Сојузен натпревар 1960

III година

1. Основата на квадар со висина 5 е правоаголник со периметар 4.

а) Определи ги должините на рабовите на основата така што квадарот ќе има максимален волумен.

б) Изрази го волуменот на квадарот во функција на еден основен раб. Определи го доменот на оваа фнкција.

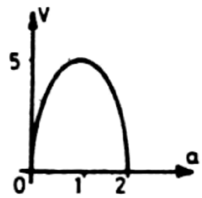
в) Нацртај го графикот на функцијата добиена под б).

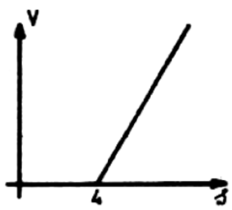
Нека е даден еден основен раб $a=2$ и висина $h=5$ на квадарот. Како сега зависи волуменот од периметарот на основата? Кои се допуштените вредности за овој волумен? Прикажи ја соодветната функција графички.

Решение. Нека основните рабови на квадарот се a и b. Тогаш $a+b=2$, па за волуменот на квадарот добиваме

$$V=5ab=5a(2-a)=10-5a^2,$$

каде $0<a<2$. Максимумот на оваа функција се достигнува за $a=1$ и е $V=5$. Притоа $b=2-1=1$. Графикот на функцијата е прикажан на цртежот десно.





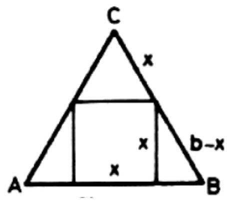
Со s да го означиме периметарот на основата. Тогаш за $a=2$ имаме $s=4+2b$, па затоа $b=\frac{s-4}{2}$ и како $h=5$ добиваме

$$V=10b=5(s-4)=5s-20,$$

каде $s>4$ ж. Графикот на оваа функција е прикажан на цртежот лево.

2. Определи го работ на коцката која е впишана во правилна тристрана пирамида со раб на основата a и висина v, така што четирите темиња припаѓаат на основата, а другите четири на бочните ѕидови на пирамидата.

Решение. Нека x е работ на коцката за која се исполнети условите на задачата и α е рамнината во која лежи горната основа на коцката, т.е. рамнината која ги содржи четирите темиња на коцката кои припаѓаат на бочните ѕидови на коцката. Со A,B,C да ги означиме пресечните точки на рамнината α со бочните ѕидови на пирамидата и нека $b=AB$. Тогаш



$$v:(v-x)=a:b \text{ и } \frac{(b-x)\sqrt{3}}{2}=x.$$

Ако од овие две равенства го елиминираме b добиваме

$$x=\frac{\sqrt{3}av}{\sqrt{3}a+(2+\sqrt{3})v}.$$

3. Реши ја неравенката

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x+3)>-3.$$

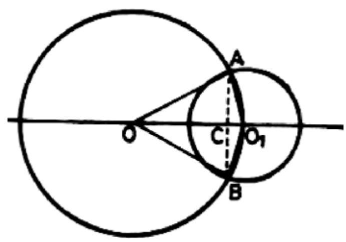
Решение. Даденото неравенство е исполнето ако и само ако

$$0<x^2-4x+3<8. \qquad (1)$$

Решението на левата неравенка во (1) е за $x<1$ или $x>3$, а на десната е $-1<x<5$. Според тоа, решението на дадената неравенка е $x\in(-1,1)\cup(3,5)$.

4. Даден е кружница (c) со центар O и радиус R. Точката O_1 која е на кружницата (c) е центар на друга кружница со радиус $\frac{R}{2}$.

Ако A и B се пресечните точки на овие две кружници, определи ја приближната вредност на $\measuredangle AOB$ (во радијани), а потоа волуменот на пресекот на топките кои се добиваат со ротација на двата круга околу правата OO_1.



Решение. Нека $\alpha=\measuredangle AOB$. Тогаш во рамнокракиот триаголник O_1AO ($AO=OO_1=R$, $O_1A=\frac{R}{2}$) аголот при врвот е $\frac{\alpha}{2}$, па затоа важи

$$\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{\frac{R}{4}}{R}=\frac{1}{4}.$$

Според тоа,

$$\measuredangle AOB=\alpha=4\arcsin\frac{1}{4}\approx 1,01072102057.$$

Со C да го означиме пресекот на правите AB и OO_1. Бидејќи $\measuredangle CAO_1=\frac{\alpha}{4}$, добиваме

$$O_1C=O_1A\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{R}{8} \text{ и } OC=\frac{7R}{8}.$$

Бараниот волумен е еднаков на збирот на волумените на два топкини отсечоци – првиот има радиус $O_1A=\frac{R}{2}$ и растојание од центарот на топката $O_1C=\frac{R}{8}$, а вториот има радиус $AO=R$ и растојание од центарот на топката $OC=\frac{7R}{8}$. Ако ја искористиме формулата

$$V_0=\pi(\tfrac{2}{3}R^3-R^2x+\tfrac{1}{3}x^3)$$

за волумен на топкин отсечок со радиус R и растојание од центарот на топката x за бараниот волумен добиваме

$$V=\frac{13}{192}\pi R^3.$$

5. Докажи го идентитетот

$$(1-\cos b\cos c)^2-2(1-\cos b\cos c)-\sin^2 b\sin^2 c+\sin^2 b+\sin^2 c=0\,.$$

Решение. Со елементарни трансформации добиваме

$$(1-\cos b\cos c)^2-2(1-\cos b\cos c)-\sin^2 b\sin^2 c+\sin^2 b+\sin^2 c=$$
$$=1-2\cos b\cos c+\cos^2 b\cos^2 c-2+2\cos b\cos c-\sin^2 b\sin^2 c+\sin^2 b+\sin^2 c$$
$$=-1+(1-\sin^2 b)(1-\sin^2 c)-\sin^2 b\sin^2 c+\sin^2 b+\sin^2 c=0$$

IV година

1. Докажи дека производот на три последователни броја е делив со $7\cdot 8\cdot 9$, ако средниот број е куб на природен број.

Решение. Дадениот производ има вид $(x^3-1)x^3(x^3+1)$, каде x е природен број. Ако бројот x е парен, тогаш x^3, што значи и дадениот производ е делив со $2^3=8$. Ако x е непарен број, тогаш x^3-1 и x^3+1 се два последователни парни броја, па затоа нивниот производ е делив со 8. Значи, дадениот производ е делив со 8.

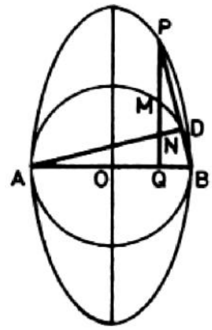
Ако $3\,|\,x$, тогаш $9\,|\,x^3$; ако $x\equiv 1(\text{mod}\,3)$, тогаш $9\,|\,x^3-1$, а ако $x\equiv -1(\text{mod}\,3)$, тогаш $9\,|\,x^3+1$. Според тоа, во секој случај дадениот производ е делив со 9.

Останува да докажеме дека даденио птоизвод е делив со 7. Вследнава табела се дадени остатоците при делење со 7 на $x, x^2, x^3, x^3-1, x^3+1$:

x	x^2	x^3	x^3-1	x^3+1
0	0	0	6	1
1	1	1	0	2
2	4	1	0	2
3	2	6	5	0
4	2	1	0	2
5	4	6	5	0
6	1	6	5	0

Забележуваме дека во секој секој ред во една од колоните на x^3, x^3-1, x^3+1има остаток 0, што значи дека еден од броевите x^3, x^3-1, x^3+1 е делив со 7.

2. Дадена е кр ужница (O,r), нејзин радиус AB и точка M на кружницата. Нека Q е проекцијата на M на AB, N е средината на MQ и D е другата точка на пресекот на правата AN и дадената кружница. Определи го геометрискoто место на пресекот P на правите BD и QM, кога точката M се движи по кружницата (O,r).



Решение. Да избереме координатен систем така што точката O е координатен почеток, а точките A и B припаѓаат на $x-$оската и соодветно имаат координати $(-r,0)$ и $(r,0)$, цртеж десно. Нека точката M има координати (x_0,y_0), при што $x_0^2+y_0^2=r^2$ и $x_0\neq\pm r$. Тогаш точката N има координати $(x_0,\frac{y_0}{2})$. Бидејќи

$$\measuredangle QAN=\measuredangle BAD=90^\circ-\measuredangle DBA=90^\circ-\measuredangle PBD=\measuredangle QPB,$$

заклучуваме дека триаголниците ANQ и PBQ се слични, па затоа

$$PQ=\frac{AQ\cdot BQ}{NQ}=\frac{(r+x_0)(r-x_0)}{\frac{y_0}{2}}=2y_0.$$

Според тоа, точката P има координати $(x_0,2y_0)$, па затоа припаѓа на елипсата

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{4r^2}=1.$$

Лесно се проверува дека секоја точка од оваа елипса, освен точките $A(-r,0)$ и $B(r,0)$ може да се добијат на опишаниот начин.

3. Разликата на реципрочните вредности на два цели броја е еднаква на $0,0aa...$, каде $a\in\{1,2,....,9\}$. За кои вредности на a задачата има решенија и колку?

Решение. Треба да се определи цел број x ($x\neq 0,-1$) таков што

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}=0,0aa...=\frac{a}{90},$$

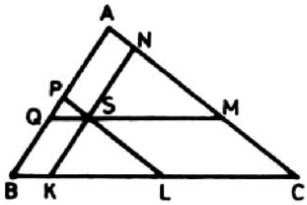
т.е. $x(x+1)=\frac{90}{a}$, каде $a\in\{1,2,....,9\}$. Десната страна на последното равенство прима целобројни вредности 90, 45, 30, 18, 15, 10 за соодветните вредности на a : 1, 2, 3, 5, 6, 9. Но, од овие шест броја само 90 и 30 може да се запишан како произод на два последователни цели броја:

$$90=9\cdot 10=-10\cdot(-9),\quad 30=5\cdot 6=-6\cdot(-5).$$

Значи, бараните вредности за a се 1 и 3 (соодветите вредности за x се 9 и -10, односно 5 и -6).

4. Низ произволна точка во внатрешноста на даден триаголник минуваат три прави кои се паралелни на страните на триаголникот. Овие прави ја делат плоштината на триаголникот на шест делови од кои три се триаголници со плоштини s_1,s_2,s_3. Определи ја плоштината на дадениот триаголник.

Решение. Со A,B,C да ги означиме темињата на дадениот триаголник, со S внатрешната точка, а пресечните точки на спомenатите прави со страните на триаголникот да ги означиме како на цртежот десно. Јасно, триаголниците PQS, NSM и SKL се слични на триаголникот ABC. Со k_1, k_2, k_3 да ги означиме соодветните коефициенти на сличност. Имаме:



$$\frac{BK}{BC} = \frac{QS}{BC} = k_1, \frac{LC}{BC} = \frac{SM}{BC} = k_2, \frac{KL}{BC} = k_3.$$

Но, $BK + LC + KL = BC$, па затоа $k_1 + k_2 + k_3 = 1$. Од друга страна, ако со s ја означиме плоштината на триаголникот ABC, имаме

$$\frac{s_1}{s} = k_1^2, \frac{s_2}{s} = k_2^2, \frac{s_3}{s} = k_3^2,$$

односно

$$\sqrt{\frac{s_1}{s}} = k_1, \sqrt{\frac{s_2}{s}} = k_2, \sqrt{\frac{s_3}{s}} = k_3.$$

Затоа,

$$\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2} + \sqrt{s_3} = \sqrt{s},$$

т.е.

$$s = (\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2} + \sqrt{s_3})^2.$$

5. Дадена е фамилијата криви

$$y = (m-1)x^2 + 2mx + 4.$$

а) Докажи дека сите дадени криви минуваат низ две фиксни точки A и B. Определи ги овие точки.

б) Определи ја онаа крива од дадената фамилија која ја допира оската Ox, а потоа определи ја онаа крива чие теме е точката B (B езаедничката точка на дадените криви, која не припаѓа на оската Ox).

Решение. а) Очигледно сите криви на фамилијата минуваат низ точките $A(-2,0)$ и $B(0,4)$.

б) Оската Ox ја дпира кривата $y = (x+2)^2$, се добива за $m = 2$, а теме во точката B има крувата $y = -x^2 + 4$, се добива за $m = 0$.