црт. 24



Црт. 25

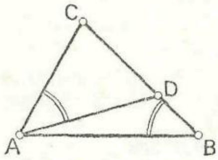
14. Во триаголник ABC на црт. 26 е повлечена отсечка AD така што $\measuredangle CAD \cong \measuredangle ABC$. Кои триаголници на тој цртеж се слични?

15. Должините на страните на ΔABC се: $a=8$ cm, $b=5$ cm и $c=9$ cm. Одреди ги должините на страните на нему сличниот триаголник $A_1B_1C_1$ ако е $a_1=6$ cm.

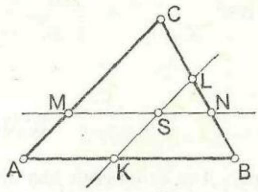
16. Ако е даден некој триаголник, а треба да се конструира друг сличен на него триаголник; кои елементи остануваат исти, а кои можат да се менуваат?

17. Даден е триаголник со страни 4 cm, 5 cm и 8 cm. Конструирај сличен триаголник со 2 пати подолги страни!

18. Даден е рамнокрак триаголник ABC со основа $a=4$ cm и соодтвена висина $h=5$ cm. Конструирај сличен триаголик $A_1B_1C_1$ со соодветна висина $h_1=7$ cm.



Црт. 26



Црт. 27

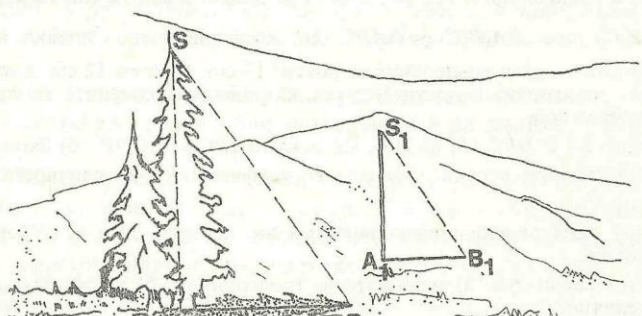
19. На црт. 27 е нацртан триаголник ABC и се повлечени прави $KL \parallel AC$ и $MN \parallel AB$. Одреди кои триаголници на цртежот се слични!

20. Конструирај триаголник $A_1B_1C_1$, кој ќе биде сличен со даден триаголник ABC со коефициент на сличност: а) 2, б) $\frac{1}{3}$, в) $\frac{3}{4}$.

§ 8. ПРИМЕНА НА СЛИЧНОСТА НА ТРИАГОЛНИЦИТЕ

Својствата на сличните триаголници имаат многу широка и разновидна примена не само во геометријата, туку и во практиката. На неколку примери ќе ја покажеме таа примена.

Задача 1. Да се одреди висината на едно дрво според должината на неговата сенка (црт. 28).



Црт. 28

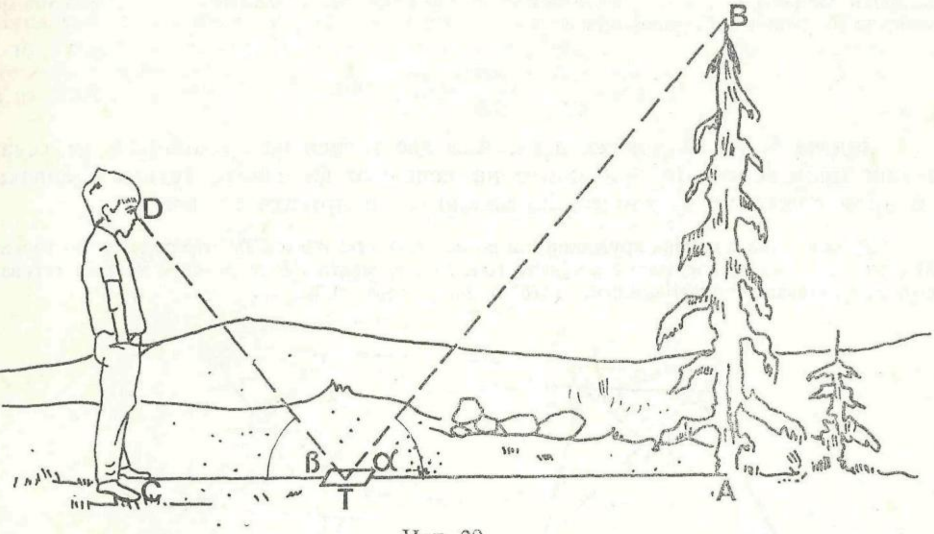
Решение. Дрвото AS чија висина сакаме да ја одредиме, во еден момент нека фрла сенка долга $\overline{AB}=6{,}3$ m. Земаме летва долга 2 m и ја поставуваме да стои нормално кон земјината површина. Летвата A_1S_1 исто така фрла сенка, чија должина нека изнесува, на пример $\overline{A_1B_1}=1{,}4$ m.

Правите SB и S_1B_1 на црт. 28 ни ги претставуваат сончевите зраци што минуваат низ врвните точки S и S_1 на дрвото и летвата. Бидејќи сончевите зраци се паралелни и во ист момент тие паѓаат под ист агол кон земјината површина, тоа правоаголните триаголници ABS и $A_1B_1S_1$ ќе имаат соодветно складни агли. Според тоа, тие се слични, па ќе важи пропорцијата $\frac{\overline{AS}}{\overline{A_1S_1}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}}$, од која добиваме: $\frac{\overline{AS}}{2} = \frac{6{,}3}{1{,}4}$ или $\overline{AS} = 2 \cdot \frac{6{,}3}{1{,}4} = 9$.

Значи, дрвото е високо 9 m.

Задача 2. Да се одреди висината на дрво со помош на огледало.

Решение. Тоа го правиме вака: трасираме една права што минува низ подножјето на дрвото, па на таа права во некоја точка T поставуваме едно огледалце во хоризонтална положба (црт. 29). Потоа по истата права се оддалечуваме од дрвото и огледалото сè додека во него не го видиме врвот на дрвото.



Црт. 29

Од физиката знаеме дека: светлинскиот зрак под каков што агол паѓа кон рамнината на огледалото, под таков агол и се одбива од неа, т.е. $\alpha=\beta$. Според тоа, правоаголните триаголници ABT и CDT се слични. Од нивната сличност следува пропорцијата $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{AT}}{\overline{CT}}$, каде што $\overline{AB}$ е бараната висина на дрвото, $\overline{CD}$ е висината на набљудувачот а $\overline{AT}$ и $\overline{CT}$ се растојанијата на огледалото од дрвото и набљудувачот.

Задача 3. Да се одреди растојанието меѓу точките A и B, од кои точката B е недостапна, на пример таа нека се наоѓа на некое островце (црт. 30).

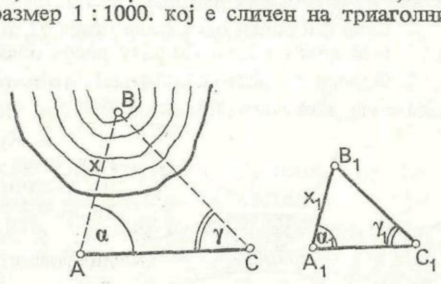
Решение. Прво од точката A ќе ја трасираме и ќе ја измериме должината на една произволна отсечка AC, а потоа со помош на полски агломер ќе ги измериме аглите α и γ. На пример, нека при тоа најдеме дека $\overline{AC}=150$ m, $\alpha=73°$ и $\gamma=48°$. Кога е тоа готово, на лист хартија го цртаме триаголникот $A_1B_1C_1$ во размер 1 : 1000. кој е сличен на триаголникот ABC во природата, па ќе имаме:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}}=\cdots=1000 \text{ или}$$

$$\overline{AB}=1000\cdot\overline{A_1B_1}$$

Според тоа, ако од цртежот ја измериме должината на отсечката $\overline{A_1B_1}$ и нејзиниот мерен број го помножиме со коефициентот на сличноста — 1000, ќе го добиеме бараното растојание $\overline{AB}$.

Ако $\overline{A_1B_1}=13$ cm, тогаш $\overline{AB}=1000\cdot13=13000$ cm$=130$ m.



Црт. 30

Значи, растојанието меѓу точките A и B е 130 m.

Задача 4. Да се докаже дека: пресекот на дијагоналите на трапезот ги дели истите на делови што се пропорционални на основите на трапезот.

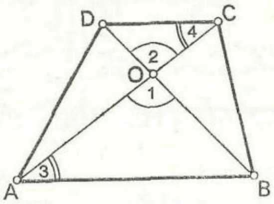
Доказ. Нека е даден трапезот $ABCD$, чии дијагонали се сечат во точката O (црт. 31). Да ги разгледаме триаголниците ABO и CDO. Бидејќи е $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ и $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 4$ (Зошто?), тоа тие се слични, т.е. $\Delta ABO \sim \Delta CDO$.

Соодветните страни на триаголниците ABO и CDO, односно страните што лежат наспроти соодветно складните агли во нив, се AB и CD, BO и OD, AO и OC. Според тоа можеме да ја напишеме пропорцијата

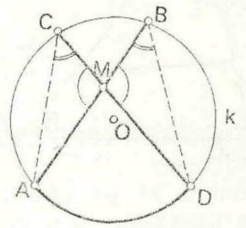
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BO}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{OC}}, \text{ штд.}$$

Задача 5. Да се докаже дека: Ако две тетиви на кружницата се сечат, тогаш производот од должините на деловите на едната тетива е еднаков на производот од должините на деловите на другата тетива.

Доказ: Нека е дадена кружница k и во неа тетивите AB и CD, што се сечат во точката M (црт. 32). Ако ги соединиме крајните точки на тетивата AB со по еден крај на тетивата CD, ги добиваме триаголниците AMC и BMD (црт. 32).



Црт. 31



Црт. 32

Добиените триаголници се слични, бидејќи аглите при темето M им се складни (како вкрстени) и $\measuredangle B \cong \measuredangle C$ (како периферни агли над ист кружен лак $\widehat{AD}$). Од $\Delta AMC \sim \Delta DMB$ добиваме $\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MB}}$, т.е.

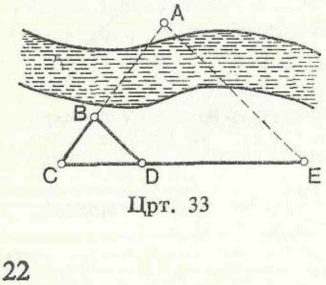
$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}, \text{ штд.}$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Колкава е висината на едно дрво, кое фрла на хоризонтална рамнина сенка долга 30 m, ако во исто време вертикален стап од 2 m фрла сенка долга 2,5 m.

2. Еден фабрички оџак фрла сенка 52 m,а во исто време сенката на еден човек со висина 1,7 m е долга 1,7 m. Колку е висок оџакот?

3. Одреди го растојанието меѓу точките A и B што се наоѓаат на спротивните брегови на една река (црт. 33), ако е $BD \parallel AE$, $BC=5$ m, $\overline{CD}=7$ m, $\overline{DE}=21$ m.



Црт. 33

4. Краткиот крај на една рампа е долг 1 m, а долгиот крак — 6 m. Колку високо ќе се издигне крајот на долгиот крак, ако крајот на краткиот крак се спушти за 0,5 m.

5. Во трапезот $ABCD$ ($AB \parallel CD$), O е пресек на дијагоналите. Одреди ги должините на отсечките BO и OD, ако $\overline{AO}=5$ cm, $\overline{OC}=4$ cm и $\overline{BD}=13{,}5$ cm.

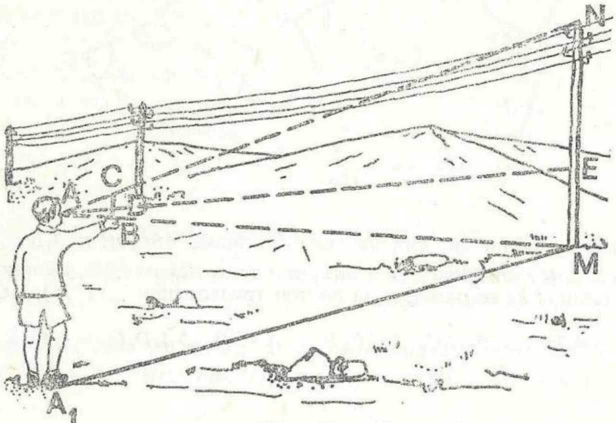
6. На географска карта растојанијата меѓу три точки се: 9 cm, 10 cm и 12 cm. Најголемото од тие растојанија во природата е 30 km. Одреди ги другите две растојанија и размерот на картата.

7. На терен е трасиран триаголник ABC, така што $\overline{AB}=420$ m, $\overline{BC}=600$ m и $\overline{AC}=540$ m. Колкави се должините на страните на тој триаголник на карта што е нацртана во размер 1 : 5000.

8. Во триаголник со основа 12 cm и висина 9 cm е повлечена права паралелна на основата на растојание 3 cm од неа. Одреди ја должината на отсечката од таа права, што е издвоена од страните на триаголникот.

9. Основите на трапезот се долги 13 cm и 2,4 dm. Одреди ја висината на трапезот, ако продолженијата на краците се сечат на растојание 9 cm од горната основа.

10. Стојан држи во испружена рака молив на растојание 0,5 m од окото. Со дел од моливот, чија должина е 15 cm, закрива од погледот си еден столб (црт. 34). Одреди ја висината на столбот, ако Стојан се наоѓал на растојание 40 m од него.



Црт. 34

§ 9. СЛИЧНИ МНОГУАГОЛНИЦИ

Од признаците за сличност на триаголниците видовме дека: два триаголника за да бидат слични доволно е: соодветните агли да им се складни или соодветните страни да им се пропорционални. Меѓутоа, кај многуаголниците со повеќе од три страни тоа не е случај. На пример, квадратот не е сличен на правоаголникот (што не е квадрат), иако соодветните агли им се складни. Исто така квадратот не е сличен ни со ромбот (што не е квадрат), иако соодветните страни им се пропорционални.

Условите за сличност на два произволни истоимени многуаголници ги земаме и како дефиниција за сличност на многуаголниците.

Дефиниција: *Два истоимени многуаголника се слични ако имаат соодветно складни агли што се еднакво распоредени и ако соодветните страни им се пропорционални.*

Соодветни (хомологни) страни на два слични многуаголника ги викаме страните, што ги соединуваат темињата на соодветно складните агли.

Според дефиницијата многуаголниците $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (црт. 35) се слични, ако нивните агли и страни ги исполнуваат следниве услови:

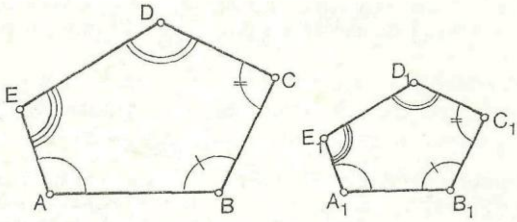
1°. $\measuredangle A_1 \cong \measuredangle A, \measuredangle B_1 \cong \measuredangle B, \measuredangle C_1 \cong \measuredangle C, \measuredangle D_1 \cong \measuredangle D, \measuredangle E_1 \cong \measuredangle E$ и

2.° $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C_1D_1}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{D_1E_1}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{E_1A_1}}{\overline{EA}} = k$

Бројот k се вика *коефициент на сличноста* на многуаголникот $A_1B_1C_1D_1E_1$ во однос на многуаголникот $ABCDE$.

Ќе покажеме дека за сличните многуаголници важат овие теореми:

Теорема 1-а. *Два слични многуаголника можат да се разложат на еднаков број и еднакво распоредени соодветно слични триаголници.*

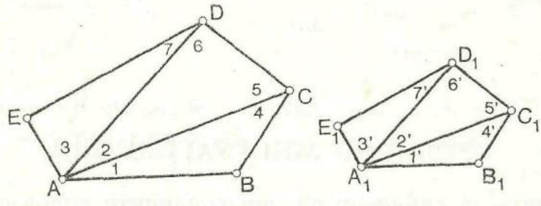


Црт. 35

Доказ: Нека се дадени два слични многуаголника $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$.

Ако ги повлечеме сите дијагонали низ две соодветни темиња, на пример низ A и A_1, дадените многуаголници ќе се разбијат на по три триаголници (црт. 36). Ќе докажеме дека:

$$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC,\ \ \Delta A_1C_1D_1 \sim \Delta ACD,\ \ \Delta A_1D_1E_1 \sim \Delta ADE.$$



Црт. 36

а) Од сличноста на многуаголниците имаме: $\sphericalangle B_1 \cong \sphericalangle B,\ \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}}$.

Според тоа: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$, штд.

б) Од $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ следува $\hat{4'} = \hat{4}$ и $\dfrac{\overline{A_1C_1}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}}$, а од сличноста на многуаголниците имаме $\hat{C_1} = \hat{C}$ и $\dfrac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{C_1D_1}}{\overline{CD}}$.

Од $\hat{C_1} = \hat{C}$ и $\hat{4'} = \hat{4}$ имаме $\hat{C_1} - \hat{4'} = \hat{C} - \hat{4}$, односно $\hat{5'} = \hat{5}$;

а од $\dfrac{\overline{A_1C_1}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}}$ и $\dfrac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{C_1D_1}}{\overline{CD}}$ следува $\dfrac{\overline{A_1C_1}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{C_1D_1}}{\overline{CD}}$.

Според тоа: врз основа вториот признак од $\hat{5'} = \hat{5}$ и $\dfrac{\overline{A_1C_1}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{C_1D_1}}{\overline{CD}}$ следува $\Delta A_1C_1D_1 \sim \Delta ACD$, штд.

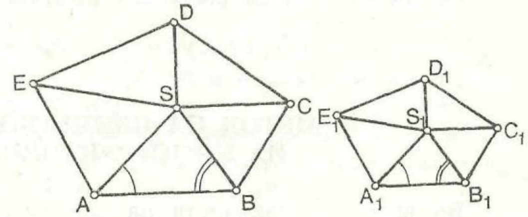
в) Од сличноста на многуаголниците имаме: $\sphericalangle E_1 \cong \sphericalangle E$ и $\dfrac{\overline{A_1E_1}}{\overline{AE}} = \dfrac{\overline{D_1E_1}}{\overline{DE}}$.

Според тоа, $\Delta A_1D_1E_1 \sim \Delta ADE$, штд.

Теоремата ја докажавме за два петаголника. На ист начин утврдуваме дека таа важи и за кои и да е два слични многуаголника.

Освен со дијагоналите, два слични многуаголника можат да се разложат на еднаков број еднакво распоредени слични триаголници и на начин покажан на црт. 37. Тоа станува вака:

Произволна точка S од многуаголникот $ABCDE$ ја соединуваме со сите негови темиња. Тој се разбива на толку триаголници, коку што страни има. Потоа во другиот многуаголник над страната A_1B_1 конструираме $\Delta A_1B_1S_1 \sim \Delta ABS$. За тоа доволно е да ги конструираме аглите $S_1A_1B_1$ и $S_1B_1A_1$ што се складни на аглите SAB и SBA.



Црт. 37

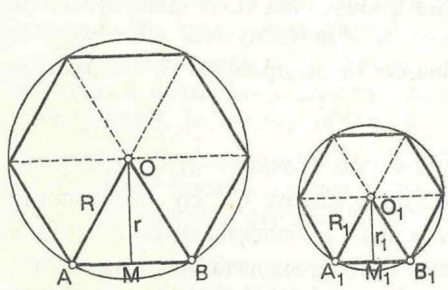
Ако точката S_1 ја соединеме со другите темиња на многуаголникот $A_1B_1C_1D_1E_1$, тој ќе се разложи на ист број триаголници; за кои може да се докаже дека се слични на соодветните триаголници во многуаголникот $ABCDE$.

Може да се докаже дека важи и обратната теорема:

Теорема 1-б. *Ако два многуаголника се составени од ист број еднакво распоредени слични триаголници, тогаш тие многуаголници се слични.*

Теорема 2. *Сите правилни многуаголници со ист број страни се слични и нивните страни се пропорционални на радиусите на опишаните и вписаните кружници.*

Доказ: Нека се дадени два правилни многуаголника со ист број страни (црт. 38) и нека $\overline{OA}=\overline{OB}=R$ и $\overline{O_1A_1}=\overline{O_1B_1}=R_1$ се радиуси на опишаните кружници околу нив, а $\overline{OM}=r$ и $\overline{O_1M_1}=r_1$ — радиуси на впишаните кружници во нив.



Црт. 38

Знаеме дека секој од дадените правилни многуаголници може да се разложи на по n складни рамнокраки триаголници (карактеристични триаголници) секој со агол при врвот од $\frac{360°}{n}$.

Бидејќи $\Delta AOB \sim \Delta A_1O_1B_1$ (зошто?), тоа дадените многуаголници се составени од ист број слични триаголници, па според теоремата 1-б тие се слични.

Од $\Delta AOB \sim \Delta A_1O_1B_1$ следува дека

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{R_1}{R} = \frac{r_1}{r}, \text{ штд.}$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Дали се слични кои и да било: а) два квадрата, б) два ромба, в) два правоаголника г) два правилни шестаголника?

2. Дали се слични два многуаголника, ако имаат соодветно складни агли?

3. Дали се слични два многуаголника, ако страните на едниот од нив изнесуваат $\frac{2}{5}$ од соодветните страни на другиот многуаголник?

4. Дали се слични два многуаголника со соодветно складни агли, ако страните на едниот се долги: 3 cm, 8 cm, 10 cm, 6 cm, 5 cm; а соодветните страни на другиот се: 1,5 cm, 4 cm, 5 cm, 3 cm, 2,5 cm?

5. Страните на еден петаголник се долги: 15 cm, 6 cm, 12 cm, 9 cm, 18 cm. Најмалата, страна на нему сличен петаголник е 10 cm. Одреди ги другите страни!

6. Како ќе гласи признакот за сличност на два: а) паралелограма, б) правоаголника, в) ромба?

7. Нацртај два четириаголници со соодветно складни агли, а да не се слични?

8. Нацртај два четириаголници со соодветно пропорционални страни, а да не се слични!

9. Докажи дека: два паралелограма се слични, ако имаат по еден агол соодветно складен и по две соседни страни соодветно пропорционални.

10. Докажи дека: два ромба се слични, ако имаат по еден складен агол!

§ 10. МЕТОД НА СЛИЧНОСТ ПРИ РЕШАВАЊЕ НА КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

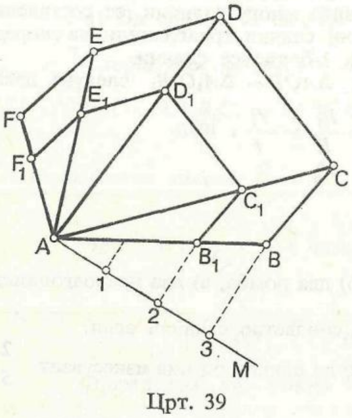
Во врска со сличноста на многуаголниците да ги решиме следниве конструктивни задачи:

Задача 1. Да се конструира многуаголник, што е сличен на даден многуаголник со коефициент на сличност $k = \frac{2}{3}$.

Решение: Нека е даден шестаголникот $ABCDEF$, а треба да конструираме сличен на него шестаголник $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ со коефициент на сличност $k = \frac{2}{3}$.

Конструкцијата ја изведуваме на следниов начин: Од темето A ги повлекуваме сите дијагонали AC, AD и AE на дадениот многуаголник. Потоа треба да ја конструираме страната $A_1 B_1$ — соодветна на AB при услов: $\frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}} = \frac{2}{3}$ или $\overline{A_1 B_1} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AB}$.

За таа цел од темето A повлекуваме произволна полуправа AM и на неа пренсуваме три складни отсечки. Точката 3 ја сврзуваме со темето B, а низ точката 2 повлекуваме прва паралелна со $\overline{3B}$ до пресекот B_1 со страната $\overline{AB}$. Навистина: $\overline{AB_1} = \frac{2}{3} \cdot AB$.



Црт. 39

Потоа низ точката B_1 повлекуваме $B_1 C_1 \parallel BC$ до пресекот C_1 со дијагоналата AC, а потоа низ C_1 повлекуваме $C_1 D_1 \parallel CD$ до пресекот D_1 со дијагоналата AD, итн.

Бараниот сличен шестаголник е $AB_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ (црт. 39).

Изведената конструкција е точна бидејќи многуаголниците $AB_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ и $ABCDEF$ имаат: а) соодветно складни и еднакво распоредени агли (аголот A им е заеднички, а другите соодветни агли се со заемно паралелни краци) и б) соодветно пропорционални страни:

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1 C_1}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C_1 D_1}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{D_1 E_1}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{E_1 F_1}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{F_1 A}}{\overline{FA}} = \frac{2}{3}$$

Оваа конструкција е изведена за случај $k < 1$. Постапката останува иста и кога $k > 1$, само што тогаш треба да ги продолжиме страните што го образуваат аголот A и сите дијагонали од темето A.

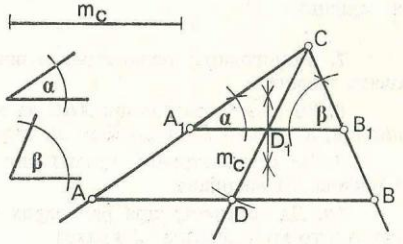
Задача 2. Да се конструира триаголник ABC, ако се дадени медијаната m_c и аглите α и β.

Решение. Анализа: Бараниот триагоник ABC е сличен на секој триаголник со дадените агли α и β. Затоа целисходно е прво да конструираме некој сличен триаголник A_1B_1C на бараниот со произволна основа A_1B_1 и дадените агли на неа (црт. 40). Потоа ја конструираме медијаната CD_1 на тој триаголник. Гледаме таа не е складна со дадената медијана m_c. Но, ако на полуправата CD_1 ја нанесеме отсечката $\overline{CD}=m_c$ и низ точката D повлечеме права AB паралелна на A_1B_1, ќе го добиеме бараниот триаголник ABC.

Конструкцијата произлегува од направената анализа на задачата.

Доказ: ΔABC ги содржи сите дадени елементи по големина и положба па според тоа тој е решение на задачата.

Дискусија: Задачата има само едно решение ако е $\alpha+\beta < 180°$.



Црт. 40

При решавањето на ова задача помошниот триаголник $A_1\,B_1\,C$ е сличен на бараниот ΔABC. Затоа овој метод на решавање на конструктивните задачи се вика *метод на слични фигури*. Неговата суштина се состои во следново:

Во многу конструктивни задачи дадените елементи (услови) можат да се разделат во две групи. Едната група услови ја определуваат формата на бараната фигура, а другата група услови — нејзината големина.

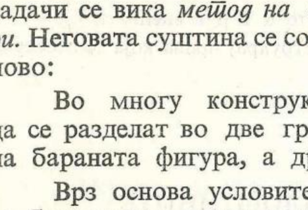
Врз основа условите од првата група прво конструираме фигура, слична на бараната; а потоа со користење на втората група услови и својствата на сличните фигури, ја конструираме и бараната фигура.

Задача 3. Во даден остроаголен ΔABC да се впише квадрат, така што две од неговите темиња да лежат на основата AB на ΔABC, а другите две темиња — на другите страни на ΔABC.

Решение. Анализа: Знаете дека сите квадрати се слични меѓу себе. Ако го изоставиме условот: четвртото теме на квадратот да лежи на страната BC на ΔABC, тогаш можеме да конструираме безброј многу квадрати што ќе ги задоволуваат другите услови на задачата. Конструираме прво еден таков квадрат $MNPQ$ (црт. 41).

Конструкција: Низ произволна точка $M \in AB$ повлекуваме нормала MQ на AB и од M ја нанесуваме отсечката $MN \cong MQ$. Во општ случај четвртото теме P на помошниот квадрат $MNPQ$ нема да лежи на BC.

За да го добиеме бараниот квадрат, ја повлекуваме полуправата AP, која ќе ја пресече страната BC на ΔABC во точката P_1. Ако низ P_1 повлечеме $P_1N_1 \perp AB$ и $P_1Q_1 \parallel AB$, а низ точката Q_1 повлечеме $Q_1M_1 \perp AB$, ќе го добиеме бараниот квадрат $M_1N_1P_1Q_1$.



Црт. 41

Доказ: Квадратот $M_1N_1P_1Q_1$ ги задоволува сите услови на задачата, па според тоа е решение на задачата.

Дискусија: Задачата има само едно решение (зошто?).

1. Даден е произвилен шестаголник. Конструирај друг шестаголник сличен на дадениот: а) со двапати поголеми страни, б) со коефициент на сличност $k = \frac{3}{4}$.

2. Нацртај правилен шестаголник, а потоа конструирај друг, чии страни да бидат $\frac{5}{8}$ од страните на дадениот. Колкав е коефициентот на сличноста на вториот шестаголник во однос на првиот?

3. Да се конструира четириаголник сличен на даден четириаголник $ABCD$, така што страните да им се однесуваат како $5:3$.

4. Даден е петаголник $ABCDE$. Конструирај друг петаголник сличен на дадениот чија страна што ѝ одговара на страната AB да е складна на дадена отсечка.

5. Конструирај ромб, што е сличен на даден ромб со коефициент на сличност $k=1{,}5$.

6. Даден е триаголник ABC. Конструирај сличен на него $\Delta A_1B_1C_1$ со коефицинт на сличност $k = \frac{4}{3}$.

7. Конструирај рамностран триаголник со примена на сличноста, ако е дадена неговата висина.

8. Во даден триаголник ABC да се впише ромб $ADEF$, така што аголот A да им е заеднички, а темето E на ромбот да лежи на страната BC.

9. Да се конструира триаголник сличен на даден ΔABC, ако е дадена една негова: а) висина, б) медијана.

10. Да се конструира рамнокрак триаголник, ако е даден аголот при основата и медијаната што му одговара на кракот.

11. Конструирај триаголник ABC, ако се дадени аглите α и β и висината h_c.

12. Даден е правоаголник со страни 9 cm и 6 cm. Конструирај права која ќе отсекува од дадениот правоаголник сличен на него.

§ 11. ОДНОС НА ПЕРИМЕТРИТЕ И ПЛОШТИНИТЕ НА ДВА СЛИЧНИ МНОГУАГОЛНИКА

Теорема 1. *Односот на периметрите на два слични многуаголника еднаков е на односот на соодветните им страни (или на коефициентот на сличноста).*

Доказ: Нека $ABC\ldots M$ и $A_1B_1C_1\ldots M_1$ се два слични многуаголника; L — периметар на $ABC\ldots M$, а L_1 — периметар на многуаголникот $A_1B_1C_1\ldots M_1$.

Од $A_1B_1C_1\ldots M_1 \sim ABC\ldots M$ следува дека: $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}} = \ldots = \frac{\overline{M_1A_1}}{\overline{MA}} = k.$

А врз основа својството на продолжената пропорција (теорема во § 2) имаме:

$$\frac{\overline{A_1B_1} + \overline{B_1C_1} + \ldots + \overline{M_1A_1}}{\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots + \overline{MA}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}} = \cdots = \frac{\overline{M_1A_1}}{\overline{MA}} = k$$

Според тоа $\frac{L_1}{L} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}} = \cdots = k$, т.е. $\frac{L_1}{L} = k.$

Со тоа теоремата е докажана.

Последица: **Односот на периметрите на два истоимени правилни многуаголници е еднаков на односот на нивните страни (или на нивните радиуси на опишаните или вписаните кружници).**

Задача: Најмалите страни на два слични многуаголници се долги: $9\ cm$ и $6\ cm$, а збирот од нивните периметри е $145\ cm$. Да се одредат периметрите на тие многуаголници.

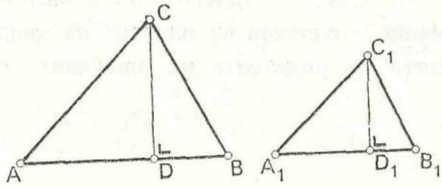
Решение: Ако со L и L_1 ги означиме периметрите на многуаголниците, тогаш согласно горната теорема, ќе биде: $\frac{L}{L_1} = \frac{9}{6}$.

А врз основа својствата на пропорциите, од $\frac{L}{L_1} = \frac{9}{6}$ добиваме: $\frac{L+L_1}{L_1} = \frac{9+6}{6}$ или $\frac{145}{L_1} = \frac{15}{6}$. Оттука: $L_1 = \frac{145 \cdot 6}{15} = 54$ (cm), а $L = 145 - 54 = 91$ (cm).

Теорема 2. *Односот на плоштините на два слични многуаголника е еднаков на односот на квадратите на соодветните им страни (или на квадратот на коефициентот на сличноста).*

Доказ: Теоремата прво ќе ја докажеме за слични триаголници, а потоа за произволни слични многуаголници.

а) Нека $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ (црт. 42), а C_1D_1 и CD нека се висините, што се спуштени од соодветните темиња C_1 и C кон спротивните страни A_1B_1 и AB на двата триаголника. Ако со P_1 ја означиме плоштината на $\Delta A_1B_1C_1$, а со P плоштината на ΔABC; тогаш



Црт. 42

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_1B_1} \cdot \overline{C_1D_1}, \text{ а } P = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CD}.$$

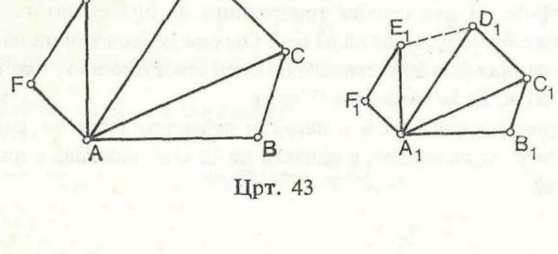
Според тоа: $$\frac{P_1}{P} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{A_1B_1} \cdot \overline{C_1D_1}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CD}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{C_1D_1}}{\overline{CD}} \quad (1)$$

Меѓутоа, во сличните триаголници соодветните висини се пропорционални на соодветните страни, т.е. $\frac{\overline{C_1\,D_1}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A_1\,B_1}}{\overline{AB}} = k$.

Ако тоа го земеме предвид и во (1) односот $\frac{\overline{C_1D_1}}{\overline{CD}}$ го замениме со $\frac{\overline{A_1\,B_1}}{\overline{AB}}$, ќе добиеме: $\frac{P_1}{P} = \frac{\overline{A_1\,B_1}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{A_1\,B_1}}{\overline{AB}} = \left(\frac{\overline{A_1\,B_1}}{\overline{AB}}\right)^2 = \frac{\overline{A_1B_1}^2}{\overline{AB}^2} = k^2$, т.е. $\frac{P_1}{P} = k^2$

б) Многуаголникот $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ нека е сличен на многуаголникот $ABCDEF$ со коефициент на сличност k. Од две соодветни темиња, на пример A_1 и A, да ги повлечеме дијагоналите $A_1C_1, A_1D_1, \ldots, A_1E_1$ и $AC, AD, \ldots, AE$ (црт. 43). Тие ќе ги разделат дадените многуаголници на $n-2$ соодветно слични триаголници, т.е.

$$\Delta A_1B_1C_1 \overset{k}{\sim} \Delta ABC,\ \Delta A_1C_1D_1 \overset{k}{\sim} \Delta ACD, \ldots, \Delta A_1E_1F_1 \overset{k}{\sim} \Delta AEF.$$



Црт. 43

Според погоре докажаното, имаме:

$$P_{\triangle A_1B_1C_1} = k^2 \,.\, P_{\triangle ABC}$$
$$P_{\triangle A_1C_1D_1} = k^2 \,.\, P_{\triangle ACD}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_{\triangle A_1E_1F_1} = k^2 \,.\, P_{\triangle AEF}$$

Оттука добиваме: $P_1\,(A_1B_1C_1D_1E_1F_1) = P_{\triangle A_1B_1C_1} + P_{\triangle A_1C_1D_1} + \ldots + P_{\triangle A_1E_1F_1} = k^2 \,.\, P_{\triangle ABC} + k^2 \,.\, P_{\triangle ACD} + \ldots + k^2 \,.\, P_{\triangle AEF} = k^2 \,.\, (P_{\triangle ABC} + P_{\triangle ACD} + \ldots + P_{\triangle AEF}) = k^2 \,.\, P\,(ABCDEF)$.

Според тоа: $P_1 = k^2 \cdot P$ или $\dfrac{P_1}{P} = k^2 = \dfrac{\overline{A_1B_1}^2}{\overline{AB}^2} = \ldots = \dfrac{\overline{A_1F_1}^2}{\overline{AF}^2}$.

Со тоа теоремата е докажана.

Последица: **Односот од плоштините на два истоимени правилни многуаголници е еднаков на односот на квадратите на нивните страни (или на квадратите на радиусите на опишаните или впишаните кружници), т.е.**

$$\frac{P_1}{P} = \frac{a_1^2}{a^2} = \frac{R_1^2}{R^2} = \frac{r_1^2}{r^2}$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Страните на еден петаголник се долги: 3 cm, 2,5 cm, 4 cm, 3,7 cm и 4,8 cm. Одреди ги должините на страните на нему сличен петаголник, чиј периметар е 3,6 dm.

2. Периметрите на два слични рамнокраки триаголници се: 4,8 dm и 3,6 dm. Првиот од нив има основа долга 12 cm. Одреди ги должините на страните на другиот триаголник!

3. Соодветните страни на два слични многуаголника се долги 5 cm и 2 cm, а разликата на нивните периметри е еднаква на 60 cm. Одреди ги периметрите на многуаголниците!

4. Страните на еден триаголник се однесуваат како 2 : 3 : 4, а периметарот на нему сличен триаголник изнесува 27,9 cm, Одреди ги страните на вториот триаголник!

5. Коефициентот на сличноста на два слични многуаголника е 2,5. На што е еднаков односот на нивните: а) периметри, б) плоштини?

6. Страните на еден триаголник се долги: 8 cm, 14 cm и 18 cm. Одреди ги страните на друг триаголник, што е сличен на дадениот, ако неговата плоштина е еднаква на $\frac{1}{4}$ од плоштината на дадениот.

7. Страната на еден квадрат е 3 пати подолга од страната на друг квадрат. Колку пати плоштината на првиот квадрат е поголема од плоштината на другиот квадрат?

8. Средната линија на триаголникот во каков однос ја разделува неговата плоштина?

9. Плоштините на два квадрата се однесуваат како 9 : 25. Како се однесуваат нивните страни?

10. Периметрите на два слични триаголника се однесуваат како 2 : 3. Плоштината на поголемиот триаголник е еднаква на 63 cm^2. Одреди ја плоштината на другиот триаголник!

11. Како ќе се промени плоштината на еден многуаголник, ако секоја негова страна: а) ја зголемиме 3 пати, б) ја намалиме 2 пати.

12. Една парцела е снимена и е нацртан нејзиниот план во размер 1 : 5000. Нејзината плоштина, измерена на планот, е еднаква на 72 cm^2. Колкава е плоштината на таа парцела во природата?

§ 12. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА СЛИЧНОСТА

При пресликувањето сличност, кои и да било две различни точки A и B од рамнината се пресликуваат во такви две точки A_1 и B_1 од истата рамнина, при што да важи $\frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}} = k$ или $\overline{A_1 B_1} = k \cdot \overline{AB}$, каде што k е некој позитивен број кој се вика *коефициент на сличноста.*

Тоа значи дека сличноста го менува растојанието меѓу точките еден ист број пати ($k > 0$). Само во специјален случај, ако $k = 1$ — растојанијата меѓу точките не се менува. Тој специјален вид на пресликувањето сличност се вика *складност.*

Пресликувањето сличност ги има следниве основни својства:

Теорема 1. *Пресликувањето сличност е биекција (обратно еднозначно пресликување) на рамнината врз самата себе.*

Доказ: Треба да покажеме дека при пресликвањето сличност две различни точки секогаш се пресликуваат во две различни точки, т.е. тие не можат да се пресликаат на една иста точка.

Нека се дадени две различни точки A и B, значи $\overline{AB} \neq 0$. Нивните слики да ги означиме со A_1 и B_1, т.е. нека $A \to A_1$, $B \to B_1$. Тогаш ќе биде: $\overline{A_1B_1} = k \cdot \overline{AB}$. Но бидејќи $\overline{AB} \neq 0$ и $k \neq 0$ ($k > 0$), тоа мора да е и $\overline{A_1B_1} \neq 0$, штд.

Теорема 2. *Инверзното пресликување на сличноста со коефициент k е пак сличност, но со коефициент $\frac{1}{k}$.*

Доказ: Од претходната теорема следува дека пресликувањето сличност има и свое инверзно пресликување. Да видиме какво е тоа инверзно пресликување.

Нека при пресликувањето сличност со коефициент k точките A и B се пресликани на точките A_1 и B_1, при што $\frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}} = k$ (или $\overline{A_1 B_1} = k \cdot \overline{AB}$). Меѓутоа од тие релации следуваат и релациите $\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1 B_1}} = \frac{1}{k}$ (или $\overline{AB} = \frac{1}{k} \cdot \overline{A_1B_1}$), кои пак покажуваат дека: точките A_1 и B_1 при пресликувањето сличност со коефициент $\frac{1}{k}$ се враќаат во почетната положба A и B.

Тоа значи дека инверзното пресликување на пресликувањето сличност со коефициент k е пак сличност но со коефициент $\frac{1}{k}$, штд.

Нека Φ е некоја фигура. Кога точката $X \in \Phi$ ја опишува фигурата Φ, тогаш соодветната нејзина точка X_1 ќе опише некоја друга фигура Φ_1 — слика на фигурата Φ. Фигурите Φ и Φ_1 велиме дека се *слични.*

Сличноста на фигурите ги има својствата на:

1°. *Рефлексивност*: **Секоја фигура Φ е слична сама на себе со коефициент 1, т.е.**

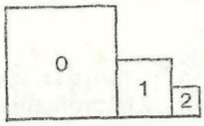
$$\Phi \overset{1}{\sim} \Phi$$

2°. *Симетричност*: **Ако фигурата Φ_1 е слична на фигурата Φ со коефициент k, тогаш и фигурата Φ е слична на Φ_1 со коефициент $\frac{1}{k}$, т.е.**

$$\Phi_1 \overset{k}{\sim} \Phi \Rightarrow \Phi \overset{1/k}{\sim} \Phi_1$$

Ова својство непосредно следува од теоремата 2.

3°. *Транзитивност*: **Ако фигурата Φ_1 е слична на фигурата Φ со коефициент k_1, а фигурата Φ_2 е слична на фигурата Φ_1 со коефициент k_2, тогаш фигурата Φ_2 е слична на фигурата Φ со коефициент $k=k_1 . k_2$, т.е. $(\Phi_1 \overset{k_1}{\sim} \Phi$ и $\Phi_2 \overset{k_2}{\sim} \Phi_1) \Rightarrow \Phi_2 \overset{k_1 . k_2}{\sim} \Phi$**



Црт. 44

На пример, на црт. 44 имаме:

$\square_1 \overset{1/2}{\sim} \square_0$, а $\square_2 \overset{1/2}{\sim} \square_1$ па затоа $\square_2 \overset{1/4}{\sim} \square_0$

Значи, сличноста ги има својствата: рефлексивност, симетричност и транзитивност. Според тоа ќе важи следнава:

Теорема 3. *Релацијата сличност „$\sim$" на фигурите е релација на еквивалентност.*

Теорема 4. *Точки, што лежат на една права (од фигурата Φ) при сличноста се пресликуваат на точки кои лежат исто така на една права (во сличната фигура Φ_1).*

Доказ: Нека точката B лежи меѓу точките A и C и на точките A, B и C нека им соодветствуваат точките A_1, B_1 и C_1 (црт. 45). Знаете дека равенството $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ важи само ако точките A, B и C лежат на една права, кога B лежи меѓу A и C. Но од тоа равенство и дефиницијата за сличност, за точките A_1, B_1 и C_1 ќе биде:

$$\overline{A_1B_1} + \overline{B_1C_1} = k \cdot \overline{AB} + k \cdot \overline{BC} = k\,(\overline{AB} + \overline{BC}) = k \cdot \overline{AC} = \overline{A_1C_1},$$

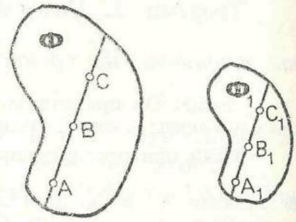
т.е. точките A_1, B_1 и C_1 лежат исто на една права и B_1 е меѓу A_1 и C_1. Со тоа теоремата е докажана.

Од неа следува:

1°. Фигурата, слична на права, е пак права.

2°. Фигурата, слична на полуправа, е пак полуправа.

3°. Фигурата, слична на отсечка, е пак отсечка; односно:



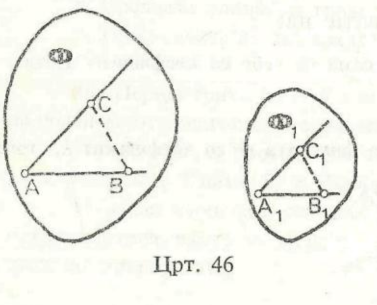
Црт. 45

Секои две прави (или полуправи) се слични една на друга со произволен коефициент на сличност ($k > 0$). Секои две отсечки се слични една на друга со коефициент на сличност, што е еднаков на односот на тие отсечки.

Теорема 5. *Соодветните агли во две слични фигури Φ и Φ_1 се складни.*

Доказ: Ако на точките A, B и C од фигурата Φ им соодветствуваат точките A_1, B_1 и C_1 (црт. 46), тогаш триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ се слични, а од $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ следува: $\measuredangle B_1A_1C_1 \cong \measuredangle BAC$, штд.

Последица 1. **При сличното пресликување секој агол се пресликува на нему складен агол.**



Црт. 46

Последица 2. **При сличното пресликување две паралелни (или нормални) прави се пресликуваат пак на две паралелни (или нормални) прави.**

Теорема 6. *Фигура, слична на дадена кружница, е пак кружница.*

Доказ: Нека е дадена кружница $k\,(O, r)$, а точките A, B и C да лежат на неа. Тогаш ќе биде: $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC} = r$.

На центарот O при сличност со коефициент k нека му соодветствува некоја точка O_1, а на точките A, B и C нека им соодветствуваат точките A_1, B_1 и C_1. Врз основа дефиницијата за сличност, ќе важи пропорцијата $\frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{O_1B_1}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{O_1C_1}}{\overline{OC}} = k$, односно равенствата:

$$\overline{O_1A_1} = k \cdot \overline{OA}, \quad \overline{O_1B_1} = k \cdot \overline{OB} \text{ и } \overline{O_1C_1} = k \cdot \overline{OC}$$

Бидејќи $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$, тоа ќе биде и $\overline{O_1A_1} = \overline{O_1B_1} = \overline{O_1C_1}$.

Тоа значи дека точките A_1, B_1 и C_1 ќе лежат на кружница со центар во точката O_1 и радиус $r_1 = \overline{O_1A_1} = k \cdot \overline{OA} = k \cdot r$, откаде $k = \frac{r_1}{r}$.

Со тоа теоремата е докажана.

Последица: **Секои две кружници се слични една на друга со коефициент на сличност, што е еднаков на односот на нивните радиуси.**

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Дали се слични кои и да било две складни фигури? Ако се слични, тогаш колкав е коефицинтот на сличноста?

2. Познато е дека $\Phi_1 \overset{k}{\sim} \Phi_2$ и $\Phi_2 \overset{k}{\sim} \Phi_1$. Колкав е коефициентот на сличноста?

3. Дали се слични кои и да било две отсечки? Ако се слични, тогаш колкав е коефицинтот на сличноста?

4. При сличното пресликување на каква фигура се пресликува: а) правата, б) полуправата, в) отсечката, г) аголот?

5. При сличносто пресликување на кваква фигура се пресликува: а) многуаголникот, б) кружницата, в) кругот, г) паралелогрмот?

6. За три фигури Φ_1, Φ_2 и Φ_3 познато е дека: $\Phi_3 \overset{2}{\sim} \Phi_2$ и $\Phi_2 \overset{3}{\sim} \Phi_1$. Одреди ги коефициентите на следниве сличности: $\Phi_1 \overset{k_1}{\sim} \Phi_2$, $\Phi_3 \overset{k_2}{\sim} \Phi_1$, $\Phi_2 \overset{k_3}{\sim} \Phi_3$ и $\Phi_1 \overset{k_4}{\sim} \Phi_3$.

7. Како ќе се одреди коефициентот на сличноста, ако се познати два пара соодветни точки, на пример: $A \to A_1$ и $B \to B_1$?

8. Како се променуваат (зголемуваат или намалуваат) растојанијата меѓу точките при сличноста, ако: а) $k > 1$, б) $0 < k < 1$?

9. Дали е при сличноста сочувана паралелноста на правите?

10. Зошто соодветните агли кај сличните фигури се складни?

11. Кои фигури се слични сами на себе при кој и да е коефициент на сличност?

12. Кои од следниве тврдења се точни: а) ако две фигури се складни, тогаш тие се и слични, б) ако две фигури се слични, тогаш тие се и складни, в) ако два агла се слични, тогаш тие се и складни, г) секои две кружници се слични?

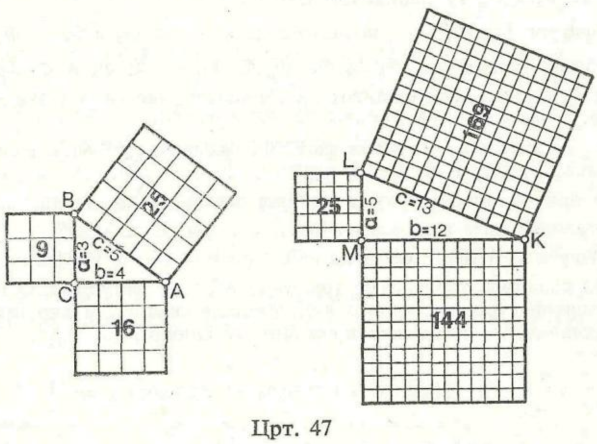
ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА И НЕЈЗИНА ПРИМЕНА

§ 13. ЕГИПЕТСКИ И ИНДИСКИ ТРИАГОЛНИК

Правоаголниот триаголник е еднозначно определен со неговите катети, или со хипотенузата и една катета. Тоа, значи, дека: акоземеме две произволни отсечки за катети, тогаш со тоа и хипотенузата е наполно определена; или ако се дадени хипотенузата и една катета, тогаш со тоа и другата катета е наполно определена.

Тоа покажува дека помеѓу страните на правоаголниот триаголник постои некоја зависност. Да видиме која е таа звисност.

На црт. 47 конструирани се два правоаголни триаголници ABC и KLM. Триаголникот ABC е со катети $a = 3$ и $b = 4$ должински единици (cm, dm или др.), а триаголникот KLM — со катети $a = 5$ и $b = 12$ должински единици. Хипотенузата на ΔABC изнесува $c = 5$, а на ΔKLM таа изнесува $c=13$ исти должински единици. Во тоа можете да се уверите со мерење.



Црт. 47

Над секоја страна на триаголниците ABC и KLM се конструирани квадрати и секој од нив е разделен на соодветен број квадратни единици (cm^2, dm^2 или др.). Ако ги преброеме квадратчињата (квадратните единици мерки) содржани во секој конструиран квадрат, забележуваме дека: бројот на квадратчињата што ги содржи квадратот над хипотенузата е еднаков на збирот од квадратчињата што ги содржат квадратите над катетите.

Кај правоаголниот триаголник ABC наоѓаме дека $25 = 9 + 16$, а кај правоаголниот триаголник KLM дека $169 = 25 + 144$ (црт. 47).

Тоа покажува дека: за овие два правоаголни триагоници важи следново тврдење (својство):

Плоштината на квадратот над хипотенузата е еднаква на збирот од плоштините на квадратите над катетите.

Дека триаголникот со страни 3, 4 и 5 е правоаголен знаеле уште старите Египќани. На Египќаните им бил познат и односот на броевите $3^2+4^2=5^2$. Затоа правоаголниот триаголник со страни 3, 4 и 5 се вика *египетски триаголник*. Триаголникот пак со страни 5, 12 и 13 кој исто така е правоаголен, бил познат и на старите Индијци. Тој триаголник го викаме уште и *индиски триаголник*.

Горново својство се вика *Питагорова теорема* по името на големиот грчки математичар и филозоф Питагора, кој живеел во VI-от век пред н.е.

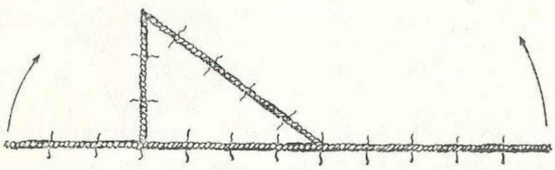
Меѓутоа за својството на египетскиот и индискиот триаголник знаеле уште старите источни народи околу 20 века пред н.е. Веројатно е дека Питагора, кој патувал во Египет и Индија, ги пренел во Грција математичките знаења од тоа време на тие народи.

Питагора и неговите ученици почнале да испитуваат дали својствата на египетскиот и индискиот триаголник ги имаат и сите други правоаголни триаголници. Неговата школа го решила тој проблем и ја докажала следнава.

Питагорова теорема: *Плоштината на квадратот над хипотенузата кај секој правоаголен триаголник е еднаква на збирот од плоштините на квадратите над катетите.*

Доказот на оваа теорема во тоа време претставувал огромен научен успех. Оттогаш почнало да се настојува да се докаже секое геометриско тврдење и така геометријата постепено почнала да се развива во права наука.

Питагоровата теорема е една од најважните и најприменуваните теореми во целата геометрија.



Црт. 48

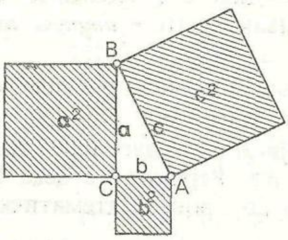
Својството на египетскиот и индискиот триаголник можеме да го користиме и за трасирање на прав агол, како што тоа го правеле и старите Египќани. Да земеме едно јаже долго 12 *d*m и на него да го означиме секој дециметар со некој белег, на пример, со врзан конец! Ако така поделеното јаже го прицврстиме на рамен терен (или на подот) во третиот и седмиот поделок од него, а неговите краишта ги соединиме, тогаш аголот помеѓу страните 3 *d*m и 4 *d*m е прав (црт. 48).

§ 14. ДОКАЗИ НА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА

Постојат многу докази на Питагоровата теорема. Ние ќе наведеме три доказа (два со помош на складни фигури и еден со помош на слични триаголници).

3*

Доказ 1. Нека е даен правоаголниот триаголник ABC со катети a и b. и хипотенуза c (црт. 49). Над неговите страни да конструираме квадрати. Нивните плоштини ќе бидат соодветно еднакви на a^2, b^2 и c^2. Треба да докажеме дека $c^2 = a^2 + b^2$.



Црт. 49

За таа цел да конструираме други два складни квадрати $KLMN$ и $K_1 L_1 M_1 N_1$ со страна долга $\overline{KL} = \overline{K_1 L_1} = a + b$ и во нив да ги извршиме конструкциите, што се покажани на цртежот 50.

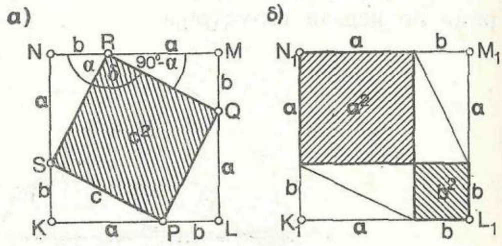
Гледаме дека квадратот $KLMN$ се разделува на еден четириаголник $PQRS$ (тој на цртежот е шрафиран) и четири правоаголни триаголници, од кои секој е складен со дадениот ΔABC (црт. 50-а). Четириаголникот $PQRS$ е квадрат бидејќи има складни страни (секоја од нив е еднаква на хипотенузата c) и прави агли $(\delta = 180° - (\alpha + 90° - \alpha) = 180° - 90° = 90°)$. А другиот квадрат $K_1 L_1 M_1 N_1$ е разделен на два квадрата (едниот со страна a, а другиот со страна b) и четири правоаголни триаголници, од кои секој е складен со дадениот ΔABC (црт.50-б).

Ако од складните квадрати $KLMN$ и $K_1 L_1 M_1 N_1$ ги извадиме четирите правоаголни триаголници, можеме да заклучиме дека $c^2 = a^2 + b^2$.

Со тоа е докажана Питагоровата теорема.

Доказ 2. Нацртајте произволен правоаголен триаголник ABC и над неговите страни конструирајте квадрати (црт. 51). Низ центарот O на квадратот што е конструиран над поголемата катета повлечете нормална, а потоа и паралелна права со хипотенузата на правоаголниот триаголник ABC. Повлечените прави ќе го разделат тој квадрат на четири дела: 1, 2, 3 и 4.

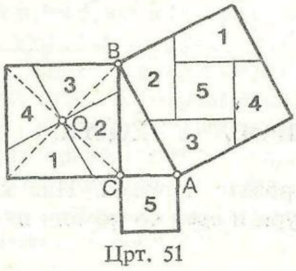
Ако тие делови и квадратот над помалата катета (означен со 5) ги исечеме и ги поставиме врз квадратот што е конструиран над хипотенузата, тогаш тие точно целиот ќе го покријат.



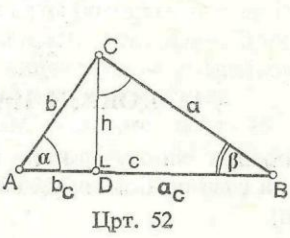
Црт. 50

Оттука заклучуваме дека: плоштината на квадратот над хипотенузата на правоаголниот триаголник ABC е еднаква на збирот од плоштините на квадратите над катетите, што требаше да се докаже.

Доказ 3. Нека ABC е произволен правоаголен триаголник со прав агол во темето C (црт. 52).



Црт. 51



Црт. 52

Да ја повлечеме висината CD (h) од темето на правиот агол кон хипотенузата c. Точката D — подножје на висината CD се вика *ортогонална проекција* на темето C врз хипотенузата c; а отсечките AD и BD се викаат *ортогонални проекции на катетите* AC и BC врз хипотенузата c. Нивните должини ќе ги означиме соодветно со b_c и a_c, т.е. $\overline{AD} = b_c$ и $\overline{BD} = a_c$ (црт. 52).

Висината CD го разделува дадениот ΔABC на два други правоаголни триаголници ACD и BCD, од кои секој е сличен со дадениот, т.е.

$$\Delta ACD \sim \Delta ABC \text{ (аголот } \alpha \text{ е заеднички)}$$
$$\Delta BCD \sim \Delta ABC \text{ (аголот } \beta \text{ е заеднички)}$$

Од нивната сличност следуваат пропорциите: $\frac{b_c}{b} = \frac{b}{c}$ и $\frac{a_c}{a} = \frac{a}{c}$

односно равенствата: $b^2 = b_c \cdot c$ и $a^2 = a_c \cdot c$ (1)

Равенствата (1) познати се како *Евклидова теорема*, која гласи:

Во правоаголниот триаголник секоја катета е геометриска средина (средна геометриска пропорционала) меѓу хипотнузата и нејзината ортогонална проекција врз хипотенузата.

Ако ги собереме соодветните леви и десни страни на равенствата (1), ќе добиеме: $a^2 + b^2 = a_c \cdot c + b_c \cdot c = c\,(a_c + b_c)$.

Но, бидејќи $a_c + b_c = c$, тоа ќе биде

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ или } \quad c^2 = a^2 + b^2 \tag{2}$$

а тоа е Питагоровата теорема.

Од равенството (2) следуваат:

$$a^2 = c^2 - b^2 \text{ и } \quad b^2 = c^2 - a^2 \tag{3}$$

Според тоа: **Плоштината на квадратот над едната катета во секој правоаголен триаголник е еднаква на разликата од плоштините на квадратот над хипотенузата и квадратот над другата катета.**

Ако земеме во предвид дека од дадената плоштина на квадратот, должината на неговата страна е еднаква на квадратниот корен од плоштината, тогаш од равенствата (2) и (3) добиваме:

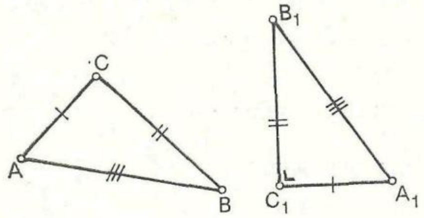
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ и } b = \sqrt{c^2 - a^2} \tag{4}$$

Со помош на формулите (4) лесно може да се одреди должината на која и да е страна на правоаголниот триаголник, кога се дадени должините на другите две негови страни.

Ќе покажеме дека за Питагоровата теорема важи и нејзината

Обратна теорема: *Ако квадратот над најголемата страна на еден триаголник е еднаков на збирот од квадратите над другите две страни, тогаш тој триаголник е правоаголен.*

Доказ: Нека за триаголникот ABC важи равенството: $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ (црт. 53). Да конструираме правоаголен триаголник $A_1B_1C_1$ ($\hat{C}_1=90°$) со катети $A_1C_1 \cong AC$ и $B_1C_1 \cong BC$.



Црт. 53

Врз основа на Питагоровата теорема за $\Delta A_1B_1C_1$ имаме:

$$\overline{A_1B_1}^2 = \overline{A_1C_1}^2 + \overline{B_1C_1}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = $$
$$= \overline{AB}^2, \text{ т.е. } A_1B_1 \cong AB.$$

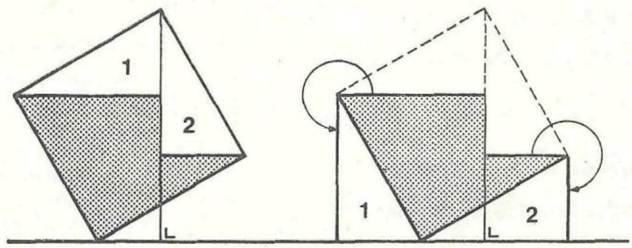
Според тоа, конструираниот правоаголен триаголник $A_1B_1C_1$ е складен на дадениот ΔABC (согласно признакот за складност ССС), а оттука следува дека и ΔABC е правоаголен.

Со тоа теоремата е докажана.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Користејќи, се со црт. 54 докажи ја Питагоровата теорема во општ случај!

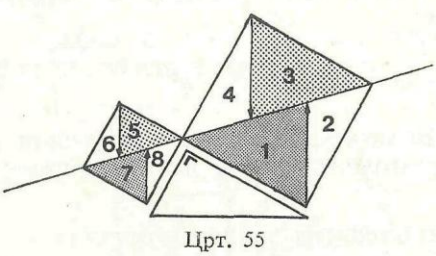
2. Разгледај го црт. 55, нацртај ист таков, изрежи ги означените делови од двата квадрата и од нив пробај да составиш еден нов квадрат со страна еднаква на хипотенузата на правоаголниот триаголник.



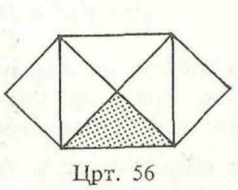
Црт. 54

3. Кај Индијците најден е црт. 56. Што покажува тој цртеж? Дали тој е во врска со Питагоровата теорема?

4. Дали можат должините на страните на праоаголниот триаголник да ги имаат следниве мерни броеви, изразени со исти должински единици: а) 15, 36, 39, б) 7, 12, 15, в) 13, 20, 25, г) 9, 12, 15?



Црт. 55



Црт. 56

5. Добро ти се познати тројките броеви: $5^2=4^2+3^2$, $13^2=12^2+5^2$. Покажи како од нив се добиени следниве тројки Питагорови броеви: а) $10^2=8^2+6^2$, б) $15^2=12^2+9^2$, в) $26^2=24^2+10^2$, г) $39^2=36^2+15^2$, д) $65^2=60^2+25^2$, ѓ) $2{,}5^2=2^2+1{,}5^2$.

6. Одреди ја хипотенузата (c) на правоаголен триаголник, ако се познати неговите катети: а) $a=5$ cm, $b=12$ cm, б) $a=7$ cm, $b=9$ cm, в) $a=8$ cm, $b=15$ cm, г) $a=15{,}8$ m, $b=24{,}2$ m.

7. Пресметај ја едната катета, кога е позната другата катета и хипотенузата на правоаголниот триаголник: а) $a=14$ cm, $c=18$ cm, б) $a=24$ m, $c=26$ m, в) $b=3{,}3$ cm, $c=6{,}5$ cm, г) $b=8{,}5$ m, $c=12$ m.

8. Пресметај го периметарот и плоштината на правоаголен триаголник, ако се познати хипотенузата и едната катета: а) $c=65$ cm, $a=48$ cm, б) $c=28$ cm, $b=20$ cm, в) $c=17$ m, $b=12{,}3$ m.

9. Пресметај го периметарот на еден правоаголен триаголник, ако е позната неговата плоштина $P=54$ cm^2 и една негова катета 12 cm.

10. Стрелките на еден часовник се долги 2,4 cm и 1,8 cm. Колку се оддалечени врвовите на стрелките, кога тие покажуваат 3 часот?

11. Одреди го дијаметарот на опишаната кружница околу правоаголен триаголник, чии катети се долги: $a=6$ cm и $b=2{,}5$ cm.

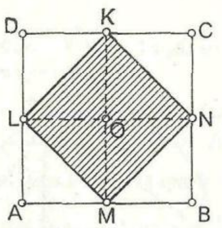
12. Квадратот $ABCD$ има страна долга 8 cm. Во него е впишан друг квадрат $MNKL$, чии темиња лежат во средините на страните на дадениот квадрат. Одреди го периметарот и плоштината на квадратот $MNKL$ (црт. 57).

13. На што е еднаква хипотенузата на правоаголен триаголник, чии катети се долги по 1 dm.

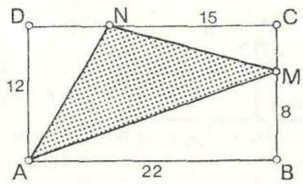
14. Пресметај го периметарот и плоштината на шрафираниот дел од правоаголникот $ABCD$ (црт. 58). Димензиите се дадени во сантиметри.

15. Скала долга 6,5 m е потпрена на ѕид. До која висина таа го допира ѕидот, ако долниот нејзин крај е на растојание 4 m од ѕидот?

16. Една од катетите на правоаголен триаголник е долга 3 cm, а нејзината проекција на хипотенузата е долга 1,8 cm. Одреди го периметарот на тој триаголник?



Црт. 57



Црт. 58

17. Катетата што лежи спроти агол 30° долга е b cm. Одреди го периметарот на тој триаголник!

18. Дали можат должините на страните на правоаголниот триаголник да бидат: а) сите парни броеви, б) сите непарни броеви, в) само една парен број, г) само една непарен број?

19. Катетите на правоаголен триаголник се долги 2,4 dm и 7 dm. Одреди ја должината на медијаната што е спуштена кон хипотенузата.

20. Од едно пристаниште истовремено испловиле два брода и тоа едниот во насока југ со брзина 24 km на час, а другиот во насока исток со брзина 18 km на час. Колку километри тие ќе бидат оддалечени еден од друг после 5 часа од тргнувањето?

§ 15. СВОЈСТВО НА ВИСИНАТА НА ПРАВОАГОЛНИОТ ТРИАГОЛНИК ШТО Е ПОВЛЕЧЕНА КОН ХИПОТЕНУЗАТА

Теорема: *Во правоаголниот триаголник висината што е повлечена кон хипотенузата е геометриска средина меѓу отсечките на кои таа ја разделува хипотенузата.*

Доказ: Нека е даден правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C (црт. 52). Висината CD, што е повлечена кон хипотенузата AB го разделува триаголникот ABC на два правоаголни триаголници ACD и BCD во кои е $\sphericalangle CAD \cong \sphericalangle DCB$ (како агли со заемно нормални краци).

Според тоа: $\Delta ACD \sim \Delta CBD$, откаде следува: $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$ или $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}$.

Ако должината на висината CD и отсечките AD и DB ги означиме соодветно со h, b_c и a_c, тогаш горново равенство ќе гласи: $h^2 = a_c \cdot b_c$.

Со тоа теоремата е докажана.

Последица: **Нормалата, што е повлечена од која и да било точка на кружницата кон еден нејзин дијаметар е геометриска средина меѓу отсечките на кои таа го разделува дијаметрот.**

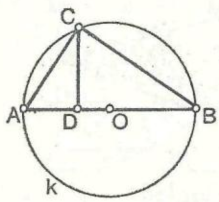
Доказ. Нека е дадена кружницата k, $C \in k$, AB — дијаметар и $CD \perp AB$ (црт. 59).

Ако точката C ја соединиме со крајните точки на дијаметарот AB, ќе го добиеме ΔABC во кој $\hat{C} = 90°$ (зошто?). Во тој триаголник нормалата CD е висина, повлечена кон хипотенузата AB, па според теоремата ќе биде $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}$.

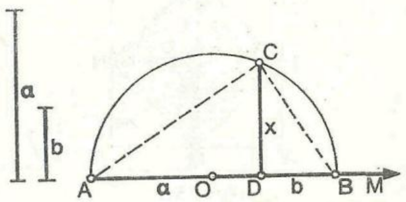
Врз основа последицата може да се реши следнава конструктивна:

Задача: Да се конструира отсечка со должина x, која е геометриска средина на две дадени отсечки со должини a и b.

Решение: На полуправата AM од почетокот A ја пренесуваме отсечката $\overline{AD} = a$, а потоа од точката D ја пренсуваме и отсечката $\overline{DB} = b$ (црт. 60). Над збирот $\overline{AB} = a + b$ (како над дијаметар) да конструираме полукружница, а низ точката D да повлечеме нормала на AB до пресекот со полукружницата во точката C.



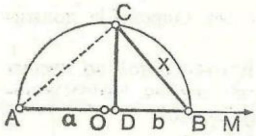
Црт. 59



Црт. 60

Во таков случај отсечката $\overline{CD} = x$, согласно последицата на теоремата ќе биде геометриска средина меѓу дадените отсечки a и b.

Горнава задача може да се реши и врз основа Евклидовата теорема, вака:



Црт. 61

Нека $a \neq b$, на пример $a > b$. На полуправата AM ги пренесуваме отсечките $\overline{AB} = a$ и $\overline{BD} = b$ (црт. 61). Над отсечката AB (како над дијаметар да конструираме полукружница, а низ точката D да повлечеме нормала на AB до пресекот со полукружницата во точката C.

Тогаш отсечката $\overline{BC} = x$ согласно Евклидовата теорема ќе биде геометриска средина меѓу хипотенузата a и ортогоналната проекција b на катетата x врз хипотенузата a (црт. 61).

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

Да се условиме елементите во правоаголниот триаголник да ги означуваме: со a и b — катетите, со c — хипотенузата, со h — висината повелчена кон хипотенузата и со a_c и b_c — проекциите на катетите врз хипотенузата.

1. Ако се дадени два од горниве елементи на правоаголниот триаголник да се одредат другите негови елементи: а) $a=8$, $b=6$, б) $a=5$, $c=13$, в) $a=17$, $h=15$, г) $c=10$, $h=4$, д) $b=6$, $b_c=3{,}6$.

2. Дадено е: $h=9$ cm, $b_c=6$ cm. Да се одреди: a, b, c и a_c.

3. Дадено е: $a_c=6$ cm, $b_c=18$ cm. Да се одреди: h, a, b, c.

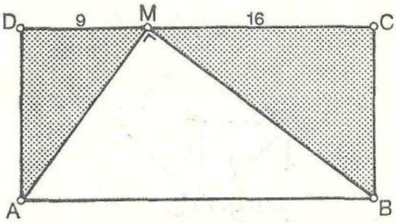
4. Конструирај ја геометриската средина за две дадени отсечки, чии должини се: а) 5 cm и 7 cm, б) 6,5 cm и 4 cm.

5. Конструирај квадрат, што е еквивалентен на даден правоаголник со димензии: $a=6$ cm и $b=4$ cm.

6. Во правоаголникот $ABCD$ е впишан правоаголен триаголник ABM со прав агол при темето M. Пресметај ја плоштината на шрафираниот дел од правоаголникот, ако $\overline{CM}=16$ cm и $\overline{MD}=9$ cm. (црт. 62).

7. Конструирај отсечка со должина x, така што $x = 2\sqrt{ab}$, каде што a и b $(a > b)$ се должини на две дадени отсечки.

8. Конструирај отсечка x, ако е: а) $x = \sqrt{2ab}$, б) $x = \sqrt{\frac{ab}{2}}$, в) $x = \sqrt{a(b+c)}$, каде што a, b и c се дадени отсечки.



Црт. 62

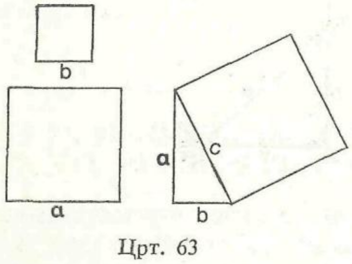
§ 16. ПРИМЕНА НА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА ВО КОНСТРУКТИВНИТЕ ЗАДАЧИ

Со примена на Питагоровата теорема можат да се решат некои конструктивни задачи:

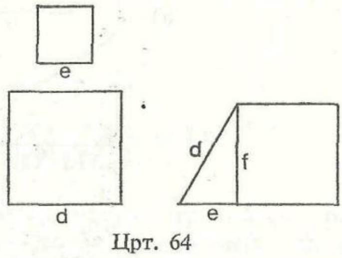
Задача: 1. Да се конструира квадрат, чија плоштина е еднаква на збирот од плоштините на два дадени квадрати.

Решение: Дадените квадрати нека се: едниот со страна a, а другиот со страна b (црт. 63). Да конструираме правоаголен триаголник, чии катети се a и b (страни на дадените квадрати). Хипотенузата c на конструираниот правоаголен триаголник ќе ни ја даде страната на бараниот квадрат (црт. 63). И навистина, согласно Питагоровата теорема имаме: $c^2=a^2+b^2$.

Задача 2. Да се конструира квадрат, чија плоштина е еднаква на разликата од плоштините на два дадени квадрати.



Црт. 63



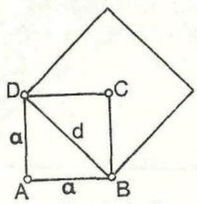
Црт. 64

Решение: Дадените квадрати нека се: едниот со страна d, а другиот со страна e, при што $d > e$ (црт. 64). Ако конструираме правоаголен триаголник чија хипотенуза е еднаква на d (страната на поголемиот квадрат), а едната катета да е еднаква на e (страната на помалиот квадрат); тогаш другата катета f на тој триаголник ќе ни ја даде страната на бараниот квадрат (црт. 64). Навистина, според Питагоровата теорема: $f^2=d^2-e^2$.

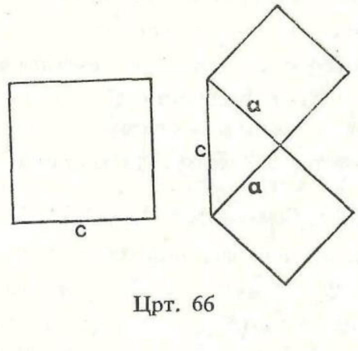
Задача 3. Да се конструира квадрат, чија плоштина е двапати поголема од плоштината на даден квадрат со страна a.

Решение: Нека е даден квадрат $ABCD$ со страна a (црт. 65).

Квадратот над дијагоналата d на дадениот квадрат е бараниот квадрат. Навистина согласно Питагоровата теорема од равнокракиот правоаголен триаголник ABD имаме: $d^2=a^2+a^2=2a^2$.



Црт. 65



Црт. 66

Задача 4. Да се конструира квадрат, чија плоштина е двапати помала од плошината на даден квадрат со страна c.

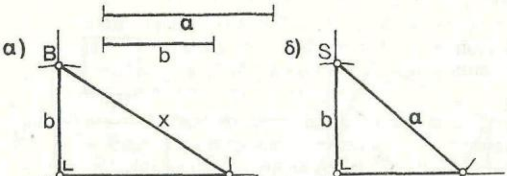
Решение: Конструирајте равнокрак правоаголен триаголник, чија хипотенуза да е еднаква на страната c на дадениот квадрат! Квадратот над секоја катета од конструираниот равнокрак правоаголен триаголник е бараниот квадрат (црт. 66).

Согласно Питагоровата теорема имаме:

$$a^2 + a^2 = c^2 \text{ или } 2a^2 = c^2, \text{ а оттука } a^2 = \frac{c^2}{2}.$$

Задача 5. Да се конструираат отсечките со должини $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $y = \sqrt{a^2 - b^2}$, каде што a и b се должини на две дадени отсечки ($a > b$).

Решение: Конструикцијата на отсечката $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ се сведува на конструкција на правоаголен триаголник SAB со катети $\overline{SA} = a$ и $\overline{SB} = b$ (црт. 67-а). Тогаш хипотенузата на ΔSAB ќе биде бараната отсечка x.

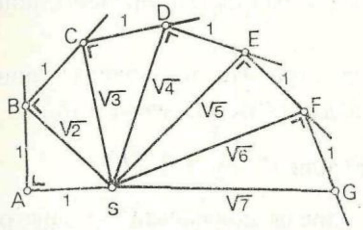


Црт. 67

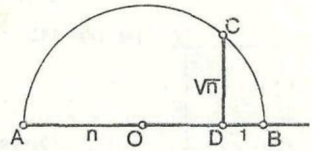
Втората барана отсечка $y = \sqrt{a^2 - b^2}$ пак е катета на правоаголниот триаголник ABS (црт. 67-б), чија хипотенуза е дадената отсечка a, а другата катета е отсечката b.

Задача 6. Да се конструира отсечка долга $\sqrt{n}$, каде што $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$

Решение: Да конструираме равнокрак правоаголен триаголник ASB, чии катети се долги $\overline{AS} = \overline{AB} = 1$ (cm, dm. . .) (црт. 68). Хипотенузата на ΔASB ќе биде отсечка долга $\sqrt{2}$ (cm, dm, или др.). Ако отсечката $\sqrt{2}$ ја земеме за една катета, а отсечката 1 — за друга катета на правоаголниот триаголник BSC, тогаш хипотенузата на ΔBSC ќе има должина $\sqrt{3}$ (cm, dm, или др.). На сличен начин се конструираат отсечките: $\overline{SD} = \sqrt{4}$, $\overline{SE} = \sqrt{5}$, $\overline{SF} = \sqrt{6}$, итн; сè додека не ја добиеме бараната отсечка $\sqrt{n}$ (црт. 68).



Црт. 68



Црт. 69

Отсечката $\sqrt{n}$ може полесно да се конструира и директно врз основа последицата на теоремата.

Од соодносот $x = \sqrt{n} = \sqrt{n \cdot 1}$ гледаме дека бараната отсечка $x = \sqrt{n}$ е геометриска средина меѓу отсечките со должини n и 1, чија конструкција е дадена на цртеж 69.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Нацртај два квадрата со различни страни, а потоа конструирај нов квадрат, чија плоштина ќе биде еднаква на: а) збирот, б) разликата од плоштините на нацртаните два!

2. Нацртај три квадрата, а потоа конструирај нов квадрат, чија плоштина ќе биде еднаква на збирот на плоштините на првите три.

3. Конструирај квадрат, чија плоштина ќе биде еднаква на половина од плоштината на друг даден квадрат.

4. Конструирај квадрат, чија плоштина ќе биде: а) 2 пати, б) 3 пати, в) 4 пати поголема од плоштината на друг даден квадрат.

5. Конструирај квадрат со плоштина 7 cm^2. (Внимавај: $7=16-9$).

6. Дадени се две отсечки со должини a и b. Конструирај отсечки x и y, така што $x = \sqrt{a^2+b^2}$, $y = \sqrt{a^2-b^2}$.

7. Дадена е отсечка долга a cm. Конструирај отсечка $x = \sqrt{a^2+1}$.

8. Конструирај ги отсечките: а) $x = \sqrt{2}$, б) $x = \sqrt{8}$, в) $x = \sqrt{10}$.

9. Конструирај ги отсечките: а) $x = \sqrt{a^2+ac}$, б) $x = \sqrt{a^2-ac}$, каде што a, b, c се дадени отсечки.

10. Конструирај квадрат што е еквивалтнен на делтоид, чии дијагонали се долги $d_1=6$ cm и $d_2=7$ cm.

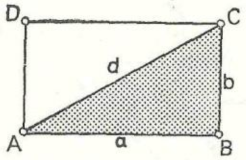
§ 17. ПРИМЕНА НА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА НА РАМНИНСКИ ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ

Со повлекувањето на некои отсечки кај одредени геометриски фигури, како што ќе видиме, тие можат да се разделат на такви делови меѓу кои ќе има и правоаголни триаголници. Примената на Питагоровата теорема кај така создадените правоаголни триаголници во голем број случаи го овозможува пресметувањето на некои непознати елементи кај геометриските фигури.

Каде и каква примена наоѓа Питаговоната теорема ќе покажеме на секоја досега изучена геометриска фигура одделно.

17. 1. ПРАВОАГОЛНИК

Со повлекување на една (која било) дијагонала во правоаголникот истиот се разделува на два складни правоаголни триаголници (црт. 70). Со примената на Питагоровата теорема на еден од тие триаголници, лесно ја пресметуваме дијагоналата, ако ни се познати страните на правоаголникот. Ако пак ни е позната дијагоналата и една од страните на правоаголникот лесно ја одредуваме другата страна.



Црт. 70

Ако должините на страните на правоаголникот ги означиме со a и b, а дијагоналата со d, тогаш:

$$d^2 = a^2 + b^2 \text{ или } d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Задача 1. Да се одреди должината на дијагоналата на правоаголник, чии страни се долги $a = 7$ cm и $b = 4$ cm.

Решение: Од правоаголниот триаголник ABC (црт. 70), имаме:

$$d^2 = a^2 + b^2, \text{ т.е. } d^2 = 7^2 + 4^2 = 49 + 16 = 65; \; d = \sqrt{65} \approx 8{,}06 \text{ (cm)}.$$

Задача 2. Да се пресмета плоштината на правоаголник, ако се познати страната $a = 5$ dm и дијагоналата d $= 6{,}5$ dm.

Решение: Прво ја одредуваме должината на другата страна на правоаголникот:

$$b = \sqrt{d^2 - a^2} = \sqrt{6{,}5^2 - 5^2} = \sqrt{42{,}25 - 25} = \sqrt{17{,}25} \approx 4{,}15 \text{ (dm)}.$$

Потоа плоштината на правоаголникот ќе биде:

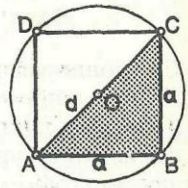
$$P = a \cdot b \approx 5 \cdot 4{,}15 = 20{,}75 \text{ (dm)}^2.$$

17. 2. КВАДРАТ

На црт. 71 е нацртан квадрат $ABCD$ со страна a и околу него опишана е кружница. Дијагоналата d го дели квадратот на два складни равнокраки правоаголни триаголници, а таа е хипотенуза на секој од тие триаголници. Со примена на Питагоровата теорема на еден од добиените правоаголни триаголници, добиваме:

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \text{ или } d = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}, \text{ т.е. } d = a\sqrt{2} \qquad (1)$$

Според тоа: **Должината на дијагоналата на квадратот е еднаква на производот од должината на неговата страна и бројот $\sqrt{2}$.**



Црт. 71

Бидејќи радиусот R на опишаната кружница околу квадратот е половина од неговата дијагонала d, т.е. $R = \dfrac{d}{2}$.

тоа:
$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2} \qquad (2)$$

Со формулите (1) и (2) велиме дека дијагоналата d и радиусот R на опишаната кружница ги изразивме како функции од страната a на квадратот.

Да ја изразиме сега страната a на квадратот како функција од неговата дијагонала d.

Од правоаголниот триаголник ABC, добиваме: $a^2 + a^2 = d^2$ или $2a^2 = d^2$ или $a^2 = \frac{d^2}{2}$. А оттука наоѓаме:

$$a = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \sqrt{\frac{d^2 \cdot 2}{4}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}, \quad \text{т.е.} \quad a = \frac{d\sqrt{2}}{2} \tag{3}$$

Бидејќи бројот $\sqrt{2}$ е ирационален број (непериодична децимална дропка со бесконечно многу децимали), тоа при користењето на формулите (1), (2) и (3) обично ја земаме неговата приближна вредност на две децимали, т.е. $\sqrt{2} \approx 1,41$. Ете зошто и пресметаните должини според формулите (1), (2) и (3) секогаш добиваат приближни вредности.

Задача 3. Да се одреди страната на квадратот, ако неговата дијагонала е долга 7 cm.

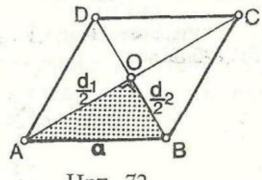
Решение: $a = \frac{d\sqrt{2}}{2} \approx \frac{7 \cdot 1,41}{2} = \frac{9,87}{2} = 4,93.$

Значи, страната на квадратот е долга $a \approx 4,9$ cm.

17. 3. РОМБ

На црт. 72 е нацртан ромб $ABCD$ и се повлечени двете негови дијагонали. Познато ви е дека дијагоналите на ромбот се преполовуваат и се нормални една на друга. Според тоа, тие го разделуваат ромбот на четири складни правоаголни триаголници. Кај секој од добиените триаголници хипотенуза е страната на ромбот, а катети се половинките од дијагоналите. Со примена на Питагоровата теорема на еден од добиените триаголници, добиваме:

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 \tag{4}$$



Црт. 72

Задача 4. Да се пресмета периметарот на ромб, чии дијагонали се: 9 cm и 12 cm!

Решение: Прво ја одредуваме страната на ромбот:

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2 = 4,5^2 + 6^2 =$$

$$= 20,25 + 36 = 56,25 \text{ или } a = \sqrt{56,25} = 7,5 \text{ (cm).}$$

Бараниот периметар на ромбот ќе биде $L = 4a = 4 \cdot 7,5 = 30$ (cm).

Задача 5. Да се пресмета плоштинатана еден двор, што има форма на ромб, ако се познати страната $a = 45$ m и една дијагонала $d_1 = 54$ m.

Решение: Плоштината на ромбот може да се пресемта на два начина: или со помош на страната и висината или пак со помош на двете дијагонали на ромбот. Бараната плоштина ние ќе ја одредиме на вториот начин. Од равенството (4) добиваме:

$$\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = 45^2 - \left(\frac{54}{2}\right)^2 = 45^2 - 27^2 = 2025 - 729 = 1296.$$

А оттука $\frac{d_2}{2} = \sqrt{1296} = 36$, значи: $d_2 = 36 \cdot 2 = 72$ (m).

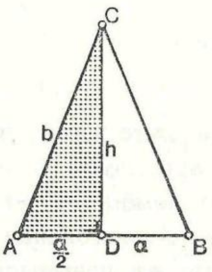
Кога ги знаеме двете дијагонали, плоштината на ромбот ќе биде:

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{54 \cdot 72}{2} = 54 \cdot 36 = 1944 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Значи, бараната плоштина на дворот е $P = 1944$ m².

17. 4. РАВНОКРАК ТРИАГОЛНИК

Нека е даден равнокрак триаголник ABC (црт. 73) со основа $\overline{AB} = a$ и крак $\overline{AC} = b$. Ако ја спуштиме висината h од врвот C кон основата a, таа ќе го раздели равнокракиот триаголник на два складни правоаголни триаголници. Хипотенуза на секој од тие триаголници ќе биде кракот b, а катети се спуштената висина h и половината од основата на равнокракиот триаголник. Од трите елементи на равнокракиот триаголник: основата a, кракот b и висината h, ако се познати кои било два елемента со примена на Питагоровата теорема на правоаголниот триаголник ADC (или BDC) (црт. 73), може да се одреди и третиот елемент.



Црт. 73

Така, на пример, ако се бара висината, а се познати основата и кракот, со примена на Питагоровата теорема од ΔADC, наоѓаме:

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \text{или} \quad h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \qquad (5)$$

Задача 6. Да се пресмета плоштината на равнокрак триаголник, ако се познати основата $a = 24$ cm и кракот $b = 30$ cm.

Решение: Прво ја одредуваме висината на равнокракиот триаголник. Од равенството (5) добиваме:

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 30^2 - \left(\frac{24}{2}\right)^2 = 900 - 144 = 756.$$

А оттука $h = \sqrt{756} \approx 27{,}5$ (cm). Сега бараната плоштина ќе биде:

$$P = \frac{ah}{2} \approx \frac{24 \cdot 27{,}5}{2} = 12 \cdot 27{,}5 = 330 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Задача 7. Плоштината на еден равнокрак триаголник е $P = 60$ cm². Да се одреди кракот на тој триаголник, ако основата му е $a = 10$ cm.

Решение: Од формулата за плоштина на триаголникот $P = \frac{ah}{2}$, имаме:

$$h = \frac{2P}{a} = \frac{2 \cdot 60}{10} = 2 \cdot 6 = 12 \text{ (cm)}.$$

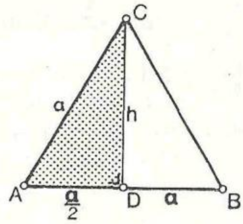
А кракот го одредуваме од равенството (5):

$$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169, \text{ а оттука: } b = 13 \text{ cm}.$$

17. 5. РАВНОСТРАН ТРИАГОЛНИК

На црт. 74 е нацртан равностран триаголник ABC со страна a. Ако ја повлечеме која и да било висина, таа ќе го раздели равностраниот триаголник на два складни правоаголни триаголници. Хипотенуза на секој од тие триаголници ќе биде страната a, а катети ќе бидат: половината страна $\left(\frac{a}{2}\right)$ и висината h на равностраниот триаголник.

Со примена на Питагоровата теорема на правоаголниот триаголник ADC (или DBC) може да се пресмета висината на равностраниот триаголник:



Црт. 74

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4},$$

а оттука: $h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Според тоа: $h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$ (6)

Следователно: **Висината на равностраниот триаголник е еднаква на производот од половината на неговата страна и бројот $\sqrt{3}$.**

Бидејќи бројот $\sqrt{3}$ е исто ирационален број, тоа насекаде каде што тој се појавува обично ја земаме неговата приближна вредност на две децимали, т.е. $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.

Формулата (6) за висината на равностраниот триаголник во геометријата многу често се користи, а со помош на неа се изведуваат и други важни формули, како што се: Формулата за пресметување на плоштината на равностран триаголник, формулите за радиус на впишаната и опишаната кружница околу равностраниот триаголник и др.

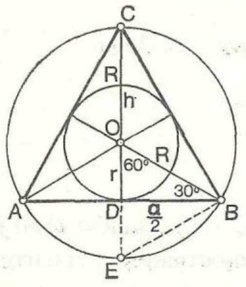
Да видиме сега како до нив доаѓаме:

Ако во општата формула за плоштина на триаголник $\left(P = \frac{ah}{2} = \frac{a}{2} \cdot h\right)$ висината ја замениме со најдениот израз за неа, ќе добиеме:

$$P = \frac{a}{2} \cdot h = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}, \quad \text{т.е.} \quad P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \qquad (7)$$

Според тоа: **Плоштината на равностран триаголник е еднаква на производот од четвртинката од квадратот на неговата страна и бројот $\sqrt{3}$.**

На црт. 75 е нацртан равностран триаголник ABC, па во него и околу него е впишана и е опишана кружница.



Црт. 75

Знаете дека висините на рамностраниот триаголник се истовремено и негови медијани, а медијаните се сечат во една точка која ја дели секоја медијана на делови во однос $2:1$ сметајќи од темето.

Според тоа: $\dfrac{\overline{CO}}{\overline{OD}} = \dfrac{2}{1}$ или $\dfrac{R}{r} = \dfrac{2}{1}$, а оттука $R = 2r$.

Бидејќи $R + r = h$, тоа $2r + r = h$ или $3r = h$, односно $r = \dfrac{1}{3}h$, но бидејќи $R = 2r$, тоа $R = \dfrac{2}{3}h$

Според тоа: $r = \dfrac{1}{3}h$, а $R = \dfrac{2}{3}h$ (8)

Ако во формулите (8) висината h ја замениме со изразот за неа $\left(\dfrac{a}{2}\sqrt{3}\right)$, ќе добиеме:

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3} \quad \text{и} \quad R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3},$$

т. е.

$$r = \frac{a}{6}\sqrt{3} \quad \text{и} \quad R = \frac{a}{3}\sqrt{3} \tag{9}$$

Тоа се нови формули за пресметување на радиусите на опишаната и впишаната кружница во рамностраниот триаголник со помош само на неговата страна a.

Задача 8. Страната на равностран триаголник изнесува $a = 12$ cm. Да се одреди неговата висина, плоштината и радиусите на опишаната и впишаната кружница.

Решение: Заменувајќи ја должината на страната a на рамностраниот триаголник во формулите (6), (7) и (9), наоѓаме:

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{12}{2}\sqrt{3} \approx 6\cdot 1{,}73 = 10{,}38 \approx 10{,}4 \text{ (cm)}.$$

$$P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{144}{4}\sqrt{3} \approx 36\cdot 1{,}73 = 62{,}28 \approx 62{,}3 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$R = \frac{a}{3}\sqrt{3} = \frac{12}{3}\sqrt{3} \approx 4\cdot 1{,}73 = 6{,}92 \approx 6{,}9 \text{ (cm)}.$$

$$r = \frac{a}{6}\sqrt{3} = \frac{12}{6}\sqrt{3} \approx 2\cdot 1{,}73 = 3{,}46 \approx 3{,}5 \text{ (cm)}.$$

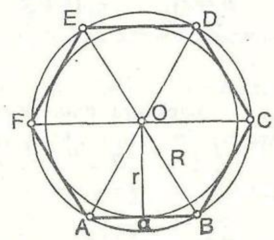
17. 6. ПРАВИЛЕН ШЕСТАГОЛНИК

Конструирајте правилен шестаголник *ABCDEF*, па во него и околу него впишете и опишете кружница (црт. 76.) Ако центраот на правилниот шестаголник го соединиме со секое теме, истиот се разделува на шест складни рамнострани триаголници. Според тоа, плоштината на правилниот шестаголник, ќе биде:

$$P = 6 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3} \quad \text{или} \quad P = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3} \qquad (10)$$

Од конструкцијата на правилниот шестаголник јасно е дека радиусот на опишаната кружница е еднаков на страната на правилниот шестаголник:

$$R = a \qquad (11)$$



Црт. 76

Од црт. 76 гледаме дека радиусот на вписаната кружница е еднаков на висината на рамностраниот триаголник *ABO*, т.е.

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{3} \qquad (12)$$

Задача 9. Периметарот на правилен шестаголник изнесува 24 cm. Да се пресмета неговата плоштина, радиусот на опишаната и радиусот на вписаната кружница во него.

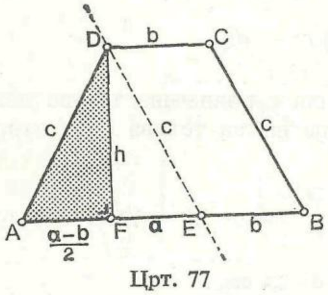
Решение: Страната на правилниот шестаголник, кога е познат неговиот периметар, ќе биде: $a = \frac{L}{6} = \frac{24}{6} = 4$ (cm).

Бараната плоштина е: $P = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3} = \frac{3 \cdot 16}{2}\sqrt{3} \approx 3 \cdot 8 \cdot 1{,}73 = 41{,}52 \approx 41{,}5$, а радиусите на вписаната и опишната кружница:

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{4}{2}\sqrt{3} \approx 2 \cdot 1{,}73 = 3{,}46 \approx 3{,}5 \text{ (cm) и } R = a = 4 \text{ cm.}$$

17. 7. РАВНОКРАК ТРАПЕЗ

Нека е даден рамнокрак трапез *ABCD*, со основи $\overline{AB} = a$ и $\overline{CD} = b$ и крак $\overline{AD} = \overline{BC} = c$ (црт. 77). Ако низ темето *D* повлечеме права паралелна со кракот *BC*, рамнокракиот трапез ќе се раздели на ромбоид *BCDE* и еден рамнокрак триаголник *AED*.



Црт. 77

Така добиениот рамнокрак триаголник *AED* ќе има основа $a - b$ и висина еднаква на висината на рамнокракиот трапез. Висината *DF* го дели рамнокракиот триаголник на два правоаголни триаголници. Со примена на Питагоровата теорема на еден од тие триаголници можеме да ја одредиме висината на равнокракиот трапез:

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \quad \text{или} \quad h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} \tag{12}$$

Задача 10. Една нива има форма на равнокрак трапез со основи $a = 120$ m и $b = 70$ m и крак $c = 65$ m. Да се одреди нејзината плоштина.

Решение: За пресметување плоштината на нивата е потребно да ја знаеме висината на трапезот, затоа ќе ја одредиме прво неа:

$$h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{65^2 - \left(\frac{120-70}{2}\right)^2} = \sqrt{65^2 - 25^2} = \sqrt{4225 - 625} =$$

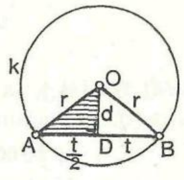
$$= \sqrt{3600} = 60 \text{ (cm)}.$$

Бараната плоштина на нивата ќе биде:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{120+70}{2} \cdot 60 = \frac{190}{2} \cdot 60 = 95 \cdot 60 = 5700 \text{ (m}^2\text{)}.$$

17. 8. КРУЖНИЦА

Нека е дадена кружница $k(O, r)$ и една нејзина тетива $\overline{AB} = t$ (црт. 78). Ако центраот O го соединиме со крајните точки на тетивата AB го добиваме равнокракиот триаголник ABO, чија основа е дадената тетива AB, а краци се радиусите OA и OB.



Црт. 78

Висината OD, повлечена од врвот O кон основата AB, го разделува ΔABO на два складни правоаголни триаголници AOD и BOD. Притоа, должината на повлечената висина OD наедно претставува и централно растојание на тетивата AB од центарот O на кружницата, па затоа обично ја означуваме со d, т.е. $\overline{OD} = d$.

Со примена на Питагоровата теорема на еден од добиените правоаголни триаголници, добиваме:

$$d^2 = r^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2 \quad \text{или} \quad d = \sqrt{r^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

Ако пак е познато централното растојание d и радиусот r, тогаш должината на тетивата, ќе биде:

$$\left(\frac{t}{2}\right)^2 = r^2 - d^2 \quad \text{или} \quad t = 2\sqrt{r^2 - d^2}$$

Задача 11. Во кружница со радиус $r = 4$ cm е повлечена тетива долга $t = 6{,}4$ cm. Да се одреди централното растојание на таа тетива од центарот на кружницата.

Решение: $d = \sqrt{r^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{6{,}4}{2}\right)^2} = \sqrt{16 - 3{,}2^2} = \sqrt{5{,}76} = 2{,}4$ (cm).

Значи, бараното централно растојание изнесува d=2,4 cm.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Пресметај ја дијагоналата на правоаголник, чии страни се: а) $a=7$ cm, $b=9$ cm; б) $a=6{,}2$ cm, $b=8{,}5$ cm; в) $a=13$ cm, $b=11$ cm.

2. Пресметај го периметарот и плоштината на правоаголник, ако се познати: дијагоналата 19 dm и едната страна $a=15$ dm.

3. Одреди ја должината на дијагоналата на квадрат, ако е познат неговиот периметар $L=28$ cm.

4. Во областа на еден прав агол лежи точка M, која од неговите краци е оддалечена 4,8 cm и 1,4 cm. Одреди колку е оддалечена точката M од темето на правиот агол!

5. Во кружница со радиус $r=6{,}5$ cm е впишан правоаголник, чија една страна е долга 5 cm. Најди го периметарот и плоштината на правоаголникот!

6. Во квадрат со страна 9 cm едно теме е сврзано со средината на една страна на која не лежи тоа теме. Пресметај ја должината на повлечената отсечка! Направи цртеж!

7. Дијагоналите на еден ромб се долги 18 cm и 13 cm. Пресметај ја неговата висина и периметар.

8. Страната на ромбот е долга 15,5 cm и едната дијагонала $d_1=25{,}4$ cm. Пресметај ја другата дијагонала и плоштината на ромбот.

9. Пресметај ја висината на равнокрак триаголник, ако се познати неговата основа $a=7$ cm и кракот $b=5{,}5$ cm.

10. Пресметај ја плоштината на равнокрак триаголник со основа $a=9{,}5$ cm и крак $b=15$ cm.

11. Пресметај ја плоштината на равнокрак триаголник, чиј крак е $b=4{,}8$ cm и висината што ѝ одговара на основата $h=3{,}6$ cm.

12. Пресметај ја хипотенузата на равнокрак правоаголен триаголник, ако катетата му е долга 6,5 dm.

13. Одреди ја катетата на равнокрак правоаголен триаголник, ако хипотенузата е долга 17 cm.

14. Нацртај два квадрата секој со страна 3,5 cm. Исечи ги квадратите, а едниот од нив преполови го по дијагоналата. Од добиените делови состави равнокрак правоаголен триаголник и пресметај го неговиот периметар!

15. Пресметај ја висината на равностран триаголник, чија страна е долга: а) 8 cm, б) 12,4 cm, в) 6,7 cm.

16. Пресметај ја плоштината на равностран триаголник, чија страна е 7,2 cm.

17. Пресметај го радиусот на впишаната и опишаната кружница на равностран триаголник со страна $a=22{,}5$ cm.

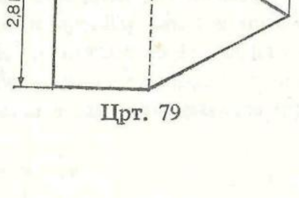
18. Пресметај ги периметарот, радиусот на впишаната и радиусот на опишаната кружница на равностран триаголник, чија висина е 18 cm.

19. Во кружница со радиус 6,6 cm е впишан равностран триаголник. Пресметај го периметарот и плоштината на триаголникот.

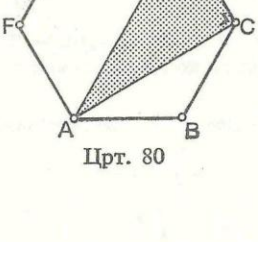
20. Над едната страна на еден правоаголник конструиран е равностран триаголник како на црт. 79. Пресметај ги периметарот и плоштината на целата фигура според дадените податоци на цртежот.

21. Пресметај ја плоштината на правилен шестаголник, чија страна е долга $a=3{,}5$ cm.

22. Во правилен шестаголник со страна 4 cm впиши кружница и пресметај го нејзиниот радиус!



Црт. 79



Црт. 80

23. Одреди ја страната на правилен шестаголник, ако е позната неговата плоштина $P=28{,}46\ cm^2$.

24. На црт. 80 е нацртан правилен шестаголник со страна 2,5 cm. Од темето A повлечени се дијагоналите AC и AD. Пресметај ја плоштината на триаголникот ACD, кога се знае дека тој е правоаголен со прав агол во темето C.

25. Пресметај ја плоштината на еден рамнокрак трапез, ако се познати неговите основи $a=26$ cm, $b=12$ cm и кракот $c=17$ cm.

26. Пресметај ги висината, дијагоналата, периметарот и плоштината на рамнокрак трапез, ако се познати неговите основи: $a=57$ cm, $b=24$ cm и кракот $c=41$ cm.

27. Плоштината на еден рамнокрак трапез е $P=68\ cm^2$, основите му се долги 13 cm и 4 cm. Пресметај го неговиот периметар.

28. Во рамнокрак трапез основите се долги 12,5 cm и 3,5 cm, а дијагоналата 10 cm. Одреди го периметарот и плоштината на трапезот.

29. Пресметај го периметарот на правоаголен трапез, ако се познати неговите основи $a=57$ cm, $b=19$ cm и висината $h=25$ cm.

30. Основите на правоаголен трапез се долги 2 dm и 2,5 dm, а подолгиот крак 13 cm. Пресметај го периметарот и плоштината на тој трапез!

31. Два фабрички оџаци се оддалечени еден од друг 35 m, а високи се: едниот 58 m, а другиот 40 m. Врвовите на оџаците поврзани се со затегната жица. Пресметај колку е долга жицата.

32. Страните на еден делотид се долги: 28 cm и 46 cm. Пресметај ја плоштината на делтоидот, ако неговата дијагонала, што не е симетрала, изнесува 35 cm.

33. Во кружница со радиус 6,5 cm е повлечена тетива долга 5 cm. Одреди го нејзиното централно растојание!

34. Во полукруг со дијаметар 5 dm е повлечена паралелна тетива на дијаметарот, а на растојание 14 cm од него. Одреди ја должината на тетивата!

35. Тетива долга 5 cm е оддалечена од центарот на кружницата 6 cm. Одреди го радиусот на кружницата!

36. Во кружницата чија должина е 15,7 cm, е повлечена тетива, која од центарот е оддачелена 2 cm. Одреди ја должината на тетивата!

37. Во кружница со радиус 4 cm е повлечена тетива што му одговара на централен агол 60°. Одреди на какво растојание се наоѓа таа од центарот!

38. Центрите на две складни кружници со радиус 3,9 cm се на растојание еден од друг 7,2 cm. Одреди ја должината на нивната заедничка тетива!

ТОЧКА, ПРАВА, РАМНИНА И ГЕОМЕТРИСКО ТЕЛО

§ 18. ПРЕГЛЕД НА ПОВАЖНИТЕ ДОСЕГА ПОЗНАТИ ПОИМИ

Просторот го замислуваме (разгледуваме) како бесконечно множество од геометриски точки, што ќе го означуваме со $\mathcal{P}$. Значи, геометриските точки се елементи на $\mathcal{P}$.

Различните точки, обично, ги означуваме со различни букви $A, B, C, \ldots$ Меѓутоа, ако буквите A и B се ознаки за една иста точка, тогаш пишуваме $A \equiv B$ и велиме дека точките *A и B се совпаѓаат.*

Секое непразно множество од точки го викаме *геометриска фигура*, или само *фигура.* Според тоа, секоја фигура е некое подмножество од $\mathcal{P}$.

Два вида фигури што се одликуваат од другите фигури по своите специфични својства се правите и рамнините. Правите ги означуваме со малите латински букви $a, b, c, \ldots$, а рамнините — со грчките букви: $\alpha, \beta\, \gamma\, \delta \ldots, \pi, \ldots$

Поимите права и рамнина, како и поимот точка се појдовни (основни) поими во геометријата. Нив не ги дефинираме, а ги осмислуваме со следниве тврдења, што ги прифаќаме како основни (без доказ), т.е. со аксиомите:

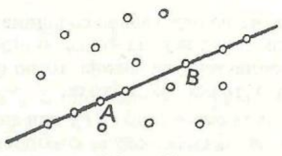
Аксиома 1. *Правата е множество од бесконечно многу точки, а за секоја права постојат исто така бесконечно многу точки што не ѝ припаѓаат.*

Аксиома 2. *Низ кои и да било две различни точки во просторот минува една, и тоа само една права* (црт. 81).

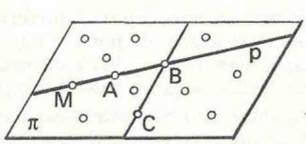
Аксиома 3. *Рамнината е множество од бесконечно многу точки, а за секоја рамнина постојат исто така бесконечно многу точки што не ѝ припаѓаат.*

Аксиома 4. *Ако две различни точки A и B од правата p ѝ припаѓаат на рамнината π, тогаш и секоја точка $M \in p$ ѝ припаѓа на рамнината π* (црт. 82).

Во тој случај велиме дека правата *p ѝ припаѓа* (или *лежи на*) рамнината π, или дека рамнината π *минува низ* правата p.



Црт. 81



Црт. 82

Аксиома 5. *Рамнината π, на која лежи правата p, содржи бесконечно многу точки што не ѝ пипаѓаат на правата p* (црт. 82).

Според тоа, согласно аксиомите 4 и 5, рамнината π содржи бесконечно многу различни прави. Следователно, правите и рамнините се различни множества од точки, т.е. различни фигури.

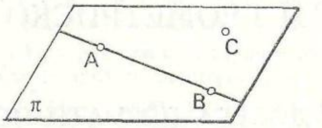
Оттука следува дека *рамнината е неограничена,* бидејќи се неограничени и правите што таа ги содржи (црт. 82). Затоа на цртежот може да се претстави само дел од рамнината, а тој дел обично го цртаме во форма на паралелограм.

Аксиома 6. *Низ кои и да било три различни точки во просторот, што не лежат на една права, минува една и само една рамнина* (црт. 83).

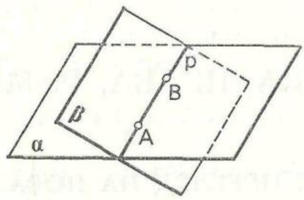
Аксиома 7. *Ако две различни рамнини имаат една заедничка точка, тогаш тие имаат барем уште една заедничка точка, а според тоа тие имаат и заедничка права што е определена од тие две заеднички точки.*

За две различни рамнини кои имаат заедничка права велиме дека тие *се сечат*, а нивната заедничка права се вика нивна *пресечка* (*секанта*) (црт. 84).

Аксиома 8. *Секоја права p што лежи на рамнината π ја разделува рамнината π на два дела — наречени полурамнини.*



Црт. 83

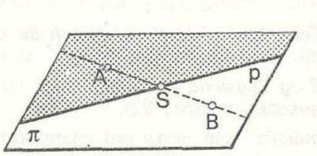


Црт. 84

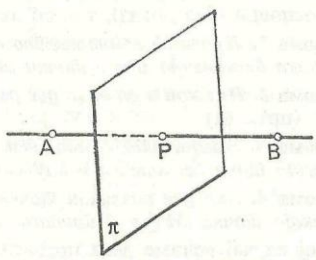
Правата p ја викаме *граница* или *раб* на секоја од двете полурамнини. Ако точките A и B лежат во различните полурамнини на рамнината π, тогаш правата AB и правата p секогаш имаат една и само една заедничка точка S (црт. 85).

Аксиома 9. *Секоја рамнина π го дели просторот на две области — наречени полупростори, така што ако точките A и B им припаѓаат на различните полупростори, тогаш правата AB секогаш има една единствена заедничка точка P со рамнината π* (црт. 86).

Рамнината π ја викаме *граница* или *ѕид* на секој од двата полупростори. Заедничката точка P на правата AB и рамнината π (црт. 86) ја викаме *пробод* на правата AB во рамнината π, и велиме дека правата AB *ја прободува* рамнината π во точката P.



Црт. 85



Црт. 86

За точките на просторот $\mathcal{P}$ практиката не упатува на едно вакво сознание: Секоја точка на просторот е на некое *растојание* од која и да било друга негова точка, односно дека:

На секој пар точки A и B од просторот му соодветсувува некоја точно определена ненегативна величина, која се вика растојание од едната точка до другата.

Растојанието од точката A до точката B го означуваме со d (AB) или почесто со $\overline{AB}$. Тоа како и секоја друга величина може да се мери и да се изразува со броеви.

Основниот поим растојание го осмислуваме со следниве три негови својства:

1°. Растојанието од точката A до точката B е позитивно, ако тие се различни, и е еднакво на нула, ако тие се совпаѓаат, т.е.

$$\overline{AB} > 0, \text{ ако } A \neq B, \text{ и } \overline{AB} = 0, \text{ ако } A \equiv B$$

2.° Растојанието од A до B е еднакво со растојанието од B до A, т.е.

$$\overline{AB} = \overline{BA}$$

3°. За кои и да било три точки A, B, C растојанието од A до C не е поголемо од збирот на растојанијата од A до B и од B до C, т.е.

$$\overline{AC} \leqslant \overline{AB} + \overline{BC}$$

§. 19 ЗАЕМНИ ПОЛОЖБИ НА ТОЧКИТЕ, ПРАВИТЕ И РАМНИНИТЕ ВО ПРОСТОРОТ (ПОВТОРУВАЊЕ)

19.1. ДВЕ ТОЧКИ. ТОЧКА И ПРАВА. ТОЧКА И РАМНИНА

1. Две точки A и B во просторот $\mathcal{P}$:
— или се различни, т.е. $A \neq B$,
— или се совпаѓаат, т.е. $A \equiv B$.

2. За една точка M и една права p во просторот може:
— или точката M да *ѝ припаѓа* (*да лежи*) *на правата* p, т.е. $M \in p$,
— или точката M да *не ѝ припаѓа* (да *не лежи*) *на правата* p, т.е. $M \notin p$,

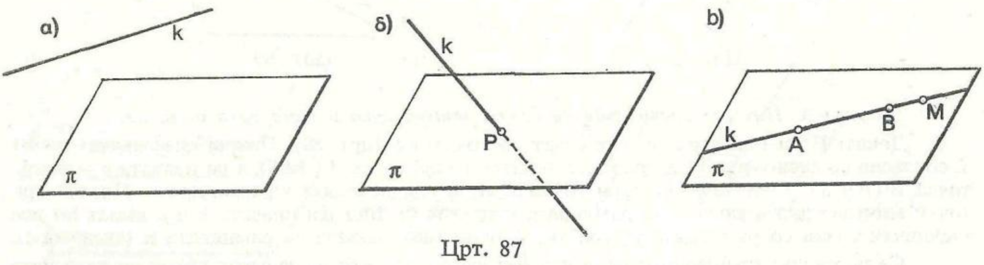
Во првиот случај уште велиме дека „правата p *минува низ* тоакчта M", а во вториот случај дека „точката M *е надвор* од првата p".

3. Една точка M и една рамнина π можат да ги имаат само следниве две заемни положби во просторот:
— или точката M *ѝ припаѓа* (*лежи*) *на рамнината* π, т.е. $M \in \pi$,
— или точката M *не ѝ припаѓа* (*не лежи*) *на рамнината* π ($M \notin \pi$).

Во првиот случај уште велиме дека „рамнината π *минува низ* точката M", а во вториот случај дека „точката M *е надвор* од рамнината π".

19.2. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ПРАВА И РАМНИНА

Нека се дадени права k и рамнина π. Знаете дека и правата k и рамнината π се некои множества од точки. Да го разгледаме пресекот $k \cap p$. Тој пресек може да биде празно множество (црт. 87-а), множество само од една точка (црт. 87-б) или множество повеќе од една точка (црт. 87-в). Со аксиомата 4 прифативме дека ако две точки A и B од правата k ѝ припаѓаат на рамнината π, тогаш и секоја точка M од правата k ѝ припаѓа на рамнината π (црт. 87-в).



Црт. 87

Според тоа, правата k и рамнината π, може:
— или да немаат ниту една заедничка точка, т.е. $k \cap \pi = \varnothing$,
— или да имаат само една заедничка точка P, т.е. $k \cap \pi = \{P\}$,
— или секоја точка од правата k да ѝ припаѓа на рамнината π, т.е. $k \cap \pi = k$.

Во првиот случај, кога $k \cap \pi = \varnothing$, велиме дека правата k *е паралелна* со рамнината π.

Во вториот случај, кога $k \cap \pi = \{P\}$, велиме дека правата k *ја прободува* рамнината π во точката P, а точката P ја викаме *прободод* на правата k во рамнината π.

Во третиот случај, кога $k \cap \pi = k$, очигледно е дека правата k е вистинско подмножество од рамнината π, т.е. $k \subset \pi$. Затоа велиме дека правата k *ѝ припаѓа* (или *лежи*) на рамнината π, односно дека рамнината π *минува низ* правата k.

Обично, и за секоја права која лежи на дадена рамнина ќе велиме дека е паралелна со неа — специјален случај на паралелност. Значи, ја усвојуваме следнава:

Дефиниција: 1. *Ако правата k и рамнината π немаат ниту една заедничка точка ($k \cap \pi = \varnothing$) или правата k лежи на рамнината π ($k \cap \pi = k$), тогаш за нив велиме дека се паралелни и ќе означуваме*: $k \parallel \pi$, т.е.

$$(k \cap \pi = \varnothing \text{ или } k \cap \pi = k) \Rightarrow k \parallel \pi$$

Според тоа, дадена права k и дадена рамнина π можат да имаат една од следниве заемни положби во просторот:

— или правата k да е паралелна со рамнинат. π (или да лежи на рамнината — специјален случај на паралелност,

— или пр-вата k да ја прободува рамнината π.

19.3. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ДВЕ ПРАВИ

Врз основа на аксиомите 1—9 можат да се докажат следниве тврдења — теореми:

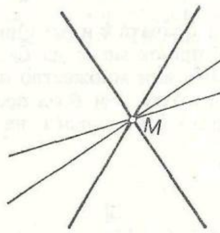
Теорема 1. *Низ секоја точка во просторот минуваат бесконечно многу прави* (црт. 88).

Теорема 2. *Две различни прави не можат да имаат повеќе од една заедничка точка.*

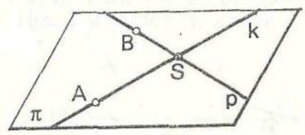
Доказ: Ако допуштиме дека две различни прави a и b имаат повеќе од една заедничка точка, на пример две заеднички точки M и N, тогаш тие две точки ќе им припаѓаат на две различни прави, а тоа е во контрадикција со аксиомата 2, според која: низ две различни точки минува само една права. Според тоа, различните прави a и b не можат да имаат повеќе од една заедничка точка, т.е. тие или немаат заедничка точка или имаат само една заедничка точка.

Од друга страна, пак, тоа значи: ако две прави a и b имаат повеќе од една заедничка точка, тогаш тие две прави не се различни, туку како множества точки тие се еднакви. Во тој случај за правите a и b велиме дека *се совпаѓаат*.

Ако правите k и p имаат само една заедничка точка S, т.е. $k \cap p = \{S\}$, тогаш велиме дека тие *се сечат*. Заедничката точка S се вика *пресек* на правите k и p (црт. 89).



Црт. 88



Црт. 89

Теорема 3. *Низ две прави што се сечат минува една и само една рамнина.*

Доказ: Нека правите k и p се сечат во точката S (црт. 89). Покрај пресечната точка S, согласно со аксиомата 1 на правата k постои некоја точка A ($A \neq S$), а на правата p – некоја точка B ($B \neq S$). Така добиваме три точки S, A, B кои не лежат на една права. Низ тие три точки минува една и само една рамнина π (аксиома 6). Бидејќи правите k и p имаат по две заеднички точки со рамнината π, тоа тие ѝ припаѓаат (лежат) на рамнината π (аксиома 4).

Се поставува прашањето: дали и секои две прави што не се сечат лежат во една иста рамнина? Одговор на тоа прашање ни дава следнава:

Теорема 4. *Постојат прави што не лежат на една иста рамнина.*

Доказ: Согласно со аксиомите 3 и 6 секогаш можеме да избереме барем четири точки A; B; C и S кои не лежат на една иста рамнина.

Нека точките A, B, C ја определуваат рамнината π (црт. 90). Тогаш $A, B, C \in \pi$, но $S \notin \pi$. Правите AB и CS не лежат на иста рамнина, бидејќи ако би постоела некоја рамнина Σ што минува низ правите AB и CS, тогаш и точките A, B, C и S би лежеле на таа рамнина; а тоа противречи на претпоставката дека точките A, B, C и S не лежат на иста рамнина.

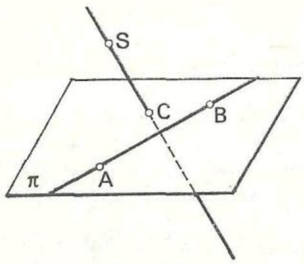
Гледаме, правата AB лежи на рамнината π, а правата SC ја прободува рамнината π во точката C (црт. 90).

Очигледно е дека: Ако две прави a и b не лежат на иста рамнина, тогаш тие не можат да имаат заедничка точка (Зошто?).

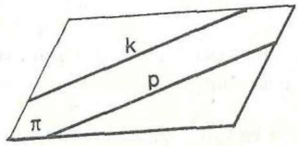
Теоремата 4 ни овозможува да согледаме две различни положби на две прави во просторот што не се сечат. Тие можат: или да лежат или да не лежат на иста рамнина.

Дефиниција 2. *Две прави k и p што лежат на иста рамнина и не се сечат или се совпаѓаат, се викаат паралелни прави и пишуваме* $k \parallel p$ (црт. 91).

Дефиниција 3. *Две прави што не лежат на една иста рамнина се викаат разминувачки прави.*



Црт. 90



Црт. 91

Од сето до тука можеме да заклучиме дека: две прави можат:

— или да се сечат,

— или да се паралелни (или да се совпаѓаат — специјален случај на паралелност),

— или да се разминувачки.

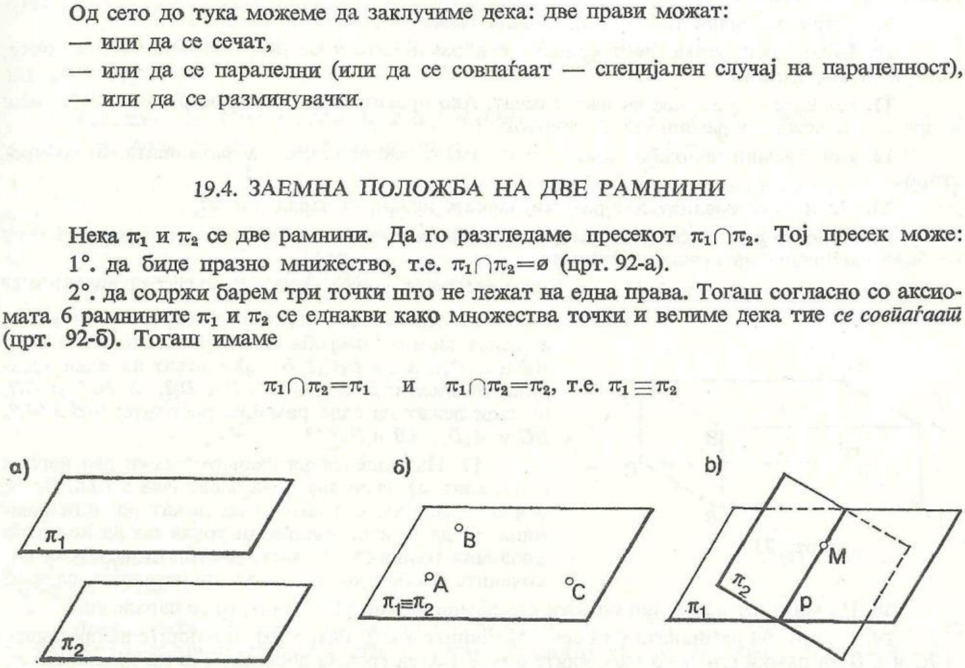
19.4. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ДВЕ РАМНИНИ

Нека π_1 и π_2 се две рамнини. Да го разгледаме пресекот $\pi_1 \cap \pi_2$. Тој пресек може:

1°. да биде празно множество, т.е. $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$ (црт. 92-а).

2°. да содржи барем три точки што не лежат на една права. Тогаш согласно со аксиомата 6 рамнините π_1 и π_2 се еднакви како множества точки и велиме дека тие *се совпаѓаат* (црт. 92-б). Тогаш имаме

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1 \quad \text{и} \quad \pi_1 \cap \pi_2 = \pi_2, \text{ т.е. } \pi_1 \equiv \pi_2$$



Црт. 92

3°. да не е празно множеството и рамнините да не се совпаѓаат, т.е. $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \varnothing$, $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \pi_1$, $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \pi_2$. Тоа е случај кога рамнините π_1 и π_2 се различни и имаат една заедничка точка (црт. 92.в). Но тогаш согласно со аксиомата 7 рамнините π_1 и π_2 имаат и заедничка права p, т.е. $\pi_1 \cap \pi_2 = p$, и велиме дека тие *се сечат*.

Во случаите 1° и 2° за рамнините π_1 и π_2 велиме дека *се паралелни* и пишуваме $\pi_1 \parallel \pi_2$.

Дефиниција 4. *Две рамнини се викаат паралелни, ако тие немаат заеднички точки или се совпаѓаат,* т.е.

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \overset{Df}{\Longleftrightarrow} (\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing \text{ или } \pi_1 \equiv \pi_2)$$

Според тоа, две рамнини π_1 и π_2 можат да имаат една од следниве заемни положби во просторот:

— или да се паралелни (или да се совпаѓаат — специјален случај на паралелност),

— или да се сечат.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Колку прави минуваат низ: а) една точка, б) две различни точки во просторот?

2. Колку прави определуваат три различни точки што не лежат на иста права? Нацртај и објасни!

3. Колку прави определуваат четири така одбрани точки во просторот од кои никои три да не лежат на иста права? Нацртај!

4. Каква фигура претставува множеството од заедничките точки на две различни прави?

5. Дали можат две различни рамнини да имаат само една заедничка точка?

6. Каква фигура претставува множеството од заедничките точки на две различни рамнини?

7. Докажи дека: рамнина и една права што не лежи на неа не можат да имаат повеќе од една заедничка точка!

8. За три различни точки A, B и C е познато дека $\overline{AB}=6$ и $\overline{BC}=9$. Дали може растојанието $\overline{AC}$ да биде: а) 8, б) 15, в) 17, г) 2?

9. За три различни точки A, B, C дали може да биде $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}$?

10. Како заклучуваме дека правата p и рамнината π се различни множества точки, т.е. различни фигури?

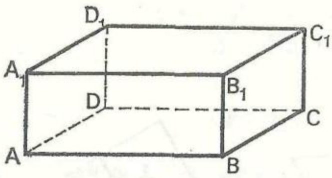
11. Правите a, b и c две по две се сечат. Ако правите b и c лежат во рамнината π, дали и правата a лежи во рамнината π? Зошто?

12. Кои заемни положби можат да ги имаат две прави: а) на рамнината, б) во просторот?

13. По што се разликуваат разминувачките прави од паралелните?

14. Правата p ја прободува рамнината π. Дали може на рамнината π да лежи права што ќе биде паралелна на правата p? Зошто?

15. Познато е $p \cap \pi = \{M\}$, $a \| \pi$. Каква заемна положба можат да имаат правите p и a?



Црт. 93

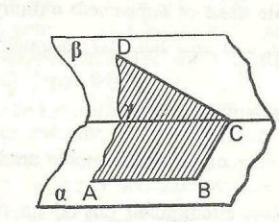
16. На моделот на квадар (црт. 93) покажи: а) каква заемна положба имаат рабовите AB и BC?, AB и C_1D_1?, AB и B_1C_1?, б) дали лежат на една рамнина темињата: B, C и C_1?, A, B и D_1?, A, B, C и C_1?, в) дали лежат на една рамнина рабовите: AB и BC?, BC и A_1D_1, AB и B_1C_1?

17. На моделот на квадар покажи два негови раба, кои: а) да имаат една заедничка точка, б) да немаат заеднички точки и да лежат во иста рамнина, в) да немаат заеднички точки но да лежат во различни рамнини. Во каква заемна положба се посочените рабови во секој од приведените случаи?

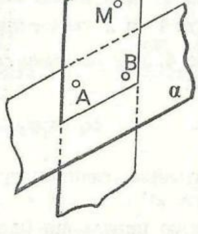
18. На моделот на квадар покажи две рамнини кои: а) се сечат, б) се паралелни!

19. На црт. 94 рамнината γ ги сече рамнините α и β. Разгледај ги линиите на пресеците ABC и CD на рамнината γ со рамнините α и β. Каква грешка забележуваш на цртежот?

20. Еден ученик добил задача да нацрта една рамнина, која минува низ точката M што лежи надвор од рамнината α и да ја сече рамнината во двете нејзини точки A и B. Ученикот го направил црт. 95. Разгледај го цртежот и покажи какви грешки забележуваш на него?



Црт. 94



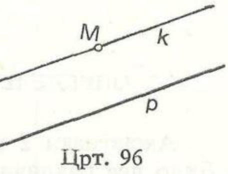
Црт. 95

§ 20*. ПАРАЛЕЛНОСТ НА ПРАВИ И РАМНИНИ

20.1. ПАРАЛЕЛНИ ПРАВИ

Усвоивме дека две различни прави во просторот се викаат паралелни, ако тие лежат во една рамнина и не се сечат.

Нека p е права и M — точка што не лежи на правата p (црт. 96). Се поставува прашањето: Колку прави, паралелни со правата p, минуваат во просторот низ точката M? Одговор на тоа прашање ни дава следново тврдење што го прифаќаме без доказ, како аксиома:



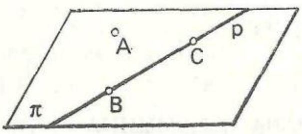
Црт. 96

Аксиома 10. *Низ дадена точка M, што не лежи на дадена права p, минува една и само една права k што е паралелна на правата p* (црт. 96).

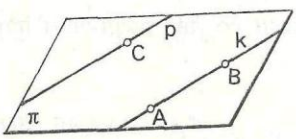
Оваа аксиома се вика *аксиома за паралелност* и има многу важна улога во геометријата.

Теорема 1. *Низ дадена права p и дадена точка A што не лежи на правата p, минува една и само една рамнина π.*

Доказ: Нека се дадени права p и точка $A \notin p$ (црт. 97). На правата p можеме да земеме две произволни точки B и C, кои заедно со дадената точка A претставуваат три точки што не лежат на една права. Согласно со аксиомата 6 низ точките A, B и C минува една и само една рамнина π. Дадената права p има две заеднички точки со рамнината π, па според тоа таа лежи на рамнината π (аксиома 4).



Црт. 97



Црт. 98

Теорема 2. *Низ две разлини паралелни прави k и p минува една и само една рамнина π.*

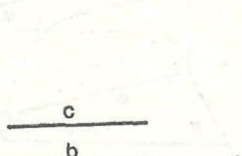
Доказ: Нека се дадени паралелните прави k и p (црт. 98). Согласно со дефиницијата за паралелни прави постои рамнина π на која дадените паралелни прави k и p лежат. Таа рамнина е и единствена. Тоа го гледаме оттаму што ако A и B се две различни точки од правата k, C — точка од другата права p, тогаш рамнината π минува низ тие три точки што не лежат на една права, па според тоа таа е единствена.

Теорема 3. *Ако секоја од две прави a и b е паралелна на трета права c, тогаш и тие се паралелни меѓу себе,* т.е.

$$(a \parallel c \text{ и } b \parallel c) \Rightarrow a \parallel b$$

Доказ: Ќе се ограничиме на случајот кога правите a, b, c лежат во иста рамнина (црт. 99). Нека $a \parallel c$ и $b \parallel c$. Треба да докажеме дека $a \parallel b$.

Да допуштиме дека правите a и b не се паралелни, т.е. дека се сечат во некоја точка S. Меѓутоа, во тој случај низ точката S ќе минуваат две прави a и b што се паралелни на трета права c, а тоа е во контрадикција со акиомата 10. Значи, претпоставката е неточна, а точно е тврдењето на теоремата, т.е. дека $a \parallel b$.



Црт. 99

Релацијата паралелност на правите ги има својствата на:

1°. рефлексивност: $a \parallel a$

2°. симетричност: $a \parallel b \Rightarrow b \parallel a$

3°. транзитивност: $(a \parallel b$ и $b \parallel c) \Rightarrow a \parallel c$.

20.2. ОПРЕДЕЛЕНОСТ НА ПРАВАТА И РАМНИНАТА ВО ПРОСТОРОТ

Аксиомата 2 утврдува дека секогаш постои права која минува низ кои и да било две различни точки и дека таа е и единствена. Од неа следува дека:

Правата е еднозначно определена со две различни точки.

Навистина, две различни точки ѝ припаѓаат само на една единствена права.

Да видиме сега со што е определена рамнината во просторот.

Аксиомата 6 и теоремите 3 (§ 19) и 1 и 2 (§ 20) означуваат дека:

Рамнината е еднозначно определена во просторот:

— со три точки што не лежат на една права,

— или со една права и точка што не лежи на правата,

— или со две прави што се сечат,

— или со две различни паралелни прави.

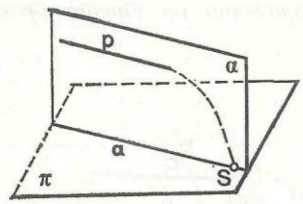
20.3. ПАРАЛЕЛНОСТ НА ПРАВА И РАМНИНА

Знаете дека права и рамнина се викаат паралелни, ако правата не ја прободува рамнината, односно ако тие не се сечат.

Теорема 4. *Дадена права е паралелна на рамнината π, ако таа е паралелна на некоја права а што лежи во рамнината π.*

Доказ: Нека се дадени рамнина π, права p и права a која лежи на рамнината π и $a \parallel p$ (црт. 100). Ќе докажеме дека $p \parallel \pi$.

Паралелните прави p и a определуваат рамнина α. Правата a лежи истовремено на двете рамнини π и α, а правата p — само на α. Да допуштиме дека правата p ја прободува рамнината π во некоја точка S. Во тој случај точката S ќе лежи на правата a, но тоа е неможно бидејќи $a \parallel p$. Според тоа, правата p не може да ја прободува рамнината π. Значи: $p \parallel \pi$, штд.



Црт. 100

Може да се докаже дека важи и обратната теорема на тереомата 4:

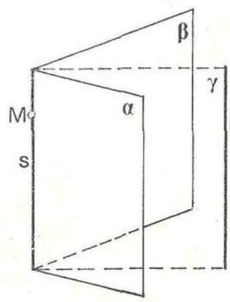
Теорема 4-б. *Ако една права p е паралелна на дадена рамнина π, тогаш таа е паралелна и на пресечката на таа рамнина со секоја рамнина која минува низ правата p.*

Последица: **Ако една права е паралелна на дадена рамнина, тогаш таа е паралелна на бесконечно многу прави што лежат на дадената рамнина и се паралелни меѓу себе.**

Теорема 5. *Ако една права p е паралелна истовремено на две рамнини α и β што се сечат, тогаш таа е паралелна и на нивната пресечка.*

Доказ: Нека α и β се две рамнини што се сечат по правата s, а p — права паралелна на рамнините α и β (црт. 101). Треба да докажеме дека $p \| s$.

На пресечката s да земеме произволна точка M. Правата p и точката M определуваат некоја рамнина γ која ќе ги сече рамнините α и β по прави, на пример a и b што се паралелни на правата p (теорема 4-б). Бидејќи тие две прави a и b минуваат низ точката M и се паралелни со p, тоа според аксиомата за паралелност тие се совпаѓаат. Но таа права треба да лежи истовремено и во рамнината α и во рамнината β. Значи, таа ќе се совпадне со пресечката s на рамнините α и β. Оттука следува дека $p \| s$, штд.



Црт. 101

20.4. ПАРАЛЕЛНИ РАМНИНИ

Две различни рамнини велиме дека се паралелни, ако тие не се сечат.

Теорема 6. *Ако рамнината α е паралелна на две прави што се сечат и лежат во рамнината β, тогаш рамнината α и β се паралелни.*

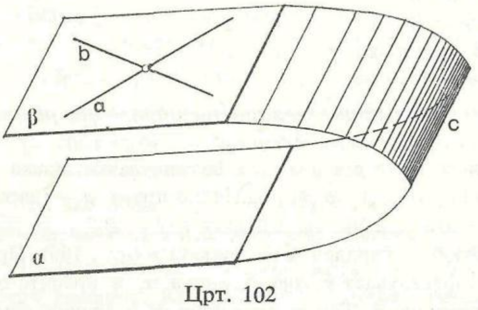
Доказ: Нека α и β се две различни рамнини и нека правите a и b што лежат на рамнината β се сечат и се паралелни на α (црт. 102). Ќе докажеме дека $\alpha \| \beta$.

Да допуштиме дека рамнините α и β не се паралелни, туку дека тие се сечат по некоја права c. Правата c, бидејќи лежи на рамнината β, ќе се сече со едната од правите a и b, на пример со a. Тоа е затоа што е неможно таа (правата c) да биде паралелна истовремено на две прави a и b што се сечат. Оттука следува дека правата a ќе ја прободува рамнината α, кое пак противречи на условот $a \| \alpha$.

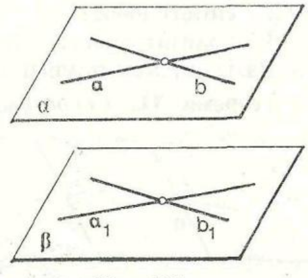
Според тоа, рамнините α и β не се сечат, туку се паралелни, штд.

Последица: **Ако две прави што се сечат и лежат на една рамнина се соодветно паралелни на две прави што лежат на друга рамнина, тогаш тие две рамнини се паралелни** (црт. 103).

Теорема 7. *Пресечките на две паралелни рамнини со трета се паралелни една на друга.*



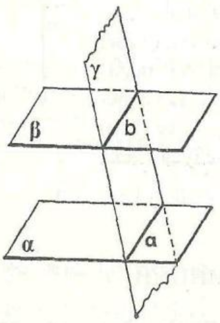
Црт. 102



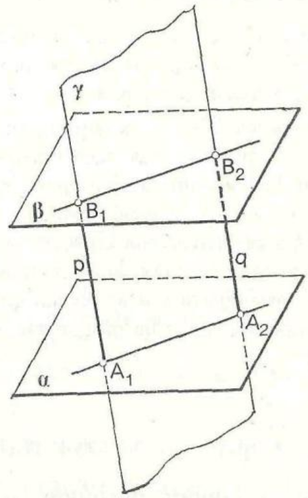
Црт. 103

Доказ: Нека $\alpha \| \beta$ и рамнината γ да ги сече рамнините α и β соодветно по правите a и b (црт. 104). Правите a и b бидејќи лежат на една рамнина (γ), тие или се сечат или се паралелни. Ако претпоставиме дека a и b се сечат, тогаш доаѓаме до заклучок дека рамнините α и β имаат заедничка точка (бидејќи $a \subset \alpha$, а $b \subset \beta$). Тоа противречи на условот $\alpha \| \beta$. Според тоа, правите a и b не се сечат. Останува дека $a \| b$.

Теорема 8. *Две паралелни рамнини отсекуваат од две паралелни прави складни отсечки.*



Црт. 104



Црт. 105

Доказ: Нека се дадени рамнините $\alpha \| \beta$ и правите $p \| q$, а рамнините α и β од правите p и q ги отсекуваат соодветно отсечките A_1B_1 и A_2B_2 (црт. 105). Треба да докажеме дека $A_1B_1 \cong A_2B_2$.

Паралелните прави p и q определуваат една рамнина γ, која ги сече рамнините α и β соодветно во правите A_1A_2 и B_1B_2. Согласно со теоремата 7 имаме: $A_1A_2 \| B_1B_2$, а по услов е $p \| q$.

Според тоа, четириаголникот $A_1A_2B_2B_1$ е паралелограм, откаде следува $A_1B_1 \cong A_2B_2$, штд.

Корисно е да се знаат и некои други својства на паралелните рамнини. Ќе наведеме само две од нив без доказ:

Теорема 9. *Низ точка M што лежи надвор од дадена рамнина π минува една и само една рамнина — паралелна на дадената.*

Теорема 10. *Ако секоја од две рамнини α и β е паралелна на трета рамнина γ, тогаш и тие се паралелни меѓу себе,* т.е.

$$(\alpha \| \gamma \text{ и } \beta \| \gamma) \Rightarrow \alpha \| \beta$$

Релацијата паралелност на рамнините, исто како и паралелноста на правите ги има својствата на:

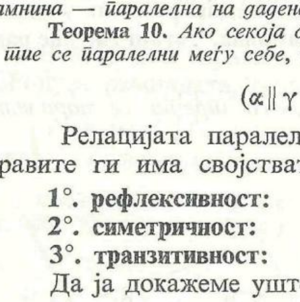
1°. рефлексивност: $\alpha \| \alpha$

2°. симетричност: $\alpha \| \beta \Rightarrow \beta \| \alpha$

3°. транзитивност: $(\alpha \| \beta \text{ и } \beta \| \gamma) \Rightarrow \alpha \| \gamma$

Да ја докажеме уште следнава:

Теорема 11. *Секои две разминувачки прави лежат на паралелни рамнини.*

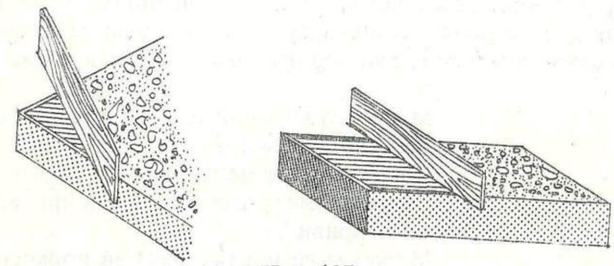


Црт. 106

Доказ: Нека p и q се две разминувачки прави. Низ произволна точка $A \in p$ да повлечеме права a — паралелна на правата q, а низ произволна точка $B \in q$ да повлечеме права b — паралелна на правата p (црт. 106). Правите p и a определуваат некоја рамнина α, а правите q и b — друга рамнина β. Тие две рамнини се различни, бидејќи во спротивен случај правите p и q би лежале на иста рамнина и не би биле разминувачки. Но, бидејќи правите p и a се паралелни на рамнината β, тоа согласно со теоремата 6 рамнините α и β се паралелни, т.е. $\alpha \| \beta$.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Каква површина се добива кога една права (линир) се лизга по две прави, кои: а) се сечат, б) се паралелни (црт. 107)?



Црт. 107

2. Каква површина се добива кога една права се врти околу една своја точка, така што при тоа постојано да сече некоја друга дадена права?

3. Кои две прави не определуваат рамнина?

4. Колку рамнини определуваат три паралелни прави кои не лежат на иста рамнина?

5. Зошто триножното столче секогаш е стабилно, а четириножното столче не е секогаш стабилно?

6. Колку рамнини определуваат четири точки во просторот што не лежат на иста рамнина?

7. Колку рамнини минуваат низ една права? Докажи?

8. Колку рамнини можат да определуваат три прави што минуваат низ една иста точка? Покажи!

9. Колку рамнини можат да определуваат една права и две точки што не лежат на правата?

10. Дадена е рамнина π и точка $M \notin \pi$. Колку: а) прави, б) рамнини минуваат низ точката M што се паралелни на ранината π?

11. Низ точка M, што лежи надвор од рамнината π, колку прави минуваат што се паралелни на рамнината π?

12. Низ точката M, што не лежи на дадена права p, колку рамнини минуваат кои се паралелни на правата p?

13. Дадени се две прави a и b што се сечат и точка M што не лежи ни на една од нив. Дали постои рамнина што минува низ точката M и е паралелна на правите a и b? Колку такви рамнини постојат?

14. Низ дадена точка M која лежи надвор од две рамнини што се сечат, колку прави минуваат што се паралелни на дадените рамнини?

15. Дадени се две различни паралелни рамнини π_1 и π_2 и права $p \subset \pi_1$. Во каква заемна положба се правата p и рамнината π_2?

16. Ако правата p ја прободува едната од две паралелни рамнини α и β, тогаш таа ја прободува и другата рамнина. Докажи!

17. Дадени се две рамнини што се сечат и една права што е паралелна со пресечката на двете рамнини. Каква заемна положба зазема дадената права спрема секоја од двете рамнини?

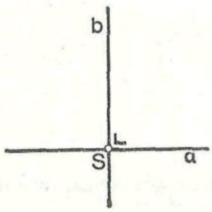
18. Дали се точни исказите — тврдењата:

а) $(p \parallel \pi_1$ и $\pi_1 \parallel \pi_2) \Rightarrow p \parallel \pi_2$, б) $(p \parallel \pi_1$ и $p \parallel \pi_2) \Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$, в) $(p \parallel \pi$ и $q \parallel \pi) \Rightarrow p \parallel q$; каде што p и q се прави, а π, π_1 и π_2 — рамнини.

§ 21*. НОРМАЛНОСТ НА ПРАВИ И РАМНИНИ

21.1. НОРМАЛНИ ПРАВИ

Нека a и b се две прави што се сечат во точката S (црт. 108). Полуправите на тие прави образуваат четири агли со заедничко теме S. Знаете дека, ако еден од тие агли е прав, тогаш и другите три агли се прави. Во тој случај велиме дека правите a и b *се сечат под прав агол* или дека правите a и b *се заемно нормални.*



Црт. 108

За правата a велиме дека е нормална на правата b, кое го запишуваме: $a \perp b$.

Наместо „нормална права“ често велиме „нормала", а наместо „заемно нормални прави", велиме „нормални прави".

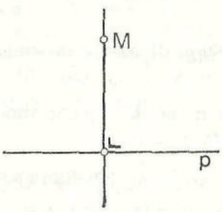
Може да се покаже дека за нормалните прави важат следниве две важни својства што ќе ги наведеме без доказ:

Теорема 1. *Низ која и да било точка на дадена права p, во една рамнина на која лежи правата p, може да се повлече една и само една права што е нормална на дадената права p.*

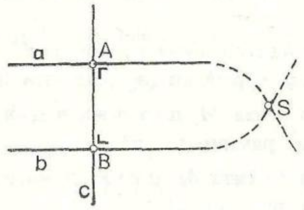
Теорема: 2. *Низ дадена точка M што не лежи на дадена права p, во рамнината определена со нив (p и M), минува една и само една права, нормална на дадената права* (црт. 109).

Нека a, b, c — се три различни прави што лежат на иста рамнина. Ќе покажеме дека за нив важат својствата:

Теорема 3. *Ако две прави a и b се нормални на трета права c, тие се паралелни меѓу себе.*



Црт. 109



Црт. 110

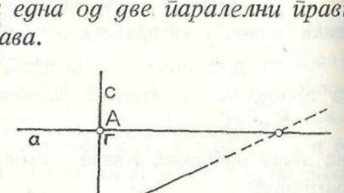
Доказ: Нека $a \perp c$ и $b \perp c$ (црт. 110). Треба да докажеме дека $a \parallel b$.

Да претпоставиме дека правите a и b се сечат во некоја точка S. Во тој случај триаголникот ABS ќе има два прави агли, а тоа е неможно. Според тоа, правите не се сечат, туку се паралелни, штд.

Теорема 3-б. *Ако правата c е нормална на една од две паралелни прави a и b, тогаш таа е нормална и на другата права.*

Доказ: Нека $c \perp a$ и $a \parallel b$. Треба да докажеме дека $c \perp b$ (црт. 111).

Нека правата c ги сече паралелните прави a и b во точките A и B. Да претпоставиме дека правата c не е нормална на правата b. Низ точката B да повлечеме права b' таква што $c \perp b'$, тогаш согласно теоремата 3 правата b' ќе биде паралелна на a. Но според аксиомата 10 низ точката B минува само една права што е паралелна на a, па според тоа, правите b' и b се совпаѓаат.



Црт. 111

21.2. РАСТОЈАНИЕ ОД ТОЧКА ДО ПРАВА

Нека е дадена права p и прозиволна точка M што не лежи на правата p (црт. 112). Низ точката M да ја повлечеме нормалата MS на правата p, која ќе ја пресече правата p во некоја точно определена точка S.

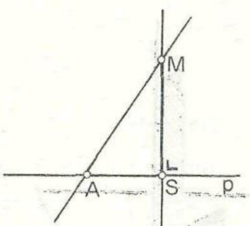
Точката S се вика *подножје* на нормалата MS, а растојанието од точката M до точката S се вика *растојание од точката M до правата p*.

На правата p да земеме произволна точка A што е различна од S (црт. 112). За правата AM (односно отсечката $\overline{AM}$) велиме дека е *наведната* кон правата p.

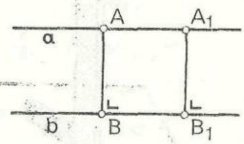
Од црт. 112 гледаме дека триаголникот AMS е правоаголен во кој отсечката $\overline{MS}$ е катета, а $\overline{AM}$ — хипотенуза. Бидејќи во правоаголниот триаголник најдолга страна е хипотенузата, тоа ќе биде $\overline{AM} > \overline{MS}$.

Според тоа: **Растојанието од точката M до правата p не е поголемо од растојанието на точката M до која и да било точка на правата p.**

Теорема 4. *Сите точки на една од две паралелни прави a и b се наоѓаат на едно исто растојание од другата права.*



Црт. 112



Црт. 113

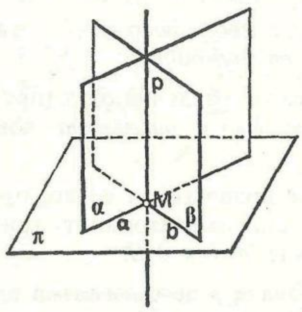
Доказ: Нека a и b се две паралелни прави (црт. 113). Од две произволни различни точки A и A_1 на правата a да спуштиме нормали AB и A_1B_1 на правата b. Правите AB и A_1B_1 што се нормални на правата b, се нормални и на паралелната права a, а се паралелни и меѓу себе. Според тоа, четириаголникот ABB_1A_1 е правоаголник. Оттука следува дека $\overline{AB}=\overline{A_1B_1}$, што.

21.3. НОРМАЛНОСТ НА ПРАВА И РАМНИНА

Нека е дадена права p и на неа да уочиме една точка M (црт. 114). Со теорема 1 утврдивме дека низ точката $M \in p$, во една рамнина α на која лежи правата p, минува една и само една права a што е нормална на правата p. Меѓутоа, во просторот низ една права p минуваат бесконечно многу рамнини. На пример на црт. 114 низ правата p минува и рамнината β, а правата $b \subset \beta$ е исто нормала на дадената права p. Нормалите a и b на правата p што минуваат низ точката $M \in p$ определуваат точно една рамнина π (црт. 114).

Очигледно е дека сите нормали на правата p што можат да се повлечат низ точката M, ќе лежат на рамнината π. За рамнината π велиме дека *е нормална на правата p*, а за правата p — дека ***е нормална на рамнината π*, или** за правата p и рамнината π дека се *заемно нормални* и пишуваме $p \perp \pi$.

Дефиниција: *За права и рамнина велиме дека се заемно нормални, ако правата е нормална на секоја права од рамнината, која минува низ нејзиниот пробод.*



Црт. 114

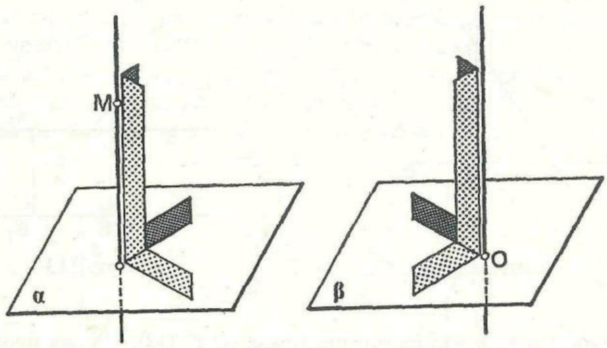
Основниот признак за нормалност на права и рамнина ни го дава следнава теорема, што ќе ја прифатиме без доказ:

Теорема 5. *Ако една права ја прободува дадена рамнина и е нормална на две прави од таа рамнина што минуваат низ прободот, тогаш таа е нормална и на рамнината.*

Корисно е да се знаат и некои други својства на нормалноста на права и рамнина, што тука само ќе ги наведеме без доказ:

Теорема 6. *Низ која и да било точка во просторот може да се повлече една и само една права што е нормална на дадена рамнина* (црт. 115).

Низ која и да било точка во просторот може да се постави една и само една рамнина што е нормална на дадена права.



Црт. 115

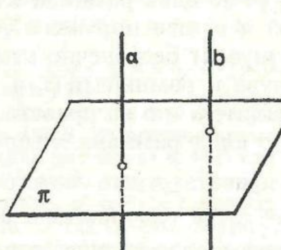
Теорема 7. *Ако една рамнина е нормална на едната од две паралелни прави, тогаш таа е нормална и на другата права* (црт. 116).

Ако една права е нормална на едната од две паралелни рамнини, тогаш таа е нормална и на другата рамнина (црт. 117).

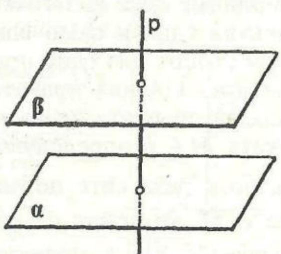
Важи и обратната теорема на теоремата 7:

Теорема 8. *Две прави, што се нормални на една иста рамнина, се паралелни меѓу себе* (црт. 116).

Две рамнини, што се нормални на една иста права, се паралелни меѓу себе (црт. 117).



Црт. 116



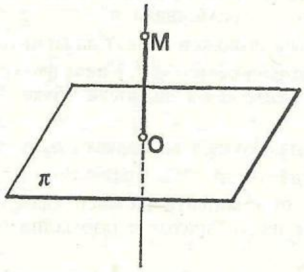
Црт. 117

Нека е дадена рамнина π и произволна точка M што не лежи на рамнината π (црт. 118). Низ точката M да ја повлечеме нормалата MO на рамнината π, која ќе ја прободе рамнината π во некоја точно определена точка O.

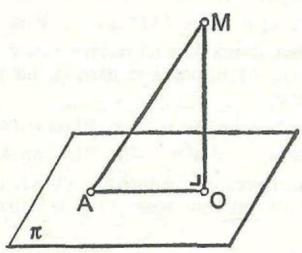
Точката O се вика *подножје* на нормалата MO, а растојанието од точката M до точката O се вика *растојание од точката M до рамнината* π.

Нека A е прозиволна точка од рамнината π што е различна од O (црт. 119). За правата MA (односно отсечката MA) велиме дека е *наведната* кон рамнината π. Од црт. 119 гледаме дека триаголникот AOM е правоаголен со прав агол во O. Од него следува дека $AM > MO$, т.е. наведнатата отсечка е поголема од нормалната MO. Според тоа:

Растојанието од точката M до рамнината π не е поголемо од растојанието на точката M до која и да било точка на рамнината π.



Црт. 118



Црт. 119

Паралелните рамнини гò имаат следново својство:

Теорема 9. *Сите точки на една од две паралелни рамнини* α *и* β *се наоѓаат на едно исто растојание од другата рамнина.*

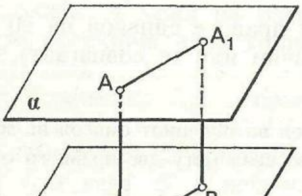
Доказ: Нека α и β се две паралелни рамнини и нека A и A_1 се две различни точки од рамнината α (црт. 120). Од нив да спуштиме нормали AB и A_1B_1 на рамнината β. Согласно теоремата 8 нормалите AB и A_1B_1 се паралелни, па според тоа тие лежат во една рамнина. Правите AA_1 и BB_1 се исто така паралелни (Зошто?). Според тоа, четириаголникот ABB_1A_1 е паралелограм. Оттука следува дека $\overline{AB}=\overline{A_1B_1}$ штд.

Затоа растојанието од која и да било точка на едната од две паралелни рамнини до другата од нив се вика растојание меѓу паралелните рамнини.

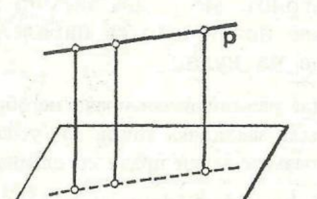
Аналогно својство има и правата p што е паралелна на рамнината π, имено:

Сите точки на правата p ($p \| \pi$) се наоѓаат на едно исто растојание од рамнината π (црт. 121).

Затоа, **растојание меѓу права и рамнина** се вика растојанието од која и да било точка на правата до рамнината.



Црт. 120



Црт. 121

5*

1. Каква фигура е множеството на сите точки во просторот што се еднакво оддалечени од две зададени паралелни рамнини?

2. Одреди го множеството на сите точки во просторот што се еднакво оддалечени од две зададени точки A и B.

3. Правите a и b се нормални на рамнината π. Дали постои рамнина што минува низ тие две прави?

4. На моделот на квадар на црт. 93 покажи: а) работ A_1B_1 на кои ѕидови на квадарот е нормален, б) ѕидот BCC_1B_1 на кои рабови е нормален?

5. Како го определуваме растојанието од дадена точка M што лежи надвор од рамнината π: а) до точката $A \in \pi$, б) до рамнината π, в) до правата p што лежи на рамнината π?

6. Каква положба има прачката на лустер што виси спрема рамнината на таванот?

7. Ако една права е нормална на дадена рамнина, дали може тогаш таа да биде паралелна на некоја права што лежи на дадената рамнина?

8. Дадена е рамнина π и точка $M \notin \pi$. Низ точката M колку прави можат да се повлечат што ќе бидат: а) паралелни, б) нормални на рамнината π?

9. Дадено е: $p \cap \pi = \{M\}$ и $q \| \pi$. Кои заемни положби можат да ги имаат правите p и q?

10. Дадена точка M е на растојание c од дадена рамнина π. Каква фигура е множеството на сите точки од рамнината π што се на растојание d од дадената точка M, ако: а) $d > c$, б) $d = c$, в) $d < c$.

11. Нека е $a_1 \| a_2$ и $a_1 \perp \pi$. Што можеш да тврдиш за правата a_2 и рамнината π.

12. Нека $a_1 \perp \pi$ и $a_2 \perp \pi$. Што можеш да тврдиш за правите a_1 и a_2?

13. Една точка S е еднакво оддалечена од темињата на еден квадрат. Докажи дека правата што минува низ точката S и центарот на квадратот е нормална на рамнината на квадратот!

14. Кога велиме дека дадена права и рамнина се заемно нормални? Кој услов е доволен за да права и рамнина се заемно нормални?

15. Одреди го множеството точки во просторот кои се на дадено растојание d од дадена рамнина π.

16. Прав агол се врти околу едниот свој крак. Што образува кракот што се врти?

§ 22*. АГЛИ МЕЃУ ПРАВИ И РАМНИНИ

22.1. АГОЛ МЕЃУ ДВЕ ПРАВИ

Знаете дека две прави што се сечат, на рамнината на која лежат, образуваат вкрстени и напоредни агли. Вкрстените агли се складни, а напоредните се суплементни.

Големината на помалиот од тие агли ја викаме *агол меѓу правите* што се сечат. Според тоа, аголот меѓу две прави е величина, а не фигура. Секогаш го изразуваме во аглoвни степени, минути и секунди и тој не е поголем од $90°$.

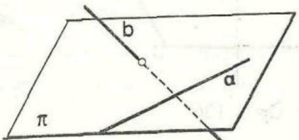
Аголот меѓу две заемно нормални прави е еднаков на $90°$, а аглолот меѓу две прави што се паралелни (различни или се совпаѓаат) земаме да е еднаков на нула.

Две разминувачки прави не образуваат агол во обичниот смисол на зборот, бидејќи тие немаат заедничка точка. Меѓутоа, поимот за агол меѓу две прави го обопштуваме и за две разминувачки прави со следнава:

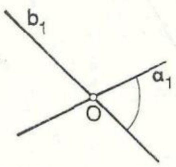
Дефиниција 1. *Агол меѓу две разминувачки прави a и b ќе го викаме аголот меѓу две соодветно на нив паралелни прави a_1 и b_1 што се повлечени низ произволна точа O во просторот.* (црт. 122).

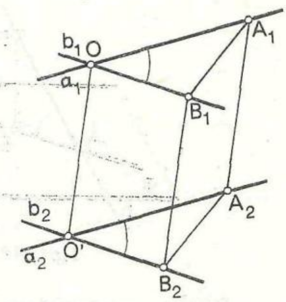
Ќе покажеме дека аголот меѓу разминувачките прави a и b не зависи од изборот на точката O.

Низ произволна точка O во просторот нека се повлечени двојка прави a_1 и b_1 што се паралелни соодветно на разминувачките прави a и b, а низ друга точка O' нека се повлечени двојка прави a_2 и b_2 што исто така се паралелни соодветно на правите a и b (црт. 123). Да



Црт. 122





Црт. 123

претпоставиме дека правите a_1, b_1, a_2 и b_2 не лежат на иста рамнина. Тогаш тие ќе лежат на две паралелни рамнини α и β. На правите a_1 и b_1 да земеме по една точка A_1 и B_1 што се различни од O и низ нив да повлечеме прави A_1A_2 и B_1B_2 паралелни на OO'. Четириаголниците OA_1A_2O', OB_1B_2O' и $A_1\ B_1\ B_2\ A_2$ се паралелограми, па според тоа:

$$OA_1 \cong O'A_2, \quad OB_1 \cong O'\,B_2 \text{ и } A_1B_1 \cong A_2B_2.$$

А согласно третиот признак за складност на триаголниците ќе биде $\Delta OA_1B_1 \cong \Delta O'A_2B_2$ Оттука следува дека $\sphericalangle A_1OB_1 \cong \sphericalangle A_2O'B_2$

Значи, аглите определени со двојките прави (a_1, b_1) и (a_2, b_2) се еднакви.

Дефиниција 2. *Ако аголот меѓу две разминувачки прави е прав, тогаш за нив велиме дека се заемно нормални.*

Од дефинициите 1 и 2 утврдуваме дека: ако една права p е нормална на едната од две паралелни прави, тогаш таа е нормална и на другата.

Ова тврдење важи независно од тоа дали правата p ги сече двете паралелни прави или ја сече само едната, или е разминувачка со двете.

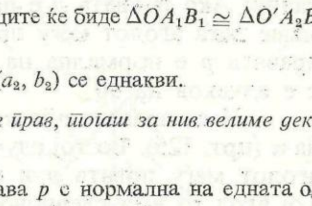
22.2. ПРОЕКЦИЈА НА ТОЧКА И ПРАВА ВРЗ РАМНИНА

Нека е дадена рамнина π и произволна точка M што не лежи на π (црт. 124). Низ точката M да повлечеме нормала p на рамнината π.

Прободот M' на нормалата p спуштена од M на π, го викаме уште и *проекција* на точката M врз рамнината π.

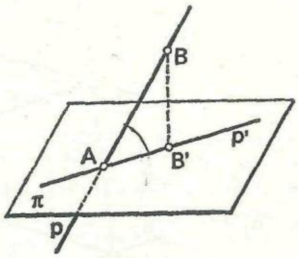
Ако точката A лежи на рамнината π, тогаш нејзината проекција A' се совпаѓа со самата точка A (црт. 124).

Нека π е рамнина и p — права што ја прободува рамнината π во точката A (црт. 125). На првата p да земеме некоја произволна точка B — различна од A, и нека B' е нејзината проекција врз рамнината π. Тогаш правата AB' што лежи на рамнината π ја викаме *проекција на правата p врз рамнината* π.

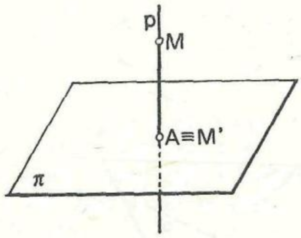


Црт. 124

Ако правата p е нормална на рамнината π, тогаш проекцијата на секоја нејзина точка M се совпаѓа со прободот A, па според тоа, проекцијата на правата p врз рамнината π ќе биде само една точка и тоа нејзиниот прободот A (црт. 126).



Црт. 125



Црт. 126

Значи, проекцијата на една права врз дадена рамнина е пак права или една единствена точка — ако правата е нормална на рамнината.

22.3. АГОЛ МЕЃУ ПРАВА И РАМНИНА

Нека π е рамнина и p — права.

Аголот меѓу правата p и рамнината π го определуваме на следниов начин: Ако правата p е паралелна на рамнината π или лежи на π, тогаш земаме дека аголот меѓу правата p и рамнината π е еднаков на нула. Ако пак правата p е нормална на рамнината π, тогаш земаме дека аголот меѓу p и π е еднаков на $90°$.

Нека правата p ја прободува рамнината π во точката A и не е нормална на π (црт. 125). Во тој случај за агол меѓу правата p и рамнината ќе го викаме аголот меѓу првата p и нејзината проекција p' врз рамнината π (црт. 125). Тој агол го има следново својство:

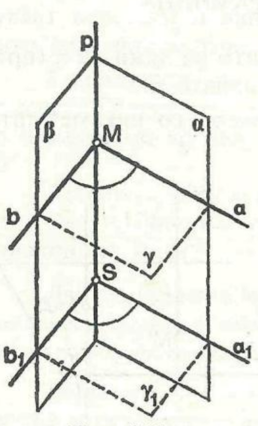
Од сите агли што правата p ги образува со која и да било права во рамнината π, аголот меѓу првата p и нејзината проекција p' врз рамнината π, е најмал.

22.4. АГОЛ МЕЃУ ДВЕ РАМНИНИ

Знаеме дека две рамнини α и β или се паралелни или се сечат по една права. Ако рамнините се паралелни, тогаш аголот меѓу нив го земаме да е еднаков на нула.

Нека рамнините α и β се сечат по правата p (црт. 127). Да поставиме една нова рамнина γ што е нормална на пресечката p. Таа ќе ги пресече рамнините α и β по правите a и b. За агол меѓу рамнините α и β го викаме аголот меѓу правите a и b.

Лесно се уверуваме дека аголот меѓу рамнините α и β не зависи од положбата на рамнината γ, т.е. не зависи од тоа во која точка (M или S) рамнината γ ја сече пресечката p (црт. 127).



Црт. 127

Навистина, нека γ_1 е друга рамнина што е нормална на p. Таа нека ги сече рамнините α и β по правите a_1 и b_1. Бидејќи правите a_1 и b_1 се паралелни соодветно на a и b, тоа аглите определени со двојките прави (a_1, b_1) и (a, b) се еднакви (црт. 127).

22.5. НОРМАЛНИ РАМНИНИ

Ако аголот меѓу две рамнини е еднаков на 90°, тогаш велиме дека рамнините *се заемно нормални.*

Следнава теорема ни дава еден основен признак за нормалност на две рамнини:

Теорема 1. *Ако рамнината α минува низ некоја права a, што е нормална на рамнината β, тогаш и таа е нормална на рамнината β,* т.е.

$$(a \subset \alpha \text{ и } a \perp \beta) \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

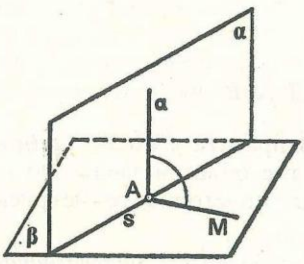
Доказ: Нека се α и β рамнини и a права што лежи на рамнината α и е нормална на рамнината β (црт. 128).

Треба да докажеме дека $\alpha \perp \beta$.

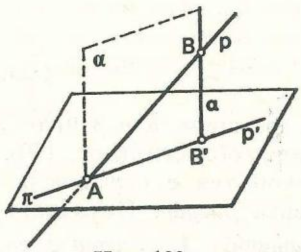
Низ прободот A на правата a со рамнината β да повлечеме нормала AM кон пресечката s на рамнините α и β.

Од условот $a \subset \alpha$ и $a \perp \beta$ следува дека $a \perp s$ и $a \perp AM$, а по конструкција е $AM \perp s$.

Според тоа, рамнината определена со правите a и AM е нормална на пресечката s на рамнините α и β. А од $a \perp AM$ гледаме дека аголот меѓу рамнините α и β е прав. Оттука следува дека $\alpha \perp \beta$, штд.



Црт. 128



Црт. 129

Теорема 2. *Низ права p што ја прободува дадена рамнина π и не е нормална на неа, може да се постави една и само една рамнина α — нормална на рамнината π.*

Доказ: Нека правата p ја прободува рамнината π во точката A и p не е нормална на π (црт. 129).

Низ произволна точка $B \in p$ да повлечеме нормала a на рамнината π. Дадената права p и повлечената нормала a определуваат некоја рамнина α која е нормална на π, бидејќи $a \perp \pi$ и $a \subset \alpha$. Таа рамнина е и единствена (Зошто?).

Ќе наведеме и некои други својства на нормалноста на две рамнини без доказ.

Теорема 3. *Ако две рамнини се заемно нормални и низ произволна точка на едната од нив повлечеме нормала кон другата, тогаш таа нормала лежи во првата рамнина.*

Теорема 4. *Ако правата p и рамнината α се нормални на рамнинаат β, тогаш или правата p е паралелна на рамнината α, или таа лежи на рамнината α.*

Теорема 5. *Ако една рамнина е нормална на пресечката на две рамнини, тогаш таа е нормална и на рамнините.*

Теорема 6. *Ако две рамнини што се сечат се нормални на трета рамнина, тогаш и нивната пресечка е нормална на третата рамнина.*

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Низ една точка, што се наоѓа надвор од дадена рамнина, колку нормални рамнини можат да се поставaт кон дадената рамнина?

2. Колку рамнини, нормални на дадена ранина π, можат да се поставaт: а) низ права p што е нормална на π, б) низ права што ја прободува рамнината π и не е нормална на неа, в) низ права што е паралелна на π?

3. Докажи дека: две паралелни прави со една иста рамнина зафаќаат еднакви агли!

4. Во кој случај две рамнини α и β, од кои секоја е нормална на трета рамнина γ, ќе бидат: а) паралелни, б) нормални една на друга?

5. Крајните точки на една отсечка AB, чија должина е $\overline{AB}=20$ cm, се наоѓаат на различни страни од една рамнина на растојанија 7 cm и 3 cm. Одреди го аголот меѓу дадената отсечка и рамнината?

6. Од дадена точка M повлечени се кон рамнината π една нормала $\overline{MO}=4$ cm и две наведнати отсечки MA и MB кои со рамнината π зафаќаат агли од 30° и 60°. Да се одреди должината на отсечката AB, ако $MA \perp MB$.

7. Отсечката AB со должина $\overline{AB}=8$ cm е паралелна на дадена рамнина π. Отсечката BA', што го сврзува крајот B со проекцијата A' на A, со рамнината образува агол 60°. Да се одреди должината на отсечката BA' и растојанието на отсечката AB од рамнината π.

8. Од точката M што лежи надвор од рамнината π повлечена е наведната отсечка $\overline{MA}=12$ cm, која со рамнината π образува агол од: а) 30°, б) 45°, в) 60°. Одреди го растојанието од точката M до π.

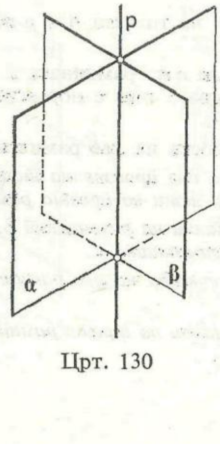
9. Од крајните точки на отсечката AB што лежи надвор од рамнината π и $AB \cap \pi = \varnothing$, спуштени се нормали на рамнината π $\overline{AA'}=36$ cm и $\overline{BB'}=64$ cm. Одреди го растојанието на средишната точка S на отсечката AB од рамнината π.

10. Едната катета на еден рамнокрак правоаголен триаголник лежи на рамнината π. Хипотенузата на тој триаголник со рамнината π зафаќа агол 30°. Да се одреди аголот меѓу другата катета и рамнината π.

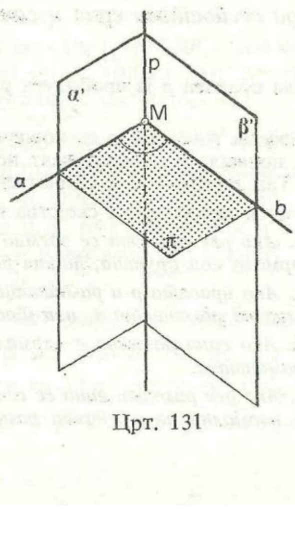
§ 23. ДИЕДАР

Две рамнини α и β што се сечат по правата p го делат просторот на четири дела (области) (црт. 130). Една од тие области заедно со полурамнините со кои таа е ограничена образуваат просторна геометриска фигура, која се вика *диедар*. Поточно:

Дефиниција 1. *Диедар е фигура образувана од две полурамнини* α' *и* β' *со заеднички раб* p *заедно со делот од просторот што е ограничен со тие полурамнини* (црт. 131).



Црт. 130



Црт. 131

Полурамнините ги викаме *ѕидови* (страни) на диедарот, а нивниот заеднички раб — *раб на диедарот.*

Диедарот на црт. 131 симболички го означуваме со $\alpha' p \beta'$.

Делот од просторот што му припаѓа на диедарот се вика *област* или *внатрешност на диедарот.*

Да земеме една произволна точка M на работ p и низ неа да поставиме рамнина π што е нормална на работ p. Таа рамнина, ќе ги пресече полурамнините α' и β' по две полуправи a и b со заедничка почетна точка M (црт. 131).

Аголот што го образуваат полуправите a и b го викаме *линиски агол* или само *агол на диедарот.*

Очигледно е дека големината на аголот на диедарот не зависи од изборот на точката M. Лесно уочуваме дека постои разлика меѓу поимите агол меѓу две рамнини α и β и големината на аголот меѓу полурамнините α' и β', т.е. и аголот на диедарот $\alpha' p\ \beta'$. Аголот меѓу две рамнини не е поголем од $90°$, додека големината на аголот на еден диедар може да има која и да било вредност од нула до $180°$.

Диедар, чиј линиски агол е прав, се вика *прав диедар*; а диедар чиј линиски агол е остар (односно тап), се вика *остар* (односно *тап*) *диедар*.

За два диедра велиме дека *се складни* ако нивните агли се складни; а за еден диедар велиме дека *е поголем* (односно *помал*) од друг диедар, ако аголот на првиот е поголем (односно помал) од аголот на другиот. На пример: Сите прави диедри се складни, а секој тап диедар е поголем од кој и да било остар диедар.

Според тоа, диедрите можат да се споредуваат и да се мерат. За единица мерка за мерење на диедрите се зема таков диедар, чиј линиски агол содржи $1°$, $1'$ или $1''$. Затоа големината на еден диедар е бројно еднаква на големината на неговиот линиски агол. Тоа со други зборови го искажуваме вака:

Диедарот се мери со неговиот линиски агол.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Што е тоа диедар? Што се ѕидови, а што раб на диедарот?

2. За кои два диедра велиме дека се складни?

3. За кој диедар велиме дека е: а) остар, б) прав, в) тап?

4. Со превиткување на картон направите модел на: а) остар, б) прав, в) тап диедар!

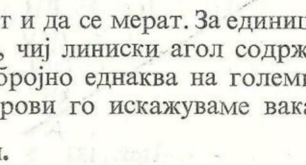
5. Отвори ја вратата на училницата, така што таа со рамнината на ѕидот да образува прав диедар!

6. Во внатрешноста на еден прав диедар е земена точка M која е на растојание од неговите ѕидови 6 cm и 8 cm. Одреди го растојанието на точката M од работ на диедарот.

7. Одреди го аголот на диедарот, ако произволната точка M што лежи на едниот негов ѕид е на двапати поголемо растојание од работ, отколку од другиот ѕид на диедарот.

8. Каква фигура е множеството точки во просторот што се еднакво оддалечени од ѕидовите на еден диедар?

9. На едниот ѕид на еден диедар чиј агол е $30°$ земена е точка M. Ако точката M е на растојание 6 cm од другиот ѕид на диедарот, одреди на какво растојание е таа од работ на диедарот.



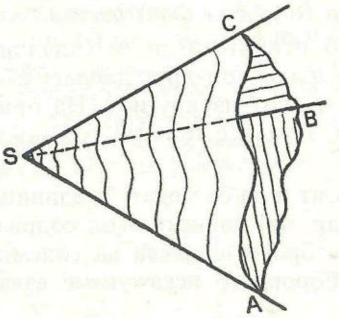
Црт. 132

10. Во внатрешноста на еден диедар чиј агол е 60° е земена точка M која е на еднакво растојание од ѕидовите на диедарот ($\overline{MA}=\overline{MB}$). Да се одреди тоа растојание, ако точката M од работ на диедарот е оддалечена $\overline{MO}=3{,}8$ cm (црт. 132).

§ 24. ЌОШЕ

24.1. ТРИРАБНО ЌОШЕ

Нека се SA, SB, SC три полуправи со заедничка почетна точка S, такви што да не лежат на иста рамнина (црт. 133). Очигледно е дека полуправите образуваат три агли: $\sphericalangle ASB$, $\sphericalangle BSC$, $\sphericalangle ASC$, чија унија пак образува една определена површина во просторот. Таа површина го дели просторот на две области (делови). Едната од тие области заедно со површината (трите агли) со која е таа ограничена претставува просторна геометриска фигура, која се вика *трирабно ќоше* или *триедар*.



Црт. 133

Дефиниција 1. *Трирабно ќоше се вика фигурата составена од три полуправи SA, SB, SC со заедничка почетна точка S што не лежат на иста рамнина, од аглите $\sphericalangle ASB$, $\sphericalangle BSC$, $\sphericalangle ASC$ и од делот од просторот што е ограничен со тие агли.*

Точката S се вика *врв*, полуправите SA, SB, SC — *рабови*, а аглите $\sphericalangle ASB$, $\sphericalangle BSC$, $\sphericalangle ASC$ — *ѕидови* (*страни*) на трирабното ќоше.

Делот од просторот што му припаѓа на трирабното ќоше се вика *област* или *внатрешност* на ќошето.

Аглите ASB, BSC, ASC ги викаме уште и *рабни агли* на трирабното ќоше.

Рамнините на аглите ASB и BSC се сечат по права која го содржи работ SB на ќошето, полурамнините од тие рамнини што ги содржат рабовите SA и SC образуваат еден диедар. Тој диедар се вика *диедар на ќошето* при работ SB (црт. 133).

Очигледно е дека секое трирабно ќоше има три рабни агли и три диедри. За аглите на едно трирабно ќоше важат следниве својства:

Теорема 1. *Секој рабен агол на трирабното ќоше помал е од збирот, а поголем е од разликата на другите два негови рабни агли.*

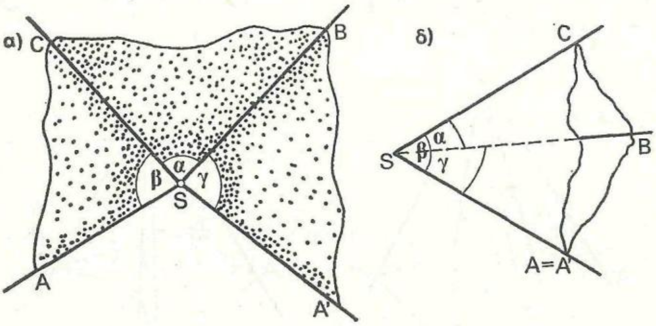
Теорема 2. *Збирот на рабните агли на едно трирабно ќоше секогаш е помал од* 360°.

Теорема 3. *Кај трирабното ќоше спроти складни рабни агли лежат складни диедри*, и обратно: *спроти складни диедри лежат складни рабни агли.*

Теорема 4. *Кај трирабното ќоше спроти поголем рабен агол лежи и поголем диедар, и обратно.*

Со доказите на овие теореми ќе се запознаете во средното училиште.

За две трирабни ќошиња велиме дека *се складни*, ако тие можат да се совместат во сите свои делови, а тоа ќе биде ако рабните агли и диедри на едното трирабно ќоше се складни на соодветните рабни агли и диерди на другото трирабно ќоше.



Црт. 134

Модел на трирабно ќоше со рабни агли α, β, γ може да се направи вака: на картон нацртуваме четири полуправи SA, SB, SC и SA' со иста почетна точка S, така што $\widehat{ASB} = \gamma$, $\widehat{BSC} = \alpha$, $\widehat{CSA'} = \beta$ (црт. 134-а). Потоа аголот $A'SA$ го исечуваме и го отфрламе, а по полуправите SB и SC картонот го превиткуваме. Ако полуправите SA и SA' ги споиме, ќе го добиеме бараниот модел на трирабно ќоше (црт. 134-б).

Очигледно е дека ако не го отфрлевме аголот ASA' (кој го дополнува збирот на рабните агли α, β, γ до 360°) не би можеле да го добиеме моделот на ќошето. Тоа е во согласност со теоремата 2, според која $\alpha + \beta + \gamma < 360°$.

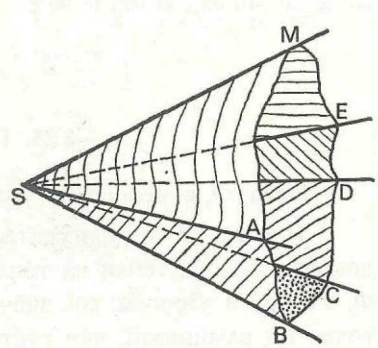
24.2. ПОВЕЌЕРАБНО ЌОШЕ

На сличен начин го воведуваме и поимот *повеќерабно ќоше.*

Дефиниција 2. *Повеќерабно ќоше се вика фигурата составена од* n $(n \geqslant 3)$ *полуправи* $SA, SB, SC, SD, \ldots, SM$ *со заедничка почетна точка* S *што се земени во определен ред и такви што никои три последователни полуправи не лежат на иста рамнина; од аглите* $ASB, BSC, CSD, \ldots, MSA$ *и од делот од просторот што е ограничен со тие агли* (црт. 135).

Точката S се вика *врв,* полупрвите $SA, SB, SC, \ldots, SM$ — *рабови,* а аглите $ASB, BSC, \ldots, MSA$ — *ѕидови* (*страни*) на ќошето.

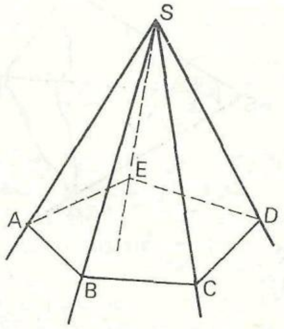
Аглите $ASB, BSC, \ldots, MSA$ ги викаме уште и *рабни агли* на повеќерабното ќоше. При секој раб на ќошето два негови ѕида обазуваат по еден *диедар.* Значи, секое ќоше има толку диедри, колку што има и рабови и ѕидови.



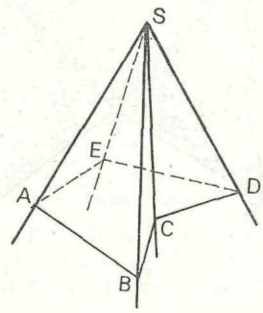
Црт. 135

Според бројот на рабовите ќошето може да биде: трирабно, четирирабно, петрабно, итн.

Ако ќошето го пресечеме со една рамнина што ги сече сите негови рабови, ќе добиеме како пресек некој многуаголник. Ако тој многуаголник е конвексен, тогаш и за ќошето велиме дека *е конвексно* (црт. 136), ако пак тој многуаголник е неконвексен (конкавен), тогаш велиме и ќошето е *неконвексно* (*конкавно*) (црт. 137).



Црт. 136



Црт. 137

Конвексното ќоше го има следново важно својство:

Теорема 5. *Збирот на рабните агли на секое конвексно ќоше е помал од* 360°.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Направите модел (од картон) на: а) трирабно ќоше, б) четирирабно конвексно ќоше в) петрабно конвексно ќоше!

2. Дали може трирабното ќоше да биде неконвексно? Зошто?

3. Колку трирабни ќошиња орбазуваат три различни рамнини кои имаат една заедничка точка?

4. Дали аглите: а) 70°, 90°, 120°, б) 30°, 80°, 150°, в) 120°, 100°,140° можат да бидат рабни агли на трирабното ќоше?

5. Дали може еден рабен агол на трирабното ќоше да има 180°? Зошто?

6. Дали можат сите рабни агли на едно шестрабно конвексно ќоше да имаат по а) 50°, б) 60°, в) 75°?

7. Колку рабови може да има едно конвексно ќоше, ако сите негови рабни агли имаат по: а) 30°, б) 45°, в) 60°, г) 90°?

§ 25. ГЕОМЕТРИСКО ТЕЛО

Нека Φ е некоја фигура во рамнината π (црт. 138).

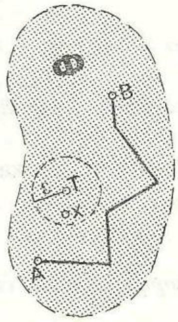
Точката T од фигурата Φ ($T \in \Phi$) се вика *внатрешна точка*, ако сите доволно блиски точки на точката T од рамнината π ѝ припаѓаат на фигурата Φ. Со други зборови, тоа значи, постои позитивен мал број ε, таков што сите точки од рамнината, чии растојанија од точката T се помали од ε, ѝ припаѓаат на фигурата Φ.

Нека секоја точка од фигурата Φ претставува внатрешна точка, и нека точките од Φ го имаат уште и следново својство: секои две точки A и B од Φ можеме да ги сврземе со искршена линија, која целосно лежи во Φ, т.е. сите точки од искршената линија да ѝ припаѓаат на фигурата Φ (црт. 138).

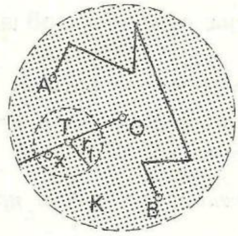
За таква фигура велиме дека е *област*. Според тоа, ќе важи:

Дефиниција 1. *Фигурата Φ се вика област, ако секоја нејзина точка е внатрешна точка и ако секои две точки од Φ можат да се сврзат со искршена линија, која целата лежи во фигурата Φ.*

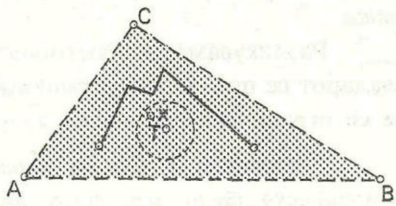
На пример, кругот без кружницата што го ограничува (црт. 139) е област. Област претставуваат и следниве фигури: триаголникот ABC без контурната линија што го ограничува (црт. 140), аголот AOB, без неговите краци (црт. 141) и др.



Црт. 138



Црт. 139



Црт. 140

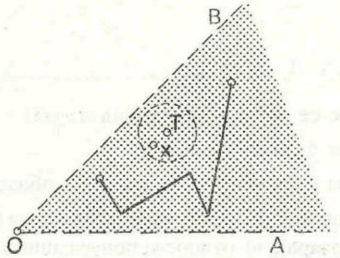
На ист начин како за рамнинските фигури, ги воведуваме и поимите: *внатрешна точка* на просторна фигура и *просторна област*.

На пример, диедарот $\alpha\, p\, \beta$ без полурамнините α и β и работ p е просторна област; трирабното ќоше без неговите ѕидови и рабови е исто така просторна област.

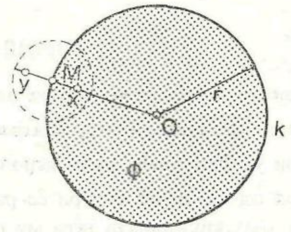
Нека Φ е круг што е ограничен со кружницата $k(O, r)$ (црт. 142).

Точката M се вика *гранична точка* на фигурата Φ, ако постојат произволно блиски точки на точката M, што ѝ припаѓаат на фигурата Φ, и точки што не ѝ припаѓаат на фигурата Φ.

На пример, на црт. 142 точката X за која $\overline{OX} < r$ му припаѓа на кругот Φ, а точката $У$ за која е $\overline{OУ} > r$ не му припаѓа на кругот Φ.



Црт. 141



Црт. 142

Очигледно е дека секоја точка од кружницата $k(O, r)$ е гранична точка на кругот Φ што ѝ одговара (црт. 142).

Исто така секоја точка од страните на триаголникот ABC е гранична точка на тој триаголник, итн.

Множеството од сите гранични точки на една област Φ, се вика *граница* на областа Φ.

Дефиниција 2, *Унијата од областа Φ и нејзината граница се вика затворена област.*

Разликуваме **рамнински затворени области и просторни затворени области.** На пример, кругот, аголот и многуаголникот се рамнински затворени области; а диедарот, трирабното ќоше и кокцата се просторни затворени области.

Дефиниција 3. *За една рамнинска фигура Φ велиме дека е ограничена, ако постои круг $K(O, r)$, при што $\Phi \subseteq K$.*

На пример, многуаголникот е ограничена фигура, но аголот не е ограничена фигура (Зошто?).

Секоја ограничена и затворена рамнинска област се вика *геометриска слика.*

Разликуваме и просторни ограничени фигури. На пример, коцката и квадарот се просторни ограничени фигури, но диедарот и кое и да било ќоше не се ограничени фигури во просторот.

Дефиниција 4. *Секоја затворена и ограничена просторна област се вика геометриско тело, или само тело.*

Границата на геометриското тело може да се состои само од многуаголници или од рамни и криви површини или само од криви површини. Во зависност од тоа, телата ги делиме на *рабести тела* или *полиедри и облести тела.*

Дефиниција 5. *Едно геометриско тело се вика рабесто тело или полиедар, ако неговата граница се состои од конечен број многуаголници.*

Многуаголниците што ја образуваат границата на полиедарот ги викаме *ѕидови*, а нивните страни — *рабови* на полиедарот. Темињата на многуаголниците ги викаме исто така и *темиња* на полиедарот.

За еден полиедар велиме дека е *конвексен* ако тој лежи само на една страна од рамнината на кој и да било негов ѕид. Ние ќе разгледуваме само конвексни полиедри и терминот полиедар ќе ни означува конвексен полиедар.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Кои точки на еден многуаголник се негови внатрешни точки!

2. Дали кружницата има внатрешни точки?

3. Кои услови треба да ги исполнува една фигура, за да таа е област?

4. Кои од следниве фигури се рамнински области: а) отворен агол (без краците), б) отворен круг (без кружницата што му одговара), в) отворена полурамнина (без граничната права), г) рамнината?

5. Кои од следниве фигури се просторни области: а) диедарот, б) внатрешност на диедарот, в) внатрешност на ќошето?

6. Што е тоа гранична точка на една област F? Дали може една точка од областа F да е нејзина гранична точка?

7. Дали може една фигура да содржи: а) и внатрешни и гранични точки, б) само внатрешни точки, в) само гранични точки? Наведи примери!

8. Што е тоа затворена област? Наведи примери на затворена рамнинска и затворена просторна област?

9. Што е геометриска слика? Наведи примери!

10. Што е геометриско тело? Кои услови треба да ги исполнува една просторна фигура, за да биде таа тело?

ПРИЗМА

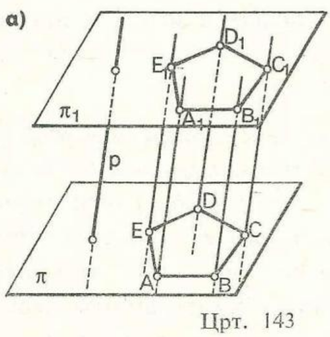
§ 26. ПОИМ И ЕЛЕМЕНТИ НА ПРИЗМАТА

Нека π и π_1 се две паралелни рамнини, а p — една права што ги сече рамнините π и π_1 (црт. 143). На рамнината π да земеме еден кој и да било конвексен многуаголник, на пример петаголникот $ABCDE$ и низ неговите темиња да повлечеме прави — паралелни на правата p.

Така повлечените прави ќе ја прободат рамнината π_1 во пет точно одредени точки A_1, B_1, C_1, D_1 и E_1, кои определуваат друг петаголник $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ во рамнината π_1 (црт. 143).

Очигледно е дека со транслација за вектор $\overrightarrow{A_1 A}$ петаголникот $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ ќе се совпадне со петаголникот $ABCDE$. Според тоа тие се складни:

$$ABCDE \cong A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$$



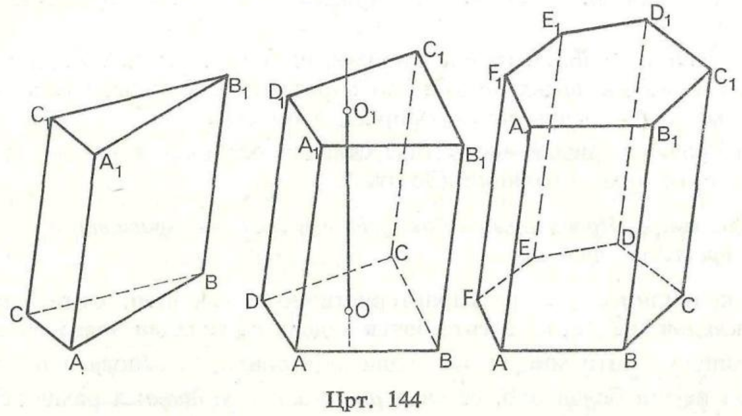
Црт. 143

Четириаголниците ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, итн се паралелограми (црт. 143) (Зошто?).

Површината, којашто е составена од двата складни петаголника $ABCDE$ и $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ и петте паралелограми ABB_1A_1, $BCC_1B_1, \ldots$ (црт. 143-б) го разбива множеството точки од просторот, што не ѝ припаѓаат, на две области: внатрешна и надворешна. Унијата од таа површина и внатрешната област претставува една затворена и ограничена просторна област, т.е. едно геометриско тело и тоа полиедар.

Тој полиедар (црт. 143-б) го викаме *петстрана призма*.

Во рамнинта π, ако наместо петаголник земеме друг многуаголник, на пример: триаголник, четириаголник, односно шестаголник, на сличен начин ќе добиеме други полиедри, кои се викаат *тристрана*, *четиристрана*, односно *шестстрана призма* (црт. 144). Сите тие со заедничко име се викаат *призми*.



Црт. 144

Дефиниција: *Еден полиедар се вика призма, ако неговата граница се состои од два складни многуаголника што лежат во две паралелни рамнини и онолку паралелограми колку што страни има многуаголникот.*

Двата складни многуаголника и сите паралелограми што ја образуваат границата (површината) на призмата се викаат нејзини *ѕидови* и тоа: двата складни многуаголника се викаат уште и *основи* (или *бази*) на призмата, а паралелограмите — *бочни* (или *околни*) *ѕидови* на призмата. Сите бочни ѕидови на призмата велиме дека ја образуваат *бочната површина* (или *обвивка*) на призмата.

Страните на основите ги викаме *основни рабови* на призмата (AB, $BC, \dots, A_1 B_1, B_1 C_1, \dots$ на црт. 144), а сите други рабови — *бочни рабови* на призмата (AA_1, BB_1, $CC_1, \dots$ на црт. 144). А крајните точки на рабовите ги викаме *темиња* на призмата.

Отсечките што сврзуваат две темиња на една призма, кои не лежат на ист ѕид, се викаат *просторни дијагонали* или само *дијагонали* на таа призма.

Отсечката, пак, што е дел од една нормална права на основите и заклучена меѓу нив, се вика *висина* на призмата (OO_1 на црт. 144). Висина на призмата ја викаме уште и должината на таа отсечка, односно растојанието меѓу рамнините на основите на призмата и ја означуваме со h, т.е. $\overline{OO_1} = h$.

Од дефиницијата на призмата следуваат следниве две важни својства на призмата:

1°. Сите бочни рабови на призмата се паралелни и складни меѓу себе, како отсечки од паралелни прави заклучени меѓу две паралелни рамнини.

2°. Секои два основни раба што лежат на ист бочен ѕид на призмата, се паралелни и складни.

§ 27. ВИДОВИ И ПРЕСЕЦИ НА ПРИЗМИТЕ

Според тоа дали основата на призмата е триаголник, четириаголник, петаголник, итн. призмата соодветно ја викаме *тристрана*, *четиристрана*, *петстрана*, итн.

Разгледајте ги цртежите 143 и 144! На нив се нацртани по една тристрана, четиристрана, петстрана и шестстрана призма. Како што гледате, со непрекинати линии ги цртаме сите видливи рабови, а со испрекинати линии — сите невидливи рабови, кога призмата ја гледаме одспреде и малку одгоре.

Ако бочните рабови на една призма се нормални на нејзините основи, тогаш неа ја викаме *права призма*. Во спротивен случај призмата ја викаме *коса*. Ние ќе ги разгледуваме само правите призми.

Кај правите призми висината е складна на бочните рабови, а бочните ѕидови сите се правоаголници (Зошто?).

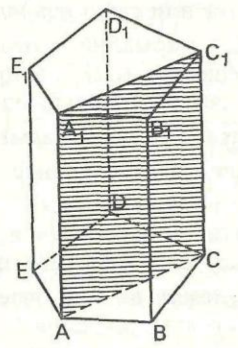
Дефиниција: *Права призма, на која основите се правилни многуаголници, се вика правилна призма.*

За правилните призми карактеристично е тоа што: **Сите основни рабови се складни меѓу себе, а сите бочни ѕидови се складни правоаголници.**

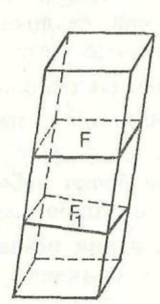
Рамнината што минува низ една дијагонала на основата на призмата и низ еден нејзин бочен раб, се вика *дијагонална рамнина*; а рамнинската фигура што се добива кога призмата ја пресечеме со дијагоналната рамнина се вика *дијагонален пресек* на призмата. На црт. 145 паралелограмот AA_1C_1C е дијагонален пресек на нацртаната призма.

Очигледно е дека: секој дијагонален пресек на призмата е паралелограм, а кај правата призма тој е правоаголник.

Разликуваме уште два вида пресеци кај призмата: а) пресек што се добива кога призмата ја пресечеме со рамнина паралелна на основите на призмата, наречен *паралелен пресек* (многуаголникот F на црт. 146), и б) пресек, што се добива кога призмата ја пресечеме со рамнина што е нормална на бочните рабови на призмата, се вика *нормален пресек* (многуаголникот F_1 на црт. 146).



Црт. 145



Црт. 146

Очигледно е дека: кај секоја призма паралелниот пресек е фигура складна на основите на призмата, а кај правите призми паралелниот пресек истовремено е и нормален пресек на призмата.

§ 28. ПАРАЛЕЛОПИПЕД

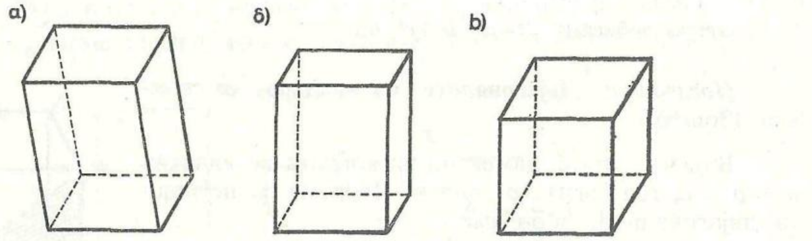
Дефиниција 1. *Призма, чиишто основи се паралелограми, ја викаме паралелопипед.*

Значи, сите ѕидови на паралелопипедот се паралелограми.

Паралелопипедите, како и секоја призма можат да бидат *прави* или *коси* (црт. 147).

Дефиниција 2. *Прав паралелопипед, на кој основите му се правоаголници, се вика уште и правоаголен паралелопипед или квадар* (црт. 147-б).

Квадарот на сите добро ви е познат. Сите негови ѕидови се правоаголници, па затоа кои и да било три раба што излегуваат од едно негово теме се два по два заемно нормални.



Црт. 147

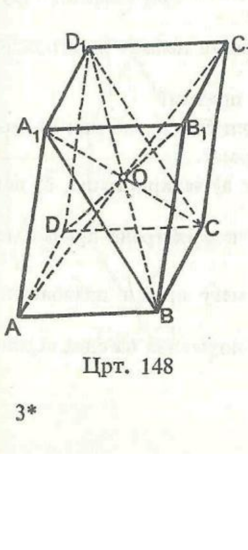
Должините на три раба што излегуваат од едно исто теме на квадарот се викаат *димензии* (*должина*, *ширина* и *висина*) на квадарот.

Очигледно е дека: квадарот што има две еднакви димензии претставува *правилна четиристрана призма*, а квадар на кој трите димензии му се еднакви, се вика *коцка* (црт. 147-в).

Паралелопипедот има четири дијагонали AC_1, DB_1, BD_1 и CA_1 (црт. 148).

Теорема 1. *Дијагоналите на паралелопипедот се сечат во една точка и се преполовуваат од неа.*

Доказ: Да ги разгледаме дијагоналите BD_1 и CA_1 (црт. 148). Тие лежат на дијагоналниот пресек BCD_1A_1. Бидејќи четириаголниците $ABCD$ и ADD_1A_1 се паралелограми, тоа и дијагоналниот пресек BCD_1A_1 е паралелограм. Значи, дијагоналите BD_1 и CA_1 на паралелопипедот, како дијагонали на паралелограмот BCD_1A_1 се сечат во точката O и се преполовуваат од неа. Аналогно се докажува дека и другите две дијагонали AC_1 и DB_1 на паралелопипедот се сечат во истата точка O и се преполовуваат од неа.



Црт. 148

Ѕидовите на паралелопипедот што немаат заеднички темиња се викаат *спротивни ѕидови*

Теорема 2. *Спротивните ѕидови на паралелопипедот се паралелни и складни.*

Доказ: Да ги разгледаме спротивните ѕидови ABB_1A_1 и DCC_1D_1 на паралелопипедот (црт. 148). Бидејќи сите ѕидови на паралелопипедот се паралелограми, тоа: $AB \parallel DC$, $AA_1 \parallel DD_1$. Според тоа, согласно една теорема (ако две прави што се сечат од една рамнина се паралелни на две прави што се сечат од друга рамнина, тогаш тие две рамнини се паралелни), ѕидовите ABB_1A_1 и DCC_1D_1 на паралелопипедот се паралелни, штд.

Од тоа што сите ѕидови на паралелопипедот се паралелограми следува дека рабовите AD, BC, B_1C_1 и A_1D_1 се паралелни и складни. Според тоа, при транслација за вектор $\overrightarrow{AD}$ ѕидот ABB_1A_1 ќе се совпадне со спротивниот ѕид DCC_1D_1 на паралелопипедот (црт. 148). Значи тие се складни, штд.

Теорема 3. *Квадратот од должината на дијагоналата на правоаголниот параелопипед (т.е. квадарот) еднаков е на збирот од квадратите на трите негови димензии.*

Доказ: Димензиите на квадарот на црт. 149 нека се $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$ и $\overline{AA_1}=c$, а должините на дијагоналата на квадарот и дијагоналата на неговата основа да ги означиме со d и d_1, т.е. нека $\overline{CA_1}=d$ и $\overline{AC}=d_1$ (црт. 149). Знаеме дека кај квадарот бочниот раб е нормален на рамнината на неговата основа. Значи, триаголникот A_1AC е правоаголен. Од него имаме: $d^2=d_1^2+c^2$. А од правоаголниот триаголник ABC ($AB \perp BC$) имаме: $d_1^2 = a^2 + b^2$.

Оттука добиваме: $d^2=a^2+b^2+c^2$, штд.

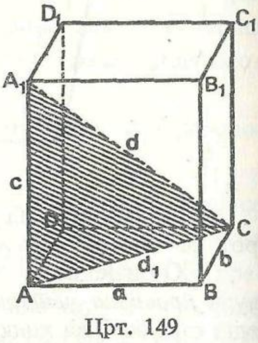
Последица: **Дијагоналите на квадарот се складни** (Зошто?).

Бидејќи трите димензии на коцката се еднакви $a = b = c$, тоа согласно горнава теорема за нејзината дијагонала d, добиваме:

$$d^2 = a^2 + a^2 + a^2 \text{ или } d^2 = 3a^2, \text{ односно } d = a\sqrt{3}$$

На пример, ако коцката има раб $a = 8$ cm, нејзината дијагонала ќе биде долга:

$$d = a\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \approx 8 \cdot 1{,}73 = 13{,}84 \text{ (cm)}$$



Црт. 149

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Кои својства ги имаат бочните рабови на призмата, а кои основните рабови што лежат на еден ист бочен ѕид?

2. Колку основни, а колку бочни рабови има: а) тристраната, б) четиристраната, в) петстраната призма?

3. Што претставуваат бочните ѕидови на косата призма? Дали може меѓу нив да има и правоаголник?

4. Ако сите бочни ѕидови на една призма се правоаголници, каква е таа призма?

5. Зошто бочните ѕидови на призмата се паралелограми?

6. Кои пресеци на призмата се викаат дијагонални? Кои призми немаат дијагонални пресеци?

7. Што претставуваат дијагоналните пресеци на правите призми?

8. Колку дијагонални пресеци можат да се направат низ еден бочен раб кај: а) тристраната, б) четиритраната, в) петстраната, г) n — страната призма?

9. Колку дијагонали, а колку дијагонални пресеци има една: а) четиристрана, б) петстрана, в) шестстрана призма?

10. Од каков вид е нормалниот пресек на: а) тристрана, б) четиристрана призма, кај која бочните ѕидови образуваат складни диедри?

11. Која призма се вика паралелопипед? Во што е разликата меѓу прав и правоаголен паралелопипед?

12. Каква фигура е персекот на една коцка и рамнина што е нормална на една нејзина дијагонала?

13. Дали може коцката да се пресече со една рамнина, така што да се добие пресек: а) рамностран триаголник, б) рамнокрак триаголник, в) правоаголник, г) квадрат, д) трапез?

14. Одреди ја должината на дијагоналата на квадар, ако неговите димензии се: а) 3 cm, 4 cm, 12 cm, б) 2 cm, 3 cm, 6 cm!

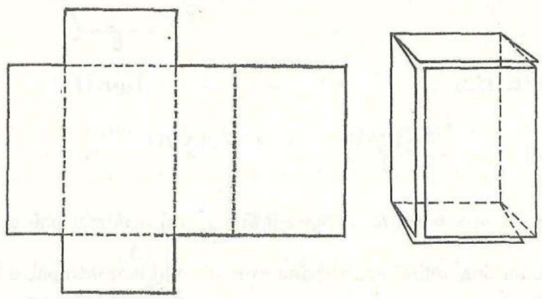
15. Одреди ја должината на дијагоналата на коцка, чиј раб е 18 cm!

16. Одреди го растојанието од темето на коцката до неговата дијагонала, ако нејзиниот раб е долг 1 m!

17. Познати се две димензии на еден квадар 12 cm и 21 cm и должината на дијагоналата 29 cm. Одреди ја третата негова димензија!

§ 29. ЦРТАЊЕ МРЕЖА НА ПРИЗМА

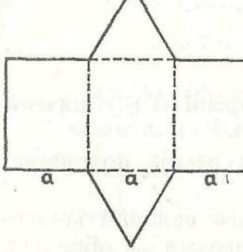
Површината со која е ограничена призмата да замислиме дека е разрежана по еден бочен раб и по сите (освен по еден) основни рабови на нејзините основи. Ако потоа сите нејзини ѕидови ги собориме (легнеме) во една рамнина, ќе добиеме фигура, која се вика *мрежа* на призмата (црт. 150).



Црт. 150

Очигледно е дека бочната површина (обвивката) на секоја права призма се развива во еден општ правоаголник *ABCD*, што е составен од толку правоаголници, колку што бочни ѕидови има призмата. Тој правоаголник има должина еднаква на периметарот на основата на призмата и висина еднаква на висината на призмата (црт. 150).

Задача: Да ја нацртаме мрежата на една правилна тристрана призма со основен раб $a = 1{,}5$ cm и висина $h = 2$ cm.



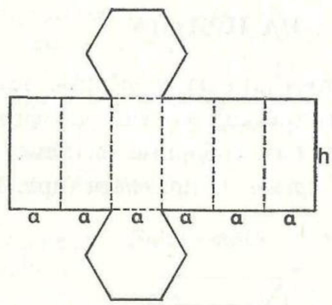
Црт. 151

Обвивката на правилната тристрана призма се состои од три складни правоаголници, чии страни се a и h, а нејзините основи се рамнострани триаголници со страна a. Кога тоа го знаеме цртањето на мрежата станува вака: Нацртуваме прво еден до друг три правоаголници со страни $a = 1{,}5$ cm. и $h = 2$ cm, а потоа на спротивните страни на кој и да било од нив цртаме уште два рамнострани триаголници со страна $a = 1{,}5$ cm. Така ја добиваме бараната мрежа на правилната тристрана призма (црт. 151).

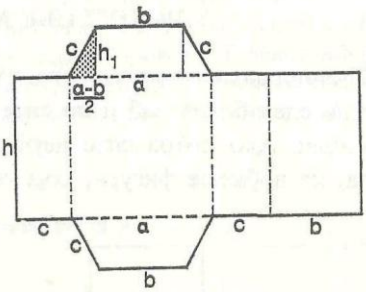
Зошто ни е потребно цртањето мрежи на геометриските тела?
Мрежите ги ползуваме за правење (склопување) модели на телата, а исто така тие ни помагаат и за пресметување на плоштината на површините на тие тела.

За да направиме (склопиме) модел на призмата е потребно прво, да ја нацртаме нејзината мрежа на картон, а потоа да ја исечеме и по испрекинатите линии картонот да го превиткаме. Ако сакаме така склопениот модел на призмата да остане составен, е потребно со хартија за лепење (селотејп) да ги покриеме (залепиме) ѕидовите на призмата што се здружуваат.

На црт. 152 и 153 нацртани се мрежите на една правилна шестстрана призма и една права четиристрана призма, чија основа е рамнокрак трапез. Направите модели на тие призми!



Црт. 152



Црт. 153

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Нацртај мрежа на правилна петстрана призма, чиј основен раб е a=1,5 cm и висината h=5 cm.

2. Нацртај мрежа на правилна шестстрана призма, чиј основен раб е 1,2 cm, а висината 4 cm.

3. Нацртај ја мрежата на коцка, чиј раб е a=2 cm!

4. Нацртај ја мрежата и направи модел на правилна шестострана призма, чиј основен раб е a=2 cm и висината h=5 cm.

5. Колку оски на симетријата има мрежата на правилна тристрана призма што е нацртана на црт. 151.

6. Правоаголник со должина 9 cm и ширина 6 cm претставува обивка на една правилна тристрана призма. Нацртај ја мрежата на таа призма! (Внимавај, можни се две решенија).

7. Нацртај ја мрежата и направи модел на правилна шестострана призма кај која поголемиот дијагонален пресек претставува квадрат. Ако основниот раб на призмата е 2 cm, колкава е висината на таа призма?

8. Нацртај мрежа и направи модел на квадар, кој има должина a=4 cm и ширина b=3 cm, а дијагоналниот пресек му претставува квадрат. Колкава е висината на тој квадар?

§ 30. ПЛОШТИНА НА ПРИЗМИТЕ

Поимот плоштина на геометриските слики (затворени и ограничени рамнински области) познат ни е од минатата година.

Границата на секое геометриско тело претставува некоја површина, која ја викаме *површина на геометриското тело*.

Површината на призмата, знаете, се состои од два складни многуаголника — основи на призмата и одреден број паралелограми — обивка на призмата.

Дефиниција: *Под плоштина на површината на една призма, или кратко плоштина на призмата, ќе го подразбираме збирот од плоштините на двете нејзини основи и плоштината на нејзината обвивка.*

Ако плоштината на призмата ја означиме со P, а плоштината на нејзината основа (база) — со B, а плоштината на обвивката — со M, тогаш согласно горнава дефиниција, ќе важи формулата:

$$P = 2B + M$$

Тоа е општа формула за пресметување на плоштината на која и да било призма.

Ако ги разгледаме цртежите 150, 151, 152 и 153 забележуваме дека обвивката на секоја права призма претставува всушност еден правоаголник, чија должина е еднаква на периметарот на призмата, а висината му е еднаква на висината на призмата. Според тоа, ќе важи:

Теорема: *Плоштината на обвивката на права призма еднаква е на производот од периметарот на основата и висината на призмата*, т.е.

$$M = L \cdot h$$

30.1. ПЛОШТИНА НА КВАДАР И КОЦКА

Квадарот е права четиристрана призма чии основи и бочни ѕидови се правоаголници. Ако димензиите на квадарот ги означиме со a, b, c (при што c е висина), тогаш плоштината на основата е $B=ab$, а плоштината на обивката ќе биде $M=(2a+2b)c$ или $M=2ac+2bc$

Според тоа, формулата за плоштината на квадарот ќе гласи:

$$P = 2B + M = 2ab + 2ac + 2bc \text{ или } P = 2\,(ab + ac + bc).$$

Коцката е заградена со шест складни квадрати. Ако должината на работ на коцката ја означиме со a, тогаш плоштината на секој од шестте квадрати ќе биде еднаква на a^2, па формулата за плоштина на коцката ќе гласи:

$$P = 6a^2$$

Задача 1. Еден куфер чии димензии се: должина $a=1$ m, ширина $b=6$ dm и висина $c=25$ cm треба да се обвие со платно. Колку m² платно е потребно?

Решение: Задачата се сведува на одредување плоштината на куферот, чии димензии се познати. Пред да ги замениме мерните броеви на димензиите во формулата за плоштина на квадар, тие димензии треба да ги изразиме во исти единици мерки. Напоменуваме дека на тоа треба да внимаваме и при употребата на сите други формули за пресметување плоштината и волуменот на геометриските тела. Во нашиот случај, ако сакаме бараната плоштина на куферот да ја добиеме во m², тогаш неговите димензии ќе ги изразиме во метри, т.е. $a=1$ m, $b=6$ dm$=0{,}6$ m и $c=25$ cm$=0{,}25$ m, па ќе добиеме:

$$P = 2\,(ab+ac + bc) = 2\,(1 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}25 + 0{,}6 \cdot 0{,}25) = 2\ (\text{m}^2)$$

Значи, за обвивање на куферот потребо е 2 m² платно.

Задача 2. Да се пресмета плоштината на коцка, чиј раб е 3,5 cm.

Решение: $P=6a^2=6 \cdot 3{,}5^2=6 \cdot 12{,}25=73{,}50$ (cm²).

Задача 3. Да се пресмета работ на коцка, чија плоштина изнесува $P=384$ cm².

Решение: Тука плоштината на коцката е позната, а се бара да се одреди должината на нејзиниот раб. Бидејќи површината на коцката ја сочинуваат шест складни квадрати, тоа плоштината на секој од тие квадрати ќе биде: $a^2 = \frac{P}{6} = \frac{384}{6} = 64$ (cm²), а оттука ја одредуваме и должината на работ на коцката $a = \sqrt{64} = 8$ (cm).

30.2. ПЛОШТИНА НА НЕКОИ ПРАВИЛНИ И ПРАВИ ПРИЗМИ

Со по еден пример ќе го покажеме пресметувањето на плоштината на некои правилни и прави призми.

Задача 4. Да се пресмета плоштината на правилна четиристрана призма со основен раб $a = 5$ cm и висина $h = 12$ cm.

Решение. Правилната четиристрана призма за основа има квадрат. Плоштината на нејзината основа е $B=a^2$, а плоштината на обвивката ќе биде $M=4ah$.

Значи, плоштината на правилна четиристрана призма ќе биде:

$$P = 2B + M = 2a^2 + 4ah \text{ или } P = 2a\,(a + 2h).$$

Ако во добиената формула замениме $a=5$ cm и $h=12$ cm, добиваме:

$$P = 2a\,(a + 2h) = 2 \cdot 5\,(5 + 2 \cdot 12) = 10 \cdot 29 = 290 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Задача 5. Да се пресмета плоштината на правилна тристрана призма, чиј основен раб е $a = 6$ cm, а висината е $h = 10$ cm.

Решение. Кај правилната тристрана призма основите се рамнострани триаголници $\left(B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$, а обвивката се состои од три складни триаголници ($M = 3ah$). Според тоа, формулата за плоштина на правилната тристрана призма ќе гласи:

$$P = 2\,B + M = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3ah \text{ или } P = a\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + 3h\right)$$

Оттука добиваме: $P=a\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + 3h\right) = 6\left(\frac{6\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 10\right) \approx 6\,(3 \cdot 1{,}73 + 30) =$

$$= 6 \cdot 35{,}19 = 211{,}14 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Значи, бараната плоштина на дадената призма е $P \approx 211{,}14$ cm².

Задача 6. Да се пресмета плоштината на правилна шестстрана призма, чиј основен раб е $a = 2$ cm, а висината е $h = 7{,}5$ cm.

Решение. Кај правлната шестстрана призма ќе биде $B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, а $M = 6ah$.

Според тоа, формулата за плоштина на правилната шестстрана призма ќе гласи:

$$P = 2B + M = 2 \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 6ah = 3a^2\sqrt{3} + 6ah \text{ или}$$

$$P = 3a\,(a\sqrt{3} + 2\,h)$$

Оттука добиваме: $P = 3a\,(a\sqrt{3} + 2h) \approx 3 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 1{,}73 + 2 \cdot 7{,}5) = 6 \cdot (3{,}46 + 15) = 6 \cdot 18{,}46 = 110{,}76$, т.е. $P \approx 110{,}76$ (cm²).

Задача 7. Да се пресмета плоштината на права тристрана призма, чија висина е $h = 8$ cm, а за основа има правоаголен триаголник со катети $a = 2,4$ cm и $b = 3,2$ cm.

Решение. Ќе ја пресметаме прво плоштината на основата:

$$B = \frac{ab}{2} = \frac{2,4 \cdot 3,2}{2} = 1,2 \cdot 3,2 = 3,84 \text{ (cm}^2\text{)}$$

За пресметување плоштината на обвивката потребно е да се знае и хипотенузата с на основата. Со примена Питагоровата теорема наоѓаме дека:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2,4^2 + 3,2^2} = \sqrt{5,76+10,24} = \sqrt{16} = 4 \text{ (cm)}$$

Потоа ја пресметуваме плоштината на обвивката:

$$M = (a + b + c)\, h = (2,4 + 3,2 + 4) \cdot 8 = 9,6 \cdot 8 = 76,8 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Бараната плоштина на дадената призма ќе биде:

$$P = 2B + M = 2 \cdot 3,84 + 76,8 = 7,68 + 76,8 = 84,48, \text{ т.е. } P = 84,48 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Задача 8. Да се пресмета плоштината на права четиристрана призма, чија висина е $h = 12$ cm, а основата ѝ е ромб со дијагонали $d_1 = 8$ cm. и $d_2 = 6$ cm.

Решение: Прво ја пресметуваме плоштината на основата на призмата:

$$B = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

За пресметување на плоштината на обвивката потребно е да ја определиме должината на основниот раб на призмата.

Со примена на Питагоровата теорема, наоѓаме дека:

$$a = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \text{ (cm)}.$$

Плоштината на обвивката ќе биде: $M = 4ah = 4 \cdot 5 \cdot 12 = 240$ (cm^2), а плоштината на призмата: $P = 2B + M = 2 \cdot 24 + 240 = 288$ (cm^2).

Задача 9. Да се пресмета плоштината на права четиристрана призма чија висина е $h = 14$ cm, а основата ѝ е равнокрак трапез, чии паралелни страни се долги $a = 9$ cm, $b = 4$ cm, а кракот $c = 6,5$ cm.

Решение: За пресметување плоштината на трапезот (основа на призмата) потребно е да ја определиме висината на тој трапез (црт. 153). Со примена на Питагоровата теорема висината на равнокракиот трапез ќе биде:

$$h_1 = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{6,5^2 - \left(\frac{9-4}{2}\right)^2} = \sqrt{42,25 - 6,25} = 6 \text{ (cm)}$$

Потоа наоѓаме дека: $B = \dfrac{(a + b)\, h_1}{2} = \dfrac{(9+4) \cdot 6}{2} = 13 \cdot 3 = 39$ (cm^2), а

$$M = (a + b + c) \cdot h = (9 + 4 + 2 \cdot 6,5) \cdot 14 = 26 \cdot 14 = 364 \text{ (cm}^2\text{)}$$

На крајот лесно ја наоѓаме и бараната плоштина на дадената призма, таа ќе биде: $P = 2B + M = 2 \cdot 39 + 364 = 78 + 364 = 442$ (cm^2), т.е. $P = 442$ cm^2.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Пресметај ја плоштината на квадар чии димензии се:

а) $a=6{,}4$ cm, $b=5$ cm, $c=3{,}5$ cm, б) $a=1{,}8$ dm, $b=1$ dm, $c=7{,}5$ cm.

2. Пресметај ја плоштината на коцка, чиј раб е: $a=4{,}5$ cm.

3. Плоштината на една коцка е 150 cm^2. Определи го нејзиниот раб.

4. Изрази ја плоштината на коцката како функција од нејзината дијагонала!

5. Пресметај ја плоштината на коцка, чија дијагонала е $d=15$ cm.

6. Пресметај ја дијагоналата на коцка, чија плоштина е 150 cm^2.

7. Како ќе се промени плоштината на коцката, ако нејзиниот раб: а) се зголеми 2 пати, б) се намали 3 пати?

8. Определи го работ на една коцка, ако таа има 2 пати поголема плоштина, отколку друга коцка со раб $a=8$ cm.

9. Определи го работ на една коцка, која има иста плоштина како и квадар, чии димензии се: $a=5$ dm, $b=15$ cm, $c=6$ cm.

10. Во една ламаринена работилница направени се 3500 канти за мед, кои имаат форма на правилна четиристрана призма со основен раб 24 cm и висина 45 cm. Колку m^2 ламарина била употребена за нив?

11. Колку е висока една правилна четиристрана призма, чија плоштина изнесува 152 cm^2, а основниот раб ѝ е долг $a=4$ cm?

12. Плоштината на обвивката на еден квадар изнесува 140 cm^2. Да се пресмета плоштината на дијагоналниот пресек на тој квадар, ако основните рабови му се долги $a=4$ cm и $b=3$ cm.

13. Плоштината на обвивката на една правилна четиристрана призма изнесува 240 cm^2, а висината 1 dm. Да се определи плоштината на таа призма.

14. Плоштината на една правилна четиристрана призма, со основен раб $a=2{,}5$ dm, изнесува 92,5 dm^2. Определи ја висината на призмата!

15. Пресметај ја плоштината и должината на дијагоналата на правилна четиристрана призма со основен раб $a=11$ cm и висина 2,5 dm.

16. Плоштината на правилна четиристрана призма изнесува 288 cm^2, а само плоштината на нејзината обвивка изнесува 169 cm^2. Определи ја висината на призмата!

17. Плоштината на обвивката на правилна четиристрана призма е 48 cm^2, а висината на призмата е 6 cm. Да се одреди должината на основниот раб!

18. Да се пресмета плоштината на правилна тристрана призма со основен раб $a=9$ cm и висина 1,5 dm.

19. Плоштината на обвивката на една правилна тристрана призма, чија висина е 6 cm, изнесува 72 cm^2. Да се одреди плоштината на основата на таа призма.

20. Да се определи плоштината на правилна шестострана призма, ако се познати нејзината висина 5 cm, и должината на нејзината најголема дијагонала $d=13$ cm.

21. Колку е висока една правилна шестострана призма, чија плоштина на обвивката изнесува 168 cm^2, а основниот раб ѝ е долг 3,5 cm.

22. Во салата на еден ресторан се наоѓаат 4 столба, кои имаат форма на правилна шестострана призма со основен раб 25 cm и висина 5,5 m. Колку m^2 платно е потребно за нивно обвивање?

23. Права призма со висина 12 cm, за основа има рамнокрак трапез, чии паралелни страни се долги 9 cm и 3 cm и висина 4 cm. Одреди ја плоштината на таа призма!

24. Права призма со висина 8,5 cm за основа има рамнокрак триаголник. Пресметај ја плоштината на призмата, ако рамнокракиот триаголник има основа $a=5$ cm и крак $b=6{,}5$ cm.

25. Основата на една права призма е правоаголен триаголник со катети 6 cm и 8 cm. Пресметај ја плоштината на призмата, ако висината ѝ е 2 пати поголема од хипотенузата на основата.

26. Основата на права призма е ромб со дијагонали 3 cm и 4 cm, а диагоналата на бочниот ѕид е долга 6,5 cm. Определи ја плоштината на призмата!

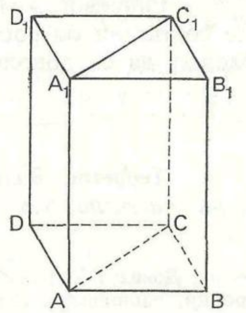
§ 31. ВОЛУМЕН НА ПРИЗМИТЕ

31. 1. ОПШТО ЗА ВОЛУМЕН НА ТЕЛАТА

На црт. 154 е претставена правилна четиристрана призма $ABCD$ $A_1B_1C_1D_1$. Со нејзиниот дијагонален пресек ACC_1A_1 добиваме две прави тристрани призми, кои имаат складни основи и складни висини. Тие две тристрани призми гледаме имаат еден заеднички ѕид — дијагоналниот пресек ACC_1A_1, но немаат ниту една заедничка внатрешна точка. За нив велиме дека се две *соседни призми*, а за секоја од нив велиме дека е дел (т.е. подмножество) од правилната четиристрана призма.

Да си замислиме: едната тристрана призма, на пример $ABCC_1B_1A_1$ да ја движиме на некој начин (со ротација и транслација) така што таа да *се совмести* со другата тристрана призма $CD\,AC_1D_1A_1$. Тоа ќе го постигнеме, ако темињата A, B, C, A_1, B_1, C_1 на правата тристрана призма ги доведеме да се совпаднат соодветно со темињата C, D, A, C_1, D_1, A_1 на втората тристрана призма (црт. 154). Очевидно е дека при тоа површината (границата) и внатрешноста на едната ќе се совпадне со површината и внатрешноста на другата.

За две тела, кои можат на некој начин да се совместат во сите свои делови, велиме дека *се складни* (*конгруентни*). На пример, двете тристрани призми на црт. 154 се складни.



Црт. 154

Поимот *волумен* на геометриските тела го воведуваме на сличен начин како и поимот плоштина на геометриските слики.

Волуменот на едно геометриско тело T, што симболички го означуваме со $V(T)$ или само со V, го разгледуваме како величина од посебен вид, која ги карактеризира геометриските тела и ги има следниве својства:

1°. Секое геометриско тело има точно определен позитивен волумен, т.е.

$$V(T) > 0$$

2°. Ако телата T_1 и T_2 се складни, тогаш $V(T_1) = V(T_2)$

3°. Ако телото T_1 е дел (подмножество) од телото T, тогаш

$$V(T_1) \leqslant V(T)$$

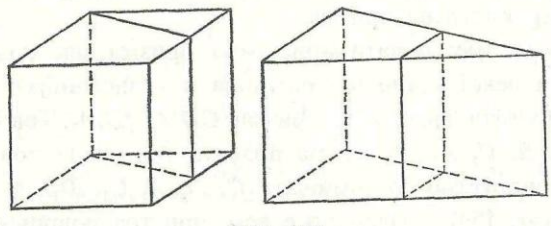
4°. Ако телото T е составено од делови (соседни тела) T_1 и T_2, што немаат заеднички внатрешни точки, тогаш $V(T) = V(T_1) + V(T_2)$.

Волуменот на телото, како и секоја друга величина, може да се мери и изразува со броеви. Да се измери волуменот на едно тело значи да се одреди колку пати се содржи во него волуменот на друго тело што е примен за единица. Бројот, кој покажува единицата мерка колку пати се содржи во (или каков дел е од неа) волуменот што го мериме, се вика *мерен број* на тој волумен.

При избирањето на единиците мерки за волумен се покажало практично тие да бидат усогласени со единиците мерки за должина на отсечките. На пример, од должинските единици: m, dm, cm и mm, се изведени единиците мерки за волумен: *кубен метар* (m^3), *кубен дециметар* (dm^3), *кубен сантиметар* (cm^3) *и кубен милиметар* (mm^3).

Еден кубен метар (m^3) е волуменот на коцка со раб долг 1 m.

Две тела, што имаат еднакви волумени, се викаат *еднаквоголеми* (или *еквивалентни*).



Црт. 155

Од својствата 2° и 4° следува дека:

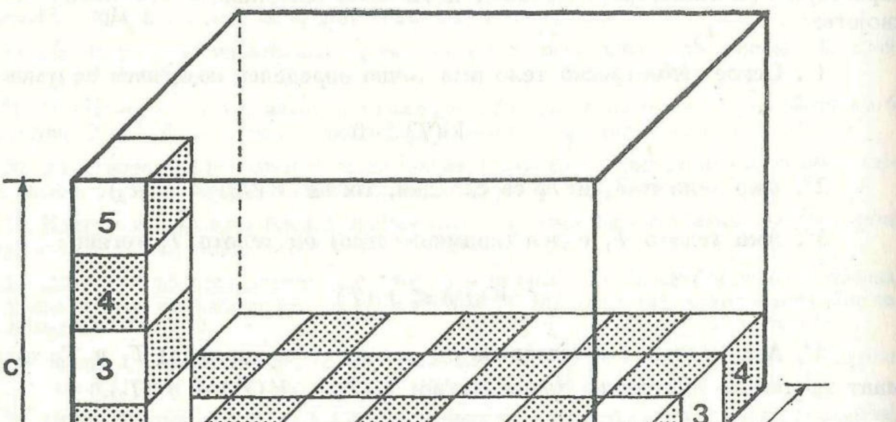
Еднаквоголеми се: а) секои две складни тела, б) секои две тела кои се составени од соодветно складни делови (црт. 155), в) секои две тела, кои можат да се дополнат со складни делови до две складни тела.

31.2. ВОЛУМЕН НА КВАДАР И КОЦКА

Теорема: *Волуменот на квадарот е еднаков на производот од неговите три димензии,* т.е.

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Доказ: Во зависност од тоа дали димензиите a, b и c на квадарот се изразени во природни, рационални или ирационални броеви, ќе разликуваме три случаи:



Црт. 156

а) Димензиите на квадарот нека се изразени со природни броеви, на пример $a=7$ cm, $b=4$ cm и $c=5$ cm (црт. 156).

Основата на квадарот може да се разбие на $B=ab=(7 \cdot 4)$ cm²$=28$ cm². Над секој од тие $ab=28$ cm² од основата можеме да поставиме по 1 cm³. Значи, на целата основа на квадарот можеме да поставиме вкупно 28 cm³. На тој начин добиваме еден пласт (слој) од коцки висок 1 cm, што ја прокрива основата на квадарот. Такви пластови во целиот квадар можат да се поместат 5, бидејќи висината на квадарот има $c=5$ cm. Според тоа, волуменот на дадениот квадар ќе биде $V=abc=(7 \cdot 4 \cdot 5)$ cm³$=140$ cm³.

б) Димензиите на квадарот нека се изразени со рационални броеви, на пример

$$a=\frac{3}{4}\text{m},\ b=\frac{1}{2}\ \text{m и}\ c=\frac{2}{5}\ \text{m}.$$

Рационалните броеви a, b и c можеме да ги доведеме на заеднички именител и добиваме: $a=\frac{p}{n}$, $b=\frac{q}{n}$ и $c=\frac{r}{n}$ (во нашиот случај $a=\frac{15}{20}$ m, $b=\frac{10}{20}$ m и $c=\frac{8}{20}$ m).

Ако делот $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{20}\right)$ од метарот го земеме за нова должинска единица, тогаш очигледно е дека таа единица ќе се содржи во димензиите a, b и c на квадарот соодветно p, q и r пати (во нашиот случај 15, 10 и 8 пати). Според тоа, димензиите на дадениот квадар во новите единици ќе бидат изразени со природните броеви p, q и r; па неговиот волумен ќе биде еднаков на pqr нови кубни единици.

Очигледно е дека, старата кубна единица (кубниот метар) ќе содржи n^3 ($20^3=8000$) нови кубни единици. Затоа за да го одредиме волуменот на дадениот квадар со старите кубни единици, треба производот pqr да го поделиме со бројот n^3. Така добиваме:

$$V=\frac{pqr}{n^3}\quad \text{или}\quad V=\frac{p}{n}\cdot\frac{q}{n}\cdot\frac{r}{n},$$

Но бидејќи $\frac{p}{n}=a$, $\frac{q}{n}=b$ и $\frac{r}{n}=c$, тоа и во овој случај ќе биде $V=abc$, штд.

Во конкретниов случај квадарот со димензии $a=\frac{3}{4}$ m, $b=\frac{1}{2}$ m и $c=\frac{2}{5}$ m.

ќе има волумен $V=\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\right)$ m³ $=\frac{3}{20}$ m³.

в) Може да се докаже дека формулата за волумен на квадарот $V=abc$ ќе важи и кога неговите димензии се изразени со ирационални броеви. Со тој доказ ќе се запознаете во средното училиште.

Бидејќи коцката е специјален случај на квадар, кај кого сите димензии се еднакви, т.е. $b=c=a$, тоа формулата за пресметување волуменот на коцката ќе гласи: $V=a\cdot a\cdot a$ или $V=a^3$.

Значи: **Волуменот на коцката е еднаков на кубот од должината на нејзиниот раб.**

На пример, коцка со раб $a=9$ cm, ќе има волумен:

$$V=a^3=9^3=729(\text{cm}^3)$$

Ако треба да се определи работ на некоја коцка, чиј волумен е познат, тогаш тоа се сведува на определување таков број, кој дигнат на куб ќе го даде зададениот волумен. Таков број добиваме со пресметување кубен корен. Значи: $a=\sqrt[3]{V}$.

Ако е на пример, волуменот на коцката $V=125$ cm^3, тогаш нејзиниот раб ќе биде $a = \sqrt[3]{125} = 5$ (cm).

Ако со B и h ги означиме соодветно плоштината на основата и должината на висината на квадарот, тогаш формулата $V = abc$, кога ќе земеме во предвид дека $ab = B$ и $c = h$, може да се запише уште и во следниов вид:

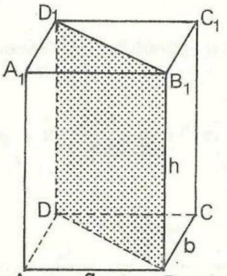
$$V = Bh$$

И формулата за волумен на коцка $V = a^3 = a^2 \cdot a$, ако a^2 — плоштина на основата на коцката ја означиме со B, а a-должината на висината на коцката ја означиме со h, преминува во иста формула $V = Bh$. Според тоа, ќе важи следнава:

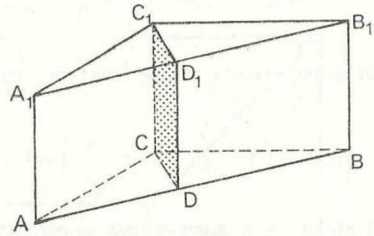
Последица: **Волуменот на квадарот и коцката е еднаков на производот од плоштината на основата и должината на висината им.**

31. 3. ВОЛУМЕН НА ПРАВА ПРИЗМА

Нека е даден квадар $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (црт. 157). Очигледно е дека со дијагоналниот пресек BDD_1B_1 дадениот квадар се разделува на две складни тристрани призми $ABD\,A_1B_1D_1$ и $BCD\,B_1C_1D_1$, бидејќи основите им се складни правоаголни триаголници ($\Delta ABD \cong \Delta BCD$) и имаат складни висини. Според тоа, тие се и еднаквоголеми, т.е. имаат еднакви волумени. Тоа, пак, значи дека волуменот на секоја од добиените тристрани призми е еднаков на половина од волуменот на дадениот квадар.



Црт. 157



Ц3т. 158

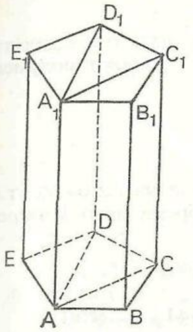
Дадениот квадар со основни рабови a и b и висина h има волумен еднаков на abh. Ако волуменот на едната тристрана призма го означиме со V, тој ќе биде еднаков на: $V = \dfrac{abh}{2} = \dfrac{ab}{2} \cdot h$

Бидејќи основата на тристраната призма е правоаголен триаголник со катети a и b, тоа изразот $\dfrac{ab}{2}$ претставува всушност плоштина на нејзината основа. Ако изразот $\dfrac{ab}{2}$ го означиме со B, ја добиваме формулата:

$$V = B\,h$$

Значи, волумен на права призма, чија основа е правоаголен триаголник, е еднаков на производот од плоштината на основата и должината на нејзината висина.

Да земеме сега една која и да било права тристрана призма $ABCA_1B_1C_1$ (црт. 158). Да ја пресечеме таа призма со една рамнина, која минува низ работ CC_1 и е нормална на бочниот ѕид ABB_1A_1. Тогаш ќе биде: $CD \perp AB$ и $C_1D_1 \perp A_1B_1$ (црт. 158).



Црт. 159

Гледаме, дадената тристрана призма се разделува на две други тристрани призми, чии основи се правоаголни триаголници. Ако со B, B_1 и B_2 ги означиме соодветно плоштините на основите на дадената призма и добиените од неа две други тристрани призми, а со h — нивната заедничка висина; тогаш волуменот на дадената тристрана призма ќе биде: $V = B_1 h + B_2 h = (B_1 + B_2)\, h = Bh$, бидејќи е $B_1 + B_2 = B$

На крајот да земеме и една која и да било права призма. Нека тоа биде, на пример, петстрана призма на црт. 159. Гледаме со дијагоналните пресеци ACC_1A_1 и ADD_1A_1 што минуваат низ бочниот раб AA_1, дадената петстрана призма се разделува на три тристрани призми. Ако плоштините на добиените тристрани призми ги означиме со B_1, B_2 и B_3 а нивните волумени со V_1, V_2 и V_3, тогаш ќе имаме:

$$V_1 = B_1 h, \quad V_2 = B_2 h, \quad V_3 = B_3 h$$

Бидејќи волуменот (V) на дадената призма е еднаков на збирот на добиените тристрани призми, тоа тој ќе биде:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = B_1 h + B_2 h + B_3 h \text{ или } V = (B_1 + B_2 + B_3)\, h$$

Но бидејќи збирот од плоштините на основите на тристраните призми $B_1 + B_2 + B_3$ е еднаков на плоштината на основата на дадената петстрана призма (B), тоа добиваме дека:

$$V = B\,h$$

На ист начин можеме и секоја друга призма да ја поделиме на одреден број тристрани призми, па според тоа ќе важи следнава:

Теорема: *Волуменот на секоја права призма е еднаков на производот од плоштината на основата и должината на висината,* т.е.

$$V = B\,h$$

Задача 1. Да се пресмета волуменот на права призма, чија висина е $h = 9{,}5$ cm, ако за основа има рамнократ триаголник со основа $a = 5$ cm и крак $b = 6{,}5$ cm.

Решение: За пресметување плоштината на рамнокракиот триаголник (основа на призмата) е потребно прво, да ја определиме висината на тој триаголник. Со примена на Питагоровата теорема, наоѓаме:

$$h_1 = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{6{,}5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{42{,}25 - 6{,}25} = \sqrt{36} = 6 \text{ (cm)}.$$

Потоа имаме: $B = \frac{ah_1}{2} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ (cm²), а волуменот ќе биде:

$$V = Bh = 15 \cdot 9{,}5 = 142{,}5 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Задача 2. Во еден сад што има форма на права призма со основа равнокрак трапез, ставено е 8,4 dm³ вода. До која висина ќе се наполни садот, ако равнокракиот трапез има паралелни страни $a = 34$ cm, $b = 16$ cm и крак $c = 15$ cm?

Решение: Бидејќи водата во садот ќе заземе иста форма како и садот, тоа задачата се сведува на определување висината на призмата, а кога се познати нејзиниот волумен и рабовите при основата.

Бидејќи волуменот на призмата е $V = Bh$, тоа $h = \frac{V}{B}$.

За да ја решиме задачата прво треба да ја пресметаме плоштината на основата, т.е плоштината на равнокракиот трапез. Со примена на Питагоровата теорема прво ја определуваме висината на трапезот:

$$h_1 = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{15^2 - \left(\frac{34-16}{2}\right)^2} = \sqrt{225-81} = \sqrt{144} = 12 \text{ (cm)}.$$

Значи: $B = \frac{(a+b)\,h_1}{2} = \frac{(34+16)\cdot 12}{2} = 50 \cdot 6 = 300$ (cm²).

Бидејќи $V = 8{,}4$ dm³ $= 8400$ cm³, тоа $h = \frac{V}{B} = \frac{8400}{300} = 28$ (cm)

Според тоа, садот ќе се наполни до висината $h = 28$ cm.

Забелешка: Правилната четиристрана призма за основа има квадрат, затоа плоштината на нејзината основа ќе биде $B = a^2$, а волуменот: $V = a^2h$.

Кај правилната тристрана призма основата е рамностран триаголник, чија плоштина е: $B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, па според тоа формулата за волумен гласи:

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h \quad \text{или} \quad V = \frac{a^2h\sqrt{3}}{4}$$

Основата на правилната шестострана призма е правилен шестоаголник, чија плоштина е: $B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, па според тоа формулата за волумен гласи:

$$V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot h \quad \text{или} \quad V = \frac{3a^2h\sqrt{3}}{2}$$

Задача 3. Еден мермерен столб има форма на правилна шестострана призма со основен раб $a = 32$ cm и висина $h = 4$ m. Да се одреди масата на тој столб во килограми.

Решение: Поим *маса* на едно материјално тело познат ви е од физиката. Таа се мери во *грамови* (*g*), *килограми* (kg) или *тони* (*t*). Знаете дека, масата на 1 cm³ од некоја материја изразена во грамови се вика *специфична маса* или *густина* на таа материја, која се означува со s. Секоја материја има определена густина. На пример, дестилираната вода на 4°C има густина 1, железото има густина $s=7{,}8$, бакарот — $s=8{,}9$, мермерот $s=2{,}7$ итн.

Кога ќе кажеме дека густината на мермерот е $s=2,7$, тоа, значи, дека 1 cm^3 мермер има маса 2,7 g. Оттука е јасно дека бараната маса M на мермерниот столб во нашата задача ќе биде еднаква на производот од неговиот волумен и густината $s=2,7$ на мермерот т.е.

$$M=Vs.$$

Според тоа, прво ќе го пресметаме волуменот на столбот:

$$V=\frac{3a^2h\sqrt{3}}{2}=\frac{3\cdot 32^2\cdot 400\cdot\sqrt{3}}{2}\approx 3\cdot 1024\cdot 200\cdot 1,73=614400\cdot 1,73=1062912\ (cm^3)\approx$$

$$\approx 1063000\ (cm^3)$$

Тогаш ќе биде: $M=Vs=1063000\cdot 2,7=287010$ (g).

Значи, мермерниот столб има маса $M\approx 287$ kg.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Пресметај го волуменот на правилна четиристрана призма со основен раб 4 cm и висина 13,5 cm.

2. Пресметај го волуменот на правилна тристрана призма со периметар на основата 16,5 cm и висина 10 cm.

3. Пресметај го волуменот на коцка, чија плоштина изнесува 96 cm^2.

4. Да се определи дијагоналата на коцка, чиј волумен е 64 dm^3.

5. Колку кутии, долги 3 dm со ширина 2,5 dm и дебелина 8 cm, можат да се сместат во еден сандак со димензии 1,5 m, 1 m и 0,8 m?

6. Димензиите на еден квадар се: 30 cm, 1 m и 9 cm. Одреди го работ на коцка што е еднаквоголема на тој квадар!

7. Резервоар во форма на квадар има димензии 9 m, 4 m и 2,5 m. За колку време ќе се наполни тој, ако во него се вливаат по 5 литри во секоја секунда?

8. Како ќе се промени волуменот на коцката, ако нејзиниот раб: а) се зголеми 3 пати, б) се намали 2 пати?

9. Од три метални коцки со должини на рабовите 3 cm, 4 cm и 5 cm излиена е една коцка. Одреди го работ на таа коцка.

10. Еден базен има форма на правилна четиристрана призма со основен раб внатре 1,4 m. Колку литри вода треба да се испушти од базенот, така што нивото на водата во него да се спушти за 18 cm?

11. Колкава собна површина можеме да покриеме со 0,64 m^3 штици ако тие се дебели 2,5 cm?

12. Колкава е масата на еден лист цинкова ламарина што има форма на квадар со должина 2 m, ширина 1,2 m и дебелина 2 mm. Цинкот има густина 7,1.

13. Треба да се направи цистерна во форма на правилна четиристрана призма со основен раб 1,5 m. Колку треба да е таа длабока, за да собира 90 хектолитри?

14. Во еден сад што има форма на правилна четиристрана призма со основен раб, 40 cm се наоѓа вода. Ако во водата потопиме еден камен, нивото на водата во садот ќе се издигне за 5 cm. Колкав е волуменот на тој камен?

15. Плоштината на коцката во cm^2 и волуменот во cm^3, изразени се со ист број. Определи го работ на коцката!

16. За изградбата на една права улица долга 400 метри и широка 7,5 m е потребно да се постели со еден пласт асфалт во дебелина од 20 cm. Колку кубни метри асфалт е потребен за изградбата на таа улица?

17. Пресметај го волуменот на правилна шестострана призма со основен раб 3 cm. ако плоштината на поголемиот дијагонален пресек изнесува 72 cm^2!

18. Колку е висока правилна шестострана призма со основен раб $a=6$ cm и волумен $V=1260$ cm^3?

19. Еден базен има форма на правилна шестострана призма со основен раб 5 m и длабочина 1,6 m. Колку m^3 вода собира тој? А колку литри?

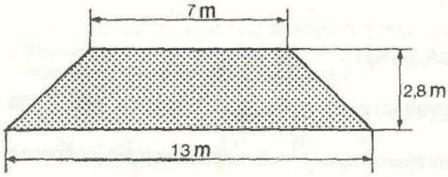
20. Права призма со висина 25 cm има за основа правоаголен триаголник, чија хипотенуза е долга 7,8 cm и една катета 7,2 cm. Пресметај ја плоштината и волуменот на таа призма!

21. Права призма, чија основа е ромб со дијагонали 8 cm и 6 cm, има висина 15 cm. Пресметај го нејзиниот волумен!

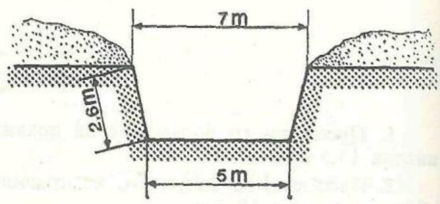
22. Насип на една железничка пруга има напречен пресек, што е нацртан на црт. 160. Колку m^3 земја има на тој насип на должина 2 km?

23. Ископан е еден канал долг 1 km, чиј напречен пресек е нацртан на црт. 161. Колку m^3 земја е исфрлено при неговото копање?

24. Покривната површина на една зграда е тераса со должина 16 m и ширина 12,5 m Одреди ја масата на напаѓаниот снег на неа, чија висина е 48 cm, ако густината на снегот е $s=0,2$.



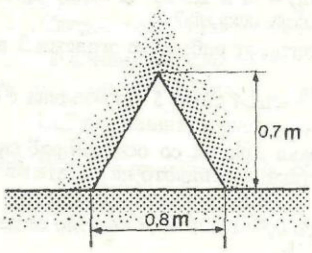
Црт. 160



Црт. 161

25. Шуплива железна коцка има надворешен раб 8 cm и дебелина на ѕидовите d=1,5 cm. Пресметај ја масата на коцката!

26. Колку кубни метри вода може да помине за 1 час низ една цевка чиј напречен пресек е даден на црт. 162, ако брзината на течењето на водата низ неа е 2,5 m во секунда.



Црт. 162

27. Плоштината на обвивката на една правилна шестострана призма е 73 cm^2, а висината 12 cm. Да се пресмета волуменот на призмата.

28. Една коцка од дрво со раб 15 cm, потонува во вода 12 cm. Определи ја густината на дрвото од кое е направено телото!

29. Основниот раб на правилна шестострана призма е $a=5$ cm, а најголемата нејзина дијагонала е 20 cm. Одреди го волуменот на призмата!

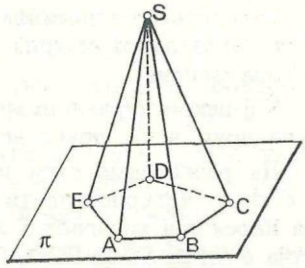
30. Пресметај ја плоштината и волуменот на правилна тристрана призма, кај која должината на бочниот раб е еднаква на основниот раб $a=6$ cm!

ПИРАМИДА

§ 32. ПОИМ И ЕЛЕМЕНТИ НА ПИРАМИДАТА

Во рамнината π нека е даден еден конвексен многуаголник, на пример петаголникот $ABCDE$, а надвор од рамнината π да земеме една која и да било точка S (црт. 163). Ако точката S ја соединеме со секое теме од петаголникот $ABCDE$, ќе добиеме и пет триаголника: ABS, BCS, CDS, DES и EAS.

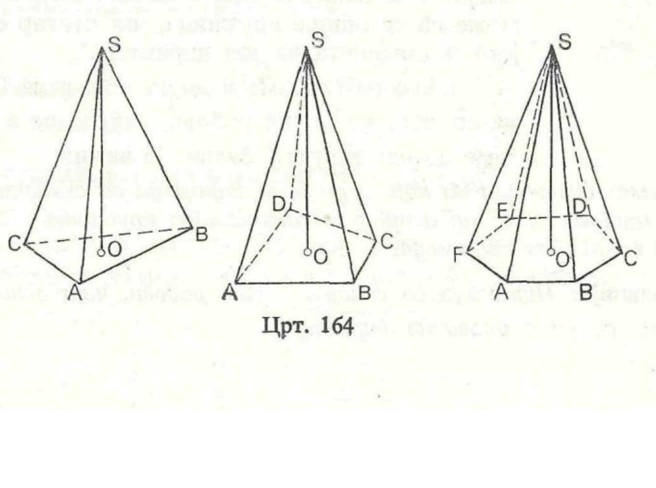
Површината, што е составена од петаголникот $ABCDE$ и петте триаголници кои имаат едно заедничко теме S, го разбива множеството точки од просторот на две области: внатрешна и надворешна. Унијата од таа површина и внатрешната област претставува една затворена и ограничена просторна област, т.е. едно геометриско тело, и тоа полиедар. Тој полиедар го викаме *петострана пирамида* (црт. 163).



Црт. 163

Ако во рамнината π, наместо петаголник земевме друг многуаголник, на пример триаголник, четириаголник, односно шестоаголник, на сличен начин ќе добиеме други полиедри, кои се викаат: *тристрана, четиристрана*, односно *шестострана пирамида* (црт. 164). Сите тие со заедничко име се викаат *пирамиди*.

Дефиниција: *Еден полиедар се вика пирамида, ако неговата граница се состои од некој многуаголник и онолку триаголници (сите со едно заедничко теме) колку што страни има многуаголникот.*



Црт. 164

Многуаголникот го викаме *основа* (или *база*) на пирамидата; триаголниците што имаат заедничко теме S, ги викаме *бочни ѕидови* на пирамидата, а точката (темето) S — *врв* на пирамидата.

Сите бочни ѕидови на пирамидата велиме дека ја образуваат *бочната површина* или *обвивката* на пирамидата.

Страните на основата ги викаме *основни рабови* на пирамидата (AB, BC, CD, ... на црт. 163), а сите други рабови — *бочни рабови* на пирамидата (AS, BS, CS, ... на црт. 163).

Пирамидите ги цртаме како на црт. 163 и 164. Со непрекинати линии ги цртаме сите видливи рабови, а со испрекинати линии — сите невидливи рабови; кога пирамидата ја гледаме од спреди и малку одгоре.

Висина на пирамидата се вика отсечката од нормалата што е повлечена од врвот кон рамнината на основата на пирамидата (SO на црт. 164). Висина на пирамидата ја викаме уште и должината на таа отсечка, односно растојанието од врвот до рамнината на основата на пирамидата и ја означуваме со h.

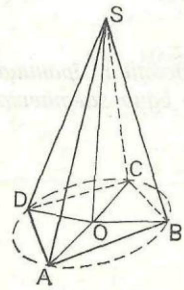
§ 33. ВИДОВИ И СВОЈСТВА НА ПИРАМИДИТЕ

Во зависност од бројот на страните на основата, пирамидите биваат: *тристрани*, *четиристрани*, *петстрани*, итн.

Тристраната пирамида уште ја викаме и *тетраедар*. Бидејќи сите ѕидови на тетраедарот се триаголници, тоа кој и да било од нив може да се земе за негова основа.

Кај некои пирамиди може да се случи сите бочни рабови да се складни еден на друг, а кај други да не е таков случај.

Да разгледаме една пирамида со складни бочни рабови, на пример нека е таква четиристраната пирамида $SABC$ на црт. 165. Нека O е ортогонална порекција на врвот S врз рамнината на основата на пирамидата $SABC$ кај која е $SA \cong SB \cong SC \cong SD$ (црт. 165).



Црт. 165

Ако точката O ја соединиме со темињата A, B, C и D ќе ги добиеме правоаголните триагоници SOA, SOB, SOC и SOD. Тие триаголници се складни бидејќи имаат складни хипотенузи и една заедничка катета OS. Од нивната складност следува дека и другите катети им се складни, т.е. дека $OA \cong OB \cong OC \cong OD$. Тоа значи, дека околу основата на разгледуваната пирамида може да се опише кружница, чиј центар е во подножјето на висината на таа пирамида.

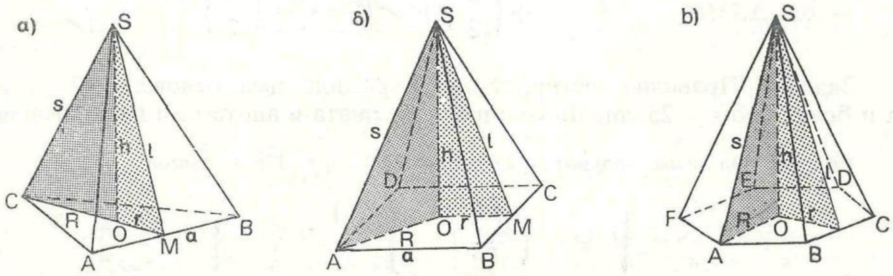
Ако разгледаме и друга која и да било пирамида со складни бочни рабови, очигледно е дека ќе дојдеме до ист заклучок. Значи, ќе важи:

Теорема: *Основата на која и да било пирамида со складни бочни рабови е тетивен многуаголник, чиј центар на опишаната кружница е во подножјето на висината на таа пирамида.*

Дефиниција: *Пирамида со складни бочни рабови, чија основа е правилен многуаголник, се вика правилна пирамида.*

За правилните пирамиди карактеристично е тоа што: сите основни рабови се складни меѓу себе, а сите бочни ѕидови се складни рамнокраки триаголници.

Висината на кој и да било бочен ѕид на правилната пирамида, што е повлечена кон соодветниот основен раб, се вика *апотема* на пирамидата (SM на црт. 166).



Црт. 166

Апотемите на правилната пирамида се складни (Зошто?).

Правилна тристрана пирамида, кај која бочниот раб е складен на основниот раб, се вика уште *правилен тетраедар.*

На црт. 166 се нацртани правилна тристрана, правилна четиристрана и правилна шестострана пирамида, на чие разгледување посебно ќе се задржиме. За нив ќе ги употребуваме следниве означувања:

Должината на основниот раб ќе ја означуваме со a, на бочниот раб — со s, на висината — со h и на апотемата — со l.

Ќе покажеме дека горниве четири елементи a, s, h и l на правилните пирамиди не се независни еден од друг, односно ако се познати кои и да било два од нив, лесно можат да се одредат и другите два елемента.

Од црт. 166 гледате дека ортогоналните проекции на бочниот раб SA и апотемата SM врз рамнината на основата на правилните пирамиди претставуваат, всушност, радиуси R и r на опишаната и впишаната кружница на правилниот многуаголник што е основа на првилната пирамида. Должините на тие радиуси R и r, како што ни е познато, се функции од должината на страната a на правилниот многуаголник и тоа:

— кај рамностраниот триаголник: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

— кај квадратот: $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $r = \frac{a}{2}$, и

— кај правилниот шестоаголник: $R = a$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Значи, со помош на тие формули лесно ги одредуваме радиусите R и r кога е позната должината на основниот раб a на соодветната правилна пирамида.

Од друга страна пак од правоаголните триаголници SAO, SOM и SMC со примена на Питагоровата теорема имаме:

— од ΔSAO: $\quad s^2 = h^2 + R^2$ или $h^2 = s^2 - R^2$

— од ΔSOM: $\quad l^2 = h^2 + r^2$ или $h^2 = l^2 - r^2$

— од ΔSMC: $\quad s^2 = l^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ или $l^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

Задача: Правилна четиристрана пирамида има основен раб $a = 14$ cm и бочен раб $s = 25$ cm. Да се одреди висината и апотемата на пиримидата.

Решение: Од правоаголниот триаголник SAO (црт. 166-б) имаме:

$$h = \sqrt{s^2 - R^2} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{25^2 - \frac{14^2}{2}} =$$

$$= \sqrt{625 - \frac{196}{2}} = \sqrt{625 - 98} = \sqrt{527} \approx 23 \text{ (cm)}.$$

Апотемата l можеме да ја одредиме или од правоаголниот триаголник SOM или од ΔSMC (црт. 166-б). Од ΔSMC, добиваме:

$$l = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{25^2 - \left(\frac{14}{2}\right)^2} = \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24 \text{ (cm)}.$$

Значи, дадената пирамида има висина $h \approx 23$ cm и апотема $l = 24$ cm.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Што е тоа основа, обвивка, врв и висина на пирамидата?

2. Дали може висината на пирамидата да се совпадне со еден бочен раб на пирамидата?

3. Дали можат некои бочни ѕидови на пирамидата да бидат нормални на основата? Ако може, колку најмногу такви бочни ѕида може да има пирамидата?

4. Каков најмал број на: а) ѕидови, б) темиња, в) рабови може да има еден полиедар и кој е тој полиедар?

5. Зошто основата на која и да било пирамида со складни бочни рабови е секогаш тетивен многуаголник?

6. Пирамида чија основа е: а) равнокрак триаголник, б) правоаголен триаголник, в) ромб, г) ромбоид, д) равнокрак трапез, ѓ) делтоид, дали може да биде со складни бочни рабови? Зошто?

7. Кои пирамиди ги викаме правилни? Кој е неопходен и доволен услов за да биде една пирамида правилна?

8. Ако основата на една пирамида е правилен многуаголник, дали мора таа да е правилна?

9. Ако бочните рабови на една пирамида се складни еден на друг, дали мора таа да е правилна?

10. Ако сите бочни ѕидови на една пирамида се равнокраки триаголници, каква е таа пирамида? Зошто?

11. Дали кај правилната пирамида постои точка што е еднакво оддалечена од сите темиња и од врвот на пирамидата?

12. Една правилна четиристрана пирамида има основен раб **10** cm и апотема **13** cm Одреди ја висината на пирамидата!

13. Правилна шестострана пирамида има основен раб 4 cm и висина 5,5, cm. Одреди ја нејзината апотема!

14. Правилна тристрана пирамида има основен раб 6 cm и бочен раб 4 cm. Одреди ја висината и апотемата на таа пирамида!

15. Правилна четиристрана пирамида со основен раб $a=10$ cm има висина $h=12$ cm. Одреди го бочниот раб и апотемата на пирамидата!

16. Одреди ја висината на правилен тетраедар, чиј раб е $a=8$ cm!

17. Колку е висока една правилна четиристрана пирамида, кај која бочните рабови се складни на основните и имаат должина $a=6{,}2$ cm?

18. Дали постои правилна шестострана пирамида, кај која бочните рабови се складни на основните? Зошто?

§ 34. ПРЕСЕЦИ НА ПИРАМИДИТЕ

Кај пирамидата можат да се направат следниве два вида пресеци:

1°. Пресекот што се добива кога пирамидата се пресече со рамнина, која минува низ врвот и една која и да било дијагонала на основата, се вика *дијаіонален ūресек* на пирамидата (триаголникот SAD на црт. 167).

Очигледно е дека секој дијагонален пресек на пирамидата е триаголник со страни: една дијагонала на основата и два бочни раба што не лежат на ист бочен ѕид на пирамидата.

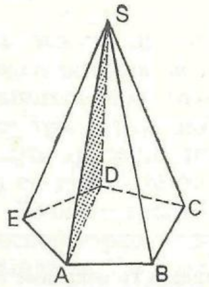
2°. Пресекот, што се добива кога пирамидата се пресече со рамнина која е паралелна на рамнината на основата, се вика *ūаралелен ūресек* на пирамидата (петаголникот $A_1B_1C_1D_1E_1$ на црт. 168).

Паралелните пресеци на пирамидата ги имаат следниве својства:

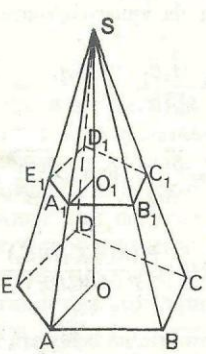
Теорема: *Ако ūирамидаūа ја ūресечеме со рамнина ūаралелна на рамнинаūа на основаūа, ūоīаш*:

а) *Бочниūе рабови и висинаūа на ūирамидаūа се разделуваат од ūаа рамнина на ūроūорционални оūсечки.*

б) *Добиениоū ūресек е мноīуаīолник сличен на основаūа на ūирамидаūа.*



Црт. 167



Црт. 168

в) *Плоштиниūе на ūресекоū и основаūа се однесуваат како квадраūиūе на нивниūе расūојанија од врвоū на ūирамидаūа.*

Доказ: Нека е дадена пирамидата $SABCDE$ со висина SO (црт. 168).

Ако на растојание $\overline{SO_1}$ ($\overline{SO_1} < \overline{SO}$) од врвот S ја пресечеме дадената пирамида со рамнина паралелна на основата ќе го добиеме пресекот $A_1B_1C_1D_1E_1$ (црт. 168). а) Бидејќи рамнината на сечењето е паралелна со рамнината на основата, тоа страните на пресекот ќе бидат паралелни со соодветните страни на основата (види теорема 7 во § 20), т.е. $A_1 B_1 \| AB$, $B_1 C_1 \| BC$, $C_1 D_1 \| CD$, итн. и $A_1O_1 \| AO$. А врз основа на една теорема за две паралелни прави што ги сечат краците на еден агол, ќе важат пропорциите:

$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{A_1A}} = \frac{\overline{SB_1}}{\overline{B_1B}}, \quad \frac{\overline{SB_1}}{\overline{B_1B}} = \frac{\overline{SC_1}}{\overline{C_1C}}, \quad \frac{\overline{SC_1}}{\overline{C_1C}} = \frac{\overline{SD_1}}{\overline{D_1D}}, \ldots, \quad \frac{\overline{SO_1}}{\overline{O_1O}} = \frac{\overline{SA_1}}{\overline{A_1A}}$$

$$\text{односно: } \frac{\overline{SA_1}}{\overline{A_1A}} = \frac{\overline{SB_1}}{\overline{B_1B}} = \frac{\overline{SC_1}}{\overline{C_1C}} = \frac{\overline{SD_1}}{\overline{D_1D}} = \ldots = \frac{\overline{SO_1}}{\overline{O_1O}}, \text{ штд.}$$

б) Од $A_1B_1 \| AB$, $B_1C_1 \| BC$, $C_1D_1 \| CD$, итн. следува дека:

$\sphericalangle A_1B_1C_1 \cong \sphericalangle ABC$, $\sphericalangle B_1C_1D_1 \cong \sphericalangle BCD$, $\sphericalangle C_1D_1E_1 \cong \sphericalangle CDE$ (како агли со заемно паралелни истонасочени краци), т.е. пресекот $A_1B_1C_1D_1E_1$ и основата $ABCDE$ имаат соодветно складни агли.

Освен тоа од сличноста на триаголниците: $\Delta SA_1B_1 \sim \Delta SAB$, $\Delta SB_1C_1 \sim \Delta SBC, \ldots$ $\Delta SA_1O_1 \sim \Delta SAO$, имаме:

$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SB_1}}{\overline{SB}}, \quad \frac{\overline{SB_1}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{SC_1}}{\overline{SC}}, \quad \frac{\overline{SC_1}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{C_1D_1}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{SD_1}}{\overline{SD}},$$

$$\frac{\overline{SD_1}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{D_1E_1}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{SE_1}}{\overline{SE}}, \quad \frac{\overline{SE_1}}{\overline{SE}} = \frac{\overline{E_1A_1}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA}}$$

$$\text{А оттука следува дека: } \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C_1D_1}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{D_1E_1}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{E_1A_1}}{\overline{EA}}$$

Бидејќи многуаголниците $A_1B_1C_1D_1E_1$ и $ABCDE$ имаат пропорционални страни и соодветно складни агли, тоа тие се слични, штд.

в) Бидејќи плоштините на сличните многуаголници се однесуваат како квадратите на нивните соодветни страни, тоа:

$$\frac{P\,(A_1\,B_1\,C_1\,D_1\,E_1)}{P\,(ABCDE)} = \frac{\overline{A_1\,B_1}^2}{\overline{AB}^2},$$

но од сличноста на триаголниците $\Delta SA_1B_1 \sim \Delta SAB$ и $\Delta SA_1O_1 \sim \Delta SAO$

$$\text{имаме: } \frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} \text{ и } \frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{A_1O_1}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{SO_1}}{\overline{SO}},$$

$$\text{односно } \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SO_1}}{\overline{SO}} \text{ или } \frac{\overline{A_1B_1}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\overline{SO_1}^2}{\overline{SO}^2}$$

$$\text{Според тоа: } \frac{P\,(A_1B_1C_1D_1E_1)}{P\,(ABCDE)} = \frac{\overline{SO_1}^2}{\overline{SO}^2}, \text{ штд.}$$

Ако плоштините на основата и пресекот на пирамидата ги означиме со B и B_1, а нивните растојанија од врвот S на пирамидата ги означиме со h и h_1, тогаш горново равенство, можеме да го запишеме и вака:

$$\frac{B_1}{B} = \frac{h_1^2}{h^2}$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Дали може дијагоналниот пресек на пирамидата да биде: а) равнокрак триаголник, б) правоаголен триаголник, в) рамностран триаголник?

2. Каков пресек се добива, ако паралелно на еден бочен ѕид се пресече: а) тристрана б) четиристрана пирамида?

3. Плоштината на основата на една пирамида е 64 cm^2, а висината 16 cm. На какво растојание од врвот ѝ треба да се постави паралелен пресек, чија плоштина е 36 cm^2.

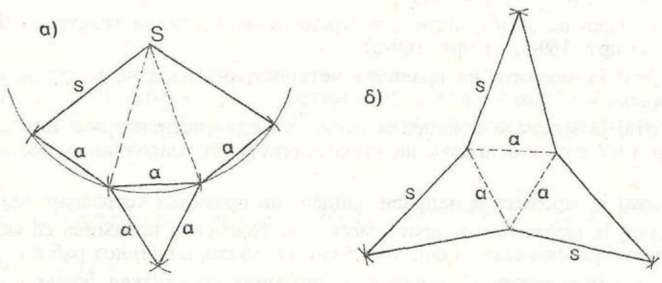
4. Плоштината на основата на една пирамида е 150 cm^2, а плоштината на еден нејзин паралелен пресек е 54 cm^2, а растојанието меѓу основата и пресекот е 14 cm. Да се одреди висината на пирамидата.

5. На какво растојание од врвот на една пирамида со висина 24 cm треба да се направи паралелен пресек, така што плоштината на пресекот да биде 4 пати помала од плоштината на основата?

§ 35. ЦРТАЊЕ МРЕЖА НА ПИРАМИДИ

Ако основата и бочните ѕидови на пирамидата ги расклопиме и поставиме сите да легнат во една рамнина, ќе ја добиеме мрежата на пирамидата.

Да ја нацртаме мрежата на правилна тристрана пирамида со основен раб a и бочен раб s.



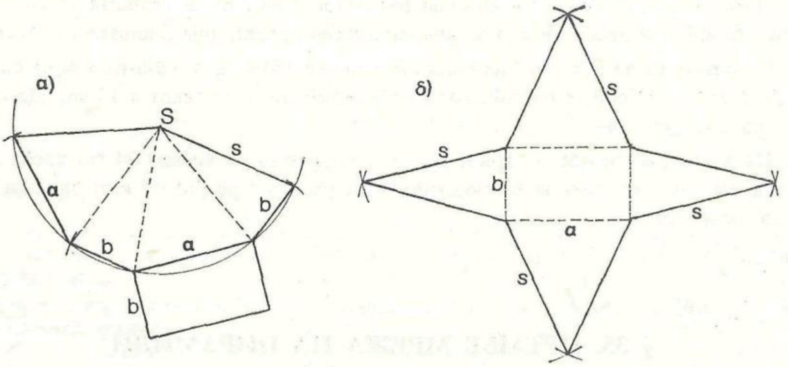
Црт. 169

Бараната мрежа на правилната тристрана пирамида ја цртаме вака: Од некоја точка S опишуваме кружен лак со радиус што е еднаков на бочниот раб s на пирамидата (црт. 169-а). Потоа по опишаниот кружен лак со шестар го пренесуваме три пати основниот раб a на пирамидата како тетива на тој лак. Соединувајќи ги добиените точки на кружниот лак со точката S, а потоа и по ред една со друга, ќе добиеме три равнокраки триаголници, што ни ги претставуваат бочните ѕидови на правилната тристрана пирамида. На крајот над еден основен раб го конструираме и рамностраниот триаголник — основа на пирамидата. Така ја добиваме бараната мрежа на правилната тристрана пирамида (црт. 169-а).

Мрежата на правилна тристрана пирамида може да се нацрта и на друг начин, како на црт. 169-б. Тука прво е нацртана основата на пирамидата, а потоа над секој нејзин раб е конструиран по еден равнокрак триаголник со крак, што е еднаков на бочниот раб s на пирамидата.

На сличен начин ја цртаме и мрежата на правилна четиристрана и правилна шестострана пирамида.

На црт. 170-а и б е нацртана на два начина мрежата на една четиристрана пирамида со еднакви бочни рабови, чија основа е правоаголник со димензии a=2,5 cm и b=1,5 cm, а бочниот раб на пирамидата е s=3 cm. Објасни ја постапката како е таа нацртана.



Црт. 170

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Нацртај ја мрежата и направи модел на правилна тристрана пирамида, чиј основен раб е a=5 cm и бочен раб s=8 cm.

2. Колку оски на симетријата има мрежата на правилна тристрана пирамида, што е нацртана на: а) црт. 169-а, б) црт. 169-б?

3. Нацртај ја мрежата на правилна четиристрана пирамида, чиј основен раб е a=3 cm и бочен раб s=7,5 cm.

4. Нацртај ја мрежата и направи модел на една четиристрана пирамида со еднакви бочни рабови s=7 cm, а основата на пирамидата е правоаголник со димензии a=5,5 cm и b=3 cm.

5. Нацртај ја мрежата и направи модел на правилен тетраедар, чиј раб е a=6 cm.

6. Нацртај ја мрежата и направи модел на тристрана пирамида со складни бочни рабови, чии основни рабови се a=3 cm, b=4,5 cm и c=6 cm, а бочниот раб е s=7 cm.

7. Нацртај ја мрежата на тристрана пирамида со еднакви бочни рабови s=5 cm, а основата ѝ е рамнокрак триаголник со основа a=3 cm и крак b=4 cm.

8. Нацртај ја мрежата на една тристрана пирамида со еднакви бочни рабови s=7 cm, а основата ѝ е правоаголен триаголник со катети a=3 cm и b=4 cm.

§ 36. ПЛОШТИНА НА ПИРАМИДИТЕ

Да се определи *плоштината* на една пирамида, значи да се најде збирот од плоштините на сите нејзини ѕидови. Бидејќи површината (границата) на пирамидата се состои од еден (кој и да било) многуаголник — основа на пирамидата, и определен број триаголници — обвивка на пирамидата, тоа очигледно е дека:

Плоштината на пирамидата е еднаква на збирот од плоштините на нејзината основа и нејзината обвивка.

Според тоа, ако плоштината на основата на пирамидата ја означиме со B, а плоштината на обвивката — со M, тогаш за плоштината P на пирамидата, ќе важи формулата:

$$P = B + M$$

Од сите видови пирамиди, ние ќе се задржиме само на пресметување плоштината на правилните пирамиди и плоштината на некои пирамиди со складни бочни рабови.

Ќе покажеме дека важи следнава:

Теорема: *Плоштината на обвивката на секоја правилна пирамида е еднаква на полупроизводот од периметарот* (L) *на основата и должината на апотемата* (l) *на пирамидата,* т.е. $M = \dfrac{Ll}{2}$

Доказ: Плоштината на еден бочен ѕид (равнокрак триаголник) на правилната n-страна пирамида е еднаква на $\dfrac{a \cdot l}{2}$, каде што a е должнината на основниот раб, а l — должината на апотемата на пирамидата. Но бидејќи обвивката на правилната n — страна пирамида се состои од n складни равнокраки траиголници, тоа нејзината плоштина ќе биде:

$$M = n \cdot \frac{al}{2} = \frac{nal}{2}$$

Ако земеме во предвид дека $na = L$, каде L е периметар на основата, тогаш добиваме:

$$M = \frac{Ll}{2}, \text{ штд.}$$

Од општата формула за плоштина на пирамидата и докажаната теорема лесно ги добиваме и формулите за плоштина на правилните: тристрана, четиристрана и шестострана пирамида.

За правилната тристрана пирамида, бидејќи е $B = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а $M = \dfrac{3al}{2}$ тоа формулата за плоштина, ќе гласи:

$$P = B + M = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3al}{2} \quad \text{или} \quad P = \frac{a}{2}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + 3l\right)$$

За правилната четиристрана пирамида, бидејќи е $B = a^2$, а $M = \dfrac{4al}{2} = 2al$, тоа:

$$P = B + M = a^2 + 2al \quad \text{или} \quad P = a(a + 2l)$$

За правилната шестострана пирамида, бидејќи е $B = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, а $M = \dfrac{6\,al}{2} = 3al$, тоа: $P = B + M = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 3al$ или $P = 3a\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2} + l\right)$

Правилниот тетраедар, бидејќи е ограничен со четири складни рамнострани триаголници со страна a, тоа формулата за неговата плошина, ќе гласи:

$$P = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{или} \quad P = a^2 \cdot \sqrt{3}$$

Плоштината на неправилните пирамиди ја наоѓаме, кога прво ги најдеме поодделно плоштините на сите нејзини ѕидови, а потоа истите ги собереме.

Задача 1. Да се пресмета плоштината на правилна тристрана пирамида, која има основен раб $a = 6$ cm и висина $h = 8$ cm.

Решение: Прво треба да ја пресметаме апотемата на пирамидата. Неа ја добиваме со примена на Питагоровата теорема од правоаголниот триаголник SOM (црт. 166-а), од каде што:

$$l = \sqrt{h^2 + r^2}, \text{ а бидејќи } r = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \text{ тогаш:}$$

$$l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{8^2 + \left(\frac{6\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{64 + 3} = \sqrt{67} \approx 8,2 \text{ (cm)}.$$

Бараната плоштина на пирамидата ќе биде:

$$P = \frac{a}{2}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + 3l\right) = \frac{6}{2}\left(\frac{6\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 8,2\right) \approx 3\,(3 \cdot 1,73 + 24,6) = 3\,(5,19 + 24,6) =$$

$$= 3 \cdot 29,79 = 89,37, \text{ т.е. } P \approx 89,37 \text{ cm}^2.$$

Задача 2. Да се пресмета плоштината на правилна четиристрана пирамида, чиј основен раб е $a = 10$ cm, а бочниот раб $s = 13$ cm.

Решение: Прво ќе ја пресметаме должината на апотемата на пирамидата:

$$l = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ (cm)}.$$

Потоа ја пресметуваме плоштината на пирамидата, т.е.

$$P = a\,(a + 2l) = 10\,(10 + 2 \cdot 12) = 10 \cdot 34 = 340.$$

Според тоа, дадената пирамида има плоштина $P = 340$ cm^2.

Задача 3. Да се пресмета плоштината на правилна шестострана пирамида, чија висина е $h = 8$ cm, а бочниот раб $s = 10$ cm.

Решение: Со примена на Питагоровата теорема на правоаголниот триаголник AOS (црт. 166-в) го определуваме прво радиусот на опишаната кружница R околу основата. Тој ќе биде:

$$R = \sqrt{s^2 - h^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6 \text{ (cm)}.$$

Бидејќи е $R = a$, тоа значи дека основниот раб на дадената пирамида ќе биде $a = 6$ cm.

Потоа ја определуваме и должината на апотемата на пирамидата од правоаголниот триаголник SOM (црт. 166-в), па добиваме:

$$l = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{10^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2} = \sqrt{100 - 9} = \sqrt{91} \approx 9,54 \text{ (cm)}.$$

Бараната плоштина на пирамидата ќе биде:

$$P = 3a\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + l\right) \approx 3 \cdot 6 \cdot \left(\frac{6 \cdot 1,73}{2} + 9,54\right) =$$

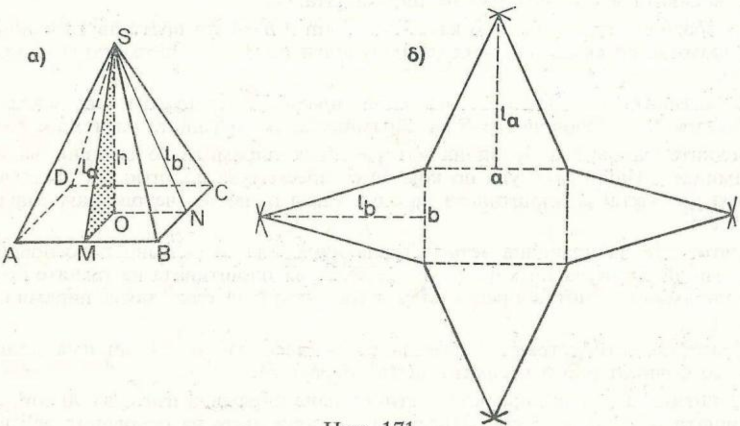
$$= 18 \cdot (5,19 + 9,54) = 18 \cdot 14,73 = 265,14, \text{ т.е. } P \approx 265,14 \text{ cm}^2.$$

Задача 4. Четиристрана пирамида со складни бочни рабови и висина на $h = 6$ cm за основа има правоаголник, чии димензии се: $a = 16$ cm. и $b = 5$ cm. Да се пресмета плоштината на таа пирамида.

Решение: Како изгледа една таква пирамида и нејзината мрежа, може да се види на црт. 171. Плоштината на нејзината основа ќе биде $B=ab$, а обвивката ја сочинуваат четири рамнокраки триаголника, од кои два по два се складни.

Ако висините на нескладните бочни ѕида ги означиме со l_a и l_b, тогаш плоштината на обвивката ќе биде:

$$M = 2 \cdot \frac{al_a}{2} + 2 \cdot \frac{bl_b}{2} = al_a + bl_b$$



Црт. 171

Според тоа, формулата за плоштина на четиристрана пирамида со складни бочни рабови и основа правоаголник, ќе гласи:

$$P = ab + al_a + bl_b$$

Прво ќе ги определиме бочните висини l_a и l_b со помош на Питагоровата теорема од правоаголните триаголници SOM и SON (црт. 171-а).

$$l_a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{6^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{36 + 6{,}25} = \sqrt{42{,}25} = 6{,}5 \text{ (cm)}$$

$$l_b = \sqrt{h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \text{ (cm)}$$

Потоа ја определуваме плоштината на дадената пирамида:

$$P = ab + al_a + bl_b = 16 \cdot 5 + 16 \cdot 6{,}5 + 5 \cdot 10 = 80 + 104 + 50 = 234 \text{ (cm)}^2$$

Според тоа, дадената пирамида има плоштина $P=234$ cm.^{2}

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Пресметај ја плоштината на правилна тристрана пирамида со основен раб 5 cm и бочен раб 6 cm.

2. Пресметај ја плоштината на правилна четиристрана пирамида со основен раб 3 cm и бочен раб 7,8 cm.

3. Пресметај ја плоштината на правилна шестострана пирамида со основен раб $a=14$ cm и бочен раб $s=2,5$ dm.

4. Да се пресмета плоштината на правилна шестострана пирамида, чиј основен раб е $a=8$ cm, а висината $h=15$ cm.

5. Пресметај ја плоштината на правилен тетраедар со раб 12 cm.

6. Мрежата на правилен тетраедар нацртана е во форма на рамностран триаголник со страна 12 cm. Одреди ја висината на тетраедарот.

7. Колку ќерамиди се потребни за покривање на една куќа, чиј покрив има форма на правилна четиристрана пирамида со основен раб 9 m и бочен раб 7,5 m, ако за покривањето на 1 m^2 се потребни 15 ќерамиди.

8. Плоштината на обвивката на една правилна шестострана пирамида изнесува $M=178$ cm^2.Пресметај ја висината на пирамидата ако основниот раб ѝ е $a=6$ cm.

9. Правилна четиристрана пирамида со основен раб $a=8$ cm има плоштина 448 cm^2. Определи ја висината и бочниот раб на пирамидата.

10. Правоаголен триаголник со катети $a=3$ cm и $b=4$ cm претставува основа на една тристрана пирамида со складни бочни рабови долги по 8 cm. Пресметај ја плоштината на таа пирамида.

11. Плоштината на обвивката на една правилна тристрана пирамида изнесува $M=144$ cm^2. Одреди го основниот раб на пирамидата, ако нејзината апотема е долга 12 cm.

12. Бочните рабови на правилна четиристрана пирамида се складни на основниот раб на пирамидата. Најди формула по која ќе се пресметува плоштината на таквите пирамиди, а потоа пресметај ја плоштината на една таква правилна четристрана пирамида, чиј раб е $a=7,5$ cm.

13. Апотемите на правилна четиристрана пирамида се складни на основниот раб на пирамидата. Најди формула по која ќе се пресеметува плоштината на таквите правилни четиристрани пирамиди, а потоа пресметај ја плоштината на една таква пирамида, чиј раб е долг 12 cm.

14. Правилна четиристрана пирамида со основен раб $a=11$ cm има плоштина 792 cm^2. Одреди го бочниот раб и висината на таа пирамида.

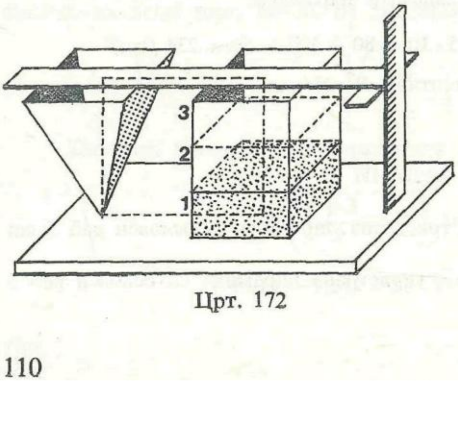
15. Плоштината на една правилна четиристрана пирамида изнесува 90 cm^2, а плоштината на нејзината обвивка е 65 cm^2. Пресметај ги должините на основниот раб и висината на таа пирамида.

16. Еден шатор има форма на правилна шестострана пирамида, чија висина е еднаква на основнит раб $a=2$ m. Колку m^2 шаторско платно е потребно за да се направат 8 такви шатори.

17. Основниот раб на правилна четиристрана пирамида е $a=14$ cm, а плоштината на нејзиниот дијагонален пресек е еднаква на 14 cm^2. Да се одреди бочниот раб и плоштината на пирамидата.

§ 37. ВОЛУМЕН НА ПИРАМИДИТЕ

Од подебел картон (или ламарина) да направиме модели на правилна четиристрана пирамида и правилна четиристрана призма, такви што тие да имаат складни основи и складни висини. Од моделот на призмата да ја отфрлиме едната негова основа, а моделот на пирамидата нека е без основа (црт. 172), така што тие да станат две кутии.



Црт. 172

Ако моделот — пирамида го наполниме со ситен песок (или вода), а потоа песокот го пресипеме во моделот — призма, ќе забележиме дека моделот — призма ќе се наполни до горе со песок дури по третото пресипување.

Ако сличен обид направиме и со некои други модели на пирамида и призма, кои имаат складни основи и складни висини, ќе дојдеме до ист заклучок, имено дека:

Волуменот на пирамидата е 3 пати помал (претставува $\frac{1}{3}$) од волуменот на призмата, која има основи и висина складни на основата и висината на пирамидата.

Бидејќи волуменот на пирзмата е еднаков на производот од плоштината на основата и должината на висината, т.е. на $B\,h$, тоа од горниве обиди насетуваме дека ќе важи следнава:

Теорема: *Волуменот на пирамидата е еднаков на $\frac{1}{3}$ од производот на плоштината на нејзината основа и должината на висината*, т.е.

$$V = \frac{1}{3} \cdot Bh$$

Доказот на ова важна теорема е доста тежок и со него ќе се запознаете во средното училиште.

Од горнава теорема лесно ги добиваме и специјалните формули за плоштина на правилните пирамиди, и тоа:

— за правилната тристрана пирамида $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$ или $V = \frac{a^2h\sqrt{3}}{12}$

— за правилната четиристрана пирамида: $V = \frac{1}{3} \cdot a^2h$

— за правилната шестострана пирамида: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot h$ или $V = \frac{a^2h\sqrt{3}}{2}$

Задача 1. Да се одреди волуменот на правилна четиристрана пирамида, чиј бочен раб е еднаков на основниот раб $a = 8$ cm.

Решение: Со примена на Питагоровата теорема прво ќе ја одредиме висината на пирамидата. Од правоаголниот триаголник SAO (црт. 166-б). при $s=a=8$ cm, имаме:

$$h = \sqrt{s^2 - R^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{8^2 - \left(\frac{8\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{64-32} = \sqrt{32} \approx 5{,}7 \ \text{(cm)}.$$

Волуменот на пирамидата, ќе биде:

$$V = \frac{a^2h}{3} = \frac{8^2 \cdot 5{,}7}{3} = 64 \cdot 1{,}9 = 121{,}6, \text{ т.е. } V = 121{,}6 \text{ cm}^3$$

Задача 2. Колкава маса има една правилна тристрана пирамида од бакар со основен раб $a = 6$ cm и бочен раб $s = 10$ cm, ако знаеме дека густината на бакарот е 8,9.

Решение: Масата на пирамидата ќе ја добиеме кога нејзиниот волумен го помножиме со густината на бакарот. Затоа прво го пресметуваме волуменот, но за пресметување на волуменот потребно е да ја знаеме висината на пирамидата.

Висината на пирамидата ќе ја добиеме со примена на Питагоровата теорема на правоаголниот триаголник SOS (црт. 166-а).

$$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{10^2 - \left(\frac{6\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{100-12} = \sqrt{88} \approx 9{,}4 \text{ (cm)}.$$

Според тоа, $V = \frac{a^2h\sqrt{3}}{12} \approx \frac{36 \,.\, 9{,}4 \,.\, 1{,}73}{12} = 3 \cdot 9{,}4 \cdot 1{,}73 = 48{,}786$, т.е. $V \approx 48{,}8 \text{ cm}^3$.

Бараната маса M, ќе биде: $M = V \cdot s = 48{,}8 \cdot 8{,}9 = 434{,}32 \ (g)$.

Задача 3. Да се пресмета волуменот на правилна шестострана пирамида со основен раб $a = 4$ cm, ако плоштината на нејзиниот најголем дијагонален пресек изнесува 26 cm^2.

Решение: Најголемиот дијагонален пресек кај правилната шестострана пирамида претставува равнокрак триаголник, чија основа е $2R$, а висината му е во исто време и висина на пирамидата. Според тоа, формулата за плоштина на тој пресек, ќе гласи:

$$P_{\text{д. пр.}} = \frac{2R \cdot h}{2} = Rh.$$

Бидејќи пак $P_{\text{д. пр.}} = 26$, а $R = a = 6$ cm, тоа од равенката $26 = 6h$ наоѓаме: $h = \frac{26}{6} = 6{,}5$ (cm.).

Бараниот волумен на пирамидата, ќе биде:

$$V = \frac{a^2h\sqrt{3}}{2} = \frac{6^2 \cdot 6{,}5 \cdot 1{,}73}{2} = 18 \cdot 6{,}5 \cdot 1{,}73 \approx 202{,}41, \text{ т.е. } V \approx 202{,}41 \text{ cm}^3.$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Пресметај го волумнот на правилна четирстрана пирамида со основен раб $a=6$ cm и бочен раб $s=9$ cm.

2. Кеопсовата пирамида во Египет има за основа квадрат со страна $a=234$ m. Пирамидата е висока 148 m, пресметај го нејзиниот волумен.

3. Волуменот на една правилна четиристрана пирамида е $V=405$ cm^3, а висината $h=15$ cm. Одреди го основниот раб на пирамидата.

4. Правилна четиристрана пирамида со основен раб 8 cm има волумен 576 cm^3. Определи ја висината и плоштината на таа пирамида.

5. Основниот раб на една правилна шестострана пирамида е 4,5 cm, а плоштината на поголемиот дијагонален пресек е 72 cm^2. Пресметај го волуменот на пирамидата!

6. Висината на една правилна четиристрана пирамида е $h=7$ cm, а плоштината на дијагоналниот пресек е 19,73 cm^2. Пресметај го волуменот на пирамидата.

7. Плоштината на обвивката на една правилна четиристрана пирамида изнесува 65 cm^2, а основниот раб е $a=5$ cm. Да се определи волуменот на пирамидата.

8. Пресметај го волуменот на правилна тристрана пирамида, чиј основен раб е $a=9$ cm, а бочниот раб е $s=15$ cm.

9. Изведи формула за пресметување волуменот на правилен тетраедар со раб a.

10. Пресметај го волуменот на правилен тетраедар со раб 1 dm.

11. Масивна метална коцка со раб 6 cm претопена е во праилна четиристрана пирамида, чиј основен раб е еднаков на работ на коцката. Колкава ќе биде висината на пирамидата?

12. Како ќе се промени волуменот на една правилна пирамида, ако: а) основниот раб го зголемиме 2 пати, а висината ја намалиме 2 пати, б) основниот раб го зголемите 3 пати, а висината остане непроменета?

13. Бочните рабови на една правилна тристрана пирамида се заемно нормални и секој од нив е долг по 12 cm. Пресметај го волумеот и плоштината на пирамидата.

14. Во еден сад што има форма на правилна четиристрана призма со основен раб $a=12$ cm се наоѓа вода. За колку сантиметри ќе се покачи нивото на водата во тој сад, ако во него се потопи една правилна четиристрана пирамида со рабови $s=a=1$ dm.

15. Една четиристрана пирамида со складни бочни рабови за основа има правоаголник со страни $a=11$ cm и $b=4{,}5$ cm, а бочниот раб е долг $s=23$ cm. Пресметај ги плоштината и волуменот на пирамидата.

16. Пресметај го волуменот на една правилна шестострана пирамида со основен раб $a=5$ cm и бочен раб $s=13$ cm.

17. Правилна четиристрана пирамида, чија висина е 13 cm, има волумен 351 cm³. Одреди ја должината на основниот раб и плоштината на пирамидата.

18. Над секој ѕид на една коцка со раб $a=8$ cm е придружена по една правилна четиристрана пирамида, чиј основен раб е складен на работ на коцката, а висината е еднаква на половината од тој раб. Пресметај ги плоштината и волуменот на така добиеното тело!

19. Дали ќе се промени волуменот на пирамидата, ако нејзиниот врв се преместува во една рамнина што е паралелна на рамнината на основата на пирамидата.

20. Основата на една правилна четиристрана пирамида е квадрат впишан во кружница со радиус $R=3$ cm. Висината на пиамидата е $h=7$ cm, да се пресмета плоштината и волуменот на пирадмиата.

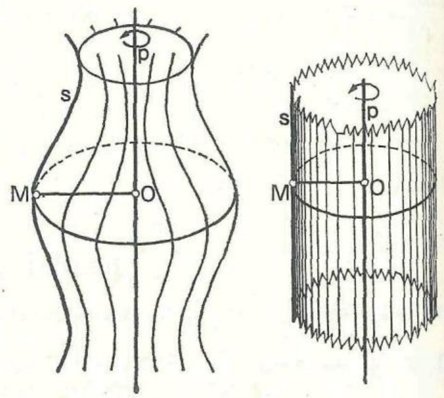
ЦИЛИНДАР

§ 38. ПОИМ, ВИДОВИ И ПРЕСЕЦИ НА ЦИЛИНДАР

Ќе покажеме дека некои површини можат да бидат образувани со движење на дадена линија во просторот.

Нека s е произволна рамнинска линија, која во специјален случај може да биде и права, а p — една неподвижна права наречена *оска*, која со линијата s лежат на иста рамнина (црт. 173).

Да замислиме дека линијата s се врти (ротира) во просторот околу дадената неподвижна права p. При тоа вретње претпоставуваме дека линијата што ротира и оската на вртењето се така заемно цврсто сврзани, што произволна точка $M \in s$ секогаш образува кружница k со центар $O \in p$, чија рамнина е нормална на оската p (црт. 173).



Црт. 173

Очигледно е дека притоа се образува една површина, која се вика *ротациона површина*.

Дефиниција 1. *Ротациона површина се вика површината, која се образува при вртењето (ротацијата) на една линија s околу дадена неподвижна права, наречена оска на вртењето.*

Линијата s што ја образува ротационата површина, се вика нејзина *генератриса*.

Ако генератрисата е права паралелна на оската на вртењето, тогаш добиената ротациона површина се вика уште и *кружна цилиндрична површина.*

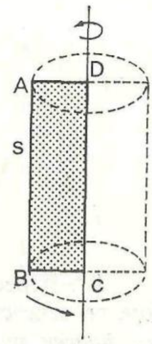
Ротационата и кружната цилиндрична површина се криви површини. Тоа, значи, дека ниеден нивен дел не може да се совпадне со рамнината.

Од горното следува дека пресекот на која и да било ротациона површина и една рамнина што е нормална на оската на вретењето е секогаш кружница.

Дефиниција 2. *Тело, кое може да биде разгледувано да е настанато со вртење на некоја фигура околу неподвижна оска на вртењето, се вика ротационо тело.*

Да го разгледаме вртењето на правоаголникот $ABCD$ околу една негова страна, на пример околу страната CD (црт. 174). Очигледно е дека: правата CD, околу која се врти правоаголникот $ABCD$, ќе претставува оска на вртењето. Според тоа, сите точки од страната CD остануваат неподвижни. Спротивната страна AB на правоаголникот, што е паралелна на оската на вртењето, ќе образува површина која е дел од некоја кружна цилиндрична површина. Другите две страни пак AD и BC на правоаголникот, бидејќи се складни и нормални на оската на вртењето, ќе образуваат два складни паралелни круга со центри во точките D и C и радиус $r = \overline{AD} = \overline{BC}$.

Површината, која е составена од кружната цилиндрична површина што е образувана од отсечката AB и двата складни паралелни круга што се образувани од отсечките AD и BC (црт. 174), го разбива множеството точки од просторот (што не ѝ припаѓаат) на две области: *внатрешна* и *надворешна*. Унијата од таа површина и внатрешната област претставува една затворена и ограничена просторна област, т.е. едно геометриско тело кое го викаме *прав кружен цилиндар*.



Црт. 174

Постојат и други видови цилиндри, но бидејќи ние ќе разгледуваме само прави кружни цилиндри, затоа ќе ги викаме просто само цилиндри.

Дефиниција 3. *Цилиндар се вика телото што е ограничено со една цилиндрична површина и два складни паралелни круга.*

Двата складни паралелни круга се викаат *основи* (или *бази*) на цилиндарот, а делот од кружната цилиндрична површина заклучен помеѓу основите — *бочна површина* или *обвивка* на цилиндарот.

Радиусот на секоја основа се вика *радиус* на цилиндарот, а отсечката AB во секоја нејзина положба при вртењето, се вика *генератриса* на цилиндарот.

Правата што минува низ центрите на основите на цилиндарот се вика *оска* на цилиндарот, а отсечката од неа меѓу центрите на основите — *висина* на цилиндарот.

Од начинот на кој настанува ротационото тело цилиндар, следува дека:

— **Сите генератриси на цилиндарот се складни и паралелни меѓу себе.**

— **Секоја генератриса е нормална на рамнините на основите на цилиндарот**

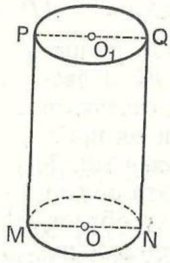
— **Висината на цилиндарот е складна и паралелна на секоја генератриса на цилиндарот.**

Должините на радиусот, висината и генератрисата на цилиндарот ќе ги означуваме соодветно со буквите r, h и s.

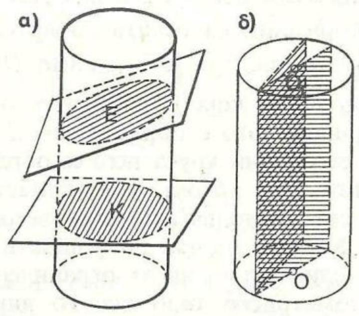
Земете некој предмет што има форма на цилиндар, на пример конзервна кутија. Основата на тој предмет (за која знаете дека е круг), ако ја гледате отстрана ќе ја видите не како круг, туку како крива која ја викаме *елипса*. Цилиндарот го цртаме како на цртежот 175. Прво го цртаме правоаголникот $MNQP$ со основа MN — дијаметарот на цилиндарот и висина MP — висината на цилиндарот (црт. 175). Основите на цилиндарот ги цртаме како елипси и тоа задниот дел на елипсата при долната основа на цилиндарот го цртаме со испрекинати линии (Зошто?).

Кај цилиндарот можат да се направат следниве пресеци:

1°. Пресекот што се добива кога цилиндарот се пресече со рамнина, која е паралелна на рамнините на основите на цилиндарот, се вика *йаралелен йресек* (кругот K на црт. 176-а). Тој секогаш е круг складен на основите.



Црт. 175



Црт. 176

2°. Пресекот што се добива кога цилиндарот го пресечеме со рамнина, која ги сече сите генератриси и е коса спрема оската на цилиндарот, се вика *кос йресек* на цилиндарот (фигурата E на црт. 176-а). Тој секогаш е некоја елипса.

3°. Пресекот што се добива кога цилиндарот го пресечеме со рамнина, која е паралелна на оската на цилиндарот, се вика *надолжен* пресек. Тој е *йравоаголник*, чии страни се: генератрисата и една тетива на основата на цилиндарот (црт. 176-б).

4°. Пресекот што минува низ оската на цилиндарот се вика *оскин йресек*. Тој секогаш е првоаголник, чии страни се: дијаметарот на основата и генератрисата на цилиндарот (црт. 176-б). Во специјален случај оскиниот пресек на цилиндарот може да биде и квадрат. Тоа ќе биде кога генератрисата на цилиндарот е еднаква на дијаметарот на основата.

Цилиндар, на кој оскиниот пресек е квадрат, се вика *рамносшран цилиндар*.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Правоаголникот $ABCD$ се врти околу страната AB. Што образува при тоа вртење: а) точката C, б) точката D, в) страната BC, д) страната BC, д) страната CD, ѓ) страната AB на правоаголникот?

2. Дали по обвивката на цилиндарот можат да се повлечат паралелни отсечки и како?

3. Определи го радиусот и генератрисата на цилиндарот, што се добива кога правоаголникот со страни $a=7$ cm и $b=4$ cm се врти околу: а) страната a, б) страната b, в) симетралата на страната a, г) симетралата на страната b!

4. Каква фигура образува множеството на точките во просторот, кои се наоѓаат на дадено растијание d од дадена права p?

5. Дали кај прав цилиндар постои точка што е еднакво оддалечена од секоја точка на кружниците на двете негови основи? Која е таа точка?

6. Кој пресек на цилиндарот се вика: а) паралелен пресек, б) кос пресек, в) надолжен пресек, г) оскин пресек? Каква фигура претставува секој од нив?

7. Секој оскин пресек е и надолжен пресек на цилиндарот. Дали важи и обратното? Зошто?

8. Пресметај ја плоштината на оскиниот пресек на цилиндар, чиј радиус и висина се: а) $r=4$ cm, $h=7$ cm, б) $r=1{,}8$ cm, $h=5$ cm.

9. Определи ја должината на дијагоналата на оскиниот пресек на цилиндар со радиус 1,5 dm и висина 4 dm.

10. Колкава плоштина има оскиниот пресек на рамностран цилиндар со радиус $r=1$ dm?

11. Плоштината на оскиниот пресек на еден рамностран цилиндар изнесува 2,25 dm². Определи ги радиусот и висината на цилиндарот!

12. Плоштината на оскиниот пресек на еден цилиндар со радиус 3,5 cm изнесува 84 cm². Одреди ја висината на цилиндарот!

13. Плоштината на оскиниот пресек на еден цилиндар, со висина 32 cm, изнесува, 416 cm². Колкав е радиусот на цилиндарот?

14. Какви се плоштините на два надолжни пресеци на цилиндарот што се еднакво оддалечени од оската на цилиндарот?

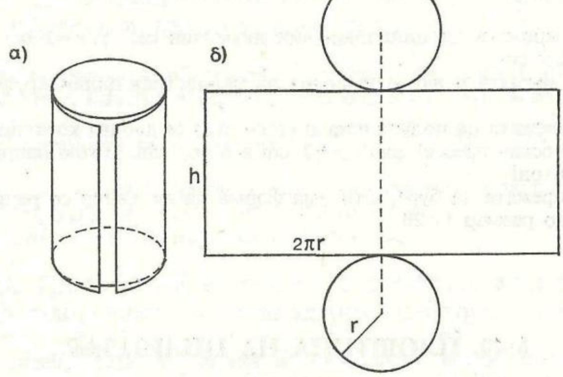
15. Во цилиндар со висина 15 cm поставена е рамнина паралелна на оската на цилиндарот на растојание 4 cm од неа. Рамнината отсекува од кружницата на основата на цилиндарот кружен лак 60°. Да се одреди плоштината на добиениот пресек.

§ 39. ЦРТАЊЕ МРЕЖА НА ЦИЛИНДАР

Да земеме една конзервена кутија, што има форма на цилиндар, и да ја изрежеме по кружниците на основите и по една генератриса, како што е покажано на црт. 177-а.

Ако потоа кутијата ја развиеме, така што нејзината обвивка заедно со основите да ги поставиме да легнат во една рамнина, ќе ја добиеме мрежата на цилиндарот (црт. 177-б). Како што гледаме:

Мрежата на цилиндарот се состои од два складни круга и еден правоаголник. Правоаголникот ќе има должина еднаква на периметарот на основата ($L = 2\pi r$) и висина еднаква на висината на цилиндарот.



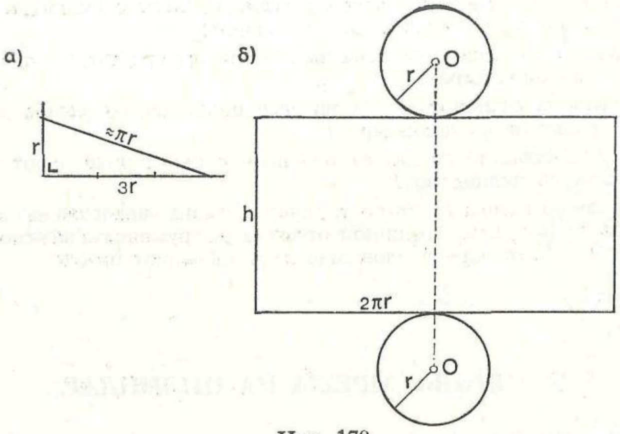
Црт. 177

Задача: Да се нацрта мрежата на цилиндарот со радиус $r = 0{,}8$ cm и висина $h = 2{,}5$ cm.

Решение. Прво ќе ја нацртаме развиената обвивка на цилиндарот, т.е. правоаголникот со должина $2\pi r$ и висина $h=2{,}5$ cm. Должината $2\pi r$, кога ни е познат радиусот, лесно може да се пресмета. Бидејќи е $r=0{,}8$ cm, наоѓаме дека: $2\pi r \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}8 = 5{,}024$ (cm) ≈ 5 (cm).

Должината πr може приближно да се определи и конструктивно како хипотенуза на правоаголниот триаголник со катети r и $3r$ (црт. 178-а). Ако должината πr е определена, тогаш лесно ја определуваме и бараната должина $2\pi r$.

Кога е сè тоа готово, го нацртуваме правоаголникот со должина $2\pi r = 5$ cm и висина $h = 2{,}5$ cm. На крајот од двете страни на тој правоаголник нацртуваме по еден круг со радиус $r = 0{,}8$ cm, кои се допираат до него. Така ја добиваме бараната мрежа на цилиндарот (црт. 178-б).



Црт. 178

Модел на цилиндар можеме да направиме на следниов начин:

На парче картон (или ламарина) ја цртаме прво мрежата на цилиндарот по дадените негови димензии, потоа неа ја сечеме; првоаголникот го свиваме да стане обвивка на цилиндарот, а круговите ги преклопуваме како на црт. 177-а. Склопениот модел за да остане трајно составен, е потребно круговите и обвивката, каде се здружуваат, да ги залепиме со селотејп.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Нацртај ја мрежата на цилиндар, чии димензии се: а) $r=1$ cm и $h=3{,}5$ cm, б) $r=1{,}5$ cm и $h=2{,}5$ cm.

2. Нацртај ја мрежата и направи модел на рамностран цилиндар, ако е: а) $r=1{,}4$ cm, б) $h=5$ cm.

3. Нацртај ја мрежата на полуцилиндар (тело што се добива кога цилиндарот се преполови со еден негов оскин пресек), ако е $r=2$ cm и $h=6{,}5$ cm. Потоа направи модел на полуцилиндарот од картон!

4. Нацртај ја мрежата на буре, што има форма на цилиндар со радиус на основата 4 dm и висина 1,2 m, во размер 1 : 20.

§ 40. ПЛОШТИНА НА ЦИЛИНДАР

Од дефиницијата и мрежата на цилиндарот гледаме дека неговата површина (граница) се состои од два складни круга и една кружна цилиндирчна површина — обвивка на цилиндарот. Според тоа:

Плоштината на цилиндарот е еднаква на збирот од плоштините на двата складни круга — основите и плоштината на неговата обвивка, т.е.

$$P = 2\,B + M,$$

каде што B е плоштина на едната основа (круг), а M — плоштина на обвивката на цилиндарот.

Знаете дека плоштината на кругот ја пресметуваме по формулата $B = \pi r^2$. Обвивката на цилиндарот е крива површина, но кога таа се развие во рамнина од неа се добива еден правоаголник, чија должина е еднаква на должината на кружницата на основата, а висината — на висината на цилиндарот (црт. 177-б), Според тоа, ќе важи следнава:

Теорема: *Плоштината на обвивката на цилиндаорт е еднаква на производот од должината на кружницата на основата и висината на цилиндарот,* т. е.

$$M = 2\pi r \cdot h$$

Според тоа, плоштината на цилиндарот ќе биде:

$$P = 2B + M = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h \text{ или } P = 2\pi r (r + h)$$

Кај рамностраниот цилиндар висината е еднаква на дијаметарот на основата, т.е. $h = 2r$. Според тоа, формулата за плоштина на рамностраниот цилиндар, ќе гласи:

$$P = 2\pi r (r + h) = 2\pi r (r + 2r) = 2\pi r \cdot 3r \text{ или } P = 6\pi r^2$$

Зада .а 1. Да се пресмета плоштината на цилиндар, чиј радиус на основата е 18 cm, а висината му е 5 dm.

Решение: Ако сакаме плоштината на цилиндарот, што треба да ја пресметаме, да биде изразена во dm^2, тогаш и должината на радиусот треба да биде изразена во dm, т.е. $r = 18$ cm $= 1,8$ dm.

Со замена на вредностите за r и h во формулата, добиваме:

$$P = 2\pi r (r+h) \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 1,8 \cdot (1,8 + 5) = 6,28 \cdot 1,8 \cdot 6,8 = 76,8672$$

Значи, плоштината на цилиндарот е $P \approx 76,87$ dm^2.

Задача 2. Плоштината на обвивката на еден рамностран цилиндар е $M = 72$ dm^2. Колкава е неговата плоштина?

Решение: Плоштината на обвивката на рамностраниот цилиндар е еднаква: $M = 2\pi rh = 2\pi r \cdot 2r$ или $M = 4\pi r^2$. Бидејќи плоштината на обвивката (М) е позната, тоа од неа можеме да ја определиме вредноста на πr^2, т.е. $\pi r^2 = \frac{M}{4} = \frac{72}{4} = 18$

Заменувајќи ја најдената вредност на πr^2 во формулата за плоштина на рамностраниот цилиндар, добиваме: $P = 6\pi r^2 = 6 \cdot 18 = 108$ (dm^2).

Значи, плоштината на цилиндарот е $P = 108$ dm^2.

Задача 3. Плоштината на оскиниот пресек на еден цилиндар е 1,2 m^2. Да се пресмета плоштината на цилиндарот, ако тој е висок 1,5 m.

Решение: Бидејќи оскиниот пресек на цилиндарот е правоаголник, чии димензии се висината и дијаметарот на цилиндарот, тоа формулата за неговата плоштина, ќе гласи:

$$P_{\text{о. пр.}} = 2rh.$$

Оттука наоѓаме: $r = \frac{P_{\text{о. пр.}}}{2h} = \frac{1,2}{2 \cdot 1,5} = \frac{1,2}{3} = 0,4$ (m)

Потоа ја наоѓаме и плоштината на цилиндарот. Таа ќе биде:

$$P = 2\pi r (r+h) \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 0,4 \cdot (0,4 + 1,5) = 2,512 \cdot 1,9 = 4,7728.$$

Според тоа, бараната плоштина на цилиндарот е $P \approx 4,77$ m^2.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Пресметај ја плоштината на цилиндар, чиј радиус и висина се:
а) $r=3{,}8$ cm, $h=2{,}5$ cm, б) $r=7$ cm, $h=4$ dm.

2. Еден цилиндар со радиус $r=6$ cm има висина $h=4$ cm. Пресметај ја неговата плоштина!

3. Одреди го односот од плоштината на рамностраниот цилиндар и плоштината на неговата обвивка!

4. Плоштината на обвивката на рамностран цилиндар е $M=9$ dm². Пресметај ја плоштината на тој цилиндар!

5. Пресметај ја плоштината на рамностран цилиндар, ако е дадено:
а) $r=1$ dm, б) $r=15$ cm, в) $h=1$ m.

6. Плоштината на еден рамностран цилиндар е еднаква на 1701 cm². Одреди го радиусот на цилиндарот.

7. Плоштината на оскиниот пресек на цилиндар, чиј радиус е 8 cm, изнесува 80 cm². Пресметај ја висината и плоштината на тој цилиндар.

8. Пресметај ја плоштината на полуцилиндар, што е висок 3 dm и има радиус на основата 5 cm.

9. Од квадрат со страна $a=62{,}8$ cm свиткана е обвивка на еден цилиндар. Пресметај ја плоштината на така добиениот цилиндар!

10. Пресметај ја плоштината на телото, што се добива кога квадрат со страна $a=7$ cm се врти околу една своја страна!

11. Еден столб за лепење на огласи има дијаметар 8 dm а е висок 2,3 m. Колку m² огласи можат најмногу да се залепат на него?

12. Колку квадратни метри ламарина е потребно за изработка на 25 еднакви ќунци за печка, чија должина е 0,8 m, а дијаметарот на отворот изнесува 12 cm?

13. Плоштината на обвивката на еден цилиндар изнесува 188,4 cm². Пресметај ја плоштината на тој цилиндар, ако неговата висина е 7,5 cm!

14. Плоштината на обвивката на еден цилиндар изнесува 141,3 cm², а радиусот на основата му е 4,5 cm. Пресметај ја плоштината на тој цилиндар!

15. Една коцка од дрво со раб 15 cm треба да се изделка во можно најголем цилиндар Одреди ја плоштината на добиениот цилиндар!

16. Еден цилиндар од дрво со дијаметар 14 cm и висина 2 dm треба да се изделка во можно најголема правилна четиристрана призма. Одреди ја плоштината на таа призма!

17. Одреди го односот од плоштината на обвивката на цилиндарот и плоштината на неговиот оскин пресек!

18. Плоштината на оскиниот пресек на цилиндарот е 180 cm². Одреди ја плоштината на обвивката на тој цилиндар!

19. Правоаголникот *ABCD*, чија плоштина е еднаква 15 cm², се врти околу една своја страна и образува цилиндар. Да се пресмета: а) плоштината на оскиниот пресек на цилиндарот, б) плоштината на обвивката на цилиндарот.

20. Правоаголник со страни $a=9$ cm и $b=6$ cm се врти околу: а) страната a, б) страната b. Пресметај ги, а потоа спореди ги плоштините на така добиените тела!

21. Плоштината на обвивката на еден цилиндар е еднаква на плоштината на неговата основа. Пресметај ја плоштината на тој цилиндар, ако радиусот му е: а) 6 cm, б) 9 cm, в) 12 cm. Што забележуваш?

22. Како се менува плоштината на обвивката на цилиндарот, ако; а) радиусот на основата се зголеми 2 пати, а висината остане иста, б) висината се намали 3 пати, а радиусот остане непроменет, в) радиусот се намали 2 пати, а висината се зголеми 3 пати, г) радиусот се зголеми 6 пати, а висината се намали 2 пати, ѓ) радиусот се зголеми 3 пати, а висината се зголеми 2 пати? Покажи го тоа на цилиндар, чиј радиус е $r=6$ cm, а висината $h=9$ cm.

23. Пресметај ја плоштината на еден полуцилиндричен таван со дијаметар 4,6 m и должина 12 m.

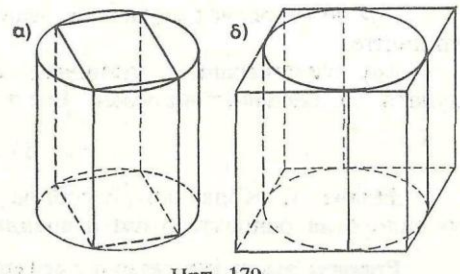
24. Определи ја висината на цилиндар, ако радиусот на основата му е $r=1{,}5$ dm, а плоштината $P=61{,}23$ dm².

25. Определи го радиусот на цилиндар, ако висината му е $h=7$ cm а плоштината на обвивката $M=132$ cm².

§ 41. ВОЛУМЕН НА ЦИЛИНДАР

За една призма велиме дека *е вйишана* во даден цилиндар, ако многуаголниците на основите на призмата се впишани во круговите на основите на цилиндарот, а бочните рабови на призмата се генератриси на цилиндарот (црт. 179-а).

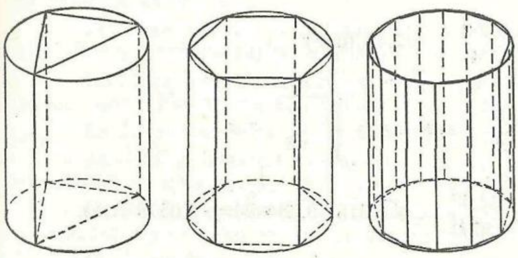
За една призма, пак, велиме дека *е ойишана* околу даден цилиндар, ако многуаголниците на основите на призмата се опишани околу круговите на основите на цилндарот, а бочните ѕидови на призмата ја допираат бочната површина на цилиндарот (црт. 179-б).

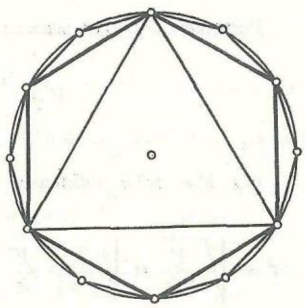


Црт. 179

На црт. 180 се претставени три складни цилиндри, во кои се впишани по една правилна призма и тоа во првиот впишана е правилна тристрана, во вториот — правилна шестострана, а во третиот — правилна дванаесетстрана призма.

Гледате дека основите на впишаните правилни призми во трите складни цилиндри на црт. 180 се правилни многуаголници што се впишани во складни кругови.


Црт. 180


Црт. 181

Ако во даден круг (или во складни кругови) впишуваме правилни многуаголници со поголем и сè поголем број страни (црт. 181), очигледно е дека периметрите на тие многуаголници ќе растат и сè повеќе ќе се приближуваат до периметарот на кругот; а исто така и нивните плоштини ќе растат и сè повеќе ќе се приближуваат до плоштината на дадениот круг.

Поради тоа, разбирливо е дека и волумените на впишаните правилни призми во цилиндарот, кога бројот на нивните бочни ѕидови станува сè поголем и поголем, исто така ќе растат и сè повеќе ќе се приближуваат до волуменот на цилиндарот во кој се впишани.

Тоа не упатува на заклучок дека цилиндарот можеме да го сметаме како правилна призма со бесконечно многу бочни рабови. Значи, за пресметување волуменот на цилиндарот можеме да ја ползуваме истата формула што ја изведовме за волумен на призмите:

$$V = Bh$$

Според тоа, ќе важи следнава:

Теорема: *Волуменот на цилиндарот е еднаков на производот од плоштината на основата и должината на висината,* т.е.

$$V = Bh,$$

но бидејќи $B = \pi r^2$, тоа $\qquad V = \pi r^2 h$

Со по строгиот доказ на оваа теорема ќе се запознаете во средното училиште.

Кај рамностраниот цилиднар, знаеме дека $h = 2r$, па според тоа формулата за неговиот волумен, ќе гласи: $V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot 2r$ или

$$V = 2\pi r^3$$

Задача 1. Колку литри собира едно буре што има форма на цилиндар со радиус на основата 3 dm и висина $h = 10$ dm?

Решение: Знаете дека литарот е единица мерка за волумен на течности, која е еднаква (еквивалентна) на волуменот од 1 dm^3. Значи, волуменот на бурето изразен во литри е еднаков на неговиот волумен изразен во dm^3. Волуменот на бурето во dm^3, ќе биде:

$$V = \pi r^2 h \approx 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 10 = 3{,}14 \cdot 90 = 282{,}6 \ (dm^3).$$

Значи, бурето собира 282,6 *l*.

Задача 2. Бакарна жица долга 50 m има маса 200 g. Пресметај го дијаметарот на жицата, ако густинта на бакарот е $s = 8{,}9$ g/cm³.

Решение: Бидејќи масата е $M = Vs$, тоа волуменот на жицата ќе биде:

$$V = \frac{M}{s} = \frac{200}{8{,}9} = \frac{2000}{89} = 22{,}47 \ (cm^3)$$

Од $V = \pi r^2 h$ добиваме дека $r^2 = \dfrac{V}{\pi h}$ или $r = \sqrt{\dfrac{V}{\pi h}}$, т.е.

$$r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{V}{h}} = \sqrt{0{,}318 \ . \ \frac{22{,}47}{5000}} = \sqrt{0{,}318 \cdot 0{,}004494} \approx 0{,}0378 \ (cm).$$

Значи, дијаметарот на жицата е: $d = 2r = 2 \cdot 0{,}0378 = 0{,}0756$ (cm) $= 0{,}756$ (mm) $\approx \dfrac{3}{4}$ (mm).

Задача 3. Да се определи масата на една челична цевка долга 4 m, ако надворешниот дијаметар на цевката е $d = 5$ cm, а внатрешниот дијаметар $d_1 = 3$ cm ($s = 7{,}8$ g/cm³).

Решение: Цевката има форма на шуплив цилиндар, чиј волумен е еднаков на разликата од волумените на цилиндрите со радиуси:

$$R = \frac{d}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ cm} \quad \text{и} \quad r = \frac{d_1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \text{ cm}.$$

Според тоа: $V = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi h (R^2 - r^2) = \pi h (R + r)(R - r)$, а со замена на $h = 4$ m $=$ $= 400$ cm, $R = 2{,}5$ cm и $r = 1{,}5$ cm, добиваме:

$$V = 3{,}14 \cdot 400 \ (2{,}5 + 1{,}5) \ (2{,}5 - 1{,}5) = 1256 \cdot 4 \cdot 1 = 5024 \ (cm^3).$$

Значи, масата на цевката ќе биде:

$$M = Vs = 5024 \cdot 7{,}8 = 39187{,}2 \ (g) \approx 39{,}2 \ (kg).$$

Задача 4. Правоаголник со страни $a = 7,5$ cm и $b = 3$ cm се врти околу страната a. Да се пресмета волуменот на цилиндарот што се добива при тоа.

Решение: Страната a ќе биде висина на цилиндарот, а страната b ќе биде радиус на основата. Волуменот на цилиндарот ќе биде:

$$V=\pi b^2 a \approx 3,14 \cdot 3^2 \cdot 7,5=3,14 \cdot 9 \cdot 7,5=211,95 \ (cm^3) \approx 212 \ (cm^3)$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Пресметај го волуменот на цилиндар, чиј радиус и висина се: а) $r=2,6$ cm, $h=7,2$ cm, б) $r=4$ cm, $h=1,2$ dm.

2. Пресметај го волуменот на рамностран цилиндар, ако: а) $r=6$ cm, б) $h=20$ cm.

3. Пресметај колку литри собира еден лонец со дијаметар на отворот 5 dm и висина 5 dm.

4. Еден базен што има форма на цилиндар собира 70,65 m^3 вода. Определи ја длабочината на базенот, ако дијаметарот му е 6 m.

5. Ископан е бунар со дијаметар на отворот 1,5 m и при тоа е исфрлено 14,13 m^3 земја. Пресметај ја длабочината на бунарот!

6. Пресметај го волуменот на цилиндар што е висок 5 cm, а периметарот на основата му е 12,56 cm.

7. Колку треба да е висок еден казан, за да собира 125 литри, а да има дијаметар на дното 5 dm?

8. Една цистерна за бензин, што има форма на цилиндар, долга е 7,5 m и има дијаметар на основата 1,6 m. Колку литри собира таа?

9. Една бакарна жица со дијаметар на пресекот од 3 mm долга е 1 km. Колкава маса има таа жица, ако $s=8,9$.

10. Една бакарна жица со дијаметар на пресекот 2 mm има маса 280 kg. Определи ја должината на жицата!

11. Плоштината на оскиниот пресек на цилиндарот е 63 cm^2, а радиусот на основата му е 3,5 cm. Пресметај го волуменот на цилиндарот.

12. Радиусот на основата на еден цилиндар е 3 cm. Пресметај го волуменот на цилиндарот, ако плоштината на обвивката му е 188,4 cm^2.

13. Цилиндар висок 2 dm има волумен $V=14,13$ dm^3. Пресметај ја неговата плоштина.

14. Ако во празен цилиндричен сад, со дијаметар на основата 1,4 dm налееме 3,5 литри вода, до која висина ќе се наполни садот?

15. Во полупразен цилиндричен сад со дијаметар на основата 9,2 cm потопуваме еден камен. Определи го волуменот на каменот, ако нивото на водата во садот се покачи за 33 cm.

16. Како ќе се промени волуменот на цилиндарот, ако: а) радиусот на основата го зголемиме 2 пати, а висината остане непроменета, б) висината ја намалиме 3 пати, а радиусот остане ист, в) радиусот на основата го намалиме 4 пати, а висината ја зголемиме 8 пати, г) радиусот го зголемиме 3 пати, а висината ја намалиме 9 пати?

17. Од цилиндричен сад со дијаметар 12 cm е прелеана вода во друг цилиндричен сад со дијаметар 4 cm. Колку пати нивото на водата во вториот сад е повисоко отколку во првиот сад?

18. Еден цилиндар со дијаметар на основата 8 cm има висина 1,4 dm. Друг цилиндар со дијаметар на основата 4 cm има висина 7 cm. Одреди го односот од волумените на тие два цилиндра без пресметување.

19. Дали може да се впише (опише) кружен цилиндар во (околу) секоја права тристрана призма?

20. Дали може да се впише цилиндар во права призма, чија основа е: а) правоаголник, б) ромб, в) рамнокрак трапез, г) делтоид?

21. Дали може да се опише цилиндар околу права призма, која за основа има: а) правоаголник, б) ромб, в) рамнокрак трапез, г) делтоид.

22, Околу правилна четиристрана призма со основен раб 6 cm и висина 1 dm е опишан цилиндар. Пресметај го волуменот на тој цилиндар?

23. Околу правилна шестострана призма со основен раб 3,5 cm и висина 7 cm е опишан цилиндар. Одреди го волуменот на тој цилиндар!

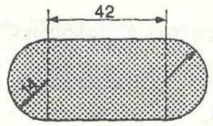
24. Во правилна тристрана призма со основен раб 9 cm и висина 12 cm е впишан цилиндар. Пресметај го волуменот на тој цилиндар!

25. Од дрвена коцка со раб a е изделкан можно најголем цилиндар. Пресметај ги плоштината и волуменот на тој цилиндар!

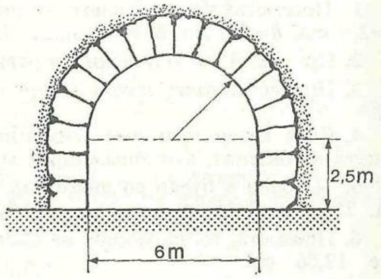
26. Околу правилна тристрана призма, на која секој раб има должина a, опишан е цилиндар. Одреди го волуменот на цилиндарот.

27 Правоаголник со страни a и b се врти еднаш околу страната a, а потоа околу страната b. Одреди го односот од волумените на добиените две ротациони тела?

28. Колкава е масата на еден бетонски столб висок 4,5 m,чија основа има форма со означените димензии како на црт. 182. Димензиите се во cm, а 1 m^3 од бетонот има маса 2,4 тони.



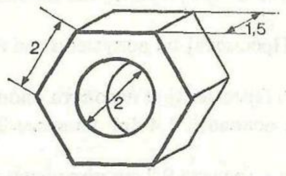
Црт. 182



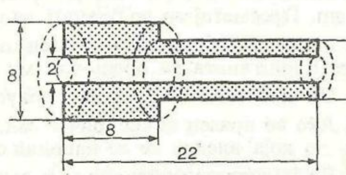
Црт. 183

29. Еден железнички тунел долг е 420 m и има напречен пресек, што е прикажан со означените димензии на црт. 183. Пресметај колку m^3 земја е исфрлено при неговото ископување.

30. Пресметај ја масата на еден железен детаљ, што е прикажан на црт. 184. Димензиите се дадени во cm, а $s=7,8$.



Црт. 184



Црт. 185

31. Колкава е масата на железен детаљ ($s=7,8$), чиј оскин пресек е прикажан на црт. 185. Димензиите се дадени во сантиметри.

32. Плоштината на оскиниот пресек на еден рамностран цилиндар изнесува 40,96 cm^2. Пресметај го волуменот на цилиндарот!

33. Цилиндричен резервоар со дијаметар 2,8 m и висина 5,2 m се полни од една цевка која дава 4 l во сек. За колку време ќе се наполни резервоарот?

34. Определи ја висината на цилиндар, чиј радиус е 5 cm, а волуменот му е $V=1570$ cm^3!

35. Обвивката на еден цилиндар се развива во квадрат со страна $a=8$ cm. Пресметај го волуменот на тој цилиндар!

КОНУС

§ 42. ПОИМ, ВИДОВИ И ПРЕСЕЦИ НА КОНУС

Видовме дека кружната цилиндрична површина е ротациона површина што се добива кога нејзината генератриса е права паралелна на оската на вртењето (види § 38).

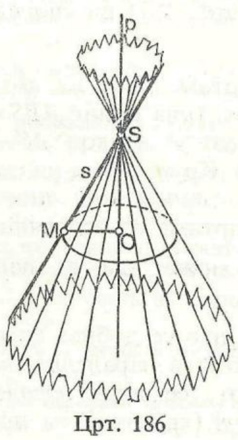
Сега ќе се запознаеме со еден друг вид ротациона површина, чија генератриса е права што ја сече оската на вртењето.

Нека p е една произволна неподвижна права што ќе ја земеме за *оска на вртењето*, а s — некоја права што ја сече оската p под остар агол α во некоја точка S (црт. 186). Да замислиме дека правата s се врти (ротира) во просторот околу неподвижната права p, така што постојано ја сече правата p во точката S под ист агол α. При тоа вртење на генератрисата s околу оската p, очигледно е дека нормалата MO, што е спуштена од произволна точка $M \in s$ и $M \notin p$ кон правата p, образува круг со центар O и рамнина нормална на оската p, а точката M образува кружница што го ограничува тој круг.

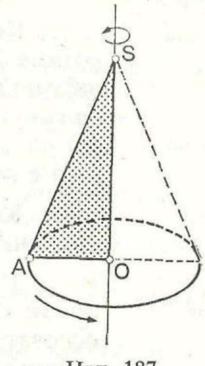
Ротационата површина, што ја образува генератрисата s при ова вртење, се вика *кружна конусна површина.*

Точката S се вика *врв* на конусната површина.

Кружната конусна површина исто како и цилиндричната површина е крива површина. Само во специјален случај кога генератрисата s е нормална на оската на вртењето таа дегенерира во рамнина.



Црт. 186



Црт. 187

Да го разгледаме вртењето на еден правоаголен триаголник AOS ($AO \perp SO$) околу една негова катета, на пример околу катетата OS (црт. 187). Очигледно е дека: правата OS, околу која се врти правоаголниот триаголник AOS, ќе претставува оска на вртењето. Според тоа, сите точки од страната OS остануваат неподвижни. Хипотенузата AS на правоаголниот триаголник, што ја сече косо оската на вртењето, ќе образува површина што е дел од некоја кружна конусна површина, чиј врв е во точката S. Другата катета пак AO на триаголникот, бидејќи е нормална на оската на вретњето, ќе образува круг со центар O и радиус $r = \overline{OA}$ (црт. 187).

Површината, која е составена од делот на кружната конусна површина со врв S, што е образувана од хипотенузата AS и кругот $K(O, \overline{OA})$ што е образуван од катетата OA (црт. 187) го разбива множеството точки од просторот (што не ѝ припаѓаат) на две области: внатрешна и надворешна. Унијата од таа површина и внатрешната област претставува една затворена и ограничена просторна област, т.е. едно геометриско тело, кое го викаме *йрав кружен конус*.

Постојат и други видови конуси, но бидејќи ние ќе разгледуваме само прави кружни конуси, затоа ќе ги викаме просто само конуси.

Дефиниција: *Конус се вика ѿело шѿо е оїраничено со дел од една кружна конусна йовршина со врв S и еден круї.*

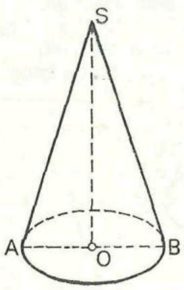
Врвот на конусната површина се вика *врв на конусоѿ*, кругот се вика *основа* (или *база*) на конусот, а делот од конусната површина заклучен меѓу врвот и основата — *бочна йовршина* или *обвивка* на конусот.

Радиусот на основата се вика *радиус на конусоѿ*, а отсечката SA која го сврзува врвот S со која и да било точка од кружницата на основата се вика *їенераѿриса* на конусот.

Правата што минува низ врвот S и центарот на основата се вика *оска* на конусот, а отсечката SO од оската меѓу врвот и центарот на основата — *висина* на конусот.

Од начинот на кој настанува ротационото тело—конус, следува дека: **сите генератриси на конусот се складни.**

Должините на радиусот, висината и генератрисата на конусот ќе ги означуваме соодветно со буквите r, h и s. Всушност тоа се должини на страните на правоаголниот триаголник AOS (црт. 187), па според тоа ќе ја задоволуваат релацијата $s^2 = r^2 + h^2$



Црт. 188

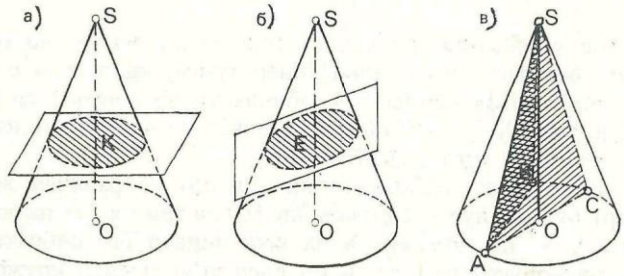
Конусот го цртаме како на црт. 188. Прво го цртаме рамнокракиот триаголник ABS со основа AB — дијаметарот на конусот и кракот AS — генератрисата на конусот (црт. 188). Кружницата на основата на конусот ја цртаме како елипса, при што еден нејзин дел што е невидлив го цртаме со испрекината линија.

Кај конусот можат да се направат следниве поважни пресеци:

1°. Пресекот, што се добива кога конусот го пресечеме со рамнина која е паралелна на рамнината на основата на конусот, се вика *йаралелен йресек*. Тој пресек секогаш е *круї* (кругот K на црт. 189-а).

2°. Пресекот што се добива кога конусот го пресечеме со рамнина која ќе ги пресече сите генератриси на конусот и е коса спрема оската на конусот, се вика *кос пресек* на конусот (фигура E на црт. 189-б). Тој секогаш е некоја *елипса*.

3°. Конусот можеме да го пресечеме и со рамнина која минува низ кои и да било две негови генератриси. Така добиениот пресек се вика *надолжен пресек* на консуот. Тој е равнокрак триаголник (ΔABS на црт. 189-в), чии страни се две генератриси и една тетива на основата на конусот.



Црт. 189

4°. Ако надолжниот пресек минува и низ оската на конусот, тогаш тој уште се вика и *оскин пресек* на конусот. Оскиниот пресек на конусот е исто така равнокрак триаголник (ΔSAC на црт. 189-в), чии страни се: две генератриси и дијаметарот на основата на конусот.

Во специјален случај оскиниот пресек на конусот може да биде и рамностран триаголник. Тоа ќе биде ако генератрисата на конусот е еднаква на дијаметарот на основата, т.е. ако $s = 2r$.

Конус, на кој оскиниот пресек е рамностран триаголник,се вика *рамностран конус*.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето B се врти околу катетата BC. Што образува при тоа вртење: а) темето A, б) страната AB, в) страната AC, г) правоаголниот триаголник ABC?

2. Определи ги должините на радиусот и генератрисата на конусот што се добива кога равнокрак триаголник со основа a=6 *см* и крак b=5 cm се врти околу симетралата на основата?

3. Дали во прав конус постои точка, што е еднакво оддалечена од секоја точка на кружницата на основата и врвот на конусот? Ако постои, која е таа точка?

4. Дали може должината на генератрисата на конусот да биде еднаква на: а) неговата висина, б) радиусот на основата? Образолжи го одговорот!

5. Каква фигура е пресекот на еден прав конус со рамнина, која е: а) нормална на оската, б) мине низ оската, в) коса спрема оската, а ги сече сите генератриси на конусот? Кој од тие пресеци се вика оскин пресек?

6. Пресметај ја плоштината на оскиниот пресек на конус, чија генератриса и радиус на основата се: а) s=13 cm, r=5 cm, б) s=8 cm, r=4,8 cm, в) s=4,5 cm, r=2,7 cm.

7. Определи ја плоштината на оскиниот пресек на рамностран конус со радиус на основата r=6 cm!

8. Пресметај ја плоштината на оскиниот пресек на конус, чија висина е 15 cm, а генератрисата s=17 cm.

9. Плоштината на оскиниот пресек на еден конус, чија висина е 9,6 cm, изнесува 69,12 cm^2. Определи го радиусот и генератрисата на конусот!

10. Плоштината на оскиниот пресек на конус со радиус $r=2{,}7$ cm, изнесува 9,72 cm². Определи ги висината и генератрисата на конусот!

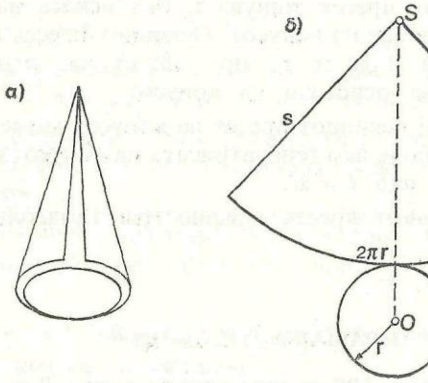
11. Одреди ја плоштината на оскниот пресек на конус, чија генератриса $s=6$ cm е наведната спрема рамнината на основата под агол: а) 60°, б) 45°, в) 30°.

12. Конус со висина $h=9$ cm и плоштина на основата $B=9\pi$ cm² е пресечен со рамнина паралелна на основата на растојание 3 cm од неа. Одреди ја плоштината на добиениот паралелен пресек!

§ 43. ЦРТАЊЕ МРЕЖА НА КОНУС

Да земеме еден конус од картон или ламарина, па да го изрежеме по кружницата на основата и по една генератриса, како што е тоа покажано на црт. 190-а. Ако потоа основата и обвивката на конусот ги развиеме, така што да можеме нив да ги поставиме да лежат во една рамнина, ќе ја добиеме *мрежата* на конусот (црт. 190-б).

Забележуваме дека обвивката на конусот се развива во еден кружен исечок (сектор) чиј радиус е еднаков на генератриста (s) на конусот, а должината на лакот — на должината на кружницата на основата ($2\pi r$). Според тоа, мрежата на конусот се состои од еден круг и еден кружен исечок (црт. 190-б).



Црт. 190

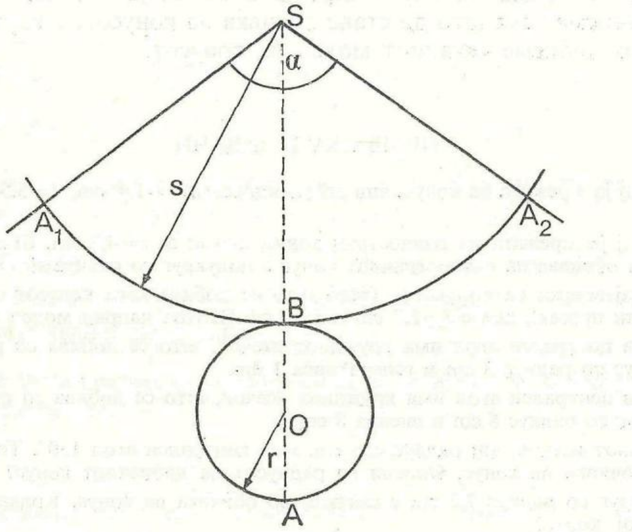
Задача: Да се нацрта мрежата на конус, чиј радиус на основата е $r=1{,}2$ cm, а генератрисата $s = 4$ cm.

Решение: Ќе ја нацртаме прво развиената обвивка на конусот, т.е. кружниот исечок A_1A_2S, чиј радиус е еднаков на $s=4$ cm, а должината на лакот му е еднаква со должината на кружницата ($2\pi r$) на основата на конусот. Но за да го нацртаме тој кружен исечок, потребно е претходно да го одредиме неговиот припаден централен агол α.

Познато ви е дека должината на кружниот лак ја пресметуваме според формулата $l=\frac{\pi r\alpha}{180}$, каде што r е радиус на кружницата чиј дел е тој лак. Во овој случај, кај нашиот кружен исечок, што сакаме да го нацртаме, радиус е генератрисата s на конусот, а должината пак на лакот треба да биде еднаква уште и со периметарот на основата на конусот, т.е. треба да е $2\pi r$. Според тоа, треба да постои односот $\frac{\pi s\alpha}{180} = 2\pi r$, од каде што бараниот централен агол на нашиот кружен исечок ќе биде:

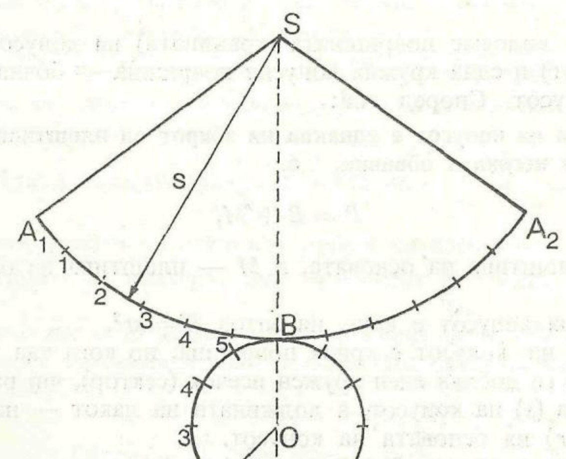
$$\alpha = \frac{360°r}{s} = \frac{360° \cdot 1{,}2}{4} = 108°$$

Сега, со помош на агломер, го нацртуваме централниот агол $\alpha=\widehat{A_1SA_2}=108°$, па околу неговото теме S опишуваме кружен лак со радиус $s=4$ cm (црт. 191). Така го добиваме кружниот исечок A_1A_2S. Потоа кој и да било радиус на кружниот исечок го продолжуваме (надвор од лакот A_1A_2) за отсечката BO, која е еднаква на радиусот на конусот $r=1,2$ cm. На крајот од точката O опишуваме круг со радиус на конусот. Така ја добиваме мрежата на дадениот конус.



Црт. 191

Развиената обвивка на конусот можеме приближно конструктивно да ја нацртаме уште и на следниов начин: Цртаме круг со радиус $r=1,2$ cm и до него да се допира еден кружен лак со радиус $s=4$ cm, како на црт. 192. Потоа кружницата на основата ја разделуваме на колку што е можно помали складни делови, на пример на 12 складни делови, па тетивата на еден таков дел со шестар ја пренесуваме 12 пати по кружниот лак со радиус s. Така го добиваме кружниот лак A_1BA_2, кој има должина приближно еднаква на периметарот на основата, а пак кружниот исечок SA_1BA_2 е приближно еднаков на обвивката на конусот црт. 192).



Црт. 192

Наместо генератрисата може да би биде дадена висината на конусот. Во тој случај генератрисата s на конусот ја определуваме конструктивно, како хипотенуза на правоаголниот триаголник, чија една катета е радиусот на основата (r), а другата катета е висината (h) на конусот.

Ако сакаме да направиме модел на конус од картон, тогаш прво ја цртаме неговата мрежа на парче картон, а потоа ја сечеме. Кога кружниот исечок ќе го свиеме така што да стане обвивка на конусот, а кругот да го преклопиме ќе го добиеме саканиот модел на конусот.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Нацртај ја мрежата на конус, чии димензии се: а) $r=1{,}4$ cm, $s=3{,}5$ cm, б) $r=3$ cm и $h=4$ cm.

2. Нацртај ја мрежата на рамностран конус, ако е: а) $r=4{,}2$ cm, б) $s=7$ cm. Покажи дека развиената обвивка на рамностраниот конус е полукруг со радиус s!

3. Нацртај мрежа на полуконус (тело што се добива кога конусот се преполови со еден негов оскин пресек), ако е $r=2{,}7$ cm и $s=7$ cm. Потоа напрви модел на полуконусот!

4. Колкав централен агол има кружниот исечок, што се добива со развивање на обвивката на конус со радиус 3 cm и генератриса 1 dm.

5. Колкав централен агол има кружниот исечок, што се добива со развивање на обвивката на конус со радиус 6 cm и висина 8 cm.

6. Кружниот исечок, чиј радиус е 6 cm, има централен агол 150°. Тој кружен исечок е свиткан во обвивка на конус. Одреди го радиусот на добиениот конус?

7. Полукруг со радиус 7,2 cm е свиткан во обвивка на конус. Колкав е радиусот на основата на тој конус?

8. Висината на еден конус е еднаква на радиусот на основата на конусот. Каков триаголник е оскиниот пресек на тој конус?

9. Во кои случаи аголот при врвот на оскиниот пресек на еден прав конус ќе биде: а) остар, б) прав, в) тап?

§ 44. ПЛОШТИНА НА КОНУС

Како што видовме површината (границата) на конусот се состои од една основа (круг) и една кружна конусна површина — бочна површина или обвивка на конусот. Според тоа:

Плоштината на конусот е еднаква на збирот од плоштината на основата и плоштината на неговата обвивка, т.е.

$$P = B + M,$$

каде што B е плоштина на основата, а M — плоштина на обвивката на конусот.

Основата на конусот е круг, па затоа $B = \pi r^2$.

Обвивката на конусот е крива површина, но кога таа ќе се развие во рамнина, од неа се добива еден кружен исечок (сектор), чиј радиус е еднаков на генератрисата (s) на конусот, а должината на лакот — на должината на кружницата ($2\pi r$) на основата на конусот.

Познато ни е дека плоштината на кружен исечок е еднаква на полупроизводот од должината на кружниот лак и неговиот радиус, т.е. $P = \frac{lr}{2}$. Според тоа, ќе важи следнава:

Теорема: *Плоштината на обвивката на конусот е еднаква на полупроизводот од должината на кружницата на основата и должината на неговата генератриса*, т.е.

$$M = \frac{2\pi r \cdot s}{2} \quad \text{или} \quad M = \pi r s$$

Оттука следува дека формулата за плоштина на конусот, ќе гласи:

$$P = B + M = \pi r^2 + \pi r s, \qquad \text{или} \qquad P = \pi r (r + s)$$

Кај равностраниот конус, бидејќи е $s = 2r$, формулата за неговата плоштина, ќе гласи: $P = \pi r (r + 2r) = \pi r \cdot 3r$ или $P = 3\pi r^2$

Задача 1. Покривот на една кула има форма на конус со генератриса $s = 4{,}5$ m и дијаметар на основата $d = 6$ m. Колку квадратни метри ламарина е потребно за покривање на кулата?

Решение: Тука доаѓа предвид само плоштината на обвивката на конусот, која ја пресметуваме според формулата:

$$M = \pi r s \approx 3{,}14 \cdot 3 \cdot 4{,}5 = 42{,}39$$

Значи, за покривање на кулата потребно е 42,39 m^2 ламарина.

Задача 2. Правоаголен триаголник ABC со катети $a = 4$ cm, $b = 7{,}5$ cm се врти околу катета b. Да се пресмета плоштината на добиеното ротационо тело.

Решение: При тоа вртење ќе се добие конус со радиус $r = a = 4$ cm и висина $h = b = 7{,}5$ cm. За пресметување на плоштината на добиениот конус е потребно да ја знаеме неговата генератриса.

Генератрисата на конусот е еднаква на хипотенузата на правоаголниот триаголник ABC, а ќе ја определиме со примена на Питагоровата теорема:

$$s = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{4^2 + 7{,}5^2} = \sqrt{16 + 56{,}25} = \sqrt{72{,}25} = 8{,}5$$

Потоа, со замена на $r = 4$ cm и $s = 8{,}5$ cm во формулата за плоштина на конусот, добиваме:

$$P = \pi r (r + s) \approx 3{,}14 \cdot 4 \cdot (4 + 8{,}5) = 3{,}14 \cdot 4 \cdot 12{,}5 = 3{,}14 \cdot 50 = 157, \text{ т.е. } P \approx 157 \text{ cm}^2.$$

Задача 3. Плоштината на оскиниот пресек на еден конус е 15 cm^2. Да се пресмета плоштината на конусот, ако тој е висок $h = 6$ cm.

Решение: Оскиниот пресек на конусот е рамнокрак триаголник, чија основа и висина се складни на дијаметарот и висината на конусот. Според тоа, плоштината на оскиниот пресек на конусот ќе биде:

$$P_{\text{ос. пр.}} = \frac{2rh}{2} \quad \text{или} \quad P_{\text{ос. пр.}} = rh,$$

$$\text{а оттука } r = \frac{P_{\text{ос. пр.}}}{h} = \frac{15}{6} = 2{,}5 \text{ (cm)}.$$

Кога ги знаеме должините на радиусот и висината на конусот, должината на генератрисата ќе ја определиме со примена на Питагоровата торема:

$$s = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2{,}5^2 + 6^2} = \sqrt{6{,}25+36} = \sqrt{42{,}25} = 6{,}5 \text{ (cm)}.$$

Значи, бараната плоштина на конусот ќе биде:

$$P = \pi r(r + s) = 3{,}14 \cdot 2{,}5 \cdot (2{,}5 + 6{,}5) = 3{,}14 \cdot 2{,}5 \cdot 9 = 70{,}65 \text{ (cm}^2).$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Пресметај ја плоштината на конус, чиј радиус и генератриса се: а) $r=3{,}5$ cm, $s=1$ dm, б) $r=8$ cm, $s=2$ dm.

2. Пресметај ја плоштината на конус, ако е познато:

а) $r=3{,}5$ cm, $h=12$ cm, б) $r=h=5$ cm, в) $s = 18$ cm, $h = \frac{2s}{3}$.

3. Кружен исечок, чиј радиус е 1,2 dm и централен агол 150°, е свиткан во обвивка на конус. Пресметај ја плоштината и висината на тој конус.

4. Пресметај ја плоштината на рамностран конус, ако е: а) $s=7$ cm, б) $r=4$ cm.

5. Полукруг со радиус 8 cm е свиткан во обвивка на конус. Пресметај ја плоштината на тој конус!

6. Плоштината на оскиниот пресек на еден конус е 192 cm², а висината му е 16 cm. Пресметај ја плоштината на конусот!

7. Еден стлпб за лепење на огласи, во форма на цилиндар со дијаметар на основата 9 dm и висина 2,5 m, завршува на врвот со рамностран конус, што има основа како и цилиндарот. Пресметај ја плоштината на тој столб!

8. Одреди го односот од плоштината на основата (B) и: а) плоштината на обвивката (M), б) плоштината (P) на еден рамностран конус.

9. Плоштината на основата на еден рамностран конус е $B=157$ cm². Одреди ја плоштината на обвивката и плоштината на тој конус!

10. Плоштината на еден рамностран конус е $P=129$ dm². Определи го неговиот радиус!

11. Висината на конусот е 12 cm, а аголот при врвот на неговиот оскин пресек е 120°. Да се определи плоштината на конусот.

12. Како се менува плоштината на обвивката на конус, ако: а) радиусот се намали 2, 3, 4, ... пати, а генератрисата остане иста, б) радиусот остане ист, а генератрисата се зголеми 2, 3, 4, ... пати, в) радиусот се зголеми 2 пати, а генаратрисата се зголеми 3 пати г) радиусот се намали 6 пати, а генератрисата се зголеми 2 пати, д) радиусот се намали 2 пати, а генератрисата се зголеми 2 пати.

13. Како се менува плоштината на рамностран конус, ако радиусот: а) се зголеми 2, 3, 4, ... пати, б) се намали 2, 3, 4, ... пати?

14. Правоаголен триаголник со катети $a=4{,}8$ cm и $b=6{,}4$ cm се врти прво околу едната, а потоа околу другата катета. Кое од добиените тела има поголема плоштина и за колку е таа поголема?

15. Рамнокрак триаголник со основа $a=1{,}6$ dm и крак $b=1{,}7$ dm се врти околу својата оска на симетрија. Пресметај ја плоштината на добиеното тело!

16. Во цилиндар со радиус 5 cm и висина 12 cm, вппшан е конус така што неговиот врв е во центарот на горната основа на цилиндарот а долната основа им е заедничка. Пресметај ги плоштините на двете тела (цилиндарот и вппшаниот во него конус)!

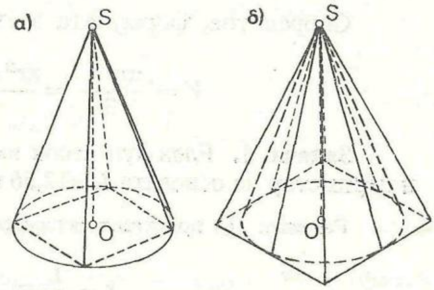
17. Рамнокрак триаголик со основа 12 cm и висина 8 cm се врти околу својата основа. Пресметај ја плоштината на добиеното ротационо тело!

18. Квадрат со страна 6 cm се врти околу едната своја дијагонала. Пресметај ја плоштината на добиеното ротационо тело!

§ 45. ВОЛУМЕН НА КОНУС

За една пирамида велиме дека *е вписана* во даден конус, ако нејзината основа е многуаголник — вписан во кружницата на основата на конусот, а врвот ѝ се совпаѓа со врвот на конусот (црт. 193-а). Очигледно е дека бочните рабови на пирамидата, што е вписана во конус, се генератриси на конусот.

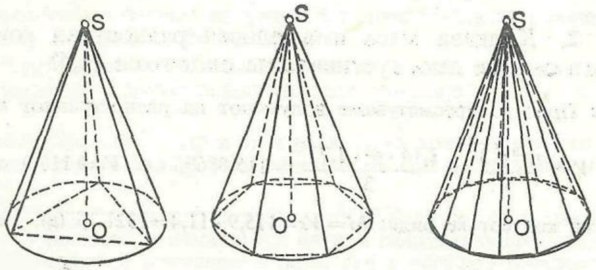
За една пирамида, пак, велиме дека *е опишана* околу даден конус, ако нејзината основа е многуаголник — опишан околу кружницата на основата на конусот, а врвот ѝ се совпаѓа со врвот на конусот (црт. 193-б). Во тој случај бочните ѕидови на опишаната пирамида ќе ја допираат бочната површина на конусот.



Црт. 193

На црт. 194 се претставени три складни конуса, во кои се вписани по една правилна пирамида и тоа во првиот е вписана правилна тристрана, во вториот — правилна шестстрана, а во третиот — правилна дванаесетстрана пирамида.

Ако во даден конус (или во складни конуси) впишуваме правилни пирамиди со поголем и сè поголем број страни (ѕидови) (црт. 194), очигледно е дека плоштините на основите на тие пирамиди ќе растат и сè повеќе ќе се приближуваат до плоштината на основата на конусот, а исто така и волумените на така впишуваните правилни пирамиди ќе растат и сè повеќе ќе се приближуваат до волуменот на дадениот конус.



Црт. 194

Тоа не упатува на заклучок дека конусот можеме да го сметаме како правилна пирамида со бесконечно многу рабови. Значи, за пресметување волуменот на конусот можеме да ја ползуваме истата формула со која го пресметуваме и волуменот на пирамидите $V = \frac{Bh}{3}$

Според тоа, ќе важи следнава:

Теорема: *Волуменот на конусот е еднаков на* $\frac{1}{3}$ *од производот на плоштината на неговата основа и должината на висината*, т.е.

$$V = \frac{Bh}{3}, \text{ но бидејќи } B = \pi r^2, \text{ тоа } V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Со строгиот доказ на ова важна теорема ќе се запознаеме во средното училиште.

За определување на волуменот на рамностран конус ($s = 2r$) е потребно прво да ја определиме неговата висина. Од црт. 195 со примена Питагоровата теорема имаме:

$$h^2 = (2r)^2 - r^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2, \text{ а оттука } h = \sqrt{3r^2} = r\sqrt{3}$$

Според тоа, формулата за волумен на рамностраниот конус, ќе гласи:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi r^2 \cdot r\sqrt{3}}{3} \quad \text{или} \quad V = \frac{\pi r^3 \sqrt{3}}{3}$$

Задача 1. Еден куп песок има форма на конус со генератриса $s=2{,}5$ m и периметар на основата $L=12{,}56$ m. Да се определи волуменот на песокот?

Решение: Од познатиот периметар на основата $L=2\pi r$ прво го наоѓаме радиусот:

$$r = \frac{L}{2\pi} \approx \frac{12{,}56}{2 \cdot 3{,}14} = \frac{12{,}56}{6{,}28} = 2,$$

а потоа со примена на Питагоровата теорема — висината на конусот:

$$h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{2{,}5^2 - 2^2} = \sqrt{6{,}25 - 4} = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5.$$

Волуменот на песокот ќе биде:

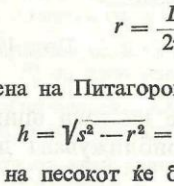
$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \approx \frac{3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 1{,}5}{3} = 3{,}14 \cdot 4 \cdot 0{,}5 = 3{,}14 \cdot 2 = 6{,}28, \text{ т.е. } V \approx 6{,}28 \text{ m}^3.$$

Задача 2. Колкава маса има оловен рамностран конус со дијаметар d = 8 cm, кога се знае дека густината на оловото е 11,4?

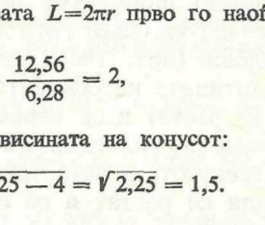
Решение: Прво го пресметуваме волуменот на рамностраниот конус:

$$V = \frac{\pi r^3 \sqrt{3}}{3} \approx \frac{3{,}14 \cdot 4^3 \cdot 1{,}73}{3} = 115{,}8869, \text{ т.е. } V \approx 115{,}9 \text{ cm}.$$

Масата на конусот ќе биде: $M = Vs = 115{,}9 \cdot 11{,}4 = 1321{,}26$ (g), т.е. $M \approx 1{,}32$ kg.



Црт. 195



Црт. 196

Задача 3. Квадрат со страна $a = 6$ cm се врти околу една своја дијагонала. Да се пресмета плоштината и волуменот на добиеното тело.

Решение: Од црт. 196 гледаме дека добиеното ротационо тело се состои од два складни конуса, што се слепени со своите основи. Генератрисата на тие конуси ќе биде страната a на квадратот, а пак висината и радиусот на основата се еднакви на половината од дијагоналата на квадратот, т.е. $h = r = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

Плоштината на добиеното ротационо тело е еднаква на збирот од плоштините на обвивките на слепените конуси, т.е.

$$P = 2M = 2\pi \cdot \frac{d}{2} \cdot a = 2\pi \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6 = 36\pi\sqrt{2} \approx 36 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}41 = 159{,}5\ (\text{cm}^2).$$

Волуменот на добиеното тело е еднаков на збирот од волумените на двата складни слепени конуси, т.е.

$$V = \frac{2\pi}{3} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \frac{d}{2} = \frac{2\pi \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot 3\sqrt{2}}{3} = 36\pi\sqrt{2} \approx 36 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}41 = 159{,}5\ (\text{cm}^3)$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Пресметај го волуменот на конус, ако се дадени: а) $r=7$ cm, $h=6$ cm, б) $r=3$ cm, $s=5$ cm, в) $h=3$ dm, $s=3{,}4$ dm, г) $s=2$ dm, $h=r$.

2. Пресметај го волуменот на рамностран конус, ако е дадено: а) $r=6$ cm, б) $s=14$ cm, в) $h=5$ cm!

3. Висината на еден конус е 4 m, а периметарот на основата му е 15,7 m. Пресметај го неговиот волумен!

4. Одреди колку cm^3 течност собира една чаша во форма на конус со висина 7 cm. и дијаметар на отворот 9 cm!

5. Волуменот на конусот е $V=10\pi\ \text{cm}^3$, а висината му е $h=12$ cm. Одреди го радиусот на конусот!

6. Плоштината на оскиниот пресек на еден конус е 42 cm^2, а радиусот му е 4,3 cm. Пресметај го волуменот на тој конус!

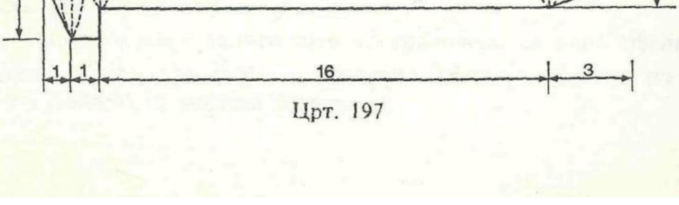
7. Едно парче ламарина, во форма на кружен исечок со радиус 6 dm и централен агол 216°, е свиткано во конус. Одреди го волуменот на добиениот конус!

8. Да се пресмета волуменот на конус, ако плоштината на обвивката му е $M=15\pi$ cm^2, а плоштината на основата $B=9\pi\ \text{cm}^2$.

9. Во цилиндар со радиус на основата 9 cm и висина 4 dm вишан е конус, така што основите им се совпаѓаат и имаат складни висини. Колкав е односот од волумените на тие две тела?

10. Еден рамностран цилиндар и еден рамностран конус се слепени со своите складни основи, чиј дијаметар е d=6 cm. Да се одреди плоштината и волуменот на така комбинираното тело.

11. Како се менува волуменот на конус, ако: а) радиусот го зголемиме 3 пати, а висината остане иста, б) висината ја намалиме 2 пати, а радиусот остане ист, в) радиусот го намалиме 2 пати, а висината ја зголемиме 4 пати, г) радиусот го зголемиме 4 пати, а висината ја намалиме 2 пати?



Црт. 197

12. Како се менува волуменот на рамностран конус, ако радиусот на основата: а) се зголеми 2, 3, 4, ... пати, б) се намали 2, 3, 4, ... пати?

13. Пресметај ја масата на железен детаљ ($s=7, 8$), чиј оскин пресек е прикажан на црт. 197. Димензиите се дадени во сантиметри.

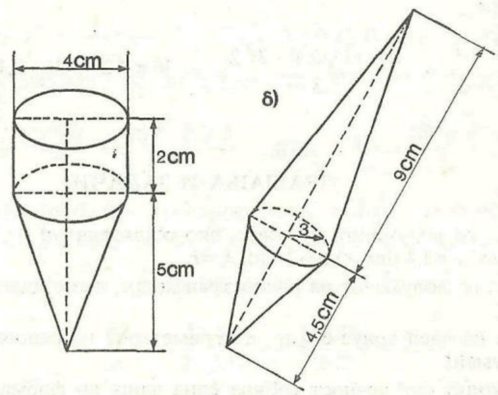
14. Пресметај ги волумените на телата што се прикажани на црт. 198.

15. Железна висулка, што има форма на конус, има маса 294 g. Пресметај ја висината на висулката, ако дијаметарот на основата е 6 cm, а густината $s=7{,}8\ g/cm^3$.

16. Во каков однос се наоѓаат волумените на два конуса со складни висини, ако дијаметрите на основите им се соодветно 9 cm и 18 cm.

17. Од дрвена правилна четиристрана пирамида со основен раб 10 cm и висина 12 cm треба да се изделка можно најголем конус. Да се одреди волуменот на отпадоците.

18. Од дрвен конус со радиус 1, 4 dm и генератриса 5 dm изделкана е најголема правилна: а) тристрана, б) четиристрана, в) шестострана пирамида. Пресметај колкав е процентот на отпадоците!



Црт. 198

19. Волуменот на еден конус е $V=27\pi\ cm^3$, а радиусот му е $r=3$ cm. Определи ја висината на тој конус!

20. Плоштината на еден правоаголен триаголник е 14 dm^2, а едната катета е 8 dm. Да се пресмета плоштината и волуменот на телото, што се добива кога тој триаголник се врти околу помалата катета.

21. Правоаголен триаголник со катети $a=2{,}8$ cm и $b=4{,}5$ cm се врти околу: а) катетата a, б) катетата b. Пресметај ги плоштината и волуменот на добиените тела.

22. Рамностран триаголник со страна $a=6$ cm ротира околу својата висина. Одреди ги плоштината и волуменот на добиеното тело!

23. Рамностран триаголник со страна a ротира околу една своја страна. Да се одреди волуменот на добиеното ротационо тело.

24. Рамнокрак триаголник со основа $a=14$ cm и крак $b=25$ cm, ротира околу основата. Пресметај ги плоштината и волуменот на добиеното тело!

25. Рамнокрак триаголник со основа $a=2{,}8$ dm и крак $b=5$ dm ротира околу висината Одреди го волуменот на добиеното тело!

26. Квадрат со дијагонала d=8 cm ротира околу една своја дијагонала. Да се пресмета плоштината и волуменот на добиеното тело!

27. Ромб со страна $a=5$ cm и висина $h=4$ cm ротира околу една своја страна. Да се одреди плоштината и волуменот на добиеното ротационо тело.

ТОПКА

§ 46. ПОИМ ЗА СФЕРА И ТОПКА. ЕЛЕМЕНТИ

Нека O е произволна точка од просторот и r — кој и да било позитивен реален број.

Дефиниција 1. *Множеството на сите точки од просторот, чиешто растојание од дадена фиксна точка O е еднакво на r, го викаме сфера и го означуваме со* $S\ (O,r)$.

Точката O ја викаме *центар* на сферата, а бројот r — *радиус* на сферата. Отсечката што го соединува центарот на сферата со која и да било точка M од неа, исто така ја викаме радиус на сферата, бидејќи $\overline{OM} = r$. Отсечката, пак, која соединува две произволни точки од сферата, се вика нејзина *тетива*. А тетива на сферата што минува и низ нејзиниот центар, се вика *дијаметар* на сферата. Очигледно е дека должнината на секој дијаметар е еднаква на два радиуса, т.е. $d = 2r$.

Крајните точки на кој и да било дијаметар ги викаме *дијаметрално спротивни точки на сферата.*

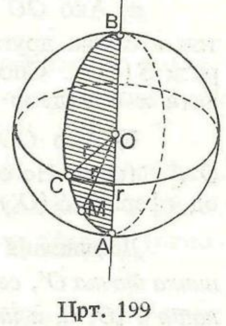
Потсетете се на дефиницијата на кружницата! Во што е разликата меѓу кружницата и сферата? Во што се разликуваат дефиниците на тие две фигури (множества од точки)?

Знаете дека кружницата е крива затворена линија на рамнината, а каква фигура е сферата?

Замислете си дека една полукружница со центар O и радиус r ротира околу својот дијаметар AB (црт. 199). Очигледно е дека при тоа вртење секоја точка M од образуваната ротациона површина е на растојание r од центарот на полукружницата. Значи, таа ротациона површина е една сфера $S(O,r)$.

Според тоа, сферата можеме да ја разгледуваме како ротациона површина што се добива при вртењето на една полукружница околу својот дијаметар.

Очигледно е дека сферата $S(O,r)$ го разбива множеството точки од просторот (што не ѝ припаѓаат) на две области: внатрешна и надворешна. Унијата од сферата и нејзината внатрешна област претставува една затворена и ограничена просторна област, т.е. едно тело, кое го викаме *топка*.



Црт. 199

Значи, Топка се вика телото што е ограничено со една сфера.

Потсетете се на дефиницијата на круг! Топката, слично на дефиницијата на кругот, обично ја дефинираме вака:

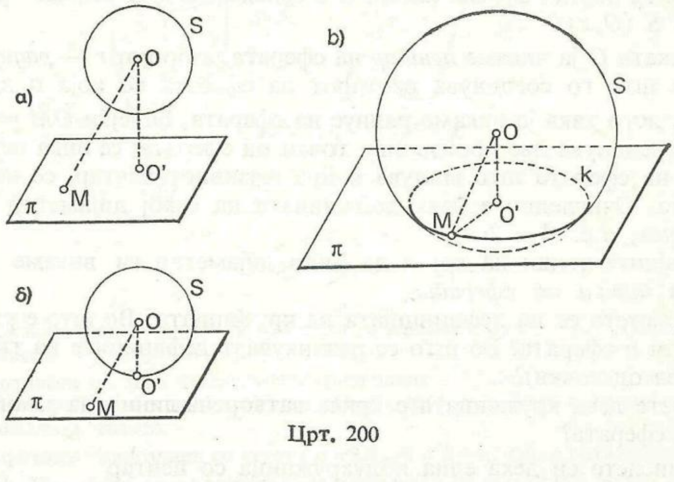
Дефиниција: 2. *Топка е множество на сите точки од просторот, чие што растојание од една фиксна точка O не е поголемо од r и ја означуваме со* $T[O,r]$.

Можеме да забележиме дека сферата $S(O,r)$ е подмножество од топката $T[O,r]$ и претставува негова граница.

Центарот, радиусот, тетивата и дијаметарот на сферата $S(O,r)$ се викаат исто така: *центар, радиус, тетива и дијаметар* и на топката $T[O,r]$.

§ 47. ПРЕСЕЦИ НА СФЕРАТА И ТОПКАТА

Нека е дадена сфера $S(O,r)$ и една рамнина π. Со O' да ја означиме проекцијата на центарот O врз рамнината π (црт. 200). Очигледно е дека се можни следниве три заемни положби на сферата $S(O,r)$ и рамнинта π:



Црт. 200

а) Ако $\overline{OO'} > r$, тогаш точката O' лежи надвор од сферата $S(O,r)$. Затоа и секоја друга точка $M \in \pi$ (бидејќи $\overline{OM} > \overline{OO'}$) ќе лежи надвор од сферата $S(O,r)$. Според тоа: $S(O,r) \cap \pi = \emptyset$. Во тој случај велиме дека рамнината π е надвор од сферата $S(O,r)$ (црт. 200-а).

б) Ако $\overline{OO'} = r$, тогаш точката O' ќе лежи на сферата $S(O,r)$, т.е. $O' \in S(O,r)$. Но секоја друга точка $M \in \pi$ (бидејќи $\overline{OM} > \overline{OO'}$) ќе лежи надвор од сферата $S(O,r)$ (црт. 200-б). Според тоа: $S(O,r) \cap \pi = \{O'\}$.

Дефиниција 3. *Рамнината π, која со сферата $S(O,r)$ има само една заедничка точка O', се вика тангентна рамнина на сферата $S(O,r)$, односно на топката $T[O,r]$, а точката O' — допирна точка.*

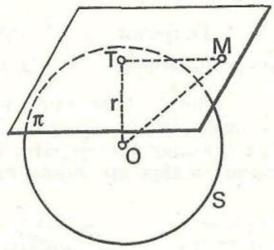
Од $S(O,r) \cap \pi = \{O'\}$ и $OO' \perp \pi$ следува:

Теорема 1. *Тангентната рамнина во која и да било точка T на сферата $S(O,r)$ е нормална на радиусот OT* (црт. 201).

в) Ако $\overline{OO'} < r$, тогаш точката O' ќе лежи во внатрешноста на сферата $S(O,r)$. Во тој случај ќе се најдат точки на рамнината π, коишто ќе лежат и на сферата $S(O,r)$. Множеството на тие точки нека е линијата k, која се вика *пресек на сферата* $S(O,r)$ и рамнината π (црт. 200-с). Делот од рамнината π што е ограничен со линијата k го викаме, пак, *пресек на топката* $T[O, r]$ со рамнината π.

Ќе покажеме дека важи следнава:

Теорема 2. *Секој пресек на сферата со рамнина е кружница, чиј центар е во проекцијата на центарот на сферата врз таа рамнина.*



Црт. 201

Доказ: Нека π е рамнина што ја сече сферата $S(O,r)$. Од центарот O да спуштиме нормала OO' на рамнината π. Нека $\overline{OO'} = c$. На линијата на пресекот k на сферата $S(O,r)$ и рамнината π да земеме произволна точка M, таква што $M \in S(O,r)$ и $M \in \pi$ (црт. 200-с). Го добиваме правоаголниот триаголник MOO', од кој следува дека:

$$\overline{MO'} = \sqrt{\overline{MO}^2 - \overline{OO'}^2} \quad \text{или} \quad \overline{MO'} = \sqrt{r^2 - c^2},$$

кадешто r е радиус на сферата, а c — растојание на рамнината π од центарот на сферата.

Тоа значи дека: која и да било точка M од линијата на пресекот на сферата $S(O,r)$ и рамнината π се наоѓа на постојано растојание еднакво на $\sqrt{r^2 - c^2}$. Според тоа, линијата k на пресекот на сферата $S(O,r)$ и рамнината π е кружница со центар O' штд.

Со r_1 да го означиме радиусот на кружницата — пресек на сферата $S(O,r)$ и рамнината на сечењето. Тогаш горното равенство го добива видот

$$r_1 = \sqrt{r^2 - c^2} \qquad (1)$$

Со него радиусот (r_1) на пресекот на сферата (односно топката) е изразен како функција од растојанието (c) на рамнината на пресекот од центарот на сферата (односно топката). Од него гледаме дека: Со намалувањето на c должината на радиусот r_1 се зголемува, и обратно.

При $c = 0$ (т.е. кога рамнината на пресекот минува низ центарот на сферата) пресекот добива најголем радиус $r_1 = r$, а при $c = r$, тогаш е $r_1 = 0$, т.е. пресекот преминува во една единствена точка.

Пресекот на сферата (односно топката) со рамнина што минува низ нејзиниот центар, се вика *голема кружница на сферата* (односно *голем круг на топката*), а секој друг пресек — се вика *мала кружница на сферата* (односно *мал круг на топката*).

Радиусот на секоја голема кружница на сферата е еднаков на радиусот на сферата, а нејзиниот центар се совпаѓа со центарот на сферата. Од равенството (1) следува дека:

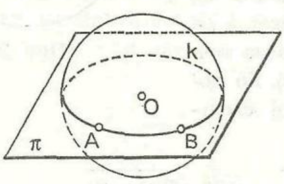
Два пресека, што се еднакво оддалечени од центарот на сферата (односно топката), се складни.

Теорема 3. *Низ кои и да било две недијаметрално спротивни точки на сферата минува една и само една голема кружница на таа сфера.*

Доказ: Нека O е центар на сферата S, а A и B — две недијаметрално спротивни точки на сферата S (црт. 202). Точките O, A и B не лежат на една права (Зошто?). Значи, тие определуваат една единствена рмнина π. Рамнината π минува низ центарот на сферата, па затоа ја сече истата по една голема кружница k која минува низ дадените точки A и B од сферата. Теоремата е докажана.

Теорема 4. *Секои две големи кружници на сферата се сечат и тоа во две дијаметрално спротивни точки на сферата.*

Доказ: Рамнините на две големи кружници на сферата имаат една заедничка точка — центарот на сферата. Според тоа, тие две рамнини се сечат по една права што минува низ центарот на сферата. Точките, во кои таа права ја сече сферата, се пресечни точки и на двете големи кружници на сферата (црт. 203).



Црт. 202

Црт. 203

Забелешка: За еден полиедар велиме дека *е впишан* во една топка, а за топката велиме дека *е опишана* околу тој полиедар, ако сите темиња на поледарот лежат на сферата со која е ограничена топката.

За еден полиедар велиме дека *е опишан* околу една топка, а за топката велиме дека *е впишана* во тој полиедар, ако сите ѕидови на полиедарот ја допираат топката.

За еден цилиндар велиме дека *е впишан* во една топка, а за топката дека *е опишана* околу тој цилиндар, ако кружниците на основите на цилиндарот лежат на сферата со која е ограничена топката.

За еден конус пак велиме дека *е впишан* во топката, а за топката дека *е опишана* околу конусот, ако врвот и кружницата на основата на конусот лежат на сферата со која е ограничена топката.

За еден цилиндар или конус велиме дека *е опишан* околу една топка, а за топката дека *е впишана* во тој цилиндар или конус; ако основите на тие фигури и сите генератриси на нивната бочна површина ја допираат топаката, односно сферата со која таа е ограничена.

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Каква фигура е множеството точки во просторот, кои од дадена точка T се оддалечени на 4,5 cm?

2. Каква фигура претставува пресекот на топка и рамнина?

3. Што претставува пресекот на две сфери што се сечат?

4. Топка со радиус 3,4 cm е пресечена со рамнина, која е на растојание 1,6 cm од центарот. Одреди ги радиусот, периметарт и плоштината на добиениот пресек!

5. Една топка пресечена е со рамнина, која е на растојание 3 cm од центарот. Определи го радиусот на топката, ако добиениот пресек има плоштина 50,24 cm².

6. Радиусот на една топка е 1 dm. Пресметај ги периметарот и плоштината на пресекот, што го преполовува радиусот на топката?

7. Еден град се наоѓа на 60° северна географска ширина. Пресметај ја должината на паралелата на која се наоѓа тој град, ако земеме дека Земјата е топка со радиус 6370 km.

8. Еден град се наоѓа на 45° северна географска ширина. Одреди ја должината на паралелата на која се наоѓа тој град!

9. Пресметај го радиусот на топка, ако периметарот на големиот круг на топката е 18,84 cm.

10. Определи го радиусот на топка, ако плоштината на еден нејзин голем круг е 78,5 cm².

11. Колку големи кружници можат да се повлечат низ кои и да било две точки на сферата?

12. Низ кои две точки од сферата можат да се повлечат повеќе големи кружници?

13. Каква фигура претставува пресекот на една цилиндрична површина и сфера, ако оската на цилиндричната површина минува низ центарот на сферата?

14. Две складни сфери со радиус 4 cm се поставени така што центарот на едната лежи на другата сфера. Одреди ја должината на кружницата по која се сечат тие две сфери!

15. Три паралелни рамнини го расекуваат дијаметарот на топката на четири складни делови. Одреди ги плоштините на добиените пресеци на топката со тие рамнини, ако топката има радиус $r=12$ cm.

16. На сферата се дадени две различни точки A и B. Што претставува најкусиот пат по сферата од A до B?

17. Во топка со радиус 6 cm е впишан прав конус, така што центарот на основата на конусот лежи во центарот на топката. Каков триаголник е оскиниот пресек на тој конус? Да се пресмета: а) плоштината на оскиниот пресек на конусот, б) плоштината на обвивката на конусот, в) волуменот на конусот!

18. Во кој цилиндар може да се впише топка?

§ 48. ДЕЛОВИ ОД СФЕРАТА И ТОПКАТА

Секоја рамнина, која минува низ центарот на сферата $S(O,r)$ ја разделува истата на два складни дела — наречени *полусфери.*

Исто така, пак, секоја рамнина, која минува низ центарот на топката $T[O,r]$ ја разделува истата на два складни дела — наречени *полутопки.*

Очигледно е дека полутопката е тело ограничено со еден круг $K(O,r)$ и полусферата над него, што има ист центар и радиус како и кругот K.

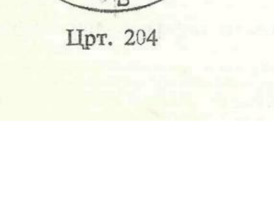
Произволна рамнина што ја сече сферата (односно топката), во општ случај ја разделува сферата (односно топката) на два нескладни дела.

Дефиниција 1. *Дел од сферата, што го отсекува од неа една која и да било рамнина, се вика калота* (црт. 204).

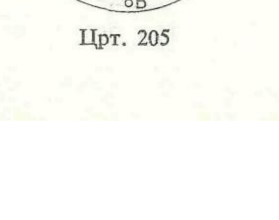
Кружницата $k(O_1,r_1)$ — пресек на рамнината со сферата $S(O,r)$, се вика *основа на калотата*, а отсечката AO_1, од дијаметарот AB што е нормален на рамнината на сечењето, се вика *висина на калотата* (црт. 204).

Дефиниција 2. *Дел од сферата, заклучен меѓу две паралелни рамнини што ја сечат сферата, се вика сферен* (*топкин*) *појас* (црт. 205).

Кружниците k_1 и k_2 — пресеци на сферата со паралелните рамнини, се викаат *основи на појасот*, а отсечката O_1O_2 меѓу центрите на кружниците k_1 и k_2, се вика *висина на појасот* (црт. 205).



Црт. 204



Црт. 205

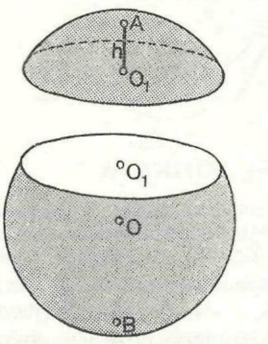
Должините на висините на калотата и појасот обично ќе ги означуваме со h, т.е. $\overline{AO_1} = h$ (црт. 204) и $\overline{O_1 O_2} = h$ (црт. 205).

Дефиниција 3. *Дел од топката — тело што го отсекува од неа, која и да било рамнина, се вика топкин отсечок или топкин сегмент* (црт. 206).

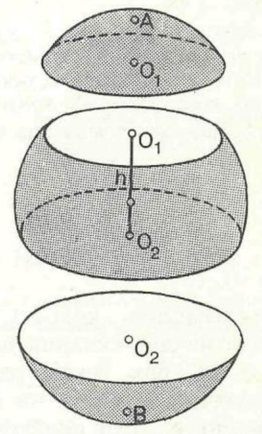
Јасно е дека топкиниот отсечок е ограничен со една калота и нејзината основа. Основата и висината на калотата се викаат соодветно основа и висина и на топкиниот отсечок.

Дефиниција 4. *Дел од топката — тело заклучено меѓу две паралелни рамнини што ја сечат топката, се вика топкин слој* (*или пласт*) (црт. 207).

Значи, топкин слој е тело што е ограничено со еден сферен појас и двете негови основи (црт. 207).



Црт. 206

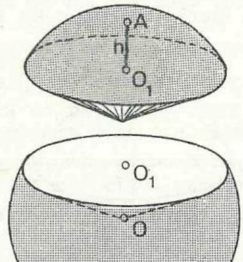


Црт. 207

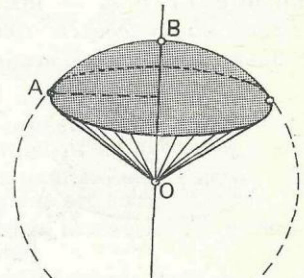
Основите и висината на сферниот појас се викаат исто така основи и на топкиниот слој.

Дефиниција 5. *Дел од топката — тело што се добива кога кон еден топкин отсечок се додаде* (*односно отстрани*) *еден конус, чиј врв е во центарот на топката, а основата му се совпаѓа со основата на топкиниот отсечок, се вика топкин исечок* (*или сектор*) (црт. 208).

Ако топкиниот отсечок е помал од полутопката, тогаш кон него се додава спомнатиот конус. Ако, пак, топкиниот отсечок е поголем од полутопката, тогаш односниот конус се отстранува од него (црт. 208).



Црт. 208



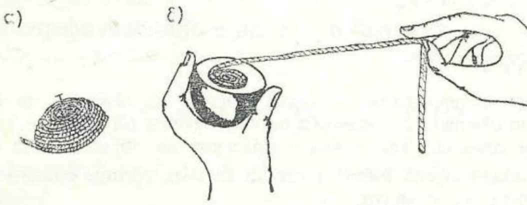
Црт. 209

Лесно се уверуваме дека: топкиниот исечок е ротационо тело, коешто се образува при вртење на еден кружен исечок AOB што е дел од полукруг кога тој се врти околу својот дијаметар (црт. 209).

§ 49. ПЛОШТИНА НА СФЕРА

Сферата е крива површина исто како и бочните површини на цилиндарот и конусот. Видовме дека и цилиндричната и конусната површина успеавме да ги „развиеме" во една рамнина, т.с. да ги направиме рамни. Меѓутоа сферата, за разлика од нив, по никаков начин не можеме да ја „развиеме" (со сите свои делови да ја поставиме) во една рамнина. Затоа немаме можност да ја добиеме мрежата на сферата и од неа да согледаме како ќе ја пресметуваме нејзината плоштина.

Определувањето плоштината на сферата, односно топката, ќе ја покажеме со следниов обид:



Црт. 210

Да земеме една навосочена врвка со еднаква дебелина и една дрвена полутопка. Едниот крај на врвката да го прицврстиме со едно шајче во највисоката точка од полутопката, а потоа врвцата внимателно да ја намотуваме по површината на полутопката, додека таа наполно не се покрие, како што е тоа покажано на црт. 210-а. Кога ќе го сториме тоа, ја мериме должината на употребената врвка.

Истата врвка потоа ја намотуваме и по површината на кругот на полутопката, почнувајќи од неговиот центар сè додека не се покрие целата негова површина (црт. 210-б). Ако обидот го повториме неколку пати, а потоа ги споредиме должините на врвката што се употребени во двата случаи, ќе утврдиме дека: врвката што е употребена за покривање на големиот круг на полутопката е 2 пати покуса од онаа што е употребена за покривање на издадениот дел на истата полутопка.

Тоа нè упатува на заклучокот дека: плоштината на полусферата е 2 пати поголема од плоштината на нејзиниот голем круг, односно дека ќе важи следнава:

Теорема. *Плоштината на сферата е еднаква на четворократната плоштина на нејзиниот голем круг*, т.е.

$$P = 4 \cdot \pi r^2, \tag{1}$$

каде што r е радиус на сферата, односно топката.

Со доказот на ова теорема ќе се запознаете во понатамошното школување.

Ако ни е позната плоштинта на сферата, а треба да се определи нејзиниот радиус, тогаш од формулата (1) лесно наоѓаме дека:

$$r^2 = \frac{P}{4\pi} \quad \text{или} \quad r = \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{P}{4}}, \quad \text{каде што} \quad \frac{1}{\pi} \approx 0{,}318$$

Последица 1. **Плоштините на две сфери се однесуваат како квадратите на нивните радиуси:**

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Последица 2. **Плоштината на сферата (односно топката) е еднаква на производот од должината на нејзината голема кружница и должината на нејзиниот дијаметар.**

Навистина, формулата (1) за плоштина на сферата може да се запише и во овој вид:

$$P = 4\pi r^2 = 2\pi r \cdot 2r$$

Задача 1. Околу коцка со раб $a = 6$ cm е опишана сфера. Да се пресмета плоштината на таа сфера.

Решение: Бидејќи сите темиња на коцката мораат да лежат и на опишаната околу неа сфера, тоа центарот на сферата ќе се наоѓа во онаа точка од коцката, која е еднакво оддалечена од сите нејзини темиња. Таа точка е пресекот на дијагоналите на коцката.

Според тоа, опишаната сфера околу коцката ќе има радиус еднаков на половина од должината на дијагоналата на коцката, т.е.

$$r = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \ (\text{cm})$$

Бараната плоштина на сферата ќе биде:

$$P = 4\pi r^2 = 4\pi (3\sqrt{3})^2 = 4\pi \cdot 27 = 108\,\pi \ (\text{cm}^2)$$

Задача 2. Периметарот на големиот круг на една топка е 9π dm. Да се пресмета плоштината на топката.

Решение: Од периметарот на големиот круг можеме да го одредиме радиусот на, топката, т.е. од $L = 2\pi r$ ќе имаме:

$$r = \frac{L}{2\pi} = \frac{9\pi}{2\pi} = 4{,}5 \ (\text{dm}).$$

Бараната плоштина на топката, тогаш ќе биде:

$$P = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 4{,}5^2 = 4\pi \cdot 20{,}25 = 81\,\pi \approx 254{,}34 \ (\text{dm}^2).$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Пресметај ја плоштината на топка, чиј радиус е: а) 3,5 cm, б) 1 dm, в) 14 cm.

2. Плоштината на топката е 452,16 cm². Одреди ја плоштината на големиот круг на топката!

3. Плоштината на големиот круг на една топка е 9π cm². Пресметај ја плоштината на топката!

4. Пресметај ја плоштината на површината на Земјата, кога знаеш дека должината на главниот меридијан е 40 000 km.

5. Како се однесуваат плоштините на две сфери, чии радиуси се: $r_1=2$ cm и $r_2=3$ cm?

6. Како се однесуваат радиусите на две сфери, ако нивните плоштини се однесуваат: а) 1 : 4, б) 4 : 9, в) 4 : 25?

7. Колку пати треба да се зголеми должината на дијаметарот на сферата, така што нејзината плоштина да се зголеми: а) 4 пати, б) 9 пати, в) 25 пати, г) 100 пати?

8. Радиусите на две сфери се 6 cm и 5 cm. Определи го радиусот на сферата чија плоштина е еднаква на: а) збирот, б) разликата од плоштините на дадените сфери.

9. Куполата на една ѕвездарница има форма на полусфера со дијаметар 15 m. Колку m^2 бакарна ламарина е потребно за покривање на таа купола, ако на отпадоци се смета, уште 18%?

10. Како се менува плоштината на сфера, ако нејзиниот радиус: а) се зголеми 2, 3, 4,. . . пати, б) се намали 2, 3, 4, . . . пати?

11. Радиусот на Марс приближно е еднаков на половина од радиусот на Земјата, а радиусот на Јупитер е 11 пати поголем од радиусот на Земјата. Колку пати плоштината на површината на Јупитер е поголема од плоштината на: а) Земјата, б) Марс?

12. Дадена е коцка со раб $a=9$ cm. Одреди ја плоштината на топка, што е: а) впишана во коцката, б) опишана околу коцката!

13. Докажи дека плоштината на топката е еднаква на плоштината на обвивката на опишаниот цилиндар околу неа!

14. Одреди го односот од плоштините на топката и впишниот во неа рамностран, цилиндар!

15. Одреди ја плоштината на големиот круг и радиусот на топка, чија плоштина е $100\,\pi$ cm^2.

16. Докажи дека: рамностран конус и полутопка, кои имаат складни основи, имаат еднакви плоштини!

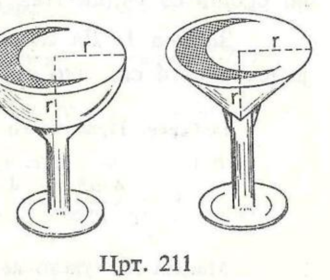
17. Пресметај ја плоштината на површината на Месечината, кога знаеш дека нејзиниот радиус е 1740 km!

§ 50. ВОЛУМЕН НА ТОПКА

Волуменот на топката не можеме да го определиме со непосредно мерење, затоа ќе се послужиме прво со следниов обид:

Да земеме две чаши, од кои едната да има фомра на полутопка, а другата — форма на конус. Чашите нека имаат еднакви радиуси на отворите, а длабочините нека им бидат исто колку што е радисуот на отворите (црт. 211).

Ако имаме такви две чаши, тогаш лесно се уверуваме дека првата полутопчеста чаша се наполнува точно со две полни конусни чаши вода. Тоа ни покажува дека волуменот на полутопката е двапати поголем од волуменот на конус, што има радиус и висина еднакви на радиусот на полутопката; а волуменот на целата топка ќе биде 4 пати поголем од волуменот на тој конус.

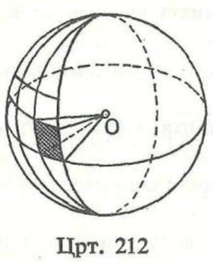


Црт. 211

Бидејќи волуменот на конус, чија висина е $h = r$, е еднаков на: $V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 \cdot r}{3} = \frac{\pi r^3}{3}$, тоа волуменот на топката, ќе биде:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \tag{1}$$

До формулата (1) за волумен на топката можеме да дојдеме и вака. Замислете дека топката е тело што е составено од бесконечно многу пирамиди, чии врвови лежат во центарот на топката, а основите им се извонредно мали делови (криволиниски четириаголници) од топкината површина (сферата) (црт. 212). Висините на сите тие пирамиди многу малку се разликуваат по должина од радиусот на топката. Ако ги собереме волумените на сите тие, една до друга наредени пирамиди, јасно е дека ќе го добиеме волуменот на топката.



Црт. 212

Волуменот на пирамидата е еднаков на производот од плоштината на основата и $\frac{1}{3}$ од висината на пирамидата. Бидејќи висината на секоја од тие пирамиди, од кои е составена топката, е еднаква на радиусот на топката, тоа збирот од нивните волумени ќе го најдеме кога збирот од плоштините на нивните основи го помножиме со $\frac{1}{3}$ од радиусот на топката. Но бидејќи збирот од плоштините на основите на сите тие пирамиди е еднаков на плоштината на топката, тоа насетуваме дека ќе важи следнава:

Теорема 1. *Волуменот на топката е еднаков на производот од плоштината на топката и* $\frac{1}{3}$ *од должината на нејзиниот радиус*, т.е.

$$V = P \cdot \frac{r}{3}. \text{ Но бидејќи: } P = 4\pi r^2, \text{ тоа:}$$

$$V = 4\pi r^2 \cdot \frac{r}{3} \quad \text{или} \quad V = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Со доказот на горнава теорема за волумен на топката ќе се запознаеме во средното училиште.

Задача 1. Да се одреди масата на едно ѓуле (железна топка), чиј дијаметар е 14 cm, ако $s = 7{,}8$.

Решение: Прво ќе го пресметаме волуменот на ѓулето:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \approx \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 7^3}{3} = 4{,}19 \cdot 343 = 1437{,}17, \text{ т.е. } V \approx 1437 \text{ cm}^3.$$

Масата на ѓулето ќе биде: $M = Vs = 1437 \cdot 7{,}8 = 11208{,}6$ (g) $\approx 11{,}2$ (kg).

Задача 2. Одреди го волуменот на топка, чија плоштина е 100π cm².

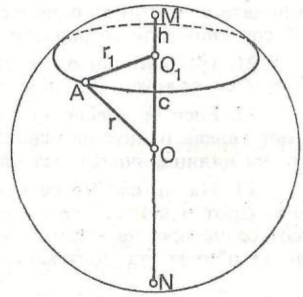
Решение: Од формулата $P=4\pi r^2$ ќе го одредиме радиусот на топката:

$$r=\sqrt{\frac{P}{4\pi}}=\sqrt{\frac{100\,\pi}{4\pi}}=\sqrt{25}=5 \text{ (cm)}.$$

Бараниот волумен на топката, кога се познати нејзината плоштина и радиус, ќе биде:

$$V=P\,.\,\frac{r}{3}=100\,\pi\,.\,\frac{5}{3}\approx 523{,}3 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Задача 3. Еден мал топкин круг, што се наоѓа на растојание 4,5 cm од центарот на топката, има плоштина 36π cm². Да се пресмета волуменот на топката.



Цвт. 213

Решение: Од плоштината на малиот круг $P=\pi r_1^2$ ќе го определиме неговиот радиус r_1. Така од $\pi r_1^2=36\,\pi$ наоѓаме дека $r_1=6$ cm.

Потоа со примена на Питагоровата теорема на правоаголниот триаголник OAO_1 (црт. 213), ќе го одредиме и радиусот на топката:

$$r=\sqrt{r_1^2+c^2}=\sqrt{6^2+4{,}5^2}=\sqrt{36+20{,}25}=\sqrt{56{,}25}=7{,}5 \text{ (cm)}$$

Волуменот на топката, според формулата (1), ќе биде:

$$V=\frac{4\,\pi r^3}{3}=\frac{4\pi\cdot 7{,}5^3}{3}=562{,}5\,\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

1. Пресметај го волуменот на топка, чиј радиус е: а) 2,5 cm, б) 4 cm, в) 12 cm.

2. Да се пресмета плоштината и волуменот на топка, чиј дијаметар е: а) 9 cm, б) 2,6 dm, в) 3 dm.

3. Колку литри вода собира едно алвациско казанче, што има форма, на полутопка со дијаметар 5 dm!

4. Колку кубни метри стаклена маса е потребно за да се направат 500 стаклени лустери во форма на топка, со внатрешен дијаметар 32 cm, а надоврешен дијаметар 33,4 cm?

5. Имаме две чаши, од кои едната има форма на полутопка со радиус r, а другата — форма на конус со радиус на основата r и висина $2\,r$. Која чаша собира повеќе?

6. Во една коцка со раб $a=7$ cm е вишана топка. Пресметај ја плоштината и волуменот на таа топка?

7. Шуплива метална топка со надворешен дијаметар 4 dm и дебелина на ѕидот 5 cm, треба да се претопи во масивна топка. Одреди го радиусот на добиената топка!

8. Радиусите на две метални топки се: 7,5 cm и 4,5 cm. Одреди го радиусот на топката, што се добива кога двете топки се претопат во една.

9. Пресметај го волуменот на атмосферата, ако знаеш дека таа е дебала 200 km, а радиусот на Земјата е 6370 km.

10. Една масивна топка од бакар има маса 10 kg. Одреди го радиусот на топката, ако густината на бакарот е 8,9.

11. Од 10 kg олово ($s=11{,}4$) колку зрна сачми можат да се направат, ако тие имаат форма на топчиња со дијаметар 6 mm?

12. Како се менува волуменот на топката, ако нејзиниот радиус: а) го зголемиме, 2, 3, 4, . . . пати, б) го намалиме 2, 3, 4, . . . пати?

13. Како се однесуваат волумените на две топки, чии радиуси се r_1 и r_2?

14. Одреди го радиусот на топка, чија плоштина и волумен се изразени со ист број!

15. Околу квадар со димензии $a=2$ cm, $b=9$ cm и $c=6$ cm опишана е топка. Одреди ја плоштината и волуменот на таа топка!

16. Од дрвена полутопка со радиус r треба да се изделка можно најголем конус. Колкав процент од волуменот на полутопката претставуваат отпадоците што се добиваат при тоа?

17. Оловна топка со радиус 3 cm треба да се претопи во цилиндар со ист радиус како и топката. Колкава ќе биде висината на тој цилиндар?

18. Покажи дека волумените на рамностран цилиндар и впишаната во него топка се однесуваат 3 : 2!

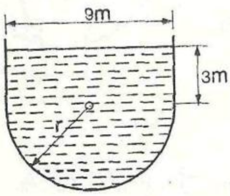
19. Дали може да плива во вода шуплива челична топка со внатрешен дијаметар 14 cm, на која дебелина на ѕидот е 3 mm ($s=7{,}8$).

20. Во цилиндричен сад со внатрешен дијаметар 12 cm има вода до некоја висина. Во водата се потопува една метална топка, при што нивото на водата во садот се покачува за 1 cm. Определи го радисуот на топката!

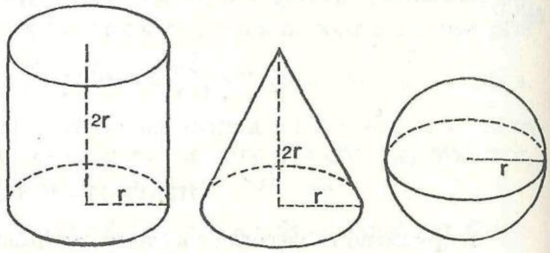
21. Три метални топки со радиус 3 cm, 4 cm и 5 cm треба да се претопат во една топка Одреди го радиусот на новата топка!

22. Еден резервоар за вода се состои од полутопка со радиус 4,5 m и еден цилиндар со ист толкав радиус на основата (црт. 214). Колку *hl* вода собира тој резервоар, ако висината на цилиндричниот дел од него изнесува $h=3$ m?

23. На цртеж 215 се нацртани: цилиндар, конус и топка. Радиусите на основите на цилиндарот и конусот се еднакви на радиусот на топката, а висините на цилиндарот и конусот се еднакви на дијаметарот на топката. Покажи дека волуменот на цилиндарот е еднаков на збирот од волумените на конусот и топката!



Црт. 214



Црт. 215

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Точката T ја дели отсечката AB во однос $m : n$. Одреди ги односите $\overline{AT} : \overline{AB}$ и $\overline{TB} : \overline{AB}$!

2. Точката S ја дели отсечката AB во однос $\overline{AS} : \overline{SB} = 2 : 3$. а) Одреди ги односите: $\frac{\overline{AS}}{\overline{AB}}$, $\frac{\overline{SB}}{\overline{AB}}$. б) Одреди ги должините на отсечките AS и SB, ако $\overline{AB} = 15$ cm.

3. Дадени се две отсечки со должини a и b. Конструирај отсечка чија должина е еднаква на: а) $x = \frac{a^2}{b}$, б) $x = ab$, в) $x = \frac{a}{b}$.

4. Во триаголникот ABC е вписан ромб $AMNP$, така што темињата M, N и P лежат соодветно на страните AB, BC и AC. Одреди ги должините на отсечките BN и NC, ако се дадени должините на страните на триаголникот: $\overline{AB} = 7$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm и $\overline{AC} = 5$ cm.

5. Бисектрисата на остриот агол на паралелограмот ја дели неговата дијагонала на отсечки долги 1,6 cm и 4,4 cm. Најди ги должините на страните на паралелограмот, ако неговиот периметар е 15 cm.

6. Да се конструира триаголник со даден периметар, што е сличен на друг даден триаголник.

7. Во триаголникот ABC со страни $\overline{AC} = 15$ cm и $\overline{BC} = 10$ cm е повлечена бисектрисата CD на аголот C. Низ точката D е повлечена права паралелна на AC, која ја сече BC во точката E. Одреди ги должините на отсечките BE, CE и DE.

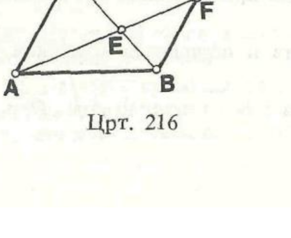
8. Краците на еден трапез се долги 15 cm и 10 cm, а големата основа 33 cm. Помалата дијагонала го разделува трапезот на два слични триаголници. Одреди ја должината на помалата основа и дијагоналата!

9. Во кружницата се повлечени две тетиви што се сечат, при што едната е разделена на делови долги 4 cm и 1 cm, а другата е разделена на два складни дела. Одреди ја должината на втората тетива.

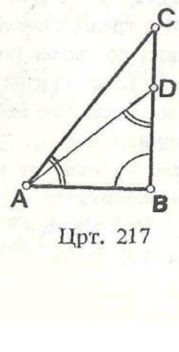
10. Во триаголникот ABC е вписан ромб чиј еден агол се совпаѓа со аголот A на триаголникот. Одреди ја страната на ромбот, ако $\overline{AB} = 12$ cm и $\overline{AC} = 8$ cm.

11. Покажи ги сите парови слични триаголници, што се образуваат на црт. 216, каде што $ABCD$ е паралелограм.

12. Во даден паралелограм впиши ромб, така што страните на ромбот да се паралелни на дијагоналите на паралелограмот, а темињата на ромбот да лежат на страните на паралелограмот.



Црт. 216



Црт. 217

13. За колку треба да се продолжи отсечката $\overline{AB}=14$ cm, така што за добиената отсечка BM да важи односот $\overline{AB}:\overline{BM}=7:3$.

14. Низ точката M што лежи на страната AB од триаголникот ABC е повлечена отсечката MN паралелна на страната AC. Одреди ја должината на отсечката BN ако $\overline{AM}:\overline{MB}=5:3$, а $\overline{BC}=12$ cm.

15. Во триаголникот ABC што е нацртан на црт. 217 е повлечена отсечката AD, така што $\sphericalangle ADB \cong \sphericalangle BAC$. Кои триаголници на тој цртеж се слични и запиши ја пропорционалноста на соодветните страни.

16. Во трапезот $ABCD$ ($AB \parallel CD$) аголот DAC е складен на аголот ABC. Одреди ја должината на страните AB и BC, ако е $\overline{AD}=9$ cm, $\overline{CD}=6$ cm и $\overline{AC}=12$ cm!

17. Во трапезот $ABCD$ ($AB \parallel CD$) со дијагонала BD, аглите BAD и CBD се складни. Одреди ја должината на дијагоналата BD, ако основите на трапезот се долги: $\overline{AB}=18$ cm и $\overline{CD}=8$ cm.

18. Основите на трапезот се однесуваат како 8 : 5, а едниот крак е долг 12 cm. За колку треба да го продолжиме тој крак па да го пресече продолжението на другиот крак?

19. Во правоаголен триаголник со прав агол во темето C е впишан правоаголникот $KLMN$ така што темињата M и N лежат на AB, а темето K на страната BC. Најди ги сите парови слични триаголници што се образуваат при тоа!

20. Павле седи во одаја и низ прозорецот гледа еден патнички воз. Железничката линија врви паралелно со прозорецот. Ширината на прозорското стакло е 1,2 m, а Павле седи на растојание 2 m од него. Најди на какво растојание е Павле од железничката линија ако тој гледа 15 вагони, и ако должината на секој вагон (заедно со меѓу вагонскиот простор) е 10 m.

21. Катетите на еден правоаголен триаголник се $a=12$ m и $b=6$ cm. Во него е впишан квадрат така што едниот од неговите агли се совпаѓа со правиот агол на триаголникот. Одреди ја страната на квадратот.

22. Докажи дека: производот од должините на отсечките од секоја секанта повлечена од дадена точка M кон кружницата е еднаков на квадратот од должината на тангентната отсечка.

23. Во дадена кружница со радиус 5 cm впиши триаголик ABC со агли $\alpha=30°$ и $\beta=75°$.

24. Да се консртуира правоаголен триаголник ако е дадена неговата хипотенуза c, а неговите катети се однесуваат како 2 : 3.

25. Да се конструира правоаголен триаголник, ако е дадена висината повлечена кон хипотенузата, а неговите катети се однесуваат како 3 : 5.

26. Во даден ромб да се впише квадрат, чии темиња ќе лежат на страните на ромбот.

27. Во триаголник ABC со основа $\overline{AB}=24$ cm и висина $\overline{CD}=8$ cm е впишан правоаголник така што поголемата страна на првоаголникот лежи на основата AB. Одреди ги должините на страните на правоаголникот, ако тие се однесуваат како 2 : 1.

28. Една од страните на даден триаголник е рзделена во однос 3 : 5 и низ разделната точка е повлечена права паралелна на една од другите две страни. Одреди во каков однос е разделена плоштината на триаголникот од таа права.

29. На растојание 4 cm од основата на триаголникот е повлечена права паралелна на основата, која ја дели плоштината на триаголникот во однос 1 : 3 сметајќи од врвот. Одреди ја висината на триаголникот!

30. Збирот од плоштините на два слични многуаголника е еднаков на 200 cm², а нивните периметри се однесуваат како 3 : 4. Одреди ја плоштината на секој од нив.

31. Плоштинта на Охридското Езеро изнесува 366 km². Колкава е неговата плоштина на план во размер 1 : 25 000?

32. Даден е триаголник ABC. Конструирај друг сличен на него триаголник што е впишан во кружница со даден радиус.

33. Како ќе гласи признакот за сличност на два: а) делтоида, б) рамнокраки трапези?

34. Докажи дека: Ако аглите меѓу дијгоналите на два првоаголника се складни, тогаш тие се слични.

35. Одреди го односот на должините на впишаната и опишаната кружница околу рамностран триаголник.

36. Во трапез со краци 15 cm и 13 cm и една основа 7 cm е впишан круг. Одреди ја плоштината на тој круг.

37. Дадени се две концентрични кружници. Тетивата на поголемата кружница се допира до помалата и има должина 6 cm. Одреди ја плоштината на кружниот прстен.

38. Конструирај круг, еквивалентен на збирот од плоштините на два дадени круга.

39. Даден круг раздели го на три еквивалентни дела со две концентрични кружници.

40. Конструирај круг, еквивалентен на даден кружен прстен!

41. Докажи дека: збирот од плоштините на полукруговите конструирани над катетите на еден правоаголен триголник е еднаков на плоштината на полукругот над хипотенузата.

42. Докажи дека: збирот од плоштините на шрафираните месечинки (Хипократови месечинки) (црт. 218) е еднаков на плоштината на правоаголниот триаголник ABC. (Оваа теорема ја има докажано грчкиот математичар и филозоф Хипокрит околу 450 год. пред н. е.).

43. Над катетите и хипотенузата на правоаголен триаглник, конструирани се рамнострани триаголници. Докажи дека: збирот од плоштините на триаголниците над катетите е еднаков на плоштината на триаголникот над хипотенузата.

44. Нацртај квадрат со страна $a=5$ cm, па во него и околу него опиши кружница. Одреди ја плоштината на добиениот кружен прстен.

45. Конструирај правилен шестаголник со страна $a=3$ cm, па во него и околу него опиши кружница. Пресметај ја ширината и плоштината на добиениот кружен прстен.

46. Во круг со радиус 4 cm е впишан а) рамностран триаголник, б) квадрат, в) правилен шестаголник. Пресметај ја плоштината на кружниот отсечок, што е над една негова страна!

47. Во круг со радиус 7 cm нацртај концентричен круг, така што плоштината на кружниот прстен да е еднаква на плоштината на внатрешниот круг.

48. Околу правоаголник со страни $a=6$ cm и $b=4{,}5$ cm опишан е круг. Пресметај ги периметарот и плоштината на кругот.

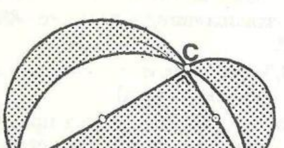
49. За колку е поголема плоштината на кругот со радиус 6 cm од плоштината на впишаниот во него: а) рамностран триаголник, б) квадрат, в) правилен шестаголник?

50. Конструирај круг, еквивалентен на даден полукруг.

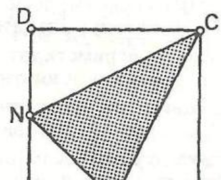
51. Нацртај рамностран триаголник со страна $a=6$ cm. Во него впиши, а околу него опиши кружница. Пресметај ја плоштината на добиениот кружен прстен.

52. Во ромб со страна $a=6$ cm и остар агол $\alpha=60°$, е впишан круг. Пресметај ја плоштината на кругот.

53. Пресметај ја плоштината на заедничкиот дел на два круга со еднакви радиуси $r=3$ cm, ако кружницата на едениот круг минува низ центарот на другиот круг.



Црт. 218



Црт. 219

54. Нацртај два нескладни квадрати, а потоа конструирај нов квадрат, чија плоштина да биде двапати поголема од разликата на плоштините на првите два квадрата.

55. Во кружница со радиус 5 cm е впишан делтоид, чија пократка страна е долга 6 cm. Пресметај ја плоштината на делтоидот.

56. Квадратот $ABCD$ има страна 13 cm. Темето C е сврзано со точките M и N, средини на страните AB и AD (црт. 219). Пресметај ги периметарот и плоштината на триаголникот MNC!

57. Пресметај ги периметарот и плоштината на рамностран триаголник, ако е дадена неговата висина $h=9$ cm.

58. Дадена е кружница со радиус 8 cm и една точка S шо лежи надвор од неа. Најди го растројанието на точката S од центарот на кружницата, ако должината на тангентната отсечка, што е повлечена од точката S кон кружницата, изнесува 15 cm.

59. Во кружница со радиус 3,4 cm се повлечени две паралелни тетиви долги 6 cm и 3,2 cm. Одреди го растојанието меѓу тетивите, ако тие се наоѓаат: а) на иста страна, б) на различни страни од центарот.

60. Даден е ромб со страна долга $a=5$ cm и остар агол 60°. Одреди ги должините на неговите дијагонали!

61. Даден е паралелограм со страни $a=6$ cm и $b=4$ cm и еден негов остар агол 45°. Пресметај ја плоштината на паралелограмот.

62. Две кружници со радиуси 3 cm и 4 cm се сечат, при што заедничката тетива им е долга 4,8 cm. Одреди го растојанието меѓу нивните центри.

63. Две кружници со радиуси 12,5 cm и 8 cm се допираат однадвор. Да се одреди должината на отсечката од нивната заедничка тангента, што е издвоена со допирните точки.

64. Во кружница со радиус 5 cm е впишан рамнокрак триаголник, чија основа е на растојание 3 cm од центарот. Да се одреди должината на кракот на тој триаголник.

65. Една улица е широка 10 m. На растојание 4 m од работ на улицата кон средината на истата, поставена е скала долга 12 m. Нека скалата од тоа место ја потпреме на зградата од едната страна на улицата, а потоа ја потпреме на зградата од спротивната страна на улицата, до која висина достига скалата на тие згради.

66. Еден топ има домет 5 km, т.е. може да исфрли граната на далечина најмногу 5 km. Ако топот е оддалечен 3 km од еден праволиниски пат, колкав дел од патот е под удар на топот?

67. Во кружница со радиус 6,5 cm е впишан правоаголник на кој едната страна изнесува 5 cm. Пресметај ги периметарот и плоштината на правоаголникот!

68. Пресметај ги периметарот и плоштината на правоаголник, кој има 3 пати поголема должина отколку ширина и има дијагонала 13 cm!

69. Должината на еден правоаголник е за 5 cm поголема од неговата ширина. Пресметај ги дијагоналата и плоштината на правоаолникот, ако неговиот периметар е 62 cm.

70. Пресметај ги должините на страната и дијагоналата на квадрат, чија плоштина е $P=2$ m².

71. Еден правоаголник има плоштина 29 dm² и една страна долга 3,5 dm. Одреди го радиусот на опишаната кружница околу него!

72. Во кружница со радиус 4,2 dm е впишан квадрат. Пресметај ги периметарот и плоштината на тој квадрат!

73. Конструирај ромб со страна $a=7,5$ cm и остар агол 60°. Пресемтај ја неговата плоштина и двете дијагонали!

74. Еден ромб има плоштина 20,5 cm² и една дијагонала долга 8,2 cm. Одреди ги периметарот и висината на тој ромб!

75. Едната дијагонала на ромбот е двапати подолга од другата негова дијагонала. Одреди ги должините на дијагоналите на ромбот, ако неговата страна е $a=10$ cm.

76. Пресметај го периметарот на рамнокрак триаголник, ако е позната неговата основа $a=23$ cm и неговата плоштина $P=345$ cm².

77. Во еден рамнокрак триаголник со висина 8,3 cm; кракот е двапати подолг од неговата основа. Пресметај ги неговиот периметар и плоштината!

78. Пократката дијагонала на еден ромбоид го дели истиот на два правоаголни триаголници. Пресметај ги периметарот и плоштината на тој ромбоид, ако неговата должина е 11,5 cm, а пократката дијагонала е 9 cm.

79. Во еден рамнокрак триаголник висината е складна на основата. Пресметај го периметарот на рамнокракиот триаголник, ако неговиот крак е долг 17,2 cm.

80. Висината на еден рамнокрак триаголник е трипати подолга од неговата основа. Пресметај ги периметарот и плоштината на тој триаголник, ако кракот е долг 29 cm.

81. Периметарот на еден рамнокрак трапез изнесува $L=149$ cm а основите се долги 63 cm и 32 cm. Пресметај ја неговата плоштина!

82. Во еден ромб страната и едната дијагонала се складни и се долги по 4,8 cm. Пресметај ја должината на другата дијагонала на ромбот? Каков е остриот агол на ромбот?

83. Нацртај три складни рамнострани триаголници со страна $a=2,3$ cm. Исечи ги и од нив состави трапез. Пресметај ги периметарот, плоштината и дијагоналата на тој трапез!

84. Пресметај ги плоштината и периметарот на рамнокрак триаголник, ако основата е долга 16 cm, а висината што ѝ одговара е за 4 cm пократка од кракот!

85. Равнокрак триаголник со основа $a=10$ cm и крак $b=13$ cm претвори го во правоаголен триаголник со иста основа. Пресметај го периметарот на добиениот правоаголен триаголник!

86. Со кои три последователни цели броеви можат да се изразат должините на страните на правоаголниот триаголник?

87. На отсечката $\overline{AB}=10$ cm е земена една точка C, така што $\overline{AC}=4$ cm. Над отсечките AC и CB на една иста страна, конструирани се рамнострани триаголници ACE и CBD, чии врвни темиња E и D се сврзани. Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ABDE$!

88. Висината спуштена кон кракот на еден равнокрак триаголник го дели кракот на делови долги 2 cm и 7 cm. Одреди ги периметарот и плоштината на тој триаголник!

89. Дијагоналите на еден трапез се долги 30 cm и 22,5 cm, а висината 18 cm. Пресметај ја плоштината на тој трапез!

90. Нацртај две концентрични кужници со радиуси $r_1=5$ cm и $r_2=3$ cm; потоа во поголемата кружница повлечи тетива, која да ја допира помалата кружница. Одреди ја должината на повлечената тетива!

91. Две кружници се допираат однадвор. Одреди ја должината на нивната надворешна заедничка тангента, ако радиусите на кружниците се долги 5 cm и 3,2 cm.

92. Кружниот отсечок MTN (црт. 220) одреди од кој круг е дел, ако е познато дека $\overline{MN}=6$ cm и $\overline{ST}=0{,}6$ cm.

93. Во една кружница се повлечени две паралелни тетиви од различни страни на центарот. Одреди го радиусот на кружницата, ако тетивите се долги 18 cm и 24 cm, а растојанието меѓу нив е 21 cm.

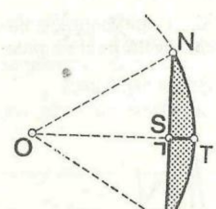
94. Две кружници се сечат, при што заедничката тетива им е долга $\overline{AB}=4$ cm. Тетивата AB во помалата кружница претставува страна на впишан квадрат, а во поголемата кружница таа е страна на впишан правилен шестаголник. Конструирај ја фигурата и пресметај ја плоштината на четириаголникот, чии темиња се крајните точки A и B на заедничката тетива и центрите S и S_1 на двете кружници.

95. Пресметај ги периметарот и плоштината на разностран триаголник ако се дадени должините на две негови страни: $a=23$ cm и $b=14{,}7$ cm и висината што ѝ одговара на третата страна $h_c=8{,}3$ cm.

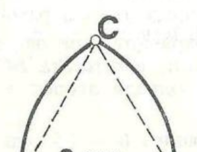
96. Пресметај ги плоштината и периметарот на равнокрак трапез, ако се познати: неговата висина 12 cm, дијагоналата 2 dm и кракот 13 cm!

97. Пресметај ги периметарот и плоштината на фигурата ABC на црт. 221, што е ограничена со три складни кружни лаци со радиус 2 cm.

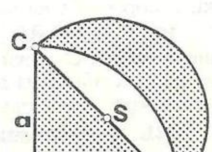
98. Даден е равнокрак правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето A и катети $\overline{AB}=\overline{AC}=a$ (црт. 222). Од темето A (како центар) е опишан кружен лак $\widehat{BC}$, а од точката S — средина на хипотенузата BC е опишана полукружница над хипотенузата BC. На тој начин се добива една месечинка меѓу двата кружни лака. Покажи дека плоштината на добиената месечинка е еднаква на плоштината на ΔABC.



Црт. 220



Црт. 221



Црт. 222

99. Равнокрак трапез е опишан околу дадена кружница k. Докажи дека дијаметарот на кружницата k е геометриска средина меѓу основите на тој трапез!

100. Бисектрисата на остриот агол во правоаголниот триаголник ја дели спротивната катета на делови 2 cm и 2,5 cm. Одреди ја хипотенузата на тој триаголник!

101. Средната линија на еден равнокрак трапез е долга 8 cm, а висината е 6 cm. Одреди ја должината на дијагоналата на трапезот.

102. Докажи дека: во правоаголен трапез разликата од квадратите на дијагоналите е еднаква на разликата на квадратите на основите.

103. Околу рамнокрак трапез $ABCD$ со основи долги 16 cm и 12 cm и висина долга 14 cm е опишана кружница. Одреди го радиусот на кружницата!

104. Даден е четириаголник $ABCD$, чии дијагонали се заемно нормални. Докажи дека збирот од квадратите на две спротивни страни е едаков на збирот од квадратите на другите две страни на тој четириаголник!

105. Докажи дека: висината што ѝ одговара на хипотенузата е четврта пропорционала на хипотенузата и катетите на правоаголниот триаголник.

106. Да се конструира квадрат, што е еквивалентен на даден рамностран триаголник!

107. Околу рамнокрак триаголник ABC со основа $a=12$ cm и крак $b=18{,}5$ cm е опишана кружница. Одреди го радиусот на кружницата!

108. Бисектрисата на правиот агол на правоаголен триаголник ја разделува хипотенузата во однос $m:n$. Од темето на правиот агол е повлечена висина кон хипотенузата. Во каков однос се разделува хипотенузата од повлечената висина.

109. Нека A, B, C се три точки што не лежат на иста права. Нека P_A е множество на сите прави што минуваат низ точката A, P_B — множество на сите прави што минуваат низ точката B, а P_C — множество на сите прави што минуваат низ точката C. Одреди какви множества се пресеците: а) $P_A \cap P_B$, б) $P_A \cap P_C$, в) $P_B \cap P_C$, г) $P_A \cap P_B \cap P_C$?

110. Дадена е права p и две точки A и B што не лежат на правата p. Дали постои рамнина која минува низ точките A и B, а е паралелна на правата p? Ако постои, колку такви рамнини има?

111. Дадени се две разминувачки први a и b и точка M ($M \notin a$, $M \notin b$). Дали постои рамнина, која минува низ точката M, а е паралелна на правите a и b? Ако постои, колку такви рамнини има?

112. Дадени се четири точки A, B, C и D што не лежат на една рамнина. Докажи дека средините на отсечките AB, BC, CD и AD лежат на иста рамнина!

113. Докажи дека, сите прави што минуваат низ дадена точка M и се паралелни на дадена рамнина π лежат на една иста рамнина.

114. Што образува симетралата на една отсечка, ако таа се врти околу отсечката?

115. Одреди го множеството точки во просторот што се еднакво оддалечени: а) од трите темиња на даден триаголник, б) од сите точки на една кружница!

116. Докажи: Ако две точки од една права се еднакво оддалечени од дадена рамнина и лежат на една иста страна од неа, тогаш правата е паралелна на рамнината.

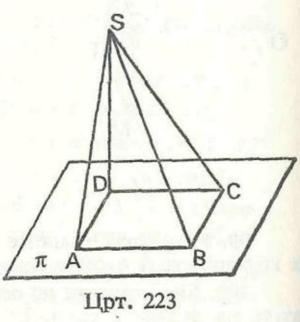
117. Докажи дека, ако три точки од една рамнина што не лежат на права, се еднакво оддалечени од друга рамнина и лежат на една иста страна од неа, тогаш двете рамнини се паралелни.

118. Низ темето A на правоаголникот $ABCD$ е повлечена нормала p на неговата рамнина и произволна точка $M \notin p$ е соединета со точките B и D. Докажи дека аглите $\sphericalangle MBC$ и $\sphericalangle MDC$ се прави!

119. Дали може да се тврди дека: а) права што е паралелна на дадена рамнина, е паралелна и на која и да било права од таа рамнина, б) права што е нормална на дадена рамнина, е нормална на која и да било права од таа рамнина?

120. Катетата AC на рамнокракиот правоаголен триаголник ABC лежи на рамнината π, а катетата BC со рамнината π образува агол 45°. Да се одреди аголот меѓу хипотенузата AB и рамнината π.

121. Правоаголник $ABCD$ со страни $\overline{AB} = 4{,}5$ cm и $\overline{BC}=4$ cm лежи во рамнината π (црт. 223). Од темето D е издигната нормала $\overline{DS}=6$ cm на π. Да се одредат растојанијата од точката S до другите три темиња на правоаголникот.



Црт. 223

122. Дадена точка M е на растојание 5 cm од рамнината π. Растојанието од проекцијата M' на точката M на рамнината π до правата p што лежи на π е еднакво на 12 cm. Да се одреди растојанието од точката M до правата p!

123. Како ќе одредиш точка што лежи на дадена права p и се наоѓа на еднакво растојание од две дадени точки A и B?

124. Каква фигура е множеството точки во просторот, од кои секоја лежи на дадена рамнина π и е еднакво оддалечена од две дадени точки A и B?

125. Од една точка M се повлечени две складни наведнати отсечки кон рамнината π, од кои секоја со рамнината π образува агол 45°. Одреди го аголот меѓу двете отсечки, ако нивните проекции на рамнината π се заемно нормални!

126. Кои услови се доволни, за да бидат: а) права и рамнина заемно паралелни, б) права и рамнина заемно нормални, в) две рамнини паралелни, г) две рамнини заемно нормални?

127. Каква фигура претставува множеството од точки во просторот, што се еднакво оддалечени од темињата на даден триаголник ABC?

128. Докажи дека: ако трите рабни агли на едно трирабно ќоше се прави, тогаш и неговите три диедри се прави!

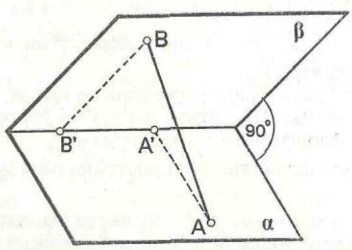
129. На ѕидовите на еден прав диедар се земени две точки A и B ($A \in \alpha$ и $B \in \beta$), кои од работ на диедарот се оддалечени $\overline{AA'}=15$ cm и $\overline{BB'}=6$ cm (срт. 224). Одреди го растојанието $\overline{AB}$, ако $\overline{A'B'}=20$ cm.

130. Докажи дека, кај секоја правилна призма постои внатрешна точка, која е еднакво оддалечена од темињата на призмата!

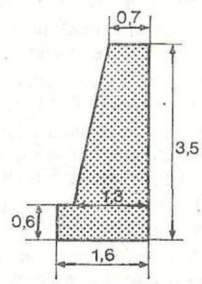
131. Одреди ја дијагоналата на една правилна четиристрана призма, ако се познати должините на дијагоналата на основата $d_1=8$ cm и дијагоналата на бочниот ѕид $d_2=7$ cm.

132. Докажи дека, дијагоналните пресеци на паралелопипедот се паралелограми!

133. Докажи дека сите дијагонали на квадарот се складни!



Црт. 224



Црт. 225

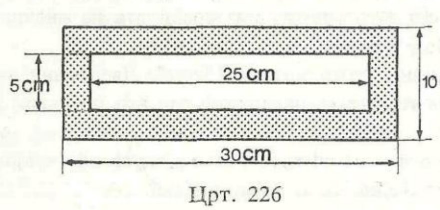
134. Основата на прав паралелопипед е ромб со плоштина 96 cm². Плоштините на неговите дијагонални пресеци се 84 cm² и 112 cm². Одреди ја плоштината на паралелопипедот!

135. Дијагоналата на правилна четиристрана призма е 9 cm, а нејзината плоштина е 144 cm². Одреди ги должините на рабовите на призмата!

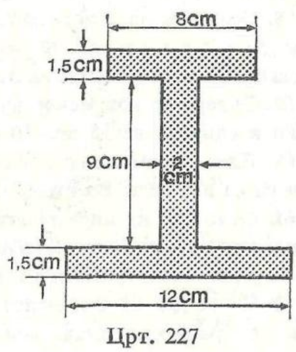
136. Колку кубни метри има еден бетонски потпорен ѕид долг 80 m, чиј напречен пресек има димензии што се покажани на црт. 225. Димнеизиите на цртежот се дадени во метри.

137. Пресметај ја масата на една бакарна рамка според димензиите на црт. 226. Дебелината на рамката е 3 cm, а $s=8{,}9$.

138. Пресметај ја масата на железен носач долг 3,5 m, чиј напречен пресек има димензии што се означени на црт. 227, а $s=7{,}8$.



Црт. 226



Црт. 227

139. Основата на прав паралелопипед е паралелограм со плоштина 54 cm^2 и еден од аглите е 30°. Плоштините на бочните ѕидови на паралелопипедот се 8 cm^2 и 24 cm^2. Одреди го неговиот волумен?

140. Да се одреди волуменот на правилна тристрана призма, ако основниот раб е 2 cm, а плоштината на нејзината обвивка е еднаквоголема на плоштината на двете основи на призмата.

141. Плоштините на три ѕида на еден квадар се еднакви на 8 cm^2, 6 cm^2 и 12 cm^2. Одреди го волуменот на квадарот!

142. Основата на прав паралелопипед е ромб со страна 4 cm и агол меѓу страните 60°. Помалата дијагонала на паралелопипедот е долга 5 cm. Да се одреди волуменот на паралелопипедот.

143. Сите ѕидови на една дрвена коцка со раб 6 cm да ги обоиме, а потоа истата да ја разрежеме на коцкици со раб 2 cm. Колку такви коцкици ќе добиеме што се: а) со три обоени ѕида, б) со два обоени ѕида, в) со еден обоен ѕид, г) со ниту еден обоен ѕид?

144. Плоштината на обвивката на една правилна тристрана призма изнесува 390 cm^2, а нејзината висина е 2 dm. Одреди го волуменот на призмата!

145. Права призма со висина 10 cm за основа има ромб, чија страна е 5 cm, а дијагоналата $d_1=6$ cm. Пресметај ја плоштината и волуменот на таа призма!

146. Дали може метална прачка што е долга 16,5 cm, да се смести во една кутија која има форма на квадар со димензии: $a=12$ cm, $b=9$ cm, $c=8$ cm?

147. Права призма со висина 8,5 cm има за основа равнокрак правоаголен триаголник со хипотенуза 4 cm. Пресметај ги плоштината и волуменот на призмата!

148. Една правилна тристрана призма од олово, чиј раб е 8 cm и висина 20 cm, сакаме да ја претопиме во коцка. Колкав раб ќе има така добиената коцка?

149. Кибритена кутија има димензии 5 cm, 3 cm и 1,5 cm. Колку такви кутии можат да се сложат во најмал пакет, што ќе има форма на коцка?

150. Еден правоаголник има димензии 12 cm и 5 cm. Ако ги соединиме средишните точки на неговите страни, ќе добиеме еден четириаголник. Тој четириаголник е основа на една права призма, чиј волумен е 540 cm^3. Одреди ја плоштината на таа призма!

151. Докажи дека: дијагоналниот пресек на една правилна четиристрана пирамида е нормален на основата на пирамидата!

152. Плоштината на основата на една пирамида е $B=400$ cm^2. Висината на пирамидата е разделена на четири складни дела и низ разделните точки се поставени рамнини паралелни на основата. Одреди ги плоштините на добиените пресеци!

153. Какви се диедрите што ги образуваат бочните ѕидови на една правилна пирамида?

154. Тристрана пирамида со складни бочни рабови за основа има правоаголен триаголник. Во која точка се наоѓа подножјето на нејзината висина.

155. Плоштината на основата на пирамидата е 512 cm^2, а висината е 16 cm. Да се одреди плоштината на паралелниот пресек што е на растојание 11 cm од врвот на пирамидата.

156. Основата на пирамидата е квадрат со страна 20 cm. Два од бочните ѕида се нормални на основата на пирамидата. Висината на пирамидата е $h=21$ cm. Да се одреди плоштината на пирамидата.

157. Основата на една пирамида е ромб со дијагонали 12 cm и 16 cm. Висината на пирамидата е $h=6{,}4$ cm, а нејзиното подножје е во пресекот на дијагоналите на основата. Одреди ја плоштината на пирамидата!

158. Основата на тристраната пирамида $SABC$ е правоаголен триаголник ABC со хипотенуза $\overline{AB}=25$ cm и катета $\overline{BC}=7$ cm. Бочниот раб $\overline{SA}=18$ cm е нормален на основата на пирамидата. Одреди ја плоштината на таа пирамида!

159. Одреди го волуменот на тристрана пирамида, на која бочните рабови се заемно нормални и еднакви на 15 cm, 10 cm, 9 cm!

160. Една пирамида со паралелниот пресек што минува низ средината на висината, е разделена на два дела. Во каков однос се наоѓаат волумените на тие два дела?

161. Основата на пирамидата е правоаголник со плоштина 15 cm^2. Два бочни ѕида на пирамидата се нормални на основата, а другите два се наведнати кон неа под агли 30° и 60°. Одреди го волуменот на пирамидата!

162. Каков дел од волуменот на коцката отсекува рамнина, што минува низ крајните точки на три раба на коцката кои излегуваат од едно исто нејзино теме?

163. Тристрана пирамида со складни бочни рабови $s=9$ cm за основа има рамнокрак триаголник, чија основа е $a=5$ cm и крак $b=6,5$ cm. Пресметај ги плоштината и волуменот на таа пирамида!

164. Висината на една правилна тристрана пирамида е еднаква на половината од нејзиниот бочен раб. Пресметај ја плоштината на пирамидата, ако основнот раб е $a=6$ cm!

165. Радиусот на опишаната кружница околу основата на правилна тристрана пирамида е 3 cm, а висината на пирамидата е 4 cm. Пресметај ги плоштината и волуменот на пирамидата?

166. Правилна четиритрана пирамида со основен раб $a=10$ cm има дијагонален пресек рамностран триаголник. Пресметај ги плоштината и волуменот на пирамидата!

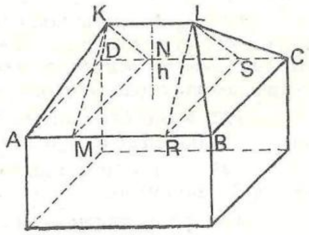
167. Бочните рабови на една правилна тристрана пирамида, чиј основен раб е $a=6$ cm, се заемно нормални. Пресметај ги плоштината и волуменот на пирамидата!

168. Бочните рабови на една правилна тристрана пирамида, која има обвивка $B=294$ cm^2, се заемно нормални. Пресметај ги основниот и бочниот раб и волуменот на пирамидата!

169. Дадена е коцка со раб $a=12$ cm. Отсечи ги темињата на таа коцка со рамнини, од кои секоја да мине низ средишните точки на секои три соседни раба на коцката. Одреди го волуменот на преостанатиот дел од коцката!

170. Пресметај го волуменот на таванскиот простор под покривот на една куќа (црт. 228), ако основата на покривот е правоаголник со страни $a=\overline{AB}=14$ m и $b=\overline{BC}=9$ m. Сртот на покривот е $s=\overline{KL}=5$ m, а неговата висина од основата на покривот е $h=3,5$ m.

Упатство: Ако низ крајните точки на сртот K и L поставиме две рамнини, што се нормални на рамнината на основата на покривот, тогаш таванот ќе се подели на две пирамиди $KAMND$ и $LRBCS$ и една права тристрана призма $KMNLRS$.



Црт. 228

171. Во цилиндар со дијаметар на основата 15 cm и висина 5 cm е поставен надолжен пресек на растојание 4,5 cm од оската. Пресметај ја плоштината на пресекот!

172. Во цилиндар со висина 12 cm е поставена рамнина паралелна на оската и на растојание 4 cm од неа. Рамнината отсекува од кружницата на основата на цилиндарот кружен лак од 120°. Да се одреди плоштината на добиениот надолжен пресек.

173. Рамностран цилиндар со радиус на основата 10 cm е пресечен со рамнина паралелна на неговата оска, која од кружницата на основата отсекува кружен лак 90°. Да се одреди плоштината на помалиот добиен дел од цилиндарот.

174. За колку треба да ја зголемиме висината на еден цилиндар, така што плоштината на обвивката на новодобиениот цилиндар да биде еднаква на плоштината на дадениот цилиндар.

175. Даден е праоаголник со страни 3 cm и 5 cm. Спореди ги волумените на три цилиндра, од кои два се добиваат со вртење на дадениот правоаголник околу секоја од двете негови страни, а третиот околу страната на квадрат чиј периметар е еднаков на периметарот на дадениот правоаголник.

176. Колкава треба да биде длабочината на цилиндричен резервоар со дијаметар на основата 8 m, ако сакаме тој да собира 1400 *hl* вода.

177. Периметарот на основата на еден рамностран цилиндар е 10π cm. Одреди ја неговата плоштина и волумен!

178. Во коцка со раб 6 cm е вишан и опишан цилиндар. Одреди го односот од волумените на тие два цилиндра!

179. Дијаметрите на два цилиндрични сада (мерени од внатре) изнесуваат 15 cm и 20 cm. Во првиот сад има вода до висина 32 cm. Ако таа вода ја прелееме во другиот сад, до која висина таа ќе се искачи во него?

180. Тенџере во форма на цилиндар има внатрешен дијаметар 2 dm и висина 13 cm. Дали може тоа да собере 4 литри вода?

181. Една мензура има форма на цилиндар со внатрешен дијаметар 5 cm. Колкави ќе бидат растојанијата меѓу поделците на неа, што ќе покажуваат 10 cm^3?

182. Надворешниот дијаметар на една кула, што има форма на цилиндар, изнесува 4,8 m, а дебелината на ѕидот е 0,6 m. Да се пресмета кубатурата на ѕидот на кулата, ако таа е висока 16 m.

183. Една бакарна прачка во форма на цилиндар со дијаметар 12 mm, долга е 14 cm. Со специјална направа за истегање таа треба да се истегне во жица со дијаметар 0,6 mm. Колку долга жица ќе се добие?

184. Рамностран цилиндар има плоштина 1884 cm^2. Одреди го неговиот волумен!

185. Се продаваат цилиндрични греди, од кои едните се двојно подебели, но двојно пократки. Кои греди имаат поголема дрвна маса и колку пати таа е поголема?

186. Покажи дека волуменот на цилиндар е еднаков на производот од плоштината на неговата обвивка и половина од должината на радиусот!

187. Еден бакарен казан во форма на цилиндар има дијаметар 7 dm и висина 6 dm, треба да се калаиса однатре. Колку калај е потребно ако дебелината на калајната покривка е околу 0,05 mm, а $s=7,3$.

188. Во конус, на кој висината е еднаква на радиусот на основата поставена е рамнина што минува низ врвот, а од кружницата на основата отсекува кружен лак: а) 60°, б) 90°. Одреди ја плоштината на добиениот пресек!

189. Како треба да се изберат две генератриси на конусот, така што тие да образуваат најголем можен агол?

190. Висината на конусот е 12 cm. На кое растојание од врвот треба да се постави паралелен пресек на конусот, чија плоштина да е еднаква на половина од плоштината на основата на конусот?

191. Какви ротациони тела се добиваат, ако се врти: а) правоаголен триаголник околу една своја катета, б) правоаголен триаголник околу хипотенузата, в) рамнокрак триаголник околу неговата основа, г) квадрат околу дијагоналата, д) ромб околу една своја страна, ѓ) рамнокрак трапез околу поголемата основа?

192. Ромб со дијагонали $d_1=7$ cm и $d_2=24$ cm се врти прво околу едната дијагонала, а потоа околу другата дијагонала. Кое од добиените тела има поголема плоштина и за колку?

193. Рамностран триаголник со страна $a=8$ cm се врти околу една своја страна. Пресметај ја плоштината на така добиеното тело!

194. Во правилна шестострана пирамида со основен раб $a=6$ cm и висина $h=8$ cm е вписан конус. За колку се разликуваат плоштините на тие две тела?

195. Околу правилна тристрана пирамида со основен раб $a=1,8$ dm и бочен раб $=2,34$ dm, е опишан конус. Пресметај ги плоштините на тие две тела!

196. Висината на конусот е 12 cm, а дијаметарот на неговата основа е 7 cm. Одреди го аголот на развиената обвивка на тој конус!

197. Еден правилен шестоаголник со страна $a=6$ cm ротира околу една своја голема дијагонала. Да се пресмета плоштината и волуменот на добиеното ротационо тело.

198. Правоаголен трапез со основи $a=9$ cm и $b=4,2$ cm и висина $h=3,6$ cm ротира околу: а) поголемата основа, в) помалата основа. Да се пресмета плоштината и волуменот на добиените тела.

199. Во цилиндар со радиус r и висина h е вписана правилна шестострана призма. Одреди го односот од плоштините на обвивките на цилиндарот и призмата.

200. Во цилиндар е вписана правилна тристрана призма, а во призмата е вписан цилиндар. Одреди го односот од волумените на двата цилиндри!

201. Одреди го односот од плоштините на обвивките на рамностран конус и рамностран цилинар, што имаат складни висини!

202. Во рамностран конус е вписана правилна четиристрана пирамида. Како се однесуваат плоштините на нивните обвивки?

203. Правоаголен триаголник со катети 3 cm и 4 cm ротира околу права, која минува низ темето на правиот агол и е паралелна на хипотенузата. Одреди ги плоштината и волуменот на добиеното тело.

204. Круг и вписан во него квадрат ротираат околу една од дијагоналите на квадратот. При тоа вртење кругот образува топка, а квадратот — тело вписано во топаката. Волуменот на вписаното тело каков дел е од волуменот на топката?

205. Дијагоналата на оскиниот пресек на еден цилиндар, што е висок 8 cm, е еднаква на 10 cm. Пресметај ја плоштината и волуменот на цилиндарот!

206. Одреди ја плоштината на оскиниот пресек на цилиндар, ако плоштината на обвивката е $M=150,72$ cm^2.

207. Загревањето на една сушилница се врши со цевки, чиј дијаметар е 3,5 cm. Колку должни метри цевка се потребни, ако 1 m^2 загреана површина од цевките дава 400 калории во 1 час, а за работа на сушилницата се нужни 6000 калории во 1 час.

208. Какво парче ламарина треба да се изреже за да се свие обвивка на цилиндричен сад со радиус 1,5 dm, а садот да содржи 45 *l*.

209. Колку литри вода истекува во 1 сек. од една водоводна цевка со дијаметар на отворот 7 cm, ако брзината на течењето на водата е $3\ \frac{\text{м}}{\text{сек}}$.

210. Кабел со дијаметар на пресекот 4 mm и должина 7 km треба да се обвие со оловна обвивка, дебела 1,5 mm. Колку килограми олово е потребно за тоа, ако густината на оловото е $s=11{,}4\ \text{kg/dm}^3$.

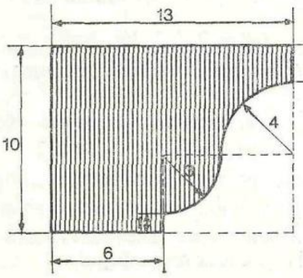
211. 30 гредички со профил 13 cm 10 cm и должина 2,5 m треба да се нутираат според скицата на црт. 229. Пресметај: а) колку dm^3 отпадоци при тоа длабење на сите гредички ќе добиеме, б) Колку dm^3 ќе има една таква издлабена гредичка?

212. Треба да се излие бакарна плоча дебела 12 mm, чиј напречен пресек е нацртан на црт. 230. Круговите означуваат празнини. Одреди ја масата на таа плоча ($s=8{,}9$).

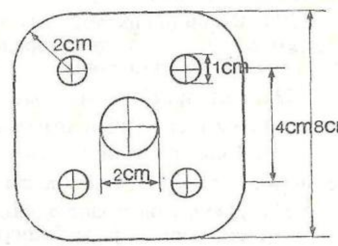
213. Пресметај ги плоштината и волуменот на конус, чија генератриса е за 1 cm поголема од неговата висина, а радиусот му е $r=5$ cm.

214. Околу правилна четиристрана пирамида со основен раб 8 cm и бочен раб 8,5 cm е опишан конус. Одреди ги плоштините на тие две тела.

215. Во правилна четиристрана пирамида со основен раб $a=16$ cm и висина 15 cm е вписан конус. Пресметај ја плоштината на конусот.



Црт. 229



Црт. 230

216. Во конус со радиус $r=7$ cm и висина $h=2{,}4$ dm е вписана правилна шестострана пирамида. Пресметај ги плоштините на двете тела.

217. Во правилна тристрана пирамида со основен раб 10 cm и бочен раб 1 cm е вписан конус. Пресметај ги плоштините на пирамидата и конусот.

218. Оскиниот пресек на еден прав конус е правоаголен триаголник со плоштина 40,5 cm^2. Пресметај ги плоштината и волуменот на конусот!

219. Плоштината на обвивката на еден конус изнесува $M=36\pi\ \text{cm}^2$, а периметарот на основата му е $L=9\pi$ cm. Одреди ја плоштината и волуменот на тој конус!

220. Од дрвена правилна шестострана пирамида со основен раб $a=3{,}5$ dm и бочен раб $s=12{,}5$ dm треба да се изделка можно најголем конус. За колку ќе биде помал волуменот на конусот од тој на пирамидата?

221. Конструирај кружен исечок што преставува $\frac{2}{3}$ од круг со радиус 9 cm, потоа од него свиткај обвивка на конус. Одреди го волуменот на тој конус!

222. Ромб со дијагонали $d_1=6{,}6$ cm и $d_2=4{,}2$ cm ротира околу: а) дијагоналата d_1, б) дијагоналата d_2. Пресметај ги плоштините и волуменот на добиените ротациони тела!

223. Равнокрак трапез со основи $a=13$ cm, $b=7$ cm и крак $c=5$ cm ротира околу: а) основата a, б) основата b. Пресметај ги плоштините и волумените на добиените тала!

224. Еден равнокрак правоаголен триаголник со плоштина 18 cm ротира околу: а) хипотенузата, б) една своја катета. Пресметај ги плоштините и волумените на добиените ротациони тела!

225. Плоштината и волуменот на рамностран конус изрази ги како функции од неговата висина!

226. Докажи дека пресекот на две сфери што се сечат секогаш е кружница!

227. Каква фигура претставува множеството на сите точки во просторот, од кои дадена отсечка AB се гледа под прав агол?

228. Дијаметарот на една топка е 12 cm. Одреди ја плоштината на пресекот на таа топка со рамнина која дијаметарот го разделува во однос 1:3.

229. Радиусите на две сфери се долги 5 cm и 5,8 cm, а растојанието меѓу центрите им е 7,2 cm. Одреди ја должината на кружницата по која тие се сечат!

230. Радиусот на топката е 4 cm. Низ крајната точка на еден радиус, што лежи на топкината површина (сферата) е поставена рамнина под агол 60° кон радиусот. Да се одреди плоштината на добиениот пресек на топката.

231. Одреди го односот од плоштините на равностран конус и впишаната во него топка!

232. Радиусот на Земјата е r. Одреди го односот од должината на паралелата што се наоѓа на 60° географска ширина и должината на екваторот!

233. Одреди го односот од плоштините на впишаната и опишаната сфера околу коцка со раб a.

234. Над страната $\overline{AB}=5$ cm на квадратот $ABCD$ е конструиран равностран триаголник, а над спротивната страна CD е конструиран полукруг. Така добиената нова фигура ротира околу својата оска на симетрија. Одреди ги плоштината и волуменот на добиеното ротационо тело!

235. Во еден равностран цилиндар со радиус на основата 6 cm е впишана топка. Одреди го односот од: а) плоштината на обвивката на цилиндарот и плоштината на топката, б) плоштината на цилиндарот и плоштината на топката, в) волуменот на цилиндарот и волуменот на топката!

236. Во цилиндричен сад со внатрешен дијаметар 12 cm има вода до некоја висина. Во садот е потопена топка, поради што водата во него се покачила за 1 cm. Одреди го радиусот на потопената топка.

237. Од дрвен равностран цилиндар е изделкана најголема можна топка. Колкав дел од дрвниот материјал отпаднал?

238. Топка со радиус 5 cm е пресечена со две паралелни рамнини при што се добиваат пресеци, чии плоштини се 9π cm² и 4π cm². Одреди го растојанието меѓу двете рамнини!

239. Две сфери имаат еднакви радиуси ($r=1,7$ dm), а центрите им се оддалечени еден од друг 3 dm. Одреди ја должината на кружницата по која се сечат тие сфери!

240. На сферата со радиус 5 cm се земени три точки кои образуваат равностран триаголник со страна 6 cm. Одреди го растојанието на рамнината на триаголникот од центарот на сферата!

241. Еден мал круг на топката со плоштина 25π cm² е на расојание 12 cm од центарот на топката. Одреди ги плоштината и волуменот на топката!

242. Околу равностран триаголник со страна 6 cm е опишан круг. Пресметај ги волумените на телата што се добиваат со ротации на кругот и триаголникот околу висината на равностраниот триаголник.

243. Колку грама злато е потребно за позлатување 200 еднакви топчиња со дијаметар 2 cm ако ги покриеме со слој дебел 0,2 mm. Гусината на златото е $s=19,4$.

244. Ако оловна топка со радиус 3 cm ја ставиме во цилиндиричен сад со вода, чи радиус на основата е 4 cm, за колку сантиметри ќе се издигне водата во садот?

245. Оловна топка со радиус 6 cm треба да се претопи во топченца со радиус 1 cm , Колку такви топченца ќе се добијат?

246. Над еден круг со радиус 4 cm е подигната од едната страна една полутопка , а од другата страна е подигнат еден равностран конус. Пресметај ги плоштината и волуменот на така комбинираното тело.

247. Од една капка сапуница со дијаметар 4 mm е надуен меур со надворешен дијаметар 12 cm. Пресметај ја дебелината на ѕидовите на тој меур!

248. Од бакарна топка со радиус 10 cm е истегната жица со дијаметар 2 mm. Одреди ја должината на добиената жица!

249. Од дрвена коцка со раб $a=8$ cm е изделкана можно најголема топка. Пресметај колку проценти од материјалот оди во отпадоци!

250. Дрвена коцка, со раб $a=6$ cm, ја продупчуваме со сврдел нормално спрема основата, така што дијаметарот на отворот да биде 2 cm. Колку проценти од својата дрвна маса ќе изгуби при тоа коцката?

СОДРЖИНА

Глава I

СЛИЧНОСТ

Глава II

ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА И НЕЈЗИНА ПРИМЕНА

Глава III

ТОЧКА, ПРАВА, РАМНИНА И ГЕОМЕТРИСКО ТЕЛО

Глава IV

ПРИЗМА

Глава V

ПИРАМИДА

Глава VI

ЦИЛИНДАР

Глава VII

КОНУС

Глава VIII

ТОПКА

РОЗТ за учебници „Просветно дело„ — Скопје
ул. „Иво Рибар Лола„ б.б. Градски ѕид, блок IV

*

За издавачот
НИКОЛА МЛАДЕНОВСКИ

*

ГЛИГОР ТРЕНЧЕВСКИ

ГЕОМЕТРИЈА
за VIII одделение

*

Јазична редакција
НАДЕЖДА МАНОЈЛОВИЌ

*

Илустрации
ДИМИТАР ЕЛИМОВ

*

Технички уредник
ТРАЈКО ДИМОВСКИ

*

Корицата ја илустрирала
РАДМИЛА ПЕТРОВИЌ-ЃИНОВСКА

*

Коректор
МАРИЈА ТАЛЕСКА

*

Ракописот е предаден во печат март 1978 година. Печатењето е завршено во јули 1978 година. Обем: 164 страници. Формат: 17×24 cm. Тираж: 21.000 примероци. Книгава е отпечатена во Универзитетската печатница „Кирил и Методиј" Скопје

Со решение бр. 011-303/2 од 12. VI 1978 година е дадена согласност за цената од Републичкиот завод за цени.