Ристо Малчески
Скопје

НЕРАВЕНСТВА МЕЃУ СРЕДИНИТЕ И ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА КВАДРАТЕН КОРЕН ОД ПОЗИТИВЕН БРОЈ

I. Нека $a,b\in\mathbf{R}$, $a,b>0$. Броевите

$$A=\tfrac{a+b}{2},\quad G=\sqrt{ab},\quad H=\tfrac{2ab}{a+b}$$

ги нарекуваме аритметичка, геометриска и хармониска средина на a и b, соодветно. Ќе докажеме дека за средините се точни неравенствата $H\le G\le A$, т.е. неравенствата

$$\tfrac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}\le\tfrac{a+b}{2} \qquad (1)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b$.

Навистина, од очигледното неравенство $(a-b)^2\ge 0$ ја добиваме следната низа еквивалентни неравенства

$$a^2-2ab+b^2\ge 0$$

$$a^2+2ab+b^2\ge 4ab$$

$$(a+b)^2\ge 4ab$$

$$\tfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$$

т.е. точно е десното неравенство во (1), при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b$.

Аналогно, од неравенството $(a+b)^2\ge 4ab$ ја добиваме следната низа еквивалентни неравенства

$$ab(a+b)^2\ge 4a^2b^2$$

$$ab\ge(\tfrac{2ab}{a+b})^2$$

$$\sqrt{ab}\ge\tfrac{2ab}{a+b}$$

т.е. точно е левото неравенство во (1), при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b$. Да забележиме дека за аритметичката, геометриската и хармониската средина A,G и H на позитивните реални броеви a и b е исполнето равенството

$$AH = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = ab = G^2 \tag{2}$$

II. Нека A, G и H се аритметичката, геометриската и хармониската средина на позитивните реални броеви a и b, соодветно. Од очигледното неравенство $(A^2 - G^2)^2 \geq 0$ и од равенството (2) последователно добиваме

$$2G^2 A^2 \leq A^4 + G^4$$

$$2G^2 \leq A^2 + (\frac{G^2}{A})^2$$

$$2G^2 \leq A^2 + H^2$$

$$4G^2 \leq A^2 + 2G^2 + H^2$$

$$4G^2 \leq A^2 + 2AH + H^2$$

$$4G^2 \leq (A+H)^2$$

$$G \leq \frac{A+H}{2} \tag{3}$$

што значи дека геометриската средина на броевите a и b е помала од аритметичката средина $A_1 = \frac{A+H}{2}$ на нивната аритметичка и геометриска средина. Од друга страна $A_1 \leq A$ (зошто?), при што знак за равенство важи ако и само ако $a = b$.

Понатаму, ако во неравенството (3) помножиме со $G > 0$ и го искористиме равенството (2), последователно добиваме

$$G^2 \leq G\,\frac{A+H}{2}$$

$$AH \leq G\,\frac{A+H}{2}$$

$$\frac{2AH}{A+H} \leq G \tag{4}$$

што значи дека геометриската средина на броевите a и b е поголема од хармониската средина $H_1 = \frac{2AH}{A+H}$ на нивната аритметичка и хармониска средина. Од друга страна, $H_1 \leq H$ (зошто?), при што знак за равенство важи ако и само ако $a = b$.

Според тоа, за броевите A_1 и H_1 важи

$$A_1 H_1 = \frac{2AH}{A+H} \cdot \frac{A+H}{2} = AH = G^2, \quad H \leq H_1 \leq G \leq A_1 \leq A. \tag{5}$$

Сега за A_1 и H_1 ги определуваме аритметичката и хармониската средина

$$A_2 = \frac{A_1 + H_1}{2} \text{ и } H_2 = \frac{2A_1H_1}{A_1 + H_1},$$

соодветно. Аналогно се докажува дека

$$A_2H_2 = G^2,\ H_1 \le H_2 \le G \le A_2 \le A_1, \tag{6}$$

при што знак за равенство во последните неравенства важи ако и само ако $a = b$.

Постапката можеме да ја продолжиме и во k – от чекор да ги определиме аритметичката и хармониската средина на броевите A_{k-1} и H_{k-1}:

$$A_k = \frac{A_{k-1} + H_{k-1}}{2} \text{ и } H_k = \frac{2A_{k-1}H_{k-1}}{A_{k-1} + H_{k-1}},$$

соодветно. Притоа важи:

$$A_kH_k = G^2,\ H_{k-1} \le H_k \le G \le A_k \le A_{k-1}$$

и знак за равенство во последните неравенства важи ако и само ако $a = b$.

Ако $a \ne b$, од досегашните разгледувања следува дека се исполнети равенствата

$$AH = A_1H_1 = A_2H_2 = ... = A_{k-1}H_{k-1} = A_kH_k = G^2$$

и неравенствата

$$H < H_1 < H_2 < ... < H_{k-1} < H_k < G < A_k < A_{k-1} < ... < A_2 < A_1 < A$$

што значи дека броевите H_i се зголемуваат, но се помали од G, а броевите A_i се намалуваат, но се поголеми од G. Може да се докаже дека за доволно голем број k приближните равенства $H_k \approx G$ и $A_k \approx G$ се исполнети со точност до однапред зададено децимално место. Доказот на ова тврдење нема да го презентираме, бидејќи истиот излегува надвор од рамките на нашите разгледувања, т.е. за негово разбирање се потребни поголеми теориски знаења.

III. Претходните разгледувања ќе ги искористиме за определување на квадратен корен од позитивен број c. Постапката е следната:

i) Бројот c го запишуваме како производ на два позитивни броја a и b.

ii) Последователно ги определуваме срединитe A и H, A_1 и H_1, A_2 и H_2 итн.

iii) Постапката ја продолжуваме се додека за некој k за броевите A_k и H_k приближното равенство $A_k \approx H_k$ е исполнето до саканото децимално место. Јасно, тогаш A_k и H_k ја даваат приближната вредност на $\sqrt{c}$, со точност до саканото децимално место.

IV. На пример, да пресметаме $\sqrt{18}$ со точност до четири децимални места. Бидејќи $18=3\cdot 6$, земаме $a=3, b=6$. Имаме

$$A=\frac{3+6}{2}=4{,}5 \qquad H=\frac{2\cdot 3\cdot 6}{3+6}=4$$

$$A_1=\frac{4{,}5+4}{2}=4{,}25 \qquad H_1=\frac{2\cdot 4\cdot 4{,}5}{4+4{,}5}=4{,}235294$$

$$A_2=\frac{4{,}25+4{,}235295}{2}=4{,}242647$$

$$H_2=\frac{2\cdot 4{,}25\cdot 4{,}235295}{4{,}25+4{,}235295}=4{,}24263437$$

Според тоа, со точност до четвртото децимално место имаме $\sqrt{18}\approx 4{,}2426$.

Да забележиме дека бројот 18 како производ на два позитивни броја може да се претстави на произволно многу начини. На пример, $18=1\cdot 18$, па затоа во чој случај $a=1$ и $b=18$. Ако за овие множители ја спроведеме претходната постапка, тогаш ќе го добиеме истиот резултат, но за тоа ќе биде потребен поголем број пресметувања. Провери! Што мислиш, зошто е тоа така?

На крајот од оваа работа обиди се самостојно, користејќи ја претходната постапка, приближно да пресметаш

а) $\sqrt{56}$ и б) $\sqrt{132}$

со точност до четвртото децимално место.

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ