МАТЕМАТИЧКА БИБЛИОТЕКА

Диофант

ДИОФАНТОВА МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА 2022/2023

КЊИГА 3 ВАЉЕВО 2023.

МАТЕМАТИЧКИ КЛУБ „ДИОФАНТ“ - ВАЉЕВО

Математичка библиотека „Диофант“
Књига 3

ДИОФАНТОВА МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА 2022. – 2023.

Збирка решених задатака
са Диофантових натематичких такмичења у
школској 2022/23. години

ВАЉЕВО, 2023.

Математичка библиотека
ДИОФАНТ

Књига 3.
Ваљево, 2023.

Редактор и уредник:
др Војислав Андрић (voja.andric@gmail.com)

Рецензент:
Мирослав Минић, професор

Издавач:
Математички клуб „Диофант“ Ваљево,
14000 Ваљево, Поп Лукина 38
Телефон 065 291 22 00; e – mail: diofant2020@gmail.com

CIP - Каталогизација у публикацији Народна библиотека Србије, Београд

37.016:51(075.2)(079.1)

ДИОФАНТОВА математичка такмичења : 2022. – 2023. : збирка решених задатака са Диофантових натематичких такмичења у школској 2022/23. години / уредник Војислав Андрић. - Ваљево : Математички клуб „Диофант”, 2023 (Земун : Ђук). - 108 стр. : илустр. ; 28 cm. - (Математичка библиотека Диофант ; Књ. 3.)

Тираж 300. - Решења: стр. 53-108.

ISBN 978-86-6148-003-4

COBISS.SR-ID 126539529

Штампа: Штампарија Ђук, Земун
Тираж 300

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР

Школа за младе математичаре „Диофант“ постоји у online верзији од школске 2020/21. године. У школској 2022/23. години реализована је online Школа за младе математичаре „Диофант“, Зимска школа младих математи-чара – Чачак 2023, Мај Месец Математике 2023, и Летња школа младих математичара – Чачак 2023. У оквиру сваке од наведених манифестација реализована су нека математичка такмичења као провера онога што је рађено у настави или као тренинг пред свако званично такмичење.

Сви такмичарски задаци са набројаних манифестација су сабрани у једну малу књигу и пред вама је збирка задатака са Диофантових математичких такмичења у школској 2022/2023. години која садржи 250 задатака.

Неки задаци су оригинални, неки познати, па прилагођени ситуацији, а неки преузети са интернета са разних школа, такмичења и презентација. Верујемо да ће задаци са Диофантових математичких такмичења у школској 2022/23. години бити корисна литература за ученике и наставнике у реализацији додатне наставе математике и припреми ученика за математичка такмичења.

Захваљујемо се колегиницама Александри Милошевић (Нови Сад), Иванки Томић (Ваљево), Сандри Андрић (Београд), Верици Марковић (Београд) и колеги Ђорђу Голубовићу (Београд) на помоћи у припреми такмичарских задатака и формулацији њихових решења. Посебну захвалност дугујемо колеги Мирославу Минићу (Ужице), који је извршио детаљну рецензију једног дела задатака и решења и својим примедбама, предлозима и по неким решењима допринео да ова збирка буде значајна по актуелности, а задаци добију и друга оригинална и лепа решења.

У Ваљеву, — Математички клуб „Диофант“
октобра 2023. — Ваљево

МАТЕМАТИЧКИ КЛУБ
Диофант
ВАЉЕВО

ЗИМСКА ШКОЛА
МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА
ЧАЧАК 2023.

ДИОФАНТОВО
МАТЕМАТИКО ТАКМИЧЕЊЕ
12.01.2023.

3. РАЗРЕД

1. Израчунај вредност израза: $36 - 20 : 4 + 3 + 7 \cdot 5$ и заокружи тачан одговор:

   А) 81 Б) 54 В) 69 Г) 42 Д) 75.

2. Дешифруј сабирање А + АВ + АВС = 482 (ако једнаким словима одговарају једнаке цифре, а различитим словима одговарају различите цифре). Израчунај А – В + С и заокружи тачан одговор:

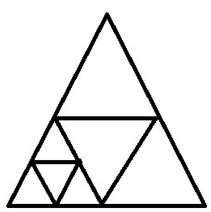
   А) 10 Б) 9 В) 8 Г) 7 Д) 6.

3. Дат је низ природних бројева 54, 44, 35, 27, 20 ... Одреди збир последња три члана датог низа (заокружи тачан одговор).

   А) 7 Б) 16 В) 17 Г) 10 Д) 11.

4. Колико троуглова има на слици? (заокружи тачан одговор)

   А) 6 Б) 7 В) 8 Г) 9 Д) 10.



	19	
17		13

5. Допуни магични квадрат на претходној слици.

4. РАЗРЕД

6. Израчунај колико цифара се употреби за нумерацију књиге која има 185 страна и заокружи тачан одговор:

   А) 438 Б) 447 В) 555 Г) 370 Д) 456.

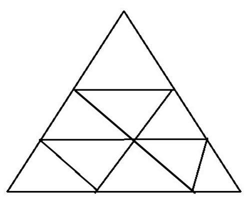
7. Дешифруј сабирање A + AB + ABC + ABCC = 2023 (ако једнаким словима одговарају једнаке цифре, а различитим словима одговарају различите цифре), израчунај B + C – A и заокружи тачан одговор:

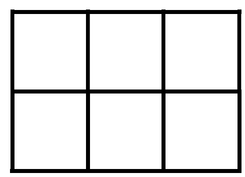
А) 6 Б) 7 В) 8 Г) 9 Д) 10.

8. Аца, Бошко и Вељко имају заједно 1599 динара. Аца има три пута мање новца од Бошка, а Вељко има 3 пута више новца од Бошка. Колико новца имају Аца и Вељко заједно? Заокружи тачан одговор.

А) 1230 Б) 1320 В) 1200 Г) 1107 Д) 1260.

9. Колико троуглова има на слици (лево)? (заокружи тачан одговор)?





10. Правоугаоник чији је обим 120 cm је са три праве подељен на 6 једнаких (подударних) квадрата (слика десно). Израчунај обим и површину једног од тих квадрата.

5. РАЗРЕД

11. Одреди збир елемената скупа B, ако је: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$ и $A \setminus B = \{1, 5\}$. Заокружи тачан одговор:

А) 12 Б) 1 В) 14 Г) 15 Д) 16.

12. Дата је једначина $3p + 5q = 74$ (p и q су прости бројеви). Одреди колико решења има дата једначина у скупу простих бројева и заокружи тачан одговор:

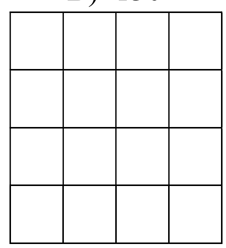
А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3 Д) 4.

13. Дужине ивица квадра су три узастопна природна броја. Запремина квадра је 336 cm^3. Одреди површину квадра и заокружи тачан одговор:

А) 336 cm^2 Б) 360 cm^2 В) 292 cm^2 Г) 288 cm^2 Д) 432 cm^2.

14. Број дужи које видиш на слици једнак је x, а број квадрата које видиш на слици једнак је y. Одреди број $x + y$ и заокружи тачан одговор.

А) 120 Б) 125 В) 130 Г) 134 Д) 140.



15. Шта је веће: $\frac{6}{7}$ или $\frac{7}{8}$? Образложи решење.

6. РАЗРЕД

16. Два унутрашња угла у троуглу су 20^o и 40^o. Одреди угао под којим се секу симетрале најмањег и највећег спољашњег угла тог троугла. Заокружи тачан одговор:

А) 50^o Б) 60^o В) 65^o Г) 70^o Д) 72^o.

17. Дата је једначина $x \cdot x + 2y = 29$ (x и y су природни бројеви). Решење једначине је пар природних бројева x и y који задовољавају дату једначину. Одреди колико решења има дата једначина у скупу природних бројева и заокружи тачан одговор:

А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3 Д) 4.

18. Одреди на колико различитих начина се број 15 може представити као збир неколико (најмање два) узастопних целих бројева (заокружи тачан одговор):

А) 4 Б) 5 В) 6 Г) 7 Д) 8.

19. У једној кутији има 14 црвених, 15 плавих и 16 белих куглица. Колико најмање куглица треба извући да би смо били сигурни да имамо три куглице различитих боја. Заокружи тачан одговор.

А) 16 Б) 18 В) 30 Г) 31 Д) 32.

20. Три молера за 4 дана окрече 5 станова.

а) Колико станова окречи 7 молера за 12 дана?
б) За колико дана 22 молера окречи 55 станова?
в) Колико молера је потребно да за 21 дан окрече 70 станова?

7. РАЗРЕД

21. Последња цифра броја $A = 6^{2023} + 7^{2022} + 8^{2021} + 9^{2020}$ је (заокружи тачан одговор):

А) 2 Б) 0 В) 6 Г) 4 Д) 8.

22. Катете правоуглог троугла су 15 и 20. Полупречник круга уписаног у тај правоугли троугао је (заокружи тачан одговор):

А) 3,5 Б) 4 В) 4,5 Г) 5 Д) 6.

23. Дати су изрази: $x = (20^{30})^{40}$, $y = (30^{40})^{20}$ и $z = (40^{30})^{20}$. Заокружи тачно тврђење:

А) $x < y < z$ Б) $x < z < y$ В) $y < x < z$ Г) $y < z < x$ Д) $z < y < x$.

24. Дата је једнакост $\sqrt{\dfrac{1{,}222222...}{0{,}818181,,,}} = \dfrac{x}{y}$ где су x и y узајамно прости природни бројеви. Разлика бројева x и y једнака је (заокружи тачан одговор).

А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 9 Д) 11.

25. У правоугаоник чије су димензије 3 x 4 на случајан начин је размештено 6 тачака. Доказати да при ма ком распореду тачака постоје две тачке чије је растојање мање од $\sqrt{5}$.

8. РАЗРЕД

26. Дата је једначина $\frac{x-7}{2023} = \frac{x-12}{2018}$. Решење дате једначине припада интервалу (заокружи тачан одговор):

А) (2020, 2021) Б) (2023, 2024] В) [2030, 2031)
Г) [2026, 2029] Д) (2034, 2036).

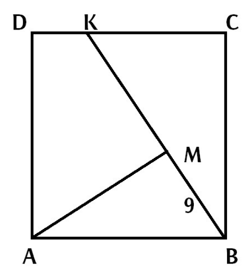
27. Запремина квадра је 1320 cm^3, а мерни бројев ивица квадра су три узастопна природна броја. Тада је дужина дијагонале квадра једнака (заокружи тачан одговор):

А) 18 Б) 19 В) $\sqrt{347}$ Г) $\sqrt{365}$ Д) $\sqrt{379}$

.

28. У унутрашњој области квадрата ABCD дата је тачка M, тако да је угао AMB прав, а BM = 9cm. Права BM пресеца дуж CD у тачки K тако да је CK : DK = 3 : 1. Тада је површина датог квадрата једнака (заокружи тачан уговор):

А) 196 Б) 200 В) 225 Г) 256 Д) 289.



29. Колико има петоцифрених природних бојева, чији производ цифара је једнак 0?

А) 45000 Б) 80000 В) 54321 Г) 30951 Д) 59049.

30. Девојка Шехерезада треба да цару исприча 1001 бајку. Неких ноћи она прича 3, а неких ноћи 5 бајки. На колико начина она то може да уради? Како најбрже она то може да уради? Колико највише ноћи она може причати бајке?

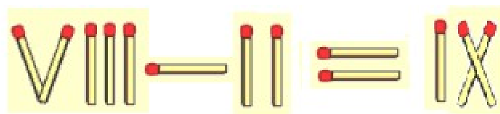

ШКОЛА ЗА МЛАДЕ МАТЕМАТИЧАРЕ
"ДИОФАНТ" - ВАЉЕВО
ПРОБНА
МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА

ПРИПРЕМНИ ЗАДАЦИ
ЗА ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ
04.12.2022.

3. РАЗРЕД

31. У броју 4817036, не мењајући редослед цифара, прецртај четири цифре тако да добијеш а) најмањи; б) највећи могући троцифрен број. Израчунај збир и разлику добијених бројева.

32. Од палидрваца је састављена нетачна једнакост:



Премести само једно палидрвце тако да се добије тачна једнакост. Одреди бар два решења датог проблема.

33. Користећи пет цифара 3, симболе рачунских операција и заграде напиши пет израза чије су вредности 1, 2, 3, 4 и 5.

34. Дат је низ природних бројева 98, 87, 76, 65 ... Одреди збир свих осталих бројева тог низа (тј. оних бројева који нису директно набројани).

35. Колико има парних троцифрених бројева чији је збир цифара једнак 22?

4. РАЗРЕД

36. Користећи пет цифара 3, симболе рачунских операција и заграде напиши пет израза чије су вредности редом 6, 7, 8, 9 и 10.

37. Марко је у школу пошао у 7 часова и 38 минута, а из школе се вратио у 12 часова и 23 минута. Јанко је у школу отишао у 13 часова и 42 минута, а из школе се вратио у 18 часова и 18 минута. Ко је више времена провео у школи и на путу: Марко или Јанко?

38. Да ли је више парних или непарних четвороцифрених бројева чији је производ цифара једнак 8?

39. У базену чија је дужина 50 m, а ширина 30 m постављено је игралиште за ватерполо које је обележено линијама од плуте. Колики је обим ватерполо игралишта, ако је свака страница игралишта за ватерполо од ивица базена удаљена 3 m?

40. Милан и Драган заједно имају 95 кликера. Колико кликера има сваки од њих, ако је половина Миланових кликера једнака трећини Драганових кликера?

5. РАЗРЕД

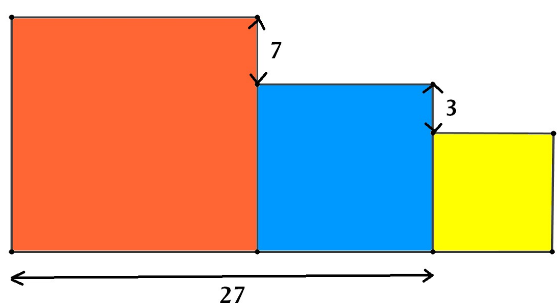
41. Запремина коцке је 512 cm^3. Колика је њена површина?

42. Алекса има 36 динара више од Лазе и 70 динара мање од Воје. Колико новца има свако од њих, ако је трећина Војине суме једнака половини Лазине суме?

43. Дешифруј множење: $2 * \cdot 105 = 2 * 1 *$.

44. Дати су скупови: A = { x | x је сложен број мањи од 20 };
B = { y | y је прост број мањи од 21 }; C = { z | z је природан број дељив са 3 }. Одреди скупове: а) $(A \cup B) \cap C$; б) $(A \setminus C) \cap B$.

45. На слици је дата фигура која се састоји од три квадрата и подаци о дужини појединих дужи. Израчунај обим и површину те фигуре.



6. РАЗРЕД

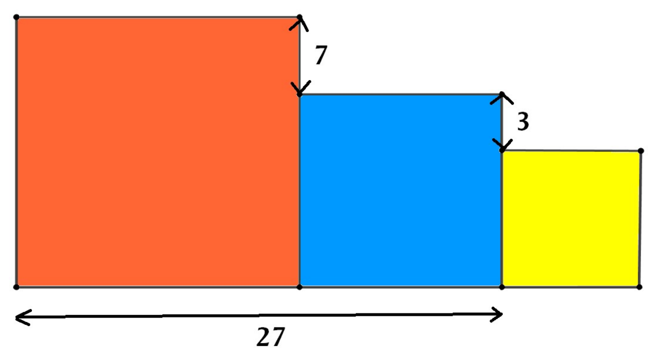
46. Шта је веће: $\dfrac{337}{2022}$ или $\dfrac{6}{37}$?

47. Дата је кружница k чији је центар тачка O и чији је полупречник једнак 2 cm и дуж AB. Одредити све тачке на кружници k које су једнако удаљене од тачака A и B.

48. Колико најмање, а колико највише узастопних целих бројева треба: а) сабрати; б) помножити, да би се добио број 120?

49. Дат је једнакокраки троугао ABC (AC = BC) у коме је $\angle ABC = 72^o$. Симетрала $\angle ABC$ сече страницу AC у тачки M. Доказати да су троуглови ABM и BCM једнакокраки.

50. На слици је дата фигура која се састоји од три квадрата и подаци о дужини појединих дужи. Израчунај обим и површину те фигуре.

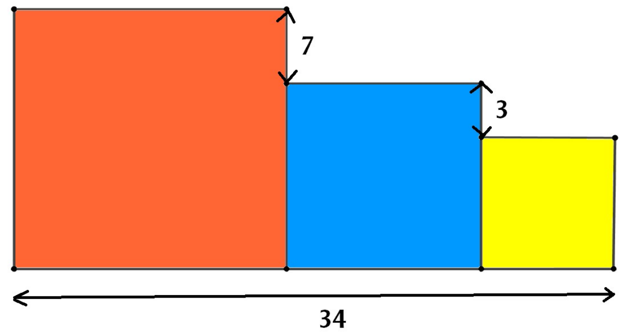


7. РАЗРЕД

51. Три молера за 4 дана окрече 5 станова.
а) Колико станова окречи 8 молера за 9 дана?
б) Колико молера треба ангажовати да би за 6 дана окречили 25 станова?
в) За колико дана 14 молера окречи 70 станова?

52. У координатној xOy равни дате су тачке A(1, 5), B(4, 1) и C(7, 5).
а) Одреди координате тачке D, ако је четвороугао ABCD ромб.
б) Колика је површина ромба ABCD?

53. На слици је дата фигура која се састоји од три квадрата и подаци о дужини појединих дужи. Израчунај обим и површину те фигуре.



54. Дат је природан број n ($1000 < n < 2022$). Колико има природних бројева n таквих да је и $\sqrt{n}$ природан број?

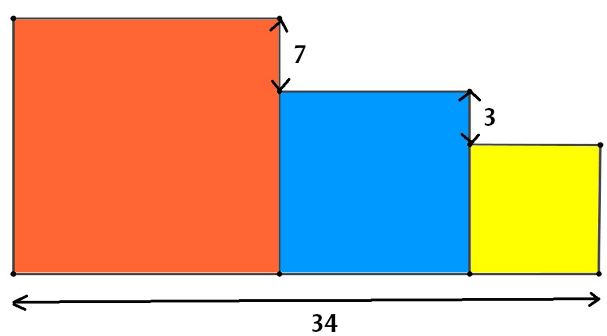
55. Дат је скуп $\{1, 2, 3, \ldots, 14, 15, 16\}$. Елементе датог скупа поређај у низ, тако да је збир свака два суседна броја у низу потпун квадрат. Низ садржи 16 бројева и сваки број из датог скупа се у низу појављује тачно једном.

8. РАЗРЕД

56. Висина правоуглог троугла дели хипотенузу на делове који су једнаки 9 cm и 16cm. Колика је површина круга уписаног у дати троугао?

57. Дуж AB има дужину 5 cm. Тачка A је од равни π удаљена 9 cm, а тачка B 6 cm. Одреди дужину нормалне пројекције дужи AB на раван π, ако су тачке A и B са исте стране равни π.

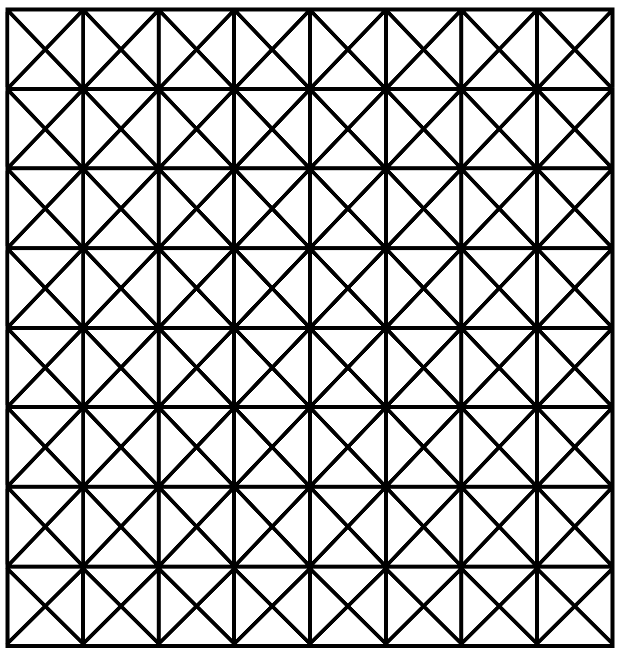
58. На слици је дата фигура која се састоји од три квадрата и подаци о дужини појединих дужи. Израчунај обим и површину те фигуре.



59. Сва темена четвороугла ABCD припадају кружници k. Познати су углови: $\angle ADC = 110^\circ$, $\angle BCD = 80^\circ$ и $\angle ADB = 60^\circ$. Одреди углове троуглова ABC и ACD.

60. Одреди све реалне бројеве x такве да је

$$|x-1| + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 5\,.$$

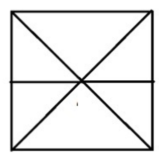


ПРИПРЕМНИ ЗАДАЦИ
ЗА ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ
29.01.2023.

3. РАЗРЕД

61. Анка и Бранка су 2016. године заједно имале 59 година. Колико година ће Анка и Бранка заједно имати 2033. године?

62. Колико дужи, а колико троуглова се може уочити на следећој слици?



63. У једнакости *** · * – ** : * = 4 уместо звездица напиши одговарајуће цифре тако да се добије тачна једнакост. Одреди бар два решења.

64. Нацртај слику на којој ће праве *a, b, c, d* и *e* и тачке M, N, P и S испунити следеће услове:
* праве *a* и *c* су паралелне;
* праве *c* и *d* су нормалне;
* праве *b* и *d* су паралелне;
* праве *b, c* и *e* секу се у тачки M;
* праве *c* и *d* секу се у тачки N;
* праве *a, d* и *e* секу се у тачки P;
* праве *a* и *b* секу се у тачки S.

65. Израчунај вредност израза
(1 + 3 + 5 + ... + 75 + 77) – (2 + 4 + 6 + ... + 74 + 76).

4. РАЗРЕД

66. На правој *a* дате су 4 тачке, а на, њој паралелној правој *b*, 3 тачке. Нацртај одговарајућу слику и одреди колико правих, а колико дужи је одређено датим правама и датим тачкама?

67. Јанко и Марко имају картон и маказе. Јанко има картонски квадрат странице 6 cm, а Марко квадрат чија је страница 8 cm. И Марко и Јанко су своје квадрате исекли на квадратне центиметре (квадрате странице један центиметар), а онда су заједно од свих добијених квадратних центиметара саставили нови квадрат. Колики су обим и површина добијеног квадрата?

68. На левој (непарној) страни улице има 77, а на десној (парној) страни улице има 88 кућа. Колико цифара је потребно за нумерацију кућа у тој улици?

69. Дешифруј сабирање AAAA + BBB + CCC + BD = 2023, ако једнаким словима одговарају једнаке цифре и различитим словима одговајају различите цифре.

70. Колико најмање, а колико највише једнаких троцифрених бројева треба сабрати да би добијени збир био 2023?

5. РАЗРЕД

71. Круг k_1 чији је центар тачка A има полупречник 7 cm, а круг k_2 чији је центар тачка B има полупречник 3 cm. Колико је растојање AB, ако се кругови k_1 и k_2 додирују:
а) са унутрашње стране; б) са спољашње стране?

72. Колико има троцифрених природних бројева који нису дељиви ни са 7, ни са 11?

73. На правој p дате су редом тачке A, S и B. Тачка A се централном симетријом у односу на центар симетрије S, пресликава у тачку A_1, а тачка B у тачку B_1. Одреди дужину дужи BB_1, ако је $AA_1 = 20$ cm и $AB_1 = 6$ cm.

74. Шта је веће: $\frac{17}{2023}$ или $\frac{11}{1320}$?

75. Колико најмање, а колико највише сложених бројева треба сабрати да би добијени збир био 2023?

6. РАЗРЕД

76. Може ли се скуп бројева S = { –2023, –2022, ... , –2, – 1, 0, 1, 2, 3, ... 2020, 2021, 2023 } поделити на два подскупа A и B, који немају заједничких елемената, тако да је $A \cup B = S$ и да је:
а) збир елемената скупа A једнак збиру елемената скупа B;
б) производ елемената скупа A једнак производу елемената скупа B?

77. Базен за купање се пуни цевима A и B, а празни се помоћу цеви C. Цев A напуни базен за 4, цев B за 6 сати, а цев C испразни базен за 12 сати. За колико сати ће се напунити базен, ако су у функцији све три цеви?

78. На кружици *k* чији је центар тачка O, дате су редом тачке A, B и C тако да се тачка O налази у унутрашњој области троугла ABC. Докажи да је $\angle AOC = 2\angle ABC$.

79. Реши једначину: $1 + \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{|x|}} = 2023$.

80. Дат је троугао ABC. Над његовим страницама AC и BC са спољне стране су конструисани једнакостранични троуглови ACM и BCN. Докажи да је AN = BM.

7. РАЗРЕД

81. Ако је *n* природан број, одреди збир свих решења неједначине
$2 \le \sqrt{n - 2023} \le$

82. У троуглу ABC, дате су странице AB, BC као и висина BB' из темена B, тако да је AB = 20 cm, BC = 15 cm и BB' = 12 cm. Одреди $\angle ABC$.

83. Шта је веће: 2^{2023} или 3^{1349}?

84. Одреди површину трапеза чије основице су 30 cm и 16 cm, а краци 13 cm и 15 cm.

85. Скуп A садржи 2023 произвољна и различита природна броја. Докажи да међу елементима скупа A постоји бар 338 бројева чија је разлика дељива са 6.

8. РАЗРЕД

86. Од квадра од пластелина чије су ивице 6 cm, 9 cm и 16 cm направљене су (без остатка материјала) четири једнаке коцке. Колико најмање квадратних центиметара картона треба, да би се те коцке спаковале у четири картонске кутије са поклопцем?

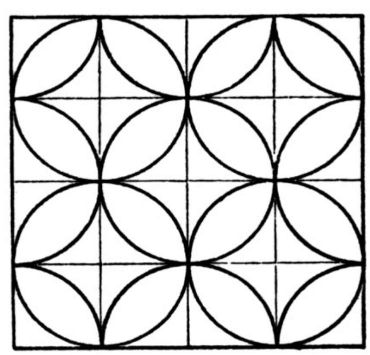
87. Колико целобројних решења има неједначина $x + |x - 3| \leq 2023$?

88. Коцка чија је ивица 13 cm исечена је на 2023 мање коцке чије су ивице 1 cm, 2 cm и 3 cm. Колико има коцки чије су ивице 1 cm, 2 cm и 3 cm?

89. Одреди бар једно решење једначине

$$\frac{x + 2023}{23 - x} + \frac{x + 2022}{22 - x} + \frac{x + 2021}{21 - x} + \frac{x + 2020}{20 - x} = 4 .$$

90. Дат је троугао ABC чија страница BC има дужину 24. Права *p,*која је паралелна са BC, пресеца странице AB и AC редом у тачкама D и E. Одреди дужину дужи DE, ако права *p* дели троугао ABC на два дела једнаких површина.



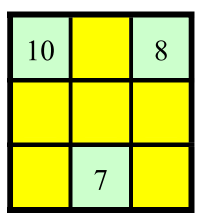
ПРИПРЕМНИ ЗАДАЦИ
ЗА ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ
11. 03. 2023,

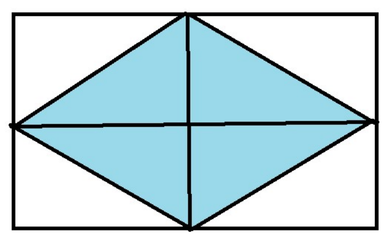
3. РАЗРЕД

91. Збир два троцифрена природна броја једнак је 345. Колики ће бити збир ако се:
а) један сабирак повећа за 36, а други сабирак повећа за 47;
б) један сабирак повећа за 36, а други сабирак умањи за 47;
в) један сабирак умањи за 36, а други сабирак умањи за 47.

92. Две чоколаде и тег од 200 грама имају масу као 3 чоколаде и тег од 120 грама. Колика је маса 5 чоколада? Објасни решење.

93. Допуни магични квадрат на слици (лево).





94. Колико се дужи, троуглова, оштрих, правих и тупих углова може уочити на слици (десно)?

95. Располажемо са 4 кутије. У три кутије налази се оловке, а четврта је празна. Када се из прве кутије у четврту пребаци 17 оловки, из друге у четврту пребаци 26 оловки и из треће пребаци у четврту 35 оловки, онда ће у све четири кутије бити једнак број оловки. Колико је оловака било на почетку у свакој од кутија?

4. РАЗРЕД

96. Реши једначину: $(x + 1) + (x + 2) + ... + (x + 14) = 2023$.

97. Књига има 123 странице. Лена је првог дана прочитала више од 35, а другог дана више од 46 страница. Колико највише страница је Лени остало да прочита трећег дана?

98. Познато је да је $a - b + c = 2023$. Израчунај $a - b + c$, ако се;
а) сваки од бројева *a, b* и *c* увећа за 456;
б) сваки од бројева *a, b* и *c* умањи за 78;
в) број *a* увећа за 100, број *b* умањи за 300, а број *c* умањи за 500.

99. Улица има дужину 119 m и ширину 17 m. Град Математикус има у плану да поплоча улицу бетонским плочама. На располагању имају две врсте квадратних плоча. Прве су димензија 25 cm x 25 cm и имају цену од 50 динара по комаду. Друге плоче су димензија 17 x 17 cm и имају цену 32 динара по комаду. За које плоче ће се определити град Математикус, водећи рачуна да трошкови буду што мањи?

100. Ако Анка поклони Бранки 34 салвета, онда ће обе имати једнак број салвета. Ако Бранка поклони Анки 34 салвета, онда ће Анка имати три пута више салвета од Бранке. Колико салвета има Анка, а колико Бранка?

5. РАЗРЕД

101. Углови α и β су комплементни, а углови β и γ суплементни. Одреди углове α, β и γ ако је $\alpha + \gamma = 200°$.

102. Збир разломака x и y је 0,5, а њихова разлика је $\frac{1}{6}$. Докажи да је број $n = 3 \cdot x + 6 \cdot y + 2023$ дељив са 45.

103. Колико решења у скупу N_o има једначина $3x + y \cdot y = 81$?

104. Одреди најмањи и највећи троцифрени природан број који при дељењу са 2, 3, 4, 5 и 6 дају остатак 1. Колико има таквих троцифрених бројева?

105. На правој p дате су редом тачке A, B и S такве да је AB = 3 cm и AS = AB + BS = 5 cm.
а) Нацртај квадрат ABCD.
б) Нацртај квадрат $A_1B_1C_1D_1$ који је централно симетричан са квадратом ABCD, ако је центар симетрије тачка S.

6. РАЗРЕД

106 Симетрале унутрашњих углова троугла ABC секу се у тачки S. Докажи да су углови $\angle$ASB, $\angle$BSC и $\angle$CSA тупи углови.

107 Збир два рационална броја $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ је 1,111111..., а њихова разлика је 0,5. Одреди природне бројеве a, b, c и d, ако је НЗД (a, b) = 1 и НЗД (c, d) = 1.

108 У троуглу ABC, на страници BC дата је тачка M таква да је AM нормално на BC. Конструисати троугао ABC, ако је AB = 6 cm, AM = 4 cm и AC = 7 cm.

109 Скуп S садржи 2023 различита проста броја.
а) Да ли у скупу S постоји 2022 броја таква да је њихов збир и њихова разлика сложен број.
б) Докажи да постоји скуп M који је подскуп скупа S, такав да скуп M садржи бар 51 број са особином, да је разлика свака два од њих дељива са 100.

110 У једнакокраком трапезу ABCD дијагонале AC и BD су симетрале углова на већој основици трапеза. Одредити углове и странице трапеза, ако је обим трапеза 100 cm, а једна основица је два пута већа од друге.

7. РАЗРЕД

111. Дати су полиноми $A(x) = ax^6 + bx^4 + cx^2$ и $B(x) = ax^2 + bx + c$. Са $A(x)$ и $B(x)$ означимо вредност полинома у тачки x. Ако је $x = 0$, онда је $B(x) = 3$. Ако је $x = 1$, онда је $A(x) = 6$. Ако је $x = -1$, онда је $A(x) + B(x) = 8$. Одреди бројеве a, b и c и израчунај колико је $A(x) - B(x)$, ако је $x = 2$.

112. У правоугаонику ABCD права p садржи тачку A, нормална је на дијагоналу BD и сече страницу CD у тачки E. На страници AB дата је тачка F, тако да је дуж EF паралелна са страницом BC. Ако дуж EF дијагоналу BD сече у тачки G, онда је AG нормално на BE. Докажи.

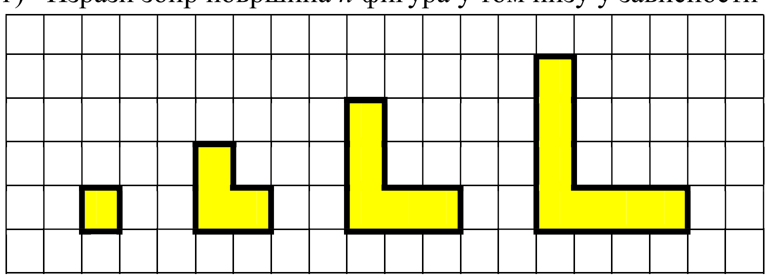
113. У троцифреном броју n све цифре су различите. Одреди највећи троцифрен број n, такав да је број $6^{n+3} + 7^{n+1} + 8^{n} + 9^{n+2}$ дељив са 10?

114. Виктор, Марко и Александар треба да поделе 2023 динара, тако да свако од њих добије бар један динар. На колико начина то могу урадити?

115. У правоуглом троуглу за мерне бројеви полупречника описаног круга R и уписаног круга r важи релација $R : r = 5 : 2$. Одреди колико је $a : b : c$, где су a и b катете, а c хипотенуза тог правоуглог троугла.

8. РАЗРЕД

116. У квадратној мрежи чија је страница једнака 1, дат је низ од n фигура ($n \in$ N). Прве четири фигуре у низу дате су на наредној слици. а) Израчунај површине прве четири фигуре у низу.
   б) Колика је површина 23. фигуре у низу?
   в) Изрази површину P, n-те фигуре у низу у зависности од n?
   г) Изрази збир површина n фигура у том низу у зависности од n?



117. Дат је квадрат ABCD у коме је M је средиште странице AD, а N средиште странице CD. Дужи BN и CM секу се у тачки P. Одреди обим и површину квадрата, ако је површина троугла BMP једнака 30.

118. У ком односу се секу висине правилне једнакоивичне тростране пирамиде?

119. У троуглу ABC, мерни бројеви страница и мерни број површине су природни бројеви. Одредити страницу AC и површину P, ако је AB = 6 и BC = 5. Колико има решења?

120. Колико има десетоцифрених природних бројева код којих је производ цифара мањи од 4?

ПРИПРЕМНИ ЗАДАЦИ
ЗА ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ
06. 05. 2023,

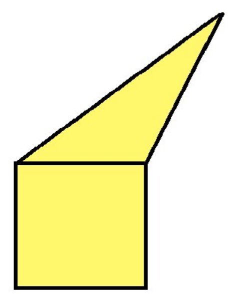
3. РАЗРЕД

121. Колико има троцифрених природних бројева чији производ цифара је 6?

122. Дешифруј сабирање: AAA + AA + A = ABC. Колико има решења?

123. Конструиши магични квадрат, тако да је збир бројева по хоризонталама, вертикалама и дијагоналама једнак 333, а сви елементи магичног квадрата су различити непарни природни бројеви.

124. Квадрат и троугао на слици имају једнаке обиме. Колики је обим целе фигуре (жуто обојене) ако страница квадрата има дужину 6 cm?



125. Влада, Нада и Јагода заједно имају 124 године. Колико година има свако од њих, ако је Нада имала 11 година, када је Влада имао 13 година, а Јагода 4 године.

4. РАЗРЕД

126. Колико има четвороцифрених природних бројева чији производ цифара је 8, а збир цифара је непаран број?

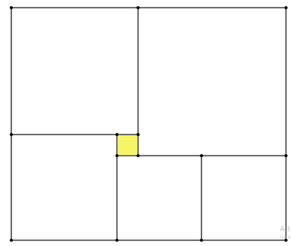
127. Ако је A · BA · BA = 2023, колико је AB · BA?

128. Одреди најмањи природан број x, тако да дати квадрат постане магични.

	34	
40	x	
		37

129. Три молера за 4 дана окрече 5 станова. Колико станова ће окречити 7 молера за 12 дана?

130. Правоугаоник је подељен на 6 квадрата. Одреди обим и површину правоугаоника, ако је површина обојеног квадрата једнака 9 cm^2.



5. РАЗРЕД

131. Колико има двоцифрених сложенених бројева, чији је збир цифара прост број?

132. Шта је веће $\frac{8}{2023}$ или $\frac{77}{22254}$?

133. Углови α и β су суплементни, а углови β и γ су комплементни. Израчунај углове α, β и γ, ако је $\gamma + \alpha = 111^\circ$.

134. Дата је једначина $p \cdot q \cdot r + 3 \cdot p \cdot q + 2 \cdot p = 52$.
Одреди број A – B, ако је A број решења дате једначине у скупу природних бројева, а B број решења дате једначине у скупу простих бројева.

135. Дат је скуп A = { 1, 2, ... , 2021, 2022, 2023 }. Постоје ли подскупови $B_1, B_2, \ldots, B_7$ датог скупа A, такви да је $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_7 = A$; пресек ма која два од скупова $B_1, B_2, \ldots, B_7$ је празан скуп и збир елемената у сваком од скупова $B_1, B_2, \ldots, B_7$ једнак. Ако постоје, наведи један од могућих примера таквих скупова $B_1, B_2, \ldots, B_7$.

6. РАЗРЕД

136. Три молера за 4 дана окрече 5 станова. Колико станова ће окречити 7 молера за 12 дана? За колико дана ће 24 молера окречити 60 станова? Колико молера треба ангажовати да би за 12 дана окречили 45 станова?

137. Дат је неједнакокраки трапез ABCD. Нека су M и N средишта основица AB и CD трапеза и нека је дуж MN једнака полуразлици основица трапеза. Израчунај збир углова на мањој сновици трапеза.

138. Одреди све двоцифрене бројеве који су 7 пута већи од збира својих цифара.

139. У једнакокраком троуглу троуглу ABC, AB = BC, ∠ABC = 108° и симетрала угла ∠CAB сече страницу BC у тачки K. Израчунај дуж AC, ако је AB + KC = 2023.

140. Бројеви од 1 до 1000 (закључно са 1000) исписани су редом по кружници. Почевши од 1 прецртавамо сваки петнаести број (1, 16, 31, 46,...) при чему при поновним обиласцима кружнице већ прецртане бројеве поново урачунавамо (прецртавамо). Колико ће бројева, на овај начин прецртавања, остати непрецртано?

7. РАЗРЕД

141. Збир полинома $A(x)$ и $B(x)$ је полином $A(x) + B(x) = 2x^2 + 4x$, а њихова разлика је полином $A(x) – B(x) = 6$.
   а) Одреди полином $A(x) \cdot B(x)$.
   б) Реши једначину $A(x) \cdot B(x) = 0$.

142. Полупречник кружнице описане око правилног осмоугла је 8 cm. Израчунај површину правилног осмоугла.

143. У дувачком оркестру музичари су на паради били постројени у квадратном облику (n редова са по n музичара). Потом се оркестар у истом саставу престроји правоугаону конфигурацију, тако што је повећан број редова за 5, а у сваком реду је опет био једнак број музичара. Одреди колико је музичара било у том оркестру и како је изгледала формација оркестра пре и после престројавања.

144. Дат је једнакостранични троугао ABC и на луку BC кружнице описане око троугла тачка M. Докажи да је AM = BM + CM.

145. Паук се креће по прозорској решетки која је у облику квадратне мреже димензија 4 x 4. Паук полази из левог доњег угла решетке и кретање паука је праволинијско, корак по корак, од чвора до чвора решетке, али увек десно или горе, при чему је циљ да ухвати муву која се налази у десном горњем углу решетке.
   а) Колико најмање корака треба пауку до циља?
   б) На колико различитих начина може паук стићи до муве?

8. РАЗРЕД

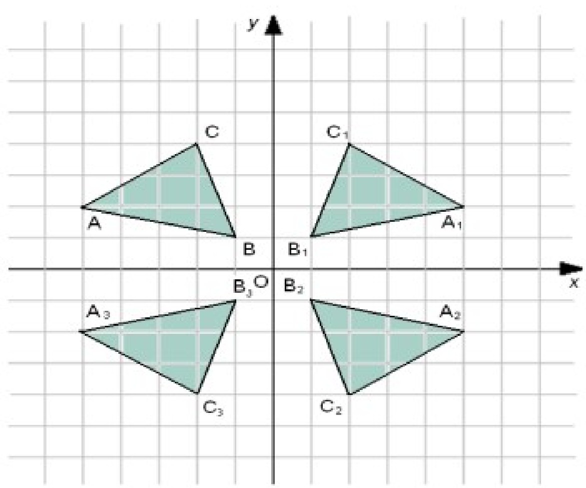
146. Коцка чија је ивица 10 cm пресечена је са равни која је од три ивице са заједничким теменом A одсеца дужи AM, AN и AP једнаке дужине. Ако је однос запремина добијених делова коцке 371 : 4, одредити разлику површина тих делова.

147. На столу се налазе математичке књиге, Срђан је узео трећину књига и још једну књигу. Влада је узео трећину преосталих књига и још две књиге. Пера је узео трећину преосталих књига и још три књиге. Бојан је узео трећину преосталих књига и још четири књиге. На столи је остало још 10 књига. Колико књига је било на столу и колико књига је узео сваки од математичара?

148. У полукруг полупречника r уписан је правоугаоник, чија су два темена на пречнику круга а друга два на кружници. Одреди обим правоугаоника који има највећу површину.

149. Збир цифара броја 7^{2023} је a. Збир цифара броја a једнак је броју b, а збир цифара броја b једнак је броју c. Одредити број c.

150. Одредити све троцифрене бројеве $\overline{abc}$, чије су све цифре различите од нуле, ако за његове цифре a, b и c важи једнакост $a + b + c = 9$ и неједнакост $9a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 6abc \le a^3 + b^3 + c^3$.



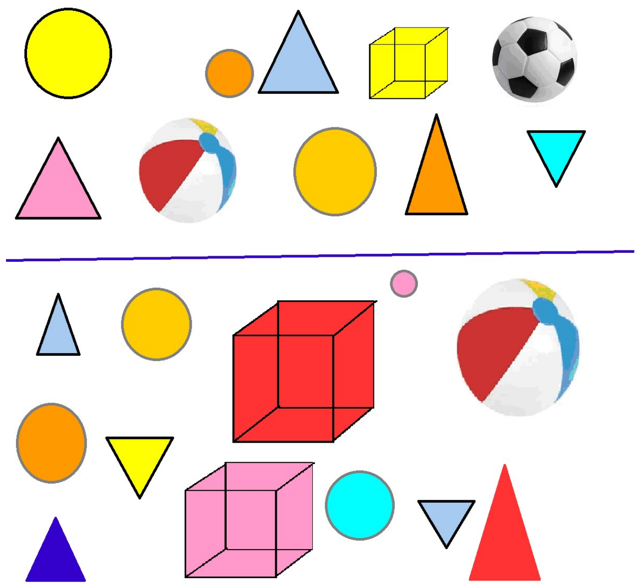
РЕВИЈАЛНО МАТЕМАТИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ

СРБИЈА МИСЛИ! СРБИЈА РЕШАВА!

27.- 28. МАЈ 2023.

КАТЕГОРИЈА 1.
ДЕЦА ПРЕДШКОЛСКОГ УЗРАСТА

151. Колико кругова се налази на слици?
152. Колико коцки видиш на слици?

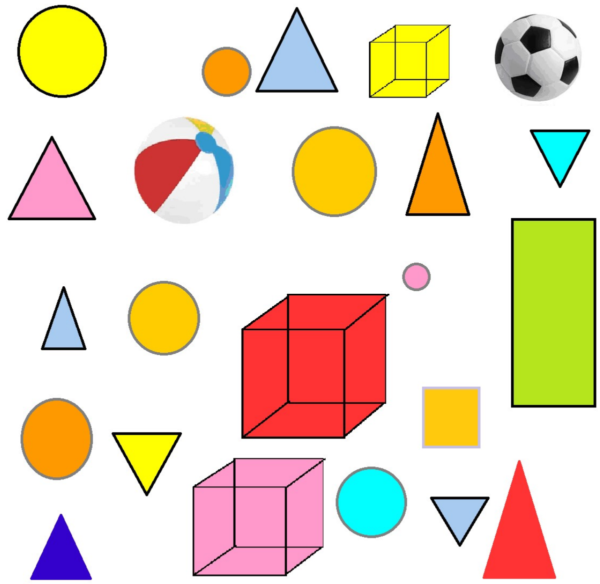


153. Колико лопти се налази на слици изнад плаве линије?
154. Колико троуглова се налази на слици испод плаве линије?
155. Колико различитих слова садржи реч МАТЕМАТИКА?

КАТЕГОРИЈА 2.
УЧЕНИЦИ 1. РАЗРЕДА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

156. Реља има 11 година. Његова сестра Љиља је од њега старија 7 година. Колико година има Љиља?
157. Кувар је за ужину пипремио 6 шоља млека. Међутим на ужину је дошло петнаесторо деце. Колико још шоља млека кувар треба да пипреми?

158. Колико износи збир броја кругова и броја коцки на наредној слици?



159. За колико је најмањи двоцифрени број већи од највећег једноцифреног броја?

160. Три коке су снеле 15 јаја. Једна кока је снела 5 јаја , а друга 6 јаја. Колико јаја је снела трећа кока?

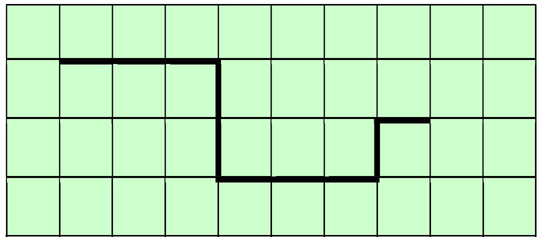
КАТЕГОРИЈА 3.
УЧЕНИЦИ 2. РАЗРЕДА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

161. На хиподрому данас су на програму четири трке. У свакој трци учествује 9 коња. Колико коња ће се укупно такмичити?

162. Мира има 48 фотографија и треба да их равномерно распореди у 4 албума. Колико фотографија ће бити у сваком албуму?

163. У три кутије Никола има 40 аутића. У првој кутији има 6 аутића, а у другој кутији 3 пута више аутића него у првој. Колико аутића Никола има у трећој кутији?

164. У квадратној мрежи чија је страница 1 cm, дата је изломљена линија (види слику). Колика је дужина изломљене линије?



165. Телевизијски пренос ватерполо утакмице је почео у 17 часова и 33 минута, а завршио се у 18 часова и 28 минута. Колико минута је трајао тај телевизијски пренос?

КАТЕГОРИЈА 4.
УЧЕНИЦИ 3. РАЗРЕДА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

166. Израчунај број који је 6 пута мањи од броја 876.

167. Делилац је број 7, а количник 89. Одреди дељеник.

168. Сваки од 5 берача малине набрао је по 138 kg малина. Колико још килограма малина треба да набере свако од њих да би сви заједно набрали 1 тону малине?

169. Марко је заспао 26. маја 2023. године у 22 часа и 22 минута, а пробудио се 27. маја 2023. године у 8 часова и 8 минута. Колико минута је спавао Марко?

170. Правоугоник чији је обим 96 cm, са две праве је подељен на три једнака (подударна) квадрата. Колики је обим сваког од тих квадрата?

КАТЕГОРИЈА 5.
УЧЕНИЦИ 4. РАЗРЕДА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

171. Одреди збир бројева 1 234 и 5 678.

172. Израчунај колико динара ће добити свака од 9 девојчица ако треба на једнаке делове да поделе 3 456 динара..

173. Одреди једну четвртину производа бројева 346 и 82.

174. Израчунај запремину коцке чија је површина 150 cm^2.

175. Под свечане сале у школи је правоугаоног облика дужине 20 m, и ширине 15 m. Салу треба поплочати квадратним плочама димензија 20 cm x 20 cm, чија је цена 100 динара по комаду. Колико коштају плоче којима треба поплочати ту салу?

КАТЕГОРИЈА 6.
УЧЕНИЦИ 5. РАЗРЕДА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

176. Колико елемената има пресек скупова A и B, ако је A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} и B = { 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7 }?

177. Одреди вредност израза $\left(3 - \frac{1}{4} \cdot 2 + 6,5\right) : \frac{9}{7}$.

178. Колики је збир количника и остатка при дељењу броја 2023 са 67?

179. Колико дужи се може избројати на наредној слици?

180. Углови α и β су комплементни, а углови β и γ суплементни. За колико степени је угао γ већи од угла α.

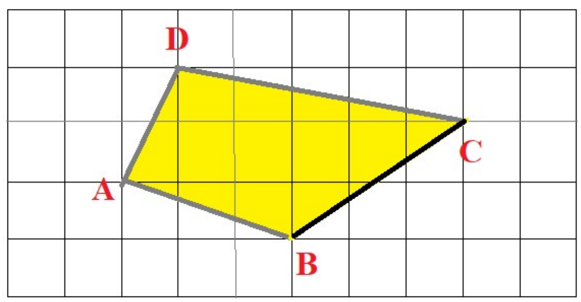
КАТЕГОРИЈА 7.
УЧЕНИЦИ 6. РАЗРЕДА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

181. Израчунај вредност израза; $(-7) + 8 + (-9) + |\, 10 - (-11)\, |$.

182. У троуглу ABC, $\angle ABC = 54°$ и $\angle BCA = 65°$. Одреди $\angle CAB$.

183. Фабрика чоколаде „Соко Штарк“ из Београда, између осталих, производи и чоколаде са лешником. У чоколади од 200 грама, маса лешника у је 24%. Колико килограма лешника треба да набави фабрика да би произвела 1000 килограма чоколаде?

184. У квдратној мрежи чија је страница 1 cm, дат је четвороугао ABCD (види наредну слику). Одреди површину датог четвороугла.



185. Збир *n* узастопних целих бројева је 2023. Одреди највећу могућу вредност *n*.

КАТЕГОРИЈА 8.
УЧЕНИЦИ 7. РАЗРЕДА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

186. У грађевинском предузећу „Греда“ из Ваљева шест мајстора сазидају једну зграду за 32 дана. За колико дана би исту зграду сазидало 8 мајстора?

187. Правилни многоугао има 18 страница. Одреди колико степени има један његов унутрашњи угао.

188. Израчунај вредност израза: $\dfrac{3^7 \cdot 3^{10}}{3^{12} \cdot 3^5}$.

189. Одреди производ свих решења једначине $x^3 = 16x$.

190. Око једнакокраког троугла ABC чија је основица AB = 48 cm, а краци AC = BC = 30 cm описан је круг. Колики је полупречник тог круга?

КАТЕГОРИЈА 9.
УЧЕНИЦИ 8. РАЗРЕДА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

191. Површина коцке је 294 cm^2. Израчунај запремину коцке.

192. Реши неједначину $\dfrac{x-1}{2} < \dfrac{2x}{3} < \dfrac{x+3}{4}$. Колико има целих бројева који су решења дате неједначине?

193. Основа пирамиде је квадрат чија је страница 10 cm. Израчунај површину пирамиде, ако је њена висина једнака 12 cm.

194. На две полице налази се 100 књига. Ако са прве полице узмемо половину књига, а са друге полице две трећине књига, узели смо укупно 60 књига. Колико је књига било на првој полици?

195. График функције $y = кx + n$ садржи тачку M (5, 3) и пресеца y осу у тачки N (0, 6). Одреди удаљеност координатног почетка од графика те функције.

КАТЕГОРИЈА 10.
УЧЕНИЦИ 1. РАЗРЕДА СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

196. При пржењу кафе, кафа губи 12% своје масе. Колико треба килограма свеже кафе, да би се добило 44 kg пржене кафе?

197. Унутрашњи углови троугла односе се као 3 : 2 : 7. Израчунај разлику највећег и најмањег угла овог троугла.

198. Број 60 је написан као збир два броја, тако да већи број подељен са мањим даје количник 2 и остатак 3. Израчунај мањи број.

199. Сенка човека високог 1,8 m дугачка је 4 m, Колико је високо дрво, ако је дужина сенке дрвета 20 m?

200. Реши неједначину $\frac{2}{|x-3|-1}+\frac{3}{|x-3|+2} \le 0$ и одреди збир вредности целобројних решења неједначине.

КАТЕГОРИЈА 11.
УЧЕНИЦИ 2. РАЗРЕДА СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

201. Ако је $i^2 = -1$, израчунај вредност израза $1 + i + i^2 + i^3 + i^4$.

202. Одреди производ решења једначине $(\log_2 x)^2 - 3 = 2 \log_2 x$.

203. Израчунај збир целобројних решења неједначине $2^{x^2-3x} \le 1$.

204. Одреди вредност израза $10 (\cos^4 30^\circ - \sin^4 30^\circ)$.

205. Одреди збир кубова решења једначине $x(x-1)(x+1)(x+2) = 24$ која нису реална.

КАТЕГОРИЈА 12.
УЧЕНИЦИ 3.РАЗРЕДА СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

206. Ако је запремина лопте 972π, колика је дужина њеног полупречника?

207. Израчунај збир првих 100 непарних природних бројева.

208. Запремина правилног тетраедра је $27\sqrt{3}$. Израчунај висину тетраедра.

209. Дуж AB, A (1, 3) и B (–1, 5) је пречник круга k. Ако је C (p, q) центар круга $k,$ а r полупречник круга $k,$ израчунај вредност израза $p + q - r^2$.

210. Одреди природн број $n,$ ако је $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} = \frac{1023}{512}$

КАТЕГОРИЈА 13.
УЧЕНИЦИ 4. РАЗРЕДА СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

211. Колико има природних бројева за које је дефинисана функција

$$y = \sqrt{\frac{5x - x^2}{x^2 - 6x + 9}}\ ?$$

212. Израчунај $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3tgx}{sinx}$.

213. На шаховском турниру сваки шахиста игра са сваким по једну партију. Одиграно је укупно 120 партија. Колико шахиста је учествовало на том турниру?

214. Вероватноћа да се случајним избором једног од бројева 1, 2, 3, ..., 2023 изабере број дељив са 7 је p. Израчунај вредност израза $578p$.

215. Штампарија Ваљево принт из Ваљева поседује (као остатак материјала) велику количину квадратних картона димензија 30 cm x 30 cm. Произвођач малина жели да штампарија од тих картона направи кутије (без поклопца) за паковање и продају малина и има захтев да кутије имају највећу могућу запремину. Колико кубних центиметара је највећа могућа запремина једне такве кутије?

КАТЕГОРИЈА 14.
УЧЕСНИЦИ ОД 9 ДО 99 ГОДИНА

216. Фабрика сокова „Раух“ из Коцељеве производи сок од вишње за децу и једно паковање сока има запремину 1,25 децилитара. Колико се највише таквих паковања сока може напунити из цистерне у облику квадра чија је дужина 4 m, ширина 3 m и висина 2 m?

217. У фабрици посуђа „Металац“ из Горњег Милановца 3 мајстора за 4 сата направе 50 висококвалитетних посуда. Колико посуда ће направити 7 мајстора за 6 сати?

218. За ученике основних школа у Србији неопходно је одштампати 150 уџбеника. Фондација Алек Кавчић је до сада у електронској форми објавила 111 неопходних уџбеника за основну школу. Колико процената од укупног броја потребних уџбеника за основну школу тренутно покривају бесплатни уџбеници Фондације Алек Кавчић?

219. Предузеће „Блист“ из Ваљева због државног празника није радило 1. и 2. маја, а 3. маја је произвело 111 пећи; 4. маја 113 пећи и сваког следећег дана за две пећи више него претходног дана. Колико ће пећи произвести предузеће „Блист“ у току Маја Месеца Математике (закључно са 31.05.)?

220. Компанија „Aqua Casa“ из Београда опрема свој продајни центар. Под продајног центра је правоугаоног облика, дужине 25 m и ширине 16 m. Неопходно је пословни центар поплочати плочама квадратног облика 20 cm x 20 cm. Ако једна плоча кошта 100 динара колико компанији „Aqua Casa“ треба новца за набавку плоча?

ДИОФАНТОВО
МАТЕМАТИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
12. 08. 2023.

3. РАЗРЕД

221. Бројеви 5,6,7,8,9,10,11,12,13 су елементи магичног квадрата (3x3). Карактеристични збир тог магичног квадрата је (заокружи тачан одговор):

А) 24 Б) 25 В) 26 Г) 27 Д) 28.

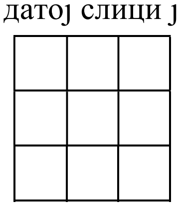
222. Милан ће за 28 година имати три пута више година него сада. Милан сада има (заокружи тачан одговор):

А) 13 Б) 14 В) 15 Г) 16 Д) 17 година.

223. Збир три узастопна природна броја је 345. Највећи од њих је (заокружи тачан одговор):

А) 112 Б) 114 В) 116 Г) 118 Д) 120.

224. Број правих углова на датој слици је (заокружи тачан одговор):



А) 4 Б) 9 В) 20 Г) 36 Д) 45.

225. Одреди сва решења математичког ребуса * + ** + *** = 113 и прикажи поступак.

4. РАЗРЕД

226. Површина правоугаоника је $48cm^2$, а његове странице су изражене природним бројевима. Број таквих правоугаоника је (заокружи тачан одговор):

А) 3 Б) 4 В) 5 Г) 8 Д) 10.

(Сматрамо да су правоугаоник са страницама 2cm и 5cm и правоугаоник са страницама 5cm и 2cm исти.)

227. Књига има 123 странице. Марија је пребројала цифре које су неопходне за нумерацију свих непарних страница те књиге. Број цифара које је Марија добила је (заокружи тачан одговор):

А) 130 Б) 131 В) 128 Г) 134 Д) 129.

228. Збир четири узастопна природна броја је 1250. Производ цифара највећег од њих је (заокружи тачан одговор):

А) 3 Б) 6 В) 9 Г) 12 Д) 15.

229. Када се свака страница квадрата увећа за 4cm, његова површина се увећа за 48 cm^2. Страница тог квадрата је (заокружи тачан одговор):

А) 4cm Б) 5cm В) 6cm Г) 7cm Д) 8cm.

230. Одреди сва решења математичког ребуса
* + ** + *** +****= 1113 и прикажи поступак.

5. РАЗРЕД

231. Збир бројева 5 и 8 (у декадном бројевном систему) у бинарном систему се записује у облику (заокружи тачан одговор):

А) 1111 Б) 1001 В) 1101 Г) 1110 Д) 10001.

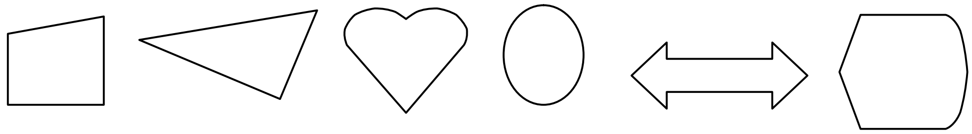
232. Најмањи четвороцифрен природан број који при дељењу сваким од бројева 2, 3, 5 и 8 даје остатак 1 је (заокружи тачан одговор):

А) 1201 Б) 1441 В) 1081 Г) 1061 Д) 1141.

233. Праве *a* и *b* су паралелне. На правој *a* дате су 4 различите тачке, а на правој *b* 3 различите тачке. Број правих које су одређене датим тачкама је (заокружи тачан одговор):

А) 12 Б) 13 В) 14 Г) 15 Д) 16.

234. Укупан број оса симетрије на свим датим сликама је (заокружи тачан одговор):



А) 5 Б) 6 В) 7 Г) 8 Д) 9.

235. Одреди све просте бројеве p за које је могуће скратити разломак $\dfrac{p}{12138}$ (прикажи поступак).

6. РАЗРЕД

236. Дуж AC подељена је тачком B на делове од 6cm и 8cm. Над дужима AB и BC конструисани су квадрати ABDE и BCFG, тако да се налазе са различитих страна праве AC. Тачка N је пресечна тачка дијагонала AD и BE квадрата ABDE, а тачка M је пресечна тачка дијагонала BF и GC квадрата BCFG. Површина четвороугла NMCD је (заокружи тачан одговор):

А) 49cm^2 Б) 48cm^2 В) 36cm^2 Г) $54\ \text{cm}^2$ Д) 40cm^2.

237. Ако је $A=\dfrac{64^5\cdot 8^4}{32^8}$, $B=\dfrac{15^6\cdot 14^5}{21^5\cdot 10^4}$ и $C=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^5\cdot\left(\dfrac{3}{7}\right)^5\cdot 7^5$, тада је A+B+C једнако (заокружи тачан одговор):

А) 186 Б) 122 В) 108 Г) 132 Д) 2.

238. Валентина је желела да испише све четвороцифрене бројеве дељиве са 9, али тако да може да користи само цифре 1, 2 и 3. Колико је бројева укупно написала Валентина (заокружи тачан одговор).

А) 8 Б) 12 В) 16 Г) 20 Д) 32.

239. На страницама AB и четвороугла ABCD дате су тачке M, N, P и Q, такве да је AM = MN = NB и CP = PQ = QD. Однос површна четвороуглова MNPQ и ABCD је (заокружи тачан одговор)

А) 3 : 7 Б) 1 : 2 В) 2 : 3 Г) 1 : 3 Д) 3 : 5.

240. Дат је паралелограм ABCD, са тупим углом код темена B. Странице AB и BC су продужене преко темена B. На њиховим продужецима су дате редом тачке E и F тако да је BE основица једнакокраког троугла BEC и BF основица једнакокраког троугла BAF. Докажи да је троугао FED једнакокрак (прикажи поступак).

7. РАЗРЕД

241. Одреди збир решења једначине $a^3 - 8a^2 + 13a - 6 = 0$ и заокружи тачан одговор:

А) 4 Б) 5 В) 6 Г) 7 Д) 8.

242. Четвороугао ABCD је уписан у круг тако да је $\angle ABC = 130^\circ$ и $AC = CD$. Одредити $\angle ACD$ и заокружити тачан одговор:

А) 40° Б) 50° В) 65° Г) 70° Д) 80°.

243. Мерни бројеви страница правоуглог троугла су природни бројеви, а једна страница је 20. Одреди збир свих могућих решења за полупречник круга уписаног у троугао и заокружи тачан одговор:

А) $\frac{1}{2}$ Б) $\frac{2}{3}$ В) 1 Г) $\frac{4}{3}$ Д) 2.

244. У правоуглом троуглу ABC ($\angle ACB = 90^\circ$), катета $BC = 1$ и $\angle ABC = 15^\circ$. Израчунај катету AC и заокружи тачан одговор:

А) $2 - \sqrt{3}$ Б) $\frac{1}{3}$ В) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ Г) $\frac{1}{2}$ Д) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

245. Докажи да за све позитивне реалне бројеве x, y и z важи неједнакост

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Када важи једнакост?

8. РАЗРЕД

246. На страницама AB, BC и AC дате су тачке M, N и P, редом. Праве AN, BP и CM секу се у једној тачки. Тачка M дели страницу AB у односу AM : MB = 5 : 6, а тачка N дели страницу BC у односу BN : NC = 7 : 8. Одредити однос CP : PA (и заокружи тачан одговор)

    А) 35:48 Б) 48:35 В) 40:42 Г) 42:40 Д) 1.

247. Дата је једначина $p + 4^k = q^2$ (p и q су прости бројеви, а k је цео број). Број решења дате једначине је (заокружи тачан одговор).

    А) 0; Б) 1 В) 2 Г) 3 Д) бесконачно

248. Дат је тангентни трапез ABCD у коме је AB = 7, CD = 3 и $\angle$BAD = 60°. Тада се кракови трапеза AD и CB разликују за (заокружи тачан одговор):

    А) $\frac{1}{2}$ Б) $\frac{2}{3}$ В) 1 Г) $\frac{4}{3}$ Д) 2.

249. У троуглу ABC страница AB = $2-\sqrt{3}$, BC = 1 и $\angle$ABC = 60°. Тада је $\angle$CAB једнак (заокружи тачан одговор):

    А) 75° Б) 90° В) 105° Г) 120° Д) 135°.

250. За које вредности природног броја n се квадратна табла n x n може поплочати квадратима 2 x 2 и 3 x 3 (образложи решење).

РЕШЕЊА

ДИОФАНТОВО МАТЕМАТИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ

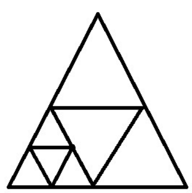
ЗИМСКА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА – ЧАЧАК 2023.

1. $36 - 20 : 4 + 3 + 7 \cdot 5 = 36 - 5 + 3 + 35 = 69$. Тачан одговор је В).

2. Број А може бити 3 или 4. Ако је А = 3, онда је 333 + В + ВС = 482, па је В + ВС = 149, што је немогуће, јер збир В + ВС може бити највише 99 + 9 = 108. Ако је А = 4, онда је 444 + В + ВС = 482, па је В + ВС = 38 и В = 3, а С = 5. Тада је А – В + С = 4 – 3 + 5 = 6 и тачан је одговор Д).

3. Низ 54, 44, 35, 27, 20 ... добија се тако што се разлика два члана низа смањује за један, јер је 54 – 44 = 10, 44 – 35 = 9, 35 – 27 = 8, 27 – 20 = 7 ... То значи да су следећи чланови низа 20 – 6 = 14, 14 – 5 = 9, 9 – 4 = 5, 5 – 3 = 2. Низ нема више чланова, јер би следећи био 2 – 2 = 0, а нула није природан број. Како је 2 + 5 + 9 = 16, тачан је одговор Б).

4. Малих троуглова има 4, средњих још 4 и велики је 1 троугао.
То је укупно 9 и тачан резултат је под Г)



25	**11**	**21**
15	19	**23**
17	**27**	13

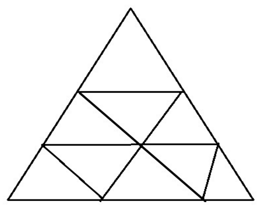
5. Како је централни број 19, то је карактеристични збир $3 \cdot 19 = 57$, па се остали бројеви лако добијају допуњавањем хоризонтала, вертикала и дијагонала до 57 (види слику десно).

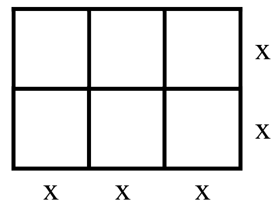
6. Књига која има 185 страна има 9 једноцифрених, 90 двоцифрених и 86 троцифрених страна. За нумерацију књиге потребно је $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 86 \cdot 3 = 9 + 180 + 258 = 189 + 258 = 447$ цифара. Тачан одговор је Б).

7. Број А не може бити 2, јер би онда у старту имали 2222 што је веће од 2023.Дакле А = 1 и тада је 1111 + В + ВС + ВСС = 2023, тј.
В + ВС + ВСС = 2023 – 1111 = 912. Очигледно број В није 9, јер би тада збир био већи од 999, па је број В = 8. Сада је 8 + 88 + 800 + С + СС = 912, па је С + СС = 912 – 888 = 24 и С = 2. Тада је В + С – А = 8 + 2 – 1 = 9, па је тачан одговор Г).

8. Најмање новца има Аца. Нека је његова сума x. Бошко има три пута више то јест 3x. Вељко има три пута више од Бошка, тј. 9x. Како је $x + 3x + 9x = 13x = 1599$, то је $x = 1599 : 13 = 123$ динара. Значи да Аца и Вељко имају $x + 9x = 10x = 10 \cdot 123 = 1230$ динара. Тачан одговор је А).

9. На слици има 9 малих. 3 средња и један велики троугао, што је укупно $9 + 3 + 1 = 13$ троуглова, па је тачан одговор Д).





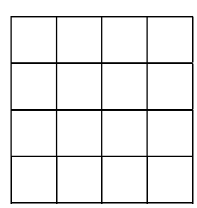
10. Ако страница добијеног квадрата има дужину x, онда је обим правоугаоника $3x + 2x + 3x + 2x = 10x = 120$ cm, па је $x = 120 : 10 = 12$ cm. Обим квадрата је $4 \cdot 12 = 48$ cm, а површина је $12 \cdot 12 = 144$ cm^2.

11. Како је $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$ и $A \setminus B = \{1, 5\}$, јасно је да скупу B припадају бројеви 2, 3, 4 и 6, па је њихов збир једнак $2 + 3 + 4 + 6 = 15$. Тачан одговор је Г).

12. Из једнакости $3p + 5q = 74$ јасно је да су бројеви p и q непарни и да је $5q < 74$, што значи да је $q < 15$ и $q \in \{3, 5, 7, 11, 13\}$. Ако је $q = 3$, онда је $3p = 74 - 15 = 59$ и нема решења. Ако је $q = 5$, онда је $3p = 74 - 25 = 49$ и нема решења. Ако је $q = 7$, онда је $3p = 74 - 35 = 39$ и $p = 13$. Ако је $q = 11$, онда је $3p = 74 - 55 = 19$ и једначина нема решења. Ако је $q = 13$, онда је $3p = 74 - 65 = 9$, па је $p = 3$, што значи да постоје два решења (13, 7) и (3, 13). Тачан одговор је В).

13. Како је запремина квадра $336 = 6 \cdot 56 = 6 \cdot 7 \cdot 8$, то су ивице квадра 6 cm, 7 cm и 8 cm, а његова површина $2(6 \cdot 7 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 6) = 2(42 + 56 + 48) = 2 \cdot 146 = 292$ cm^2. Тачан је одговор В).

14. На свакој од 5 хоризонталних и 5 вертикалних дужи има по $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ дужи, па је укупан број дужи $x = 100$. На слици има 16 квадрата странице 1, 9 квадрата странице 2, 4 квадрата странице 3 и 1 квадрат странице 4. То је $y = 16 + 9 + 4 + 1 = 30$ квадрата, па је тачан одговор В).



15. Ако се први разломак прошири са 8, а други са 7, добијају се разломци $\frac{6}{7} = \frac{48}{56}$ и $\frac{7}{8} = \frac{49}{56}$. Како је 48 < 49, то је и $\frac{6}{7} < \frac{7}{8}$.

16. Највећи угао у троуглу је $180^\circ - 20^\circ - 40^\circ = 120^\circ$. Највећи спољашњи угао је 160°, а најмањи спољашњи угао је 60°. Њихове симетрале деле те углове на углове од 80° и 30°, па се те симетрале секу под углом $180^\circ - 80^\circ - 30^\circ = 70^\circ$. Тачан је одговор Г).

17. Како је број $2y$ паран, то је $x \cdot x$ непаран број мањи од 29. То значи да је x једнако 1, 3, или 5. Ако је $x = 1$, онда је $2y = 28$ и $y = 29 - 1 = 14$. Ако је $x = 3$, онда је $2y = 29 - 9 = 20$ и $y = 10$. Коначно ако је $x = 5$, онда је $2y = 29 - 25 = 4$ и $y = 2$. Постоје 3 решења, па је тачан одговор Г).

18. Како је $15 = 7 + 8 = (-6) + (-5) + \ldots 5 + 6 + 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = (-3) + (-2) + \ldots + 3 + 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = (-14) + (-13) + \ldots 13 + 14 + 15$, то има 7 таквих случајева. Тачан одговор је Г).

19. Да би били сигурни да постоје три куглице исте боје треба извући најмање 15 + 16 + 1 = 32 куглице, јер ако би број куглица био 31, онда би било могуће да има само две врсте куглица (плаве и беле). Тачан одговор је Д).

20. Ако три молера за 4 дана окрече 5 станова то значи да је за кречење 5 станова потребно 12 дневница, тј. да је за кречење 1 стана потребно 5/12 дневнице.

а) Тада за 7 молера за 12 дана (84 дневнице) окрече $84 \cdot \frac{5}{12} = 7 \cdot 5 = 35$ станова.

б) Ако има 22 молера и ако они крече x дана, онда је $22 \cdot \frac{5}{12} \cdot x = 55$ и x = 6 дана.

в) Ако има y молера, онда они за 21 дан окрече $21 \cdot \frac{5}{12} \cdot y = 70$ и $y = 8$ молера.

21. Број 6^{2023} се завршава цифром 6, а број 7^{2022}, као и број 7^2 цифром 9. Број 8^{2021} се завршава истом цифром као и 8^1, а то је 8 и коначно број 9^{2020} се завршава цифром 1. Број А се завршава цифром 6 + 9 + 8 + 1, а то је цифра 4. Тачан одговор је Г).

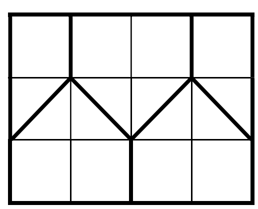
22. Из Питагорине теореме се добија да је хипотенуза тог троугла једнака 25. Како је полупречник уписаног круга r = (a + b – c) : 2 = (15 + 20 – 25) : 2 = 5. Тачан је одговор Г).

23. Број $x = (20^{30})^{40} = 20^{1200} = (4 \cdot 5)^{1200} = 2^{2400} \cdot 5^{1200}$. Број $y = (30^{40})^{20} = 30^{800} = (3 \cdot 2 \cdot 5)^{800} = 2^{800} \cdot 3^{800} \cdot 5^{800}$. Број $z = (40^{30})^{20} = 40^{600} = (8 \cdot 5)^{600} = 2^{1800} \cdot 5^{600}$. Како је $x - y = 2^{2400} \cdot 5^{1200} - 2^{800} \cdot 3^{800} \cdot 5^{800} = 2^{800} \cdot 5^{800} (2^{1600} \cdot 5^{400} - 3^{800})$ веће од 0, то је $x > y$. Слично је $y - z = 2^{800} \cdot 3^{800} \cdot 5^{800} - 2^{1800} \cdot 5^{600} = 2^{800} \cdot 5^{600} (3^{800} \cdot 5^{200} - 2^{1000}) > 0$, па је $y > z$. Како је $x > y > z$, то је тачан одговор Д).

24. Ако је a = 1,2222..., онда је $10a$ = 12, 2222..., па је $10a - a = 9a = 11$, што значи да је $a = 11/9$. Слично, ако је b = 0,818181 ..., онда је 100b = 81,818181, па је $100b - b = 99b = 81$, па је $b = 81/99 = 9/11$. Тада је

$$\sqrt{\frac{1,222222...}{0,818181,,,}} = \sqrt{\frac{\frac{11}{9}}{\frac{9}{11}}} = \frac{11}{9} = \frac{x}{y}.$$ Следи да је $x - y = 11 - 9 = 2$, па је тачан одговор Б).

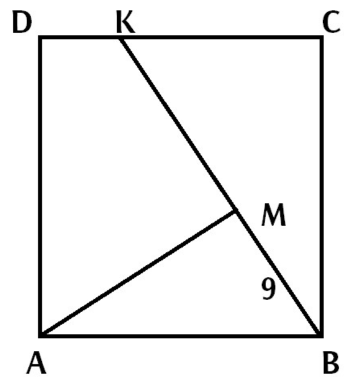
25. Ако дати правоугаоник 3 x 4 подели на „кућице“, онда се добију 3 „кућице“ и 2 „полукућице (види слику). У свакој „кућици“ и „полукућици“ највеће могуће растојање између две тачке је $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Како постоји 6 тачака, а 5 „кућица“ на основу Дирихлеовог принципа (6 : 5 = 1(1)), постоји „кућица“ у којој се налазе бар две тачке. Растојање између те две тачке је мање од $\sqrt{5}$.



26. Јдначина је еквивалентна са једначином $2018(x - 7) = 2023(x - 12)$, па је $2018x - 14126 = 2023x - 24276$. Тада је $5x = 10150$ и $x = 2030$ и тачан одговор је В).

27. Како је $1320 = 10 \cdot 132 = 10 \cdot 11 \cdot 12$. Ако је дијагонала квадра једнак x, онда је $x^2 = 10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365$, па је $x = \sqrt{365}$ и тачан је одговор Г).

28. Нека је страница квадрата једнака 4x. Тада је дуж CK = 3x. Правоугли троуглови ABM и BCK су слични (јер су им једнаки сви углови), па важи пропорционалност катета: AM : BM = BC : KC. Тада је AM : 9 = 4x : 3x и AM = 36x : 3x = 12. Из Питагорине теореме је $AB^2 = AM^2 + BM^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$, па је површина квадрата једнака 225.
Тачан је одговор В).

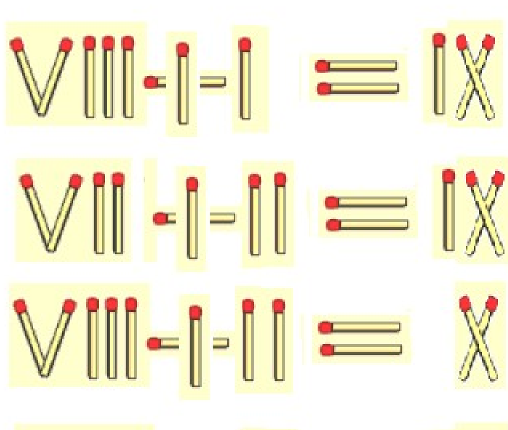


29. Петоцифрених бројева има укупно $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90\,000$. Петоцифрених бројева чији декадни запис не садрже ни једну нулу има $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 81 \cdot 729 = 59049$.
То значи да бројева чији декадни запис садржи бар једну нулу, па према томе и чији је производ цифара једнак 0 има $90000 - 59049 = 30951$. Тачан је одговор Г).

30. Нека је број ноћи у којима Шехерезада прича по 3 приче x, а број ноћи у којима прича 5 прича y. Тада је $3x + 5y = 1001$ и једно целобројно решење дате једначине је $x_o = 332$, $y_o = 1$ (јер је $3 \cdot 332 + 1 \cdot 5 = 996 + 5 = 1001$). Опште решење добијене линеарне Диофантове једначине је
$x = 332 - 5к$, $y = 1 + 3к$ ($к$ је неки цео број). Како x и y морају бити природни бројеви то је $x = 332 - 5к > 0$ и $y = 1 + 3к > 0$. Следи да је $к \leq 66$ и $к \geq 0$, па има 67 различитих начин да Шехерезада исприча бајке.
Најбржи је онај за који је $к = 66$, па је $x = 2$ и $y = 199$ и тада је потребна $199 + 2 = 201$ ноћ.
Најдуже се бајке могу причати када је $к = 0$, па је $x = 332$ и $y = 1$ и то је 333 ноћи.

31. Најмањи троцифрени број направљен од датих цифара у датом поретку је 103, а највећи 876. Њихов збир је 979, а разлика је 773.

32. Претварањем „минуса" у „плус" добијају се три решења:



33. Нека од могућих решења су: $3 : 3 + (3 - 3) \cdot 3 = 1$;
$(3 + 3) : 3 + 3 - 3 = 2$; $3 + 3 - 3 + 3 - 3 = 3$; $3 : 3 + 3 - 3 + 3 = 4$;
$3 \cdot 3 - 3 - 3 : 3 = 5$.
Напомињемо да су могуће и друге тачне конструкције тражених израза.

34. Низ бројева чине двоцифрени бројеви у којима је прва цифра за 1 већа од прве. Може и другачије, сваки члан низа је за 11 мањи од претходног. Дакле, 98, 87, 76, 65, 54, 43, 32, 21, 10. Збир бројева који нису директно набројани је: $54 + 43 + 32 + 21 + 10 = 97 + 53 + 10 = 160$

35. Да би троцифрен број био паран он мора имати облик * * * = * * П, где је последња цифра парна. Дакле у обзир долазе бројеви; * * 0, * * 2, * * 4, * * 6 и * * 8. Добијамо да је тада збир прве две цифре једнак 22, 20, 18, 16 и 14. Прве две комбинације отпадају, јер највећи могући збир две цифре је $9 + 9 = 18$, па у обзир долазе само бројеви чији је збир прве две цифре једнак 18, 16 или 14. То су бројеви: 994; 796, 886, 976; 598, 688, 778, 868, 958. Таквих бројева је укупно 9.

36. Нека од могућих решења су: $3 + 3 + (3 - 3) \cdot 3 = 6$,
$3 \cdot 3 - (3 + 3) : 3 = 7$, $(3 + 3) : 3 + 3 + 3 = 8$, $3 \cdot 3 + (3 - 3) : 3 = 9$,
$3 + 3 + 3 + 3 : 3 = 10$.
Напомињемо да су могуће и друге тачне конструкције тражених израза.

37. Марко је у школи и у путу провео 12 часова и 23 минута минус 7 часова и 38 минута, а то је 11 часова и 83 минута минус 7 часова и 38 минута што износи $11 - 7 = 4$ часа и $83 - 38 = 45$ минута.

Јанко је у школи и у путу провео 18 часова и 18 минута минус 13 часова и 42 минута, а то је 17 часова и 78 минута минус 13 часова и 42 минута, што у коначном значи $17 - 13 = 4$ часа и $78 - 42 = 36$ минута.
Дакле више времена у школи и у путу је провео Марко.

38. Како је број $8 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 8 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ то су сви четвороцифрени бројеви чији је производ цифара 8:
1124, 1142, 1214, 1241, 1412, 1421; 2114, 2141, 2411, 4112, 4121, 4211 – укупно 12; 1118, 1181, 1811, 8111 – укупно 4 и 1222, 2122, 2212, 2221 – укупно 4. То значи да их укупно има $12 + 4 + 4 = 20$
Парних има 10 (1124, 1142, 1214, 1412, 2114, 4112, 1118, 1222, 2122 и 2212), а непарних такође 10 (1241, 1421, 2141, 2411, 4121, 4211, 1181, 1811, 8111 и 2221).
Према томе једнако је непарних четвороцифрених бројева који имају производ цифара 8 и парних четвороцифрених бројева чији је производ цифара 8.

39. Димензије игралишта су $50 - 3 - 3 = 44$ m и $30 - 3 - 3 = 24$ m Обим ватерполо игралишта је $44 + 24 + 44 + 24 = 68 + 68 = 136$ m, а површина $44 \cdot 24 = 960 + 96 = 1056$ m^2.

40. Нека Миланова половина кликера износи x кликера. Тада је и Драганова трећина кликера, такође x. То значи да Милан има $2 \cdot x$, а Драган $3 \cdot x$ кликера, Следи да је $2 \cdot x + 3 \cdot x = 95$. Дакле $5 \cdot x = 95$ па је $x = 95 : 5 = 19$ кликера. Милан има $2 \cdot x = 2 \cdot 19 = 38$ кликера, а Драган има $3 \cdot x = 3 \cdot 19 = 57$ кликера.

41. Нека је ивица коцке x. Запремина коцке је $x \cdot x \cdot x = 512$. Растављањем броја 512 на чиниоце добија се да је $512 = 2 \cdot 256 = 2 \cdot 2 \cdot 128 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 64 = 8 \cdot 8 \cdot 8$, па је дужина ивице коцке једнака 8 cm. Површина коцке је $P = 6 \cdot x \cdot x = 6 \cdot 8 \cdot 8 = 6 \cdot 64 = 384$ cm^2.

42. Нека је половина Лазине суме и трећина Војине суме једака x. Тада Воја има $3 \cdot$ x, а Лаза $2 \cdot x$ динара. Како Воја има $70 + 36 = 106$ динара више од Лазе, то је $3 \cdot x - 2 \cdot x = x = 106$ динара. Воја има $3 \cdot x = 3 \cdot 106 = 318$ динара, Лаза $2 \cdot x = 212$ динара, а Алекса има $212 + 36 = 248$ динара.

43. *Прво решење:* Како је 2*1 * = 2100 – 100 + *1* = 2* · 105 то је 2100 + *1* – 100 = 20 · 105 + * · 105. Следи да је *1* – 100 = * · 105.

Број на левој страни једнакости је дељив са 105, па може бити из скупа {0, 105, 210, 315, 420 ...}. Само бројеви 210 и 315 задовољавају тај услов (јер имају цифру десетица 1) , па су сва решења ребуса : $22 \cdot 105 = 2310$ и $23 \cdot 105 = 2415$.

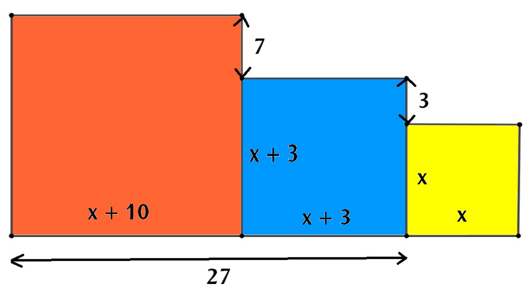
Друго решење: Нека је $2a \cdot 105 = 2b1c$. Број 2b1c је дељив са $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, што значи да је дељив са 3, 5 и 7. Како је дељив са 5, то је последња цифра c једнака 0 или 5, па се ради о бројевима 2b10 или , 2b15. Како ти бројеви морају бити дељиви са 3, то је $2 + b + 1 + 0 = b + 3$ дељиво са 3, или је $2 + b + 1 + 5 = 8 + b$ дељиво са 3. Дакле, у обзир долазе само бројеви 2010, 2310, 2610, 2910 и 2115, 2415, 2715. Дељењем са 7 добија се да је $2310 : 105 = 22$ и $2415 : 105 = 23$. Тражена множења су $22 \cdot 105 = 2310$ или $23 \cdot 105 = 2415$.

44. Тражени скупови су: $A = \{ 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$; $B = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ и $C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 ...\}$.

а) Скуп $(A \cup B) \cap C = \{ 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$;

б) Скуп $(A \setminus C) \cap B = \{ 4, 8, 10, 14, 16 \} \cap \{ 3, 6, 9, 12, 15, 18 \} = \emptyset$.

45. Нека је страница најмањег (жутог) квадрата једнака x. Тада је страница плавог квадрата једнака $x + 3$, а страница црвеног квадрата је $x + 3 + 7 = x + 10$. Следи да је $x + 3 + x + 10 = 27$, па је $2x + 13 = 27$. Значи да је $2x = 14$ и $x = 7$. Странице датих квадрата су 7, 10 и 17.

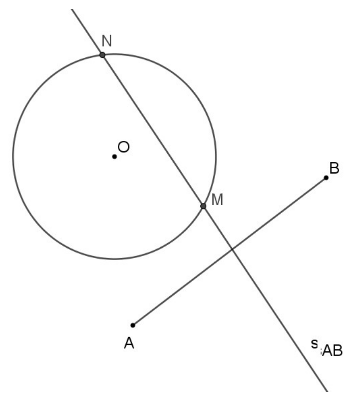


Обим дате фигуре је $7 + 10 + 17 + 17 + 17 + 7 + 10 + 3 + 7 + 7 = 102$, а површина је $7 \cdot 7 + 10 \cdot 10 + 17 \cdot 17 = 49 + 100 + 289 = 438$.

46. $$\frac{337}{2022} = \frac{337}{2 \cdot 3 \cdot 337} = \frac{1}{6} = \frac{6}{36} > \frac{6}{37}$$

47. Нека је M тражена тачка. Како је M тачка која је једнако удаљена од тачака A и B она припада симетрали дужи AB. Међутим M припада и датој кружници *k*. То значи да је M пресек скупа тачака симетрале дужи s_{AB} и скупа тачака кружнице *k*.

У изабраном случају симетрала дужи AB и кружница k секу се у две тачке M и N. Међутим, могућ је и случај када симетрала дужи AB додирује кружницу k и тада ће бити само једна пресечна (додирна) тачка, тј. само једна тачка која је једнако удаљена од A и B и припада кружници k.

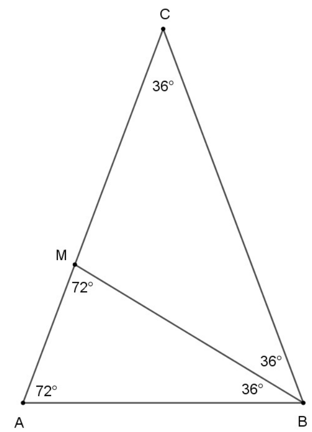


Постоји и ситуација када симетрала дужи AB са кружницом k нема заједничких тачака, тј. када је пресек празан скуп и тада нема решења, тј. не постоји тачка која је једнако удаљена од тачака A и B и припада кружници k.

48. а) Како је тражени збир 120 и како су два узастопна цела броја различите парности, њихов збир не може бити 120. Дакле најмањи могући број сабирака је 3 и то су онда узастопни цели бројеви 39, 40 и 41. Највише сабирака се добија ако је тражени збир $(-119) + (-118) + ... + 0 + ... + 118 + 119 + 120$. Тада има 119 негативних, нула и 120 позитивних сабирака, што је укупно 240.

б) Како је $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 10 \cdot 12$, то производ два узастопна броја не може бити 120. Из множења $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ закључујемо да најмањи могући број чинилаца може бити 3. Највише чинилаца је 5 и то у случају када је $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, јер сваки нови чинилац (сем нуле) би само повећао апсолутну вредност производа.

49. Како је $AC = BC$ и $\angle ABC = 72°$, то је и $\angle BAC = 72°$. Тада је $\angle ACB = 180° - 72° - 72° = 36°$. Како је BM симетрала $\angle ABC$, то је $\angle ABM = \angle AMB = 72° : 2 = 36°$.



Сада је у троуглу BCM, $\angle BCM = \angle CBM = 36°$ и троугао BCM је једнакокрак ($BM = CM$). У троуглу ABM, $\angle ABM = 36°$ и $\angle BAM = 72°$, па је $\angle AMB = 180° - 36° - 72° = 72°$. Следи да је и троугао ABM једнакокрак ($AB = MB$).

50. Видети решење 45. задатка

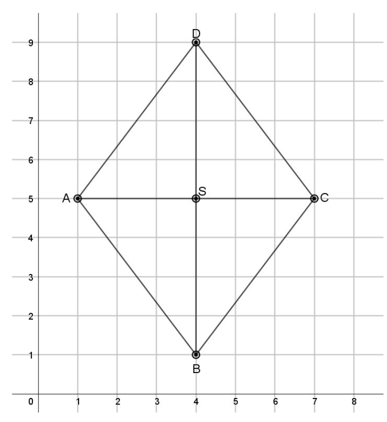
51. Ако 3 молера за 4 дана (12 дневница) окрече 5 станова, то значи да за један дан један молер окречи 5/12 стана. Тада је:

а) 8 молера за 9 дана, тј. 72 дневнице окрече $72 \cdot 5/12 = 6 \cdot 5 = 30$ станова.

б) Нека има x молера. Они за 6 дана окрече $6x \cdot 5/12 = 25$. То значи да је $x = 10$ молера.

в) Нека је број дана y . Тада је $14y \cdot 5/12 = 70$. Следи да је $y = 12$ дана.

52. а) Када се уцртају дате тачке A, B и C, онда је јасно да тачка S која представља средиште (пресек дијагонала ромба) има координате (4, 5). Како се дијагонале ромба полове, то је $BS = DS = 4$, па тачка D има координате $(4, 5 + 4 = 9) = (4, 9)$.



б) Дијагонале ромба су AC = 6 и BD = 8. Како су дијагонале ромба нормалне то је његова површиа $6 \cdot 8 : 2 = 48 : 2 = 24$.

53. Видети решење 45. задатка

54. Како је $1000 < n < 2022$, то је $\sqrt{1000} < \sqrt{n} < \sqrt{2022}$.
Из $31^2 = 961$ и $45^2 = 2025$ следи да је
$31 = \sqrt{961} < \sqrt{1000} < \sqrt{n} < \sqrt{2022} < \sqrt{2025} = 45$.
Тражених природних бројева је $44 - 31 = 13$.

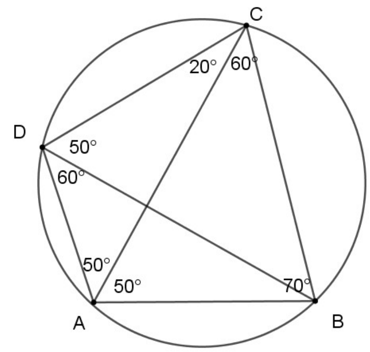
55. Најмањи могући збир два броја датог скупа је $1 + 2 = 3$, а највећи могући је $15 + 16 = 31$. То значи да се као потенцијални збирови два суседна броја могу појавити само $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$ и $5^2 = 25$. Како је $8 + x$ потпун квадрат само ако је $x = 1$ и $16 + y$ потпун квадрат само ако је $x = 9$, то су бројеви 8 и 16 први и последњи у низу (или обрнуто). Тада је тражени низ: 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, ... Сада постоје две могућности да се низ настави 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 1, 15, 10, 6, 8, што није решење, јер $6 + 8 = 14$ и није потпун квадрат или 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8 што јесте решење.
Решење је и ако се крене са супротне стране, тј. од броја 8, само што је тада јединствен поступак: 8, 1, 15, 10, 6, 3, 13, 12, 4, 5, 11, 14, 2, 7, 9, 16.

56. Како хипотенузина висина дели хипотенузу на делове од 9 cm и 16 cm, то је хипотенуза правоуглог троугла једнака $9 + 16 = 25$ cm, а хипотенузина висина h једнака геометријској средини делова, тј.
$h = \sqrt{9 \cdot 16} = 3 \cdot 4 = 12$ cm. Тада су катете једнаке
$\sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$ cm, односно $\sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20$ cm.
Површина правоуглог троугла је $P = 15 \cdot 20 : 2 = 150$ cm^2, његов обим
$O = 15 + 20 + 9 + 16 = 60$ cm.
Полупречник уписаног круга је једнак количнику површине и полуобима, тј. $150/30 = 5$ cm. Површина круга уписаног у троугао је $\pi \cdot 5^2 = 25\pi$ cm^2.

57. Како је разлика растојања тачака A и B од равни π једнака 3 cm, а дужина дужи AB једнака 5 cm , то из Питагорине теореме следи да је
$A'B' = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$ cm.

58. Видети решење 45. задатка

59. Четвороугао ABCD је тетивни, јер му сва темена припадају кружници. Како је четворугао ABCD тетивни то је збир наспрамних углова 180°, па је $\angle CDA = 110°$ и $\angle ABC = 70°$.



Углови $\angle ADB$ и $\angle ACB$ периферијски углови над истом тетивом, то су они једнаки па је $\angle ACB = 60°$. Сада је јасно да су углови троугла ABC редом; $\angle ABC = 70°$, $\angle ACB = 60°$ и $\angle BAC = 50°$. Углови троугла ACD су; $\angle ADC = 110°$; $\angle DAC = 100° - \angle CAB = 100° - 50° = 50°$ и $\angle ACD = 20°$

60. Дата једначина је $|x-1| + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 5$, еквивалентна је са једначнама $|x-1| + \sqrt{(x+2)^2} = |x-1| + |x+2| = 5$.

Последњу једначину посматрамо у три области:

(1) $x < -2$: (2) $-2 \le x < 1$ и (3) $1 \le x$.

У области (1) се добија једначина $1 - x - x - 2 = 5$, тј. $2x = -6$ и решење $x = -3$ припада посматраној области.

У области (2) се добија да је $1 - x + x + 2 = 5$, тј. $3 = 5$ и једначина нема решења.

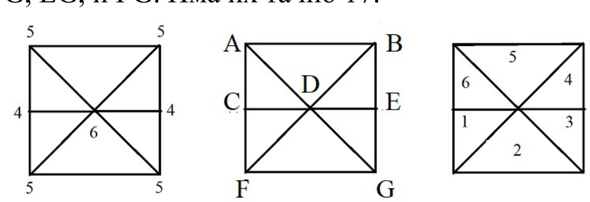
У области (3) једначина гласи $x - 1 + x + 2 = 5$, тј. $2x = 4$ и решење $x = 2$, припада тој области.

Према томе скуп решења дате једначине је $\{-3, 2\}$.

61. Како од 2016 до 2023 има 2033 – 2016 = 17 година, то ће и Анка и Бранка бити старије за по 17 година, што је укупно 17 + 17 = 34. Дакле, 2033. године Анка и Бранка ће заједно имати 59 + 34 = 93 године.

62. На слици лево је у свакој тачки написан број дужи које полазе из те тачке. Како је свака дуж рачуната два пута, укупан број дужи је $(5 + 5 + 5 + 5 + 4 + 4 + 6) : 2 = 34 : 2 = 17$.

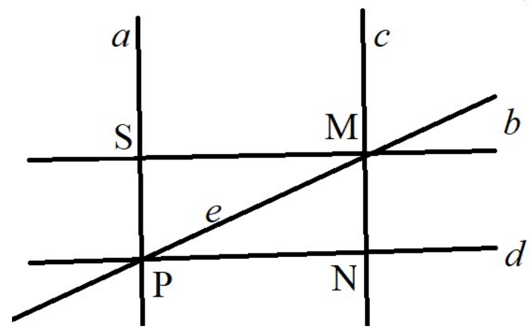
Или све могуће дужи су: AB, AC, AD, AF, AG, BD, BE, BF, BG, CD, CE, CF, DE, DF, DG, EG, и FG. Има их тачно 17.



Тражени троуглови су: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 16, 34, 234, 345, 561, 612 и има их 12.

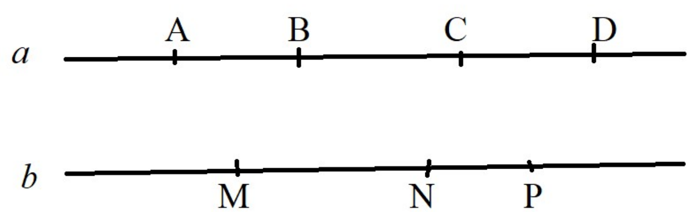
63. Призвод *** · * је најмање 100. Како је количник ** : * двоцифрен или једноцифрен број, то је *** · * једнако 99 + 4, 98 + 4, 97 + 4 и 96 + 4, па је *** · * једнако 103, 102, 101 или 100. Могућа решења су:
$100 \cdot 1 - 96 : 1 = 4$; $101 \cdot 1 - 97 : 1 = 4$; $102 \cdot 1 - 98 : 1 = 4$ и
$103 \cdot 1 - 99 : 1 = 4$.

64.



65. $(1 + 3 + 5 + ... + 75 + 77) - (2 + 4 + 6 + ... + 74 + 76) =$
$(77 - 76) + (75 - 74) + ... + (5 - 4) + (3 - 2) + 1 = 1 + 1 + ... + 1 + 1 =$
$38 + 1 = 39$.

66. Правих има 14: *a, b* и праве одређене талкама AM, AN, AP, BM, BN, BP, CM, CN, CP, DM, DN, DP.



Дужи има 21: 6 на правој *a,* 3 на правој *b* и 12 када се међусобно искомбинују тачке на правама а и *b* (AM, AN, AP, BM, BN, BP, CM, CN, CP, DM, DN, DP).

67. Површина Јанковог квадрата је $6 \cdot 6 = 36$ cm^2, а површина Марковог квадрата је $8 \cdot 8 = 64$ cm^2. Кад исеку своје квадрате на квадратне центиметре, онда они заједно имају $36 + 64 = 100$ cm^2 и могу саставити квадрат чија је страница 10 cm. Обим тог квадрата је 40 cm, а површина 100 cm^2.

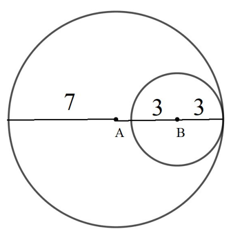
68. На левој (непарној страни улице има 5 кућа које се нумеришу једноцифреним непарним бројевима, још 45 кућа које се нумеришу двоцифреним бројевима и $77 - 50 = 27$ кућа које се нумеришу троцифреним бројевима. За ту нумерацију је потребно $5 \cdot 1 + 45 \cdot 2 + 27 \cdot 3 = 5 + 90 + 81 = 176$ цифара.

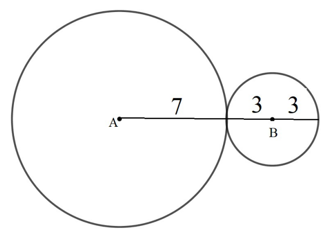
На десној (парној страни улице има 4 кућа које се нумеришу једноцифреним бројевима, још 45 кућа које се нумеришу двоцифреним бројевима и $88 - 49 = 39$ кућа које се нумеришу троцифреним бројевима. За ту нумерацију је потребно $4 \cdot 1 + 45 \cdot 2 + 39 \cdot 3 = 4 + 90 + 117 = 211$ цифара. То значи да је за нумерацију кућа у тој улици неопходно $176 + 211 = 387$ цифара.

69. Број А не може бити 2, јер би тада први сабирак био 2222.
Дакле $A = 1$, па се сабирање своди на $1111 + BBB + CCC + BD = 2023$, тј. $BBB + CCC + BD = 2023 - 1111 = 912$.
Јасно је да је $B + C = 8$ и да је $B + C + D = 12$, па је $8 + D = 12$, тј. $D = 4$.
Сада је $BBB + CCC + B0 = 912 - 4 = 908 = 888 + B0$, што значи да је $B0 = 908 - 888 = 20$. Тада је $B = 2$ и $C = 6$, па је тражено сабирање $1111 + 222 + 666 + 24 = 2023$.

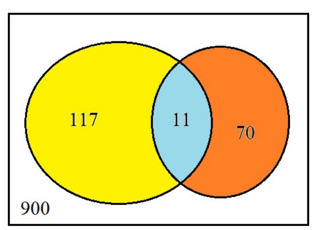
70. Број 2023 једнак је $7 \cdot 17 \cdot 17 = 7 \cdot 289 = 17 \cdot 119$, што значи да је: $2023 = 289 + 289 + ... + 289$ (7 сабирака) или $2023 = 119 + 119 + ... + 119$ (17 сабирака).Закључак је да је неопходно најмање 7, а највише 17 једнаких троцифрених сабирака.

71. а) Са слике се закључује да је у случају унутрашњег додира кружница $AB = 7 - 3 = 4$ cm.
б) Слично, у случају спољашњег додира кружница, $AB = 7 + 3 = 10$ cm.





72. Троцифрених бројева има 900.Троцифрених бројева дељивих са 7 има 128, јер је $900 : 7 = 128$ (4). Троцифрених бројева дељивих са 11 има 81, јер је $900 : 11 = 81$ (1). Троцифрених бројева који су дељиви и са 7 и са 11, тј. са 77 има 11, јер је $900 : 77 = 11(53)$.
Ако добијене податке унесемо у Венов дијаграм добија се:



Троцифрених бројева који нису дељиви ни са 7 ни са 11 има
$900 - 128 - 70 = 702$.

73. Тачке A и A_1 су централно симетричне у односу на тачку S, па је $AS = SA_1 = 10$ cm. Како је $AB_1 = 6$ cm, то је $B_1S = 10 – 6 = 4$ cm. Тада је $BB_1 = 2 \cdot B_1S = 2 \cdot 4 = 8$ cm.

A B$_1$ S B A$_1$

--------------o------------------o------------o------------o-----------------o--------------

o---------------------------- 20 cm ---------------------------o

o----- 6 cm -----o

Постоји и други положај тачака:

B$_1$ A S A$_1$ B

--o--------------o---------------------------o----------------------------o----------o------

p

o------------------------- 20 cm -----------------------o

o--- 6 cm ---o

Тачке A и A_1 су централно симетричне у односу на тачку S, па је $AS = SA_1 = 10$ cm. Како је $AB_1 = 6$ cm, то је $B_1S = 10 + 6 = 16$ cm. Тада је $BB_1 = 2 \cdot B_1S = 2 \cdot 16 = 32$ cm.

74. Како је $2023 = 17 \cdot 119$ и $1320 = 11 \cdot 120$ то после скраћивања са 17, први разломак постаје $\frac{17}{2023} = \frac{17}{17 \cdot 119} = \frac{1}{119}$.

После скраћивања са 11, други разломак постаје $\frac{11}{1320} = \frac{11}{11 \cdot 120} = \frac{1}{120}$.

Како је $\frac{1}{119} > \frac{1}{120}$ то је и $\frac{17}{2023} > \frac{11}{1320}$.

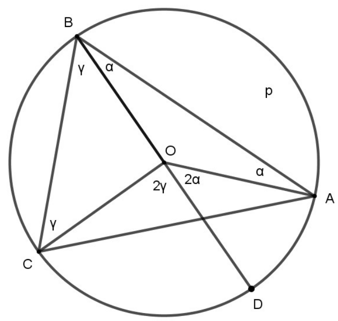
75. Најмање два. На пример $8 + 2015 = 9 + 2014 = 2023$.
Највише сабирака ће бити ако су сабирци што мањи. Најмањи сложен број је 4, па је најбоље да највише сабирака буде једнако 4.
Ако има 505 четворки, онда је 506. сабирак $2023 – 2020 = 3$, а он је прост број. Ако има 504 четворке, онда је 505. сабирак $2023 – 2016 = 7$ - прост број. Ако има 503 четворке, онда је 504. сабирак $2023 – 2012 =11$, а он је прост број. Ако има 502 четворке, онда је 503. сабирак $2023 – 2008 = 15 = 6 + 9$. Дакле највише може бити 504 сабирка: $2023 = 502 \cdot 4 + 6 + 9$.

76. а) Нека је збир бројева у скупу A једнак x. Тада је и збир бројева у скупу B једнак x. То значи да је збир бројева у скупу S једнак $x + x = 2x$. Како је збир бројева у скупу S једнак $2023 – 2023 – 2022 + 2021 – 2021 + ... + 1 – 1 + 0 = – 2022$, то је $2x = –2022$ и $x = –1011$. То значи да постоје скупови A и B такви да је збир бројева у скупу A једнак збиру бројева у скупу B.

На пример: A = { –2022, 1011, 0} и B = { –1011, 2023, –2023, 2020, –2020, ... , 2, – 2, 1, – 1 }. Јасно је да је и у скуп A и у скупу B збир бројева једнак – 1011. Могу се направити и друге комбинације за скупове A и B.
б) Није могуће, јер 0 ће припасти или скупу A или скупу B. Производ бројева у скупу где је нула биће 0, а производ бројева у коме нема 0, биће различит од 0.

77. За један сат напуни се $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{3+2-1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ базена. Дакле, базен се напуни за 3 сата.

78. Како је $\angle ABC = \angle ABO + \angle CBO = \alpha + \gamma$, то је $\angle AOC = \angle AOD + \angle COD = 2\alpha + 2\gamma = 2\angle ABC$.

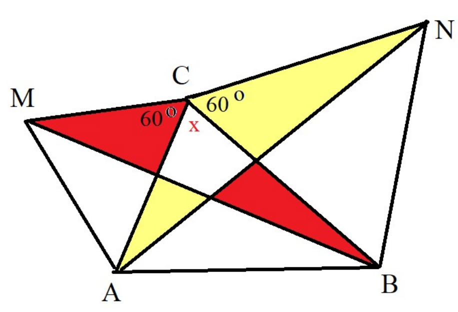


79. Ако су два разломка једнака онда су једнаке и њихове реципрочне вредности, па је

$1-\frac{1}{|x|}=\frac{1}{2022}$. Тада је $\frac{1}{|x|}=1-\frac{1}{2022}=\frac{2021}{2022}$ и добија се да је $|x|=\frac{2022}{2021}$.

То значи да једначина има два решења $\frac{2022}{2021}$ и $-\frac{2022}{2021}$.

80. Нека је $\angle ACB = x$.

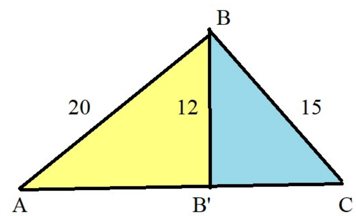


Из услова задатка је $AC = CM = MA$ и $BC = CN = NB$. Троуглови ACN и BCM су подударни, јер је: (1) $AC = CM$; (2) $\angle ACN = x + 60^{o} = \angle BCM$; (3) $CN = BC$. Из подударности троуглова следи да је $AN = BM$.

81. Квадрирањем дате неједначине добија се да је $2^2 = 4 \leq n - 2023 \leq 9 = 3^2$. Следи да је $4 + 2023 \leq n \leq 9 + 2023$, па је $2027 \leq n \leq 2032$. Збир свих целобројних решења неједначине је $2027 + 2028 + 2029 + 2030 + 2031 + 2032 = 3 \cdot 4059 = 12177$.

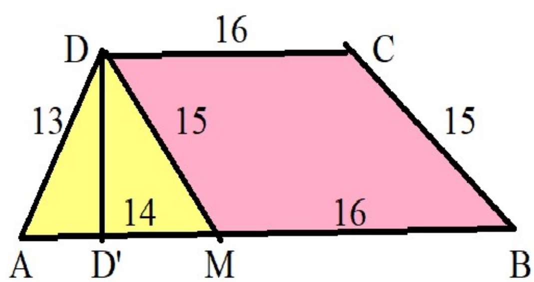
82. На основу Питагорине теореме је $(AB')^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256$, па је $AB' = 16$ cm.Слично је и $(CB')^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81$, па је $CB' = 9$ cm.

Тада је $AC = AB' + B'C = 16 + 9 = 25$ cm. Како је $AB^2 + BC^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625 = AC^2$, то је на основу обрнуте Питагорине теореме троугао ABC правоугли и $\angle ABC = 90°$.



83. Из низа једнакости и неједнакости
$2^{2023} = 2 \cdot 2^{2022} = 2(2^3)^{674} = 2 \cdot 8^{674} < 3 \cdot 9^{674} = 3 \cdot (3^2)^{674} = 3 \cdot 3^{1348} = 3^{1349}$
следи да је $2^{2023} < 3^{1349}$.

84. Ако се конструише дуж DM која је паралелна са BC, онда је четвороугао BCDM паралелограм и $BM = CD = 16$ cm. Тада је $AM = AB - MB = 30 - 16 = 14$ cm.



Ако се на троугао ADM, чије су странице 13, 14 и 15 примени Херонова формула, добија се да је површина троугла ADM = 84 cm^2. Из површине се добија да је $AM \cdot DD' : 2 = 84$, па је $DD' = 2 \cdot 84 : 14 = 12$ cm. Површина трапеза $P = (30 + 16) \cdot 12 : 2 = 46 \cdot 6 = 276$ cm^2.

85. Остаци при дељењу природног броја са 6 су 0, 1, 2, 3, 4 и 5. Број 2023 : 6 = 337(1), тј. 2023 при дељењу са 6 даје количник 337 и остатак је 1. Када се посматрају дата 2023 природна броја, онда је 2023 : 6 = 337 (1) и на основу Дирихлеовог принципа постоји једна класа са бар 337 + 1 = 338 бројева који имају једнаке остатке (на пример y) при дељењу са 6, Сви бројеви у датој класи имају облик $6x + y$. За свака два од њих. важи да је њихова разлика $6x_1 + y - (6x_2 + y) = 6x_1 + y - 6x_2 - y = 6(x_1 - x_2)$ дељива са 6.

86. Запремина квадра је $6 \cdot 9 \cdot 16 = 54 \cdot 16 = 864$ cm^3. Како је 864 : 4 = 216 cm^3 и као је $216 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, то је страница једне од коцки једнака $2 \cdot 3 = 6$ cm. Површина једне коцке је $6 \cdot 6^2 = 6 \cdot 36 = 216$ cm^2. За 4 кутије од картона требаће најмање $216 \cdot 4 = 864$ cm^2 картона.

87. Разликују се два случаја:

1) Ако је $x - 3 < 0$, онда је $x < 3$ и неједначина има облик $x + 3 - x \leq 2023$, па је $3 \leq 2023$ и решење неједначине су сви цели бројеви мањи од 3.

2) Ако је $x \geq 3$ неједначина има облик $x + x - 3 \leq 2023$, па је $2x \leq 2026$ и $x \leq 1013$.

Дакле, решења неједначине су сви цели бројеви мањи или једнаки 1013. Њих има бесконачно много, па неједначина има бесконачно много целобројних решења.

88. Запремина коцке је $13 \cdot 13 \cdot 13 = 2197$ cm^3. Нека има x коцки чија је запремина 1 cm^3, y коцки чија је запремина 8 cm^3 и zкоцки чија је запремина 27 cm^3. Тада је $x + 8y + 27z = 2197$ и $x + y + z = 2023$. Одузимањем друге од прве једначине добије се једначина $7y + 26z = 174$ која има јединствено решење $y = 10$, $z= 4$. Тада је $x = 2023 - 14 = 2009$.

89. Дата једначина је еквивалентна са једначином

$$\frac{x+2023}{23-x} - 1 + \frac{x+2022}{22-x} - 1 + \frac{x+2021}{21-x} - 1 + \frac{x+2020}{20-x} - 1 = 0.$$

Даље је

$$\frac{x+2023}{23-x} - \frac{23-x}{23-x} + \frac{x+2022}{22-x} - \frac{22-x}{22-x} + \frac{x+2021}{21-x} - \frac{21-x}{21-x} + \frac{x+2020}{20-x} - \frac{20-x}{20-x} = 0 \text{ и}$$

$$\frac{x+2023-23+x}{23-x} + \frac{x+2022-22+x}{22-x} + \frac{x+2021-21+x}{21-x} + \frac{x+2020-20+x}{20-x} = 0.$$

Следи да је $\frac{2x+2000}{23-x} + \frac{2x+2000}{22-x} + \frac{2x+2000}{21-x} + \frac{2x+2000}{20-x} = 0$ и

коначно се добија једначина

$$(2x+2000)\left(\frac{1}{23-x}+\frac{1}{22-x}+\frac{1}{21-x}+\frac{1}{20-x}\right)=0$$ чије је једно решење $2x + 2000 = 0$ или $x = -1000$.

Напомена: Добијено решење није и једино решење дате једначине, јер се другачијим трансформацијама једначине могу добити и остала реална решења једначине.

90. *Прво решење:* Користи се чињеница да се се површине сличних троуглова односе као квадрати одговарајућих страница.Нека је површина троугла ABC једнака 2P. Тада је површина троугла CDE једнака P.
Како су троуглови ABC и CDE слични то је $2P : P = BC^2 : DE^2 = 24^2 : DE^2$.
Следи да је $2 = 576 : DE^2$, па је $DE^2 = 576 : 2 = 288$ и $DE = 12\sqrt{2}$.

Друго решење: Нека је површина троугла ABC једнака 2P. Тада је површина троугла CDE једнака P.Нека је AA' висина троугла ABC једнака x, а висина троугла ADE једнака y. Како су троуглови ADE и ABC слични то је $DE : BC = DE : 24 =$ к и $y : x =$ к. Следи да је DE = 24к и $y =$ кx.
Тада је $2P = 2 \cdot BC \cdot x : 2 = 24x$ и тада је $P = DE \cdot y : 2 = 24к \cdot кx : 2 = 12к \cdot 2x = 24к^2x$. Дакле $2P = 24x = 2 \cdot 24к^2 \cdot x$, па је $2к^2 = 1$, $к = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и

$$DE = 24к = 24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}.$$

91. а) Збир се увећа за 36 + 47 = 83 и нови збир ће бити 345 + 83 = 428;
б) Збир се увећа за 36 и умањи за 47, па ће бити 345 + 36 – 47 = 381 – 47 = 334;
в) Збир се умањи за 36 и за 47 и нов збир ће бити 345 – 36 – 47 = 309 – 47 = 262.

92. Замислимо да имамо уравнотежене теразије. Ако се оба таса скинемо по две чоколаде, на левом тасу ће остати тег од 200 грама, а на десном једна чоколада и тег од 120 грама. Ако у другом потезу и са једног и са другог таса скинемо по 120 грама, на једном тасу ће остати 80 грама, а на другом једна чоколада. Дакле, једна чоколада има масу 80, а 5 чоколада $5 \cdot 80 = 400$ грама.

93. Нека је централни број магичног квадрата x.Тада је $x + 7 = 10 + 8$, јер је у збиру празно поље и по хоризонтали и по вертикали једнако. Дакле $x + 7 = 18$, па је $x = 18 - 7 = 11$, а карактеристични збир једнак $3 \cdot 11 = 33$. Остали бројеви се лако попуњавају допуњујући хоризонтале, вертикале и дијагонале до 33.

10		8
	x	
	7	

10		8
	11	
	7	

10	15	8
9	11	13
14	7	12

94. На датој слици има:

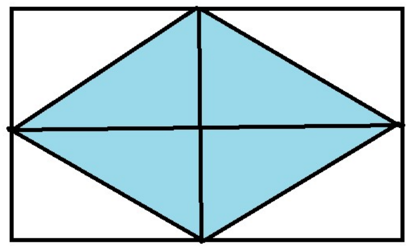
а) $6 \cdot 3 + 4 = 18 + 4 = 22$ дужи;

б) $8 + 4 = 12$ троуглова;

в) $4 \cdot 4 + 2 = 18$ оштрих углова;

г) $4 + 4 + 4 \cdot 2 = 16$ правих углова;

д) $4 \cdot 2 + 2 = 10$ тупих углова.



95. У четврту кутију је пребачено $17 + 26 + 35 = 78$ оловки, тако да се број оловки у свим кутијама изједначио. То значи да пре пребацивања у првој кутији било $78 + 17 = 95$ оловки; у другој кутији $78 + 26 = 104$ оловке и у трећој кутији $78 + 35 = 113$ оловки.

96. Када се у датој једначини избришу заграде и примени закон премештања сабирака добија се низ једнакости:

$(x + 1) + (x + 2) + ... + (x + 14) = 2023$; $x + 1 + x + 2 + ... + x + 14 = 2023$;

$14 \cdot x + 1 + 2 + 3 + ... + 14 = 2023$; $14x + 7 \cdot 15 = 14x + 105 = 2023$;

$14 \cdot x = 2023 – 105 = 1918$; $x = 1918 : 14 = 137$.

Решење дате једначине је број 137.

97. Нека је Лени остало да прочита још x страна дате књиге.

Тада је $x + 36 + 47 \leq 123$, па је $x + 83 \leq 123$ и $x \leq 123 – 83$, тј $x \leq 40$.

Према томе Лени је остало да прочита највише 40 страница књиге.

Друго решење: Лена је првог дана прочитала 36 или више страница књиге, а другог дана 47 или више. Према томе у току прва два дана Лена је прочитала најмање $36 + 47 = 83$ стране те књиге. Трећег дана је остало да прочита највише $123 – 83 = 40$ страна књиге.

98. а) Ако је $a – b + c = 2023$, онда је $(a + 456) – (b + 456) + (c + 456) = 2023 + 456 – 456 + 456 = 2023 + 456 = 2479$.

б) Ако је $a – b + c = 2023$, онда је $(a – 78) – (b – 78) + (c – 78) = 2023 – 78 + 78 – 78 = 2023 – 78 = 1945$.

в) Ако је $a – b + c = 2023$, онда је $(a + 100) – (b – 300) + (c – 500) = 2023 + 100 + 300 – 500 = 2023 – 100 = 1923$.

99. Површина улице је $119 \cdot 17 = 2023\ \text{m}^2 = 2023\ 0000\ \text{cm}^2$.

Површина прве плоче је $25 \cdot 25 = 625\ \text{cm}^2$.

То значи да за поплочавање улице треба 20230000 : 625 = 32368 плоча.
Те плоче коштају 32368 · 50 = 1 618 400 динара.
Површина друге плоче је 17 · 17 = 289 cm^2.
Следи да за поплочавање улице треба 20230000 : 289 = 70 000 плоча.
Те плоче коштају 70 000 · 32 = 2 240 000 динара.
Према томе град Математикус ће улицу поплочати првим плочама.
Друго решење: На дужину од 119 m може се поређати 119 · 4 = 476 првих плоча. На ширину од 17 m може се поређати 17 · 4 = 68 првих плоча.
Значи да за поплочавање улице првим плочама треба 476 · 68 = 32 368 плоча. На дужину од 119 m може се поређати 11900 cm : 17 cm = 700 других плоча. На ширину од 17 m може се поређати 1700 cm : 17 = 100 других плоча.

Значи да за поплочавање улице другим плочама треба 700 · 100 = 70 000 плоча. Прве плоче коштају 32368 · 50 = 1 618 400 динара, а друге плоче 70 000 · 32 = 2 240 000 динара. Према томе прво поплочавање је за град Математикус јефтиније од другог.

100. Из чињенице да ако Анка поклони Бранки 34 салвета, онда ће обе имати једнак број салвета, закључује се да Анка има 34 + 34 = 68 салвета више од Бранке.Ако Бранка има x салвета, Анка има $x + 68$ салвета.
Ако Бранка поклони Анки 34 салвета, онда ће она имати $x - 34$ салвета, а Бранка $x + 68 + 34$ салвета.

Из другог услова је $x + 68 + 34 = 3 \cdot (x - 34)$.Следи да је $x + 102 = 3x - 102$, па је $3x - 102 - x = 102$ или $2x - 102 = 102$. Коначно је $2x = 102 + 102$, па је $x = 102$. То значи да је Бранка имала 102, а Анка 102 + 68 = 170 салвета.

101. Како су углови α и β комплементни, то је $\alpha + \beta = 90^\circ$. Из чињенице да су β и γ суплементни, следи да је $\beta + \gamma = 180^\circ$. Како је $\alpha + \gamma = 200^\circ$, то је угао α за $200 - 180 = 20^\circ$ већи од угла β. Према томе $\beta + 20^\circ + \beta = 90^\circ$, што значи да је $\beta = 35^\circ$ и $\alpha = 55^\circ$. Тада је $\gamma = 180^\circ - 35^\circ = 200^\circ - 55^\circ = 145^\circ$.

102. Како се бројеви x и y разликују за $\frac{1}{6}$, то је $x = y + \frac{1}{6}$. Тада је

$y + \frac{1}{6} + y = \frac{1}{2}$, па је $2y = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$. Следи да је

$y = \frac{1}{6}$ и $x = y + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

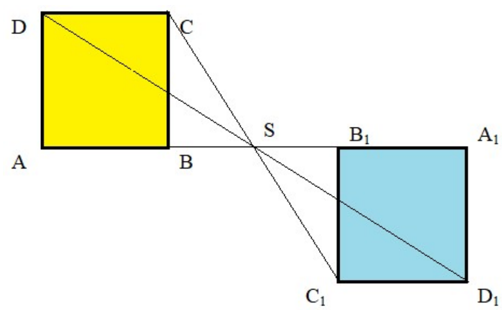
Закључујемо да је $n = 3 \cdot x + 6 \cdot y + 2023 = 3 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 1 + 1 + 2023 = 2025$.

Број 2025 се завршава цифром 5, а збир цифара му је 9, па је очигледно дељив са 45.

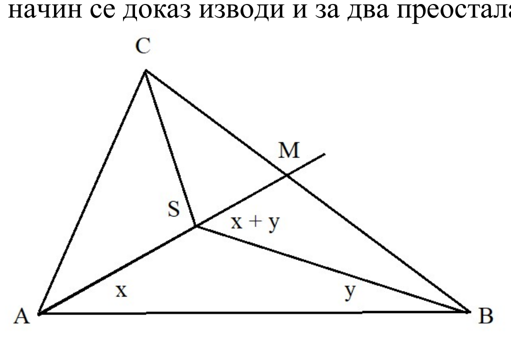
103. Како је број $3x$ дељив са 3 и број 81 дељив са 3, то мора бити и број $y \cdot y$, па је y број који је дељив са 3.С друге стране $y \cdot y$ мора бити мање или једнако 81, па је y број који је мањи или једнак 9. То значи да је $y \in \{0, 3, 6, 9\}$. Следи да једначина има 4 решења: $y = 0$, $x = 27$; $y = 3$, $x = 24$; $y = 6$, $x = 15$ и $y = 9$, $x = 0$. У облику уређених парова решења су: (27, 0), (24, 3), (15, 6), (0, 9).

104. Број који је дељив са 2, 3, 4, 5 и 6 мора бити дељив са НЗС(2, 3, 4, 5, 6) а то је број 60. Дакле тражени број има облик 60к + 1. јер ће онда свако дељење имати остатак 1.
Најмањи такав троцифрен број је 121, а највећи 961. Сви такви троцифрени бројеви су 121, 181, 241, ... , 901, 961 и има их колико низ 120, 180, 240 ... 900, 960, ондосно низ 2, 3, 4, 15, 16 има чланова. А то значи 15.

105.



106. Нека је $\angle BAS = x$ и $\angle ABS = y$. Тада је $\angle BAC = 2x$ и $\angle ABC = 2y$. Како је $2x + 2y < 180°$, то је $x + y < 90°$. Угао BSM, као спољашњи угао троугла ABS једнак је $x + y$. Тада је унутрашњи угао троугла $\angle ASB = 180° - (x + y)$. Како је $x + y < 90°$ то је $\angle ACS = 180° - (x + y) > 90°$, тј. туп угао. На аналоган начин се доказ изводи и за два преостала угла.



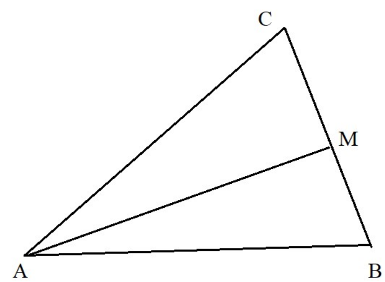
107. Нека је $e = 1{,}11111 ....$ Тада је $10e = 11{,}11111 ....$ па је $10e - e = 9e = 11{,}1111... - 1{,}1111... = 10$.

То значи да је $e = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{10}{9}$ и $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{1}{2}$ и $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{1}{2}$.

Тада је $\frac{c}{d} + \frac{1}{2} + \frac{c}{d} = \frac{10}{9}$ и да је $2 \cdot \frac{c}{d} = \frac{10}{9} - \frac{1}{2} = \frac{11}{18}$ и $\frac{c}{d} = \frac{11}{36}$.

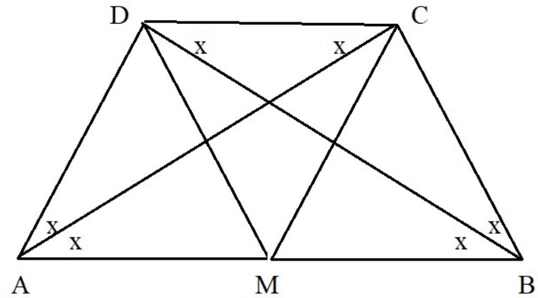
Следи да је $\frac{a}{b} = \frac{11}{36} + \frac{1}{2} = \frac{29}{36}$ и закључујемо да је $a = 29$, $b = 36$, $c = 11$ и $d = 36$.

108. Анализа: Троуглови AMB и AMC су правоугли. У оба троугла знамо катету AM = 4 cm и хипотенузе AB = 6 cm и AC = 7 cm. Конструкција: На правој p се одабере тачка M и конструише дуж MA која је нормална на p и има дужину 4 cm. Остаје да се на правој p одреде тачке B и C такве да је AB = 6 cm и AC = 7 cm. Постоје два решења: када је троугао ABC оштроугли и када је троугао ABC је тупоугли.



109. а) Како скуп S садржи 2023 различита прост броја, то су бар 2022 од њих непарна. Збир два непарна броја је увек паран број. Дакле, тврђење је тачно за збир, а није за разлику, јер ако су прости бројеви „близанци“ (на пример (3, 5), (5,7), (11, 13), (17, 19)) разлика је 2, што није прост број.
б) Сви прости бројеви се завршавају цифрама 1, 2, 3, 5, 7 и 9. Када из скупа S издвојимо 2 и 5, онда остаје 2021 различита проста броја који се завршавају цифрама 1, 3, 7 и 9. Двоцифрени завршеци тих бројева су 01, 03, 07, 09, 11, 13, 17, 19, ..., 91, 93, 97, 99. и има их тачно $4 \cdot 10 = 40$. Како је 2021 : 40 = 50 (21) то на основу Дирихлеовог принципа постоје два броја са једнаким двоцифреним завршетком. Разлика та два броја је дељива са 100.

110. Нека је M средиште веће основице трапеза (AM = MB = CD) и нека дијагонале AC и BD деле угао на основици на два једнака дела који имају мерни број x.
Како су дужи AM и CD и BM и CD једнаке и паралелне, то су четвороугло-ви AMCD и BCDM паралелограми, па је AD = MC и BC = MD. Трапез је једнакокрак, па је AD = BC, што значи да је AD = DM = MC = BC. Како је $\angle ABC = 2x$, то је и $\angle AMD = 2x$, али и $\angle ABC = \angle BAD = \angle BMC = 2x$.

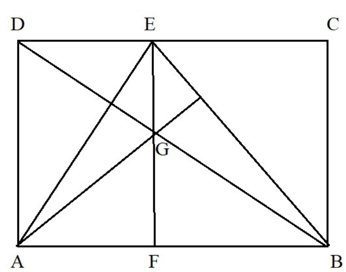


С друге стране троуглови ACD и BCD су једнакокраки (два угла имају мерни број x), па је AD = CD = BC = DM = CM = AM = BM и троуглови AMD, MCD и BCM су једнакостранични. Према томе углови трапеза на већој основици су по 60°, а углови трапеза на мањој основици су по 120°. Из обима трапеза AB + BC + CD + DA = 2CD + CD + CD + CD = 5CD = 100 cm следи да је CD = 20 cm и тада је AB = 40 cm и BC = CD = DA = 20 cm.

Напомена: Постоје и друге идеје за решење (допуна трапеза до једнакостраничног троугла ABE).

111. Ако је $B(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 3$, то значи да је $c = 3$.
Ако је $A(1) = a \cdot 1^6 + b \cdot 1^4 + c \cdot 1^2 = a + b + c = a + b + 3 = 6$, онда је $a + b = 3$. Ако је $A(-1) + B(-1) = a \cdot (-1)^6 + b \cdot (-1)^4 + c \cdot (-1)^2 + a(-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 8$, онда је $a + b + c + a - b + c = 2a + 2c = 8$ и $2a = 8 - 6 = 2$, па је $a = 1$ и $b = 2$. ада је $A(2) - B(2) = 1 \cdot 2^6 + 2 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^2 - (1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 3) = 64 + 32 + 12 - (4 + 4 + 3) = 108 - 11 = 97$.

112. Ако се уочи троугао ABE, онда је из услова задатка AE ⊥ BD. Како је EF паралелно са BC, то је EF ⊥ AB. Следи да је пресечна така правих BD и EF, а то је тачка G ортоцентар троугла ABE. Тада је права AG нормална на дуж BE.



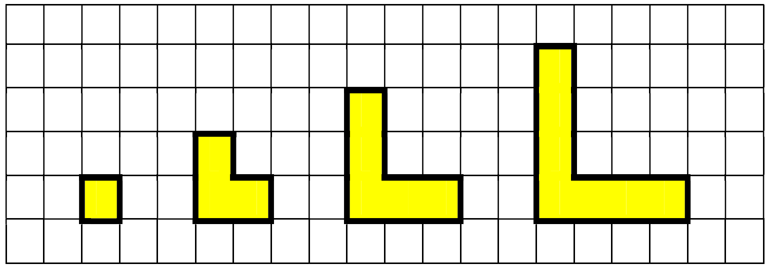
113. Број $6^{4к+3}$ (и било који степен броја 6) се увек завршава цифром 6.
Број $7^{4к}$ се завршава цифром 1, а број $7^{4к+1}$ цифром 7.
Број $8^{4к}$ се завршава цифром 6.

Број $9^{4к}$ се завршава цифром 1, а број $9^{4к+2}$ такође цифром 1.
Дакле, број $6^{4к+3} + 7^{4к+1} + 8^{4к} + 9^{4к+2}$ се завршава цифром 6 + 7 + 6 + 1, а то је цифра 0. Према томе n је највећи троцифрен број облика $4к$ који има различите цифре, што значи да то није 996, ни 992, ни 988, већ број 984.

114. *Прво решење:* Ако у низу напишемо 2023 јединице 1 1 1 ... 1 1 1 змеђу јединица на два места ставимо две црте (преграде), онда су са те две преграде дефинисана три природна броја од којих сваки представља збир јединица у том делу низа .
Тим преградама дефинисано је 2022 · 2021 : 2 = 1011 · 2021 = 2 043 231 начина, јер се прва преграда може поставити на 2022 места, друга преграда на 2021 место, а све се дели са 2, јер исти положај прве и друге преграде не дефинише две, већ само једну поделу. (Напомена: Преграде не могу бити једна до друге, јер свако мора добити бар један динар.)
Друго решење: Једначина $x + y = n$ у скупу природних бројева има $n - 1$ решење $((1, n - 1), (2, n - 2), \dots (n - 1, 1))$. Ако први дечак добије 1 динар, онда преостала двојица деле 2022 динара и постоји 2021 подела; ако први дечак добије 2 динара, онда постоји 2020 подела; ... Ако први дечак добије 2021 динар онда постоји само једна подела 1 + 1. Укупан број подела је 2021 + 2020 + ... + 2 + 1 = 2021 · 2022 : 2 = 2 043 231 подела.

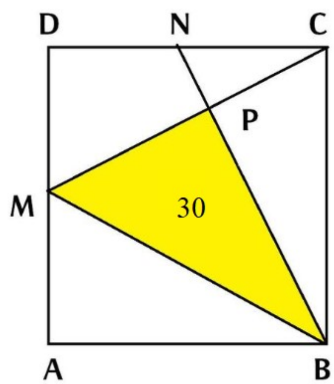
115. У правоуглом троуглу полупречник описаног круга R је једнак половини хипотенузе, тј, c = 2R. Полупречник уписаног круга
$r = (a + b - c) : 2$. Нека је $R : r = 5 : 2$, тј. $R = 5к$ и $r = 2к$. Тада је $c = 2R = 10к$, и $r = (a + b - c) : 2 = 2к$. Из $a + b - c = 4к$, добија се да је
$a + b = 4к + 10к = 14к$.
Тада је $(a + b)^2 = (14к)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 196к^2$. Како је $c^2 = a^2 + b^2 = 100к^2$, то је $100к^2 + 2ab = 196к^2$, па је $2ab = 196к^2 - 100к^2 = 96к^2$.
Следи да је $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 = 100к^2 - 96к^2 = 4к^2$ и $a - b = 2к$.
како је $a + b = 14к$ и $a - b = 2к$, то је $a = 8к$ и $b = 6к$.
Дакле $a : b : c = 8к : 6к : 10к = 4 : 3 : 5$. Тачан одговор је, наравно, и 3 : 4 : 5 (зависно која је од катета већа).

116. а) Површине фигура на слици су редом 1, 3, 5 и 7.
б) Површина 23. фигуре у низу је 23 + 22 = 45.
в) Површина n-те фигуре у низу је $n + n - 1 = 2n - 1$.
г) Гаусовим поступком се добија да је збир површина n фигура у низи једнак $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 3 + 2n - 1 = n \cdot 2n : 2 = n^2$.



Напомена (мало геометрије): Када се друга фигура допуни првом добије се квадрат чија је страница 2; када се трећа фигура у низу допуни збиром претходне две, добије се квадрат странице 3. Када се четврта фигура допуни квадратом странице 3, добије се квадрат странице 4 и тако све до краја када се n-та фигура допуни квадратом странице $(n - 1)$.

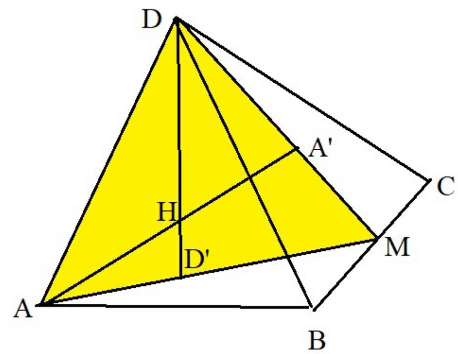
117. Ако је страница квадрата CD = $2a$, онда је CN = a. Правоугли троуглови MCD и BCN су подударни (BC = CD = $2a$, CN = DM = a и $\angle BCN = \angle CDM = 90°$). Ако је $\angle MCD = \varphi$ $\angle CBN$, а онда је $\angle BNC = 90° - \varphi$ и $\angle CPN = 90°$. Троуглови BCN и CNP су слични, јер су им углови $90°$, φ и $90° - \varphi$.



Ако је PN = x, због сличности је CP = $2x$, па је $CN^2 = x^2 + (2x)^2 = 5x^2 = a^2$. Тада је $CM^2 = BN^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2 = 25x^2$, па је MC = BN = $5x$. То значи да је MP = $5x - 2x = 3x$ и BP = $5x - x = 4x$. Површина правоуглог троугла MPB је $3x \cdot 4x : 2 = 6x^2 = 30$, па је $x^2 = 5$. Површина квадрата је $4a^2 = 4 \cdot 5x^2 = 20x^2 = 100$. Страница квадрата је 10, па је обим квадрата 40.

118. Нека је основна ивица пирамиде једнака a.

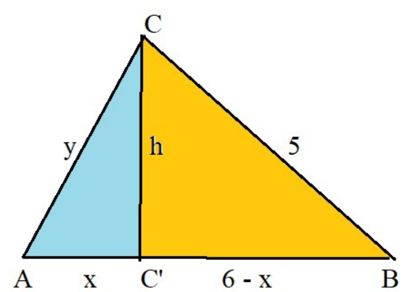
У карактеристичном троуглу AMD који је једнакокрак (AM = MD = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$) бочне висине AA' и DD’ су висине пирамиде и секу се у тачки H.



Како је AD’ = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, то је висина пирамиде $(DD')^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}a^2$.

Тада је $DD' = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Из сличности троуглова AHD’ и AA’M је AH : HD’ = AM : A’M = $\frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{6}$ = 6 : 2 = 3 : 1. Како је AH = DH, то је DH : HD’ = 3 : 1.

119. *Прво решење:* Нека је висина CC' из темена C троугла ABC једнака h, а делови које висина прави на страници AB једнаки AC' = x и BC' = 6 – x.



Ако је AC = y, онда је $h^2 = y^2 - x^2 = 5^2 - (6 - x)^2$. Следи да је $y^2 - x^2 = 25 - 36 + 12x - x^2$, па је $y^2 = 12x - 11$. Како је $1 \le x \le 6$, тада су тражене вредности за $12x - 11 = y^2 \in \{ 1, 13, 25, 37, 49, 61 \}$. Како су x и y природан бројеви то у обзир долазе вредности: $x = 1$, $y = 1$; $x = 3$, $y = 5$: $x = 5$, $y = 7$.
Пар (1, 1) отпада јер мора бити y као хипотенуза мора бити веће од x као катете.
Пар (5, 7) отпада, јер је тада $h^2 = 49 - 25 = 24$, па h, а самим тим и површина неће бити природни број.
Једино решење је $x = 3$, $y = 5$, $h^2 = 25 - 9 = 16$ и $h = 4$.
Странице троугла су 6, 5, 5, а површина 12.

Друго решење: Нека је AC = x.
Тада је обим троугла ABC = 6 + 5 + x = 11 + x.
Из Херонове формуле се добија да је

$$P = \sqrt{\frac{11+x}{2}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x+1}{2}\cdot\frac{11-x}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{(121-x^2)\cdot(x^2-1)} \; .$$

Да би површина била природан број мора бити $(121 - x^2)(x^2 - 1) = y^2$.
Следи да је $1 < x < 11$. Заменом вредности 2, 3, ... , 9, 10 за x добија се да су одговарајуће вредности за $y^2 \in \{ 117 \cdot 3, 112 \cdot 8, 105 \cdot 15, 96 \cdot 24, 85 \cdot 35, 72 \cdot 48, 55 \cdot 63, 40 \cdot 80, 21 \cdot 99 \} = \{ 351, 896, 1575, 2304, 2975, 3456, 3465, 3200, 2079\}$. Једини потпун квадрат је $2304 = 48^2$, па је $x = 5$. Тада је површина P = 48 : 4 = 12.

120. Ако је производ цифара мањи од 4, онда производ цифара може бити 0, 1, 2 или 3.
Ако је производ цифара 0, онда је бар једна (не прва) цифра мора бити 0. Таквих бројева има $9 \cdot 10^9 - 9^{10}$, јер су од укупног броја десетоцифрених бројева одузимају бројеви који не садрже ни једну нулу.
Бројева чији је производ цифара 1 има само 1, а то је број 1111111111.
Бројева чији је производ цифара 2 има 10 (1111111112, 1111111121, ..., 2111111111).
Бројева чији је производ цифара 3 има 10 (1111111113, ... 3111111111).
Бројева који имају производ цифара мањи од 4 има $9 \cdot 10^9 - 9^{10} + 21$.

121. Како је $6 = 1 \cdot 1 \cdot 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$, троцифрени бројеви чији је производ цифара 6 су: 116, 161, 611, 123, 132, 213, 231, 312 и 321 и има их 9.

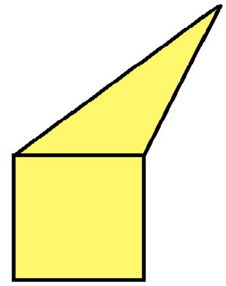
122. Из дате једнакости AAA + AA + A = ABC, следи да је AA + AA + A = BC, дакле двоцифрен број. То значи је цифра A мања од 5, јер ако би били већи или једнаки 5, онда би збир AA + AA + A био троцифрен број. Тражена сабирања су 111 + 11 + 1 = 123; 222 + 22 + 2 = 246; 333 + 33 + 3 = 369 и 444 + 44 + 4 = 492 и има 4 различита решења.

123. Ако је карактеристични збир 333, онда је централни број магичног квадрата једнак 111.Тражени бројеви тада могу бити 111 – 8 = 103, 111 – 6 = 105, 111 – 4 = 107 , 111 – 2 = 109, 111, 111 + 2 = 113, 111 + 4 = 115, 111 + 6 = 117 и 111 + 8 = 119. И један од могућих магичних квадрата је:

117	103	113
107	111	115
109	119	105

123	95	115
103	111	119
107	127	99

Напомена: Могућа су и друга тачна решења.
На пример: 111 – 16 = 95, 111 – 12 = 99, 111 – 8 = 103 , 111 – 4 = 107, 111, 111 + 4 = 115, 111 + 8 = 119, 111 + 12 = 123 и 111 + 16 = 127.



124. Обим квадрата је 4 · 6 cm = 24 cm. Обим троугла је такође 24 cm, па је збир дужина две преостале странице троугла једнак 24 – 6 = 18 cm. Тада је обим жуто обојене фигуре једнак 3 · 6 + 18 = 18 + 18 = 36 cm.

125. Ако Нада има сада x година, онда Влада има $x + 2$, а Јагода $x – 7$ година. Тада је $x + 2 + x + x – 7 = 124$, па је $3x – 5 = 124$. Следи да је
$3x = 129$ и $x = 129 : 3 = 43$. Дакле Влада сада има $x + 2 = 43 + 2 = 45$ година, Нада 43 године, а Јагода $x – 7 = 43 – 7 = 36$ година.

126. Како је 1 · 1 · 8 = 1 · 2 · 4 = 2 · 2 · 2 = 8, могуће комбинације цифара су 1, 1, 1, 8; 1, 1, 2, 4 и 1, 2, 2, 2. Прва и трећа комбинација имају непаран збир цифара, а друга паран број цифара. Тражени бројеви су: 1118, 1181, 1811, 8111, 1222, 2122, 2212, 2221. Дакле таквих бројева има 8.

127. Број 2023 је непаран и нема парних делилаца. Зато 2023 може бити дељив једино са 1, 3, 5, 7 и 9. Провером се може утврдити да је 2023 : 1 = 2023 и 2023 : 7 = 289. То значи да је AB · AB = 2023 или BA · BA = 289. Како A · A никада није 3, то је једина могућност 17 · 17 = 289, па је A = 7 и B = 1. Тражени производ је AB · BA = 17 · 71 = 1207.

128. Ако је централни број магичног квадрата x, онда је карактеристични збир $3x$. Тада су у магичном квадрату распоређени бројеви (слика лево и слика у средини):

	34	
40	x	
		37

$2x–37$	34	
40	x	$2x–40$
	$2x–34$	37

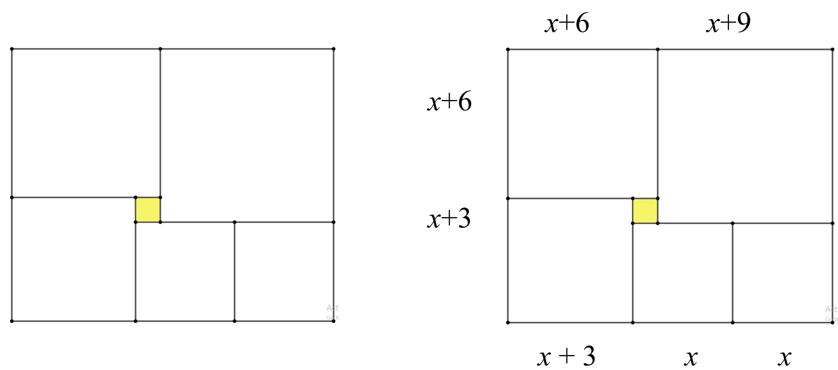
$2x–37$	34	$x+3$
40	x	$2x–40$
$X–3$	$2x–34$	37

5	34	24
40	21	2
18	8	37

Како $2x - 37$, $2x - 40$, и $2x - 34$ морају бити природни, то је $x > 18$, $x > 20$ и $x > 17$, па је најмањи природан број који се може наћи у магичном квадрату једнак 21. Тада магични квадрат постаје (слика десно)

129. Ако три молера за 4 дана окрече 5 станова, онда ће 3 молера за три пута више дана, тј. за 12 дана окречити 3 пута више станова, дакле $3 \cdot 5 = 15$ станова. То значи да један молер за 12 дана окречи $15 : 3 = 5$ станова. Дакле, 7 молера ће за 12 дана окречити $7 \cdot 5 = 35$ станова.

130. Како је површина жуто обојеног квадрата једнака 9 cm^2, то је страница тог квадрата једнак 3 cm.



Ако је страница најмањег од преосталих квадрата једнака x, онда су странице преосталих квадрата једнаке $x + 3$, $x + 6$, $x + 9$ (види слику десно).
Са слике (десно) је јасно да је $2x - 3 = x + 9$, па је $2x - x = x = 9 + 3 = 12$.
Једна страница правоугаоника је $x + 3 + x + x = 3x + 3 = 39$ cm, а друга страница $x + 3 + x + 6 = 2x + 9 = 33$ cm.

Обим правоугаоника $O = 2 \cdot (39 + 33) = 2 \cdot 72 = 144$ cm.
Површина правоугаоника је $P = 33 \cdot 39 = 1287$ cm^2.

131. Збир цифара двоцифреног броја највише може бити $9 + 9 = 18$, па у обзир долазе збирови 2, 3, 5, 7, 11, 13 и 17.
Тражени сложени бројеви су 20, 12, 21, 30, 14, 32, 50, 16, 25, 34, 52, 70, 38, 56, 65, 74, 92, 49, 58, 76, 85, 94, 98. Таквих бројева је укупно 23.

132. Из низа неједнакости $\frac{77}{22254} < \frac{77}{22253} = \frac{7 \cdot 11}{11 \cdot 2023} = \frac{7}{2023} < \frac{8}{2023}$

следи да је $\frac{8}{2023} > \frac{77}{22254}$

133. Како је $\alpha + \beta = 180°$ и $\beta + \gamma = 90°$, то је $\alpha + \beta + \beta + \gamma = 270°$.
Како је $2\beta + 111° = 270°$, то је $2\beta = 159°$ и $\beta = 79° 30'$.
Следи да је $\alpha = 180° - \beta = 100° 30'$ и $\gamma = 90° - \beta = 10° 30'$.

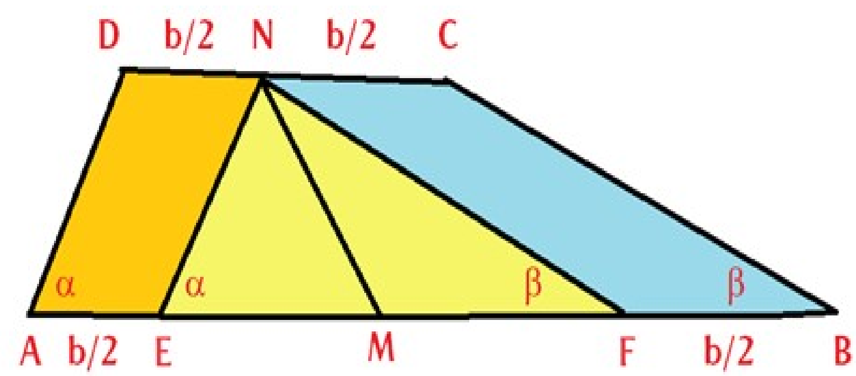
134. Ако је $p \cdot q \cdot r + 3 \cdot p \cdot q + 2 \cdot p = 52$, онда је p делилац броја 52.
Ако је $p = 1$, онд је $q \cdot r + 3 \cdot q + 2 = 52$, па је $q \cdot r + 3 \cdot q = 50$
Тада је $q \cdot r + 3 \cdot q = q(r + 3) = 50$, па постоје 4 решења: $q = 1$, $q = 2$, $q = 5$, $q = 10$.
Ако је $p = 2$, онда је $2 \cdot q \cdot r + 6 \cdot q + 4 = 52$, па је $2 \cdot q \cdot r + 6 \cdot q = 48$.
Тада је $q \cdot r + 3 \cdot q = q(r + 3) = 24$, па постоји 5 решења: $q = 1$, $q = 2$, $q = 3$, $q = 4$ и $q = 6$.
Ако је $p = 4$, онда је $4 \cdot q \cdot r + 3 \cdot 4 \cdot q + 2 \cdot 4 = 52$, па је $4 \cdot q \cdot r + 12 \cdot q + 8 = 52$.
Тада је $q \cdot r + 3 \cdot q = q(r + 3) = 11$, па постоји једно решење: $q = 1$.
Ако је $p = 13$, онда је $13 \cdot q \cdot r + 3 \cdot 13 \cdot q + 2 \cdot 13 = 52$, па је $q \cdot r + 3 \cdot q + 2 = 4$. Тада је $q \cdot r + 3 \cdot q = q(r + 3) = 2$ и нема решења.
Решења нема ни за $p = 26$ и $p = 52$.
Дакле $A = 4 + 5 + 1 = 10$.
У скупу простих бројева решење постоји само ако је $p = 2$.
Тада је $2 \cdot q \cdot r + 3 \cdot 2 \cdot q + 2 \cdot 2 = 52$ или $q \cdot r + 3 \cdot q = q(r + 3) = 24$.
Ако је $q = 2$, онда је $r + 3 = 12$, па је $r = 9$, што није прост број.
Ако је $q = 3$, онда је $r + 3 = 8$ и $r = 5$ и то је једно решење.
Дакле, постоји само једно решење, па је $B = 1$, јер за $p = 13$ нема решења.
Следи да је $A - B = 10 - 1 = 9$.

135. *Прво решење:* Поделимо све бројеве од 1 до 21 чији је збир $21 \cdot 22 : 2 = 231$ у 7 дисјунктих скупова тако да збир бројева у сваком од њих буде једнак $231 : 7 = 33$. На пример: $A_1 = \{21, 12\}$; $A_2 = \{20, 13\}$, $A_3 = \{19, 14\}$; $A_4 = \{18, 15\}$, $A_5 = \{17, 16\}$; $A_6 = \{11, 10, 9, 3\}$ и $A_7 = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Остали су бројеви 22, 23, 24 ... 2021, 2022, 2023. Њих има $2023 - 21 = 2002$ и од њих је могуће направити парове (22, 2023), (23, 2022), ... (1022, 1023) тако да је збир бројева у сваком пару једнак 2045. Таквих парова има $(2023 - 21) : 2 = 1001$. Како је $1011 = 7 \cdot 11 \cdot 13 = 7 \cdot 143$, то је могуће направити 7 подскупова тако што ће се елементима скупова A_1, A_2, ... A_7 придружити по 143 уочених парова бројева.

Друго решење: Поделимо све бројеве од 1 до 14 у 7 дисјунктих скупова $A_1 = \{1, 14\}$; $A_2 = \{2, 13\}$, ... $A_7 = \{7, 8\}$. Остали су бројеви 15, 16, 17, ... 2021, 2022, 2023. Њих има $2023 - 14 = 2009$ и могуће их је поделити у 287 дисјунктих подскупова $B_1 = \{15, 16, ... 21\}$, $B_2 = \{22, 23, ...28\}$, ... $B_{287} = \{2017, 2018 ... 2023\}$. Како је $287 = 7 \cdot 41$, то значи да се 7 тражених скупова формира тако што се поред већ изабраних бројева $\{1, 14\}$, $\{2, 13\}$, ... $\{7, 8\}$ у сваки од тих скупова дода по 41 први, 41 други ... 41 седми елеменат скупова B_1, B_2, ... , B_7.

136. Ако три молера за 4 дана окрече 5 станова, онда је за кречење 5 станова употребљено 12 дневница, што значи да 1 молер за 1 дан окречи 5/12 стана. Тада 7 молера за 12 дана направе $7 \cdot 12 = 84$ дневнице и окрече $84 \cdot 5/12 = 7 \cdot 5 = 35$ станова.
Нека 24 молера за x дана окрече 60 станова. Тада је $24 \cdot x \cdot 5/12 = 60$, па је $10x = 60$. Добија се да је број радних дана $x = 60 : 10 = 6$.
Ако y молера за 12 дана окрече 45 станова, онда је $y \cdot 12 \cdot 5/12 = 45$, па је $5y = 45$. Добија се да је ангажовано $y = 45 : 5 = 9$ молера.

137. Конструишемо дужи NE││AD и NF││ BC. Нека је AB = a и CD = b.
Тада је AM = BM = $a/2$, CN = DN = $b/2$, $\angle BAD = \alpha$ и $\angle ABC = \beta$.

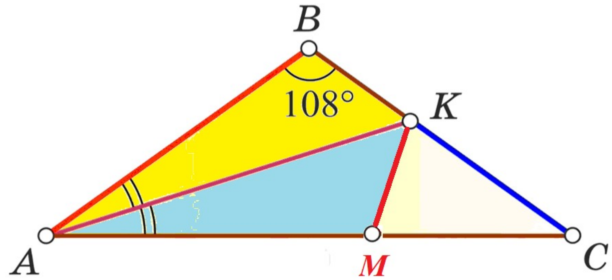


Следи да су четвороуглови AEND и BFNC паралелограми и $\angle FEN = \alpha$ и $\angle EFN = \beta$. У троуглу ENF дуж MN је по претпоставци једнака $\frac{a-b}{2}$.

Међутим, и дужио EM = FM си једнаке $\frac{a-b}{2}$, па је троугао EFN правоугли. Закључујемо да је $\alpha + \beta = 90°$, па је збир углова на мањој основици $360° - 90° = 270°$.

138. Нека су цифре траженог двоцифреног броја a и b.
Тада је $10a + b = 7(a + b)$ и $10a + b = 7a + 7b$ или $10a - 7a = 7b - b$.
Следи да је $3a = 6b$, тј. $a = 2b$. Број $0 < a < 10$, па је и $0 < 2b < 10$, тј. $0 < b < 5$.
То значи да постоји више таквих бројева и они су: 21, 42, 63 и 84.

139. Како је троугао ABC једнакокрак његови углови су: $\angle ABC = 108°$, $\angle BCA = 36°$ и $\angle CAB = 36°$. Тада је $\angle BAK = \angle MAK = 18°$.



Конструишемо тачку M, тако да је AB = AM. Тада је ΔABK ≅ ΔAMK (СУС: AB = AM, ∠BAK = ∠MAK = 18°, AK = AK). Из подударности следи да је ∠ABK = ∠AMK = 108°, па је ∠CMK = 72° и ∠CKM = 72°.Како је троугао CMK једнакокрак то је KC = MC, Следи да је AC = AM + MC = AB + KC = 2023. Задатак се може решити и на друге начине.

140. У првом обиласку кружнице биће прецртани бројеви 1, 16, 31, 46, ... , 976, 991. У другом обиласку кружнице биће прецртани бројеви 6, 21, 36, 51, ... 981, 996. У трећем обилску кружнице биће прецртани бројеви 11, 26, 41, 56 ... 986. У четвртом обилаку кружнице биће прецртани бројеви 1, 16, 31, 46, ... 976, 991, што значи да се прецртавање понавља и да неће бити више нових прецртаних бројева.
У првом обиласку прецртано је 67, у другом 67 и у трећем 66 бројева, што значи да је укупно прецртано 67 + 67 + 66 = 200 бројева.
Непрецртаних ће остати 1000 – 200 = 800 бројева.

141. Ако је $A(x) +\cdot B(x) = 2x^2 + 4x$ и $A(x) - B(x) = 6$, онда је $2A(x) = 2x^2 + 4x + 6$. Следи да је $A(x) = x^2 + 2x + 3$, па је $B(x) = A(x) - 6 = x^2 + 2x - 3$.
Тада је $A(x) \cdot B(x) = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x - 3) = (x^2 + 2x)^2 - 3^2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9$. Једначина $A(x) \cdot B(x) = 0$, постаје $(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x - 3) = 0$.
Како је $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 \geq 2 > 0$, једначина $x^2 + 2x + 3 = 0$ нема реалних решења. Из $x^2 + 2x - 3 = 0$, добија се да је $x^2 + 2x + 1 - 4 = 0$ или $(x + 1)^2 - 2^2 = 0$. То значи да је $(x + 1 + 2)(x + 1 - 2) = (x + 3)(x - 1) = 0$, па су једина решења једначине $A(x) \cdot B(x) = 0$, реални бројеви 1 и –3.

142. Ако посматрамо два спојена троугла карактеристична за правилни осмогао, јасно је да они чине делтоид са једним правим углом и једном дијагоналом једнаком r, а другом $r\sqrt{2}$. Таквих делтоида има 4, па је површина $4 \cdot r \cdot r\sqrt{2} / 2 = 2 \cdot 8 \cdot 8 \sqrt{2} = 128\sqrt{2}$.

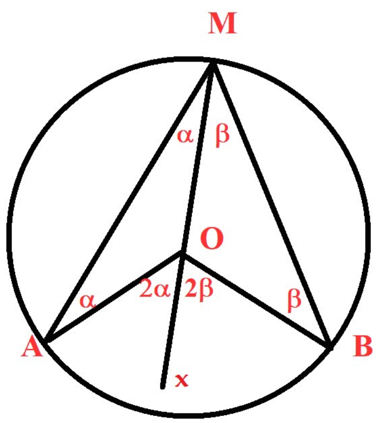
143. Нека је број музичара у једном реду у другој формацији једнак m.

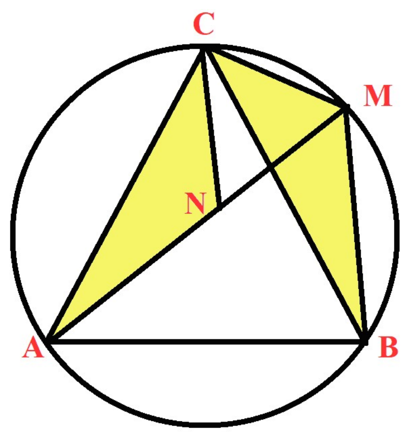
Тада је $n^2 = (n + 5)m$. Следи да је $m = \dfrac{n^2}{n+5}$ што значи да је број n^2 дељив

са $n + 5$. Како је $m = \dfrac{n^2}{n+5} = \dfrac{n^2 + 5n - 5n + 25 - 25}{n+5} = n - 5 - \dfrac{25}{n+5}$, то

се $n + 5$ садржи у 25. То значи да је $(n + 5) \in \{1, 5, 25\}$, а $n \in \{-4, 0, 20\}$.
Како n мора бити природан број то је $n = 20$ и број музичара је 400.
У првој формацији је било 20 редова по 20 музичара, а у другој 25 редова по 16 музичара.

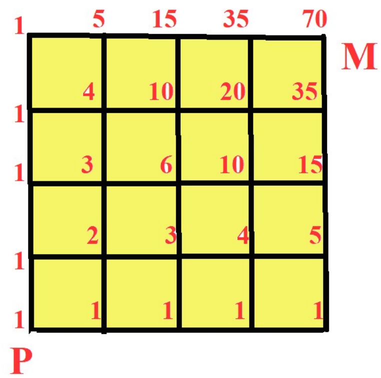
144. Нека је O центар кружнице описане око једнакостраничног троугла ABC (слика лево). Ако је $\angle AMO = \alpha$ и $\angle BMO = 2\beta$, онда су и углови $\angle MAO = \alpha$ и $\angle MBO = \beta$. Тада је $\angle AOx = 2\alpha$ и $\angle BOx = 2\beta$, а $\angle AOB = 2\alpha + 2\beta$.





Како је $\angle AOB = 120°$, то је $\angle AMB = 60°$. На сличан начин се може доказати и да је $\angle AMC = 60°$. Из претходног доказа следи и да је $\angle MAC = \angle MBC = 1/2\angle COM$. Нека је N тачка дужи AM, таква да је MN = MC.
Како је $\angle NMC = 60°$, то је троугао MNC једнакостранични и
MN = MC = NC. Сада су троуглови ANC и BMC подударни
(СУС: AC = BC, $\angle MAC = \angle MBC$, CN = CM), па је из подударности
AN = BM. Како је AM = AN + NM = BM + CM то је доказ завршен.

145. а) Најмањи (а и највећи) број корака је 8, јер се паук креће увек десно и увек горе.
б) У свакој тачки (чвору) квадратне мреже уписан је број начина на који паук може да дође до тог чвора. Сабирањем могућности за сваки чвор добија се да паук до муве може стићи на 70 начина.



146. Нека је AM = AN = AP = a, Запремина коцке је $10^3 = 1000$ cm^3, а запремина пирамиде AMNP је $a/3 \cdot a^2/2 = a^3/6$. Запремине добијених тела су $1000 - a^3/6$ и $a^3/6$, па је $(1000 - a^3/6) : a^3/6 = 371 : 4$ или $4000 - 4a^3/6 = 371a^3/6$. Следи да је $375a^3/6 = 4000$, па је $a^3 = 24000/375 = 64$, што значи да је $a = 4$ cm.

Површина већег дела је $6 \cdot 100 - M + B$, а површина пирамиде је $M + B$. Разлика ових површина је $600 - M + B - M - B = 600 - 2M =$
$600 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 : 2 = 600 - 48 = 552$ cm^2.

147. *Прво решење*: Ако се на 10 књига додају 4 књиге које је Бојан узео, добија се 10 + 4 = 14 књига које су 2/3 од претходног броја књига. Дакле Бојану је на располагању била $3 \cdot 7 = 21$ књига. Ако се на 21 додају 3 књиге које је узео Пера, добија се 21 + 3 = 24 књиге, што је 2/3 књига које су биле Пери на располагању. То значи да је Пера на располагању имао $3 \cdot 12 = 36$ књига.

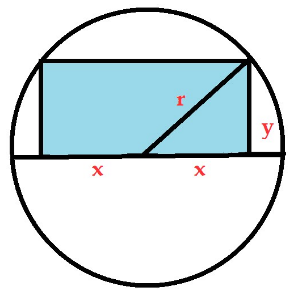
148. Ако се на 36 књига додају 2 књиге које је узео Влада, добија се 36 + 2 = 38 књига које су 2/3 од претходног броја књига. Дакле Влади је на располагању било $3 \cdot 19 = 57$ књига. На крају, када се на 57 књига дода 1 књига коју је узео Срђан, добија се 57 + 1 = 58 књига, што је 2/3 књига које биле Срђану на располагању. То значи да је на столу било $3 \cdot 29 = 87$ књига. Срђан је добио 87 : 3 + 1 = 29 + 1 = 30 књига. Влада је добио (87 – 30) : 3 + 2 = 57 : 3 + 2 = 19 + 2 = 21 књига. Пера је добио (87 – 30 – 21) : 3 + 3 = 36 : 3 + 3 = 12 + 3 = 15 књига. Бојан је добио (87 – 30 – 21 – 15) : 3 + 4 = 21 : 3 + 4 = 7 + 4 = 11 књига.
На столу је остало 87 – 30 – 21 – 15 – 11 = 10 књига.

Друго решење:
Нека је на столу било $3x$ књига, јер да би се израчунала трећина на столу увек мора остати број књига који је дељив са 3. Срђан је узео $x + 1$ књигу, па је на столу остало $2x - 1 = 3y$ књига. Влада је узео $y + 2$ књиге па је на столу остало $2y - 2 = 3z$ књига.

Пера је узео $z+3$ књига, па је на столу остало $2z - 3 = 3t$ књига. Бојан је узео $t + 4$ књиге, па је на столу остало $2t - 4 = 10$ књига. Следи да је $2t = 14$, па је $t = 7$. Следи да је $2z - 3 = 3t = 21$ и $2z = 24$, а $z = 12$. Тада је $2y - 2 = 3z$, па је $2y - 2 = 36$, $2y = 38$ и $y = 19$. Следи да је $2x - 1 = 3y = 57$, па је $2x = 58$ и $x = 29$. Према томе на столу је било $3x = 3 \cdot 29 = 87$ књига,

149. Ако су странице траженог правоугаоника $2x$ и y, његова површина $P = 2x \cdot y$. Из Питагорине теореме је $x^2 + y^2 = r^2$, па је $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Површина траженог правоугаоника је $P = 2x \cdot y = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$



Из неједнакости аритметичке и геометријске средине добија се да је

$P = 2x \cdot y = 2x\sqrt{r^2 - x^2} = 2\sqrt{x^2(r^2 - x^2)} \le x^2 + r^2 - x^2 = r^2$.

Највећа површина се добија када је $x^2 = r^2 - x^2$, тј. $2x^2 = r^2$ и $x = r\sqrt{2}/2$.

Тада је $y = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$. Обим правоугаоника највеће површине је

$O = 4x + 2y = 3r\sqrt{2}$.

150. Ако је $S(7^{2023}) = a$ и $S(a) = b$ и $S(b) = c$, онда је $7^{2023} \equiv S(7^{2023}) \equiv a \equiv S(a) \equiv b \equiv S(b) \equiv c \pmod 9$. Број $7^{2023} \equiv (7^3)^{671} \cdot 7 \equiv 343^{671} \cdot 7 \equiv 1 \cdot 7 = 7 \pmod 9$, а то значи да је и $a \equiv b \equiv c \equiv 7 \pmod 9$.
Број $7^{2023} < 10^{2023} < 999 \ldots 999$ (2023 деветке). То значи да је број a који представља збир цифара броја 7^{2023} мањи од $2023 \cdot 9 = 18\,207$.
Како је $a < 18207$, то је збир цифара броја a, а то је $b < S(18199) = 1 + 8 + 1 + 9 + 9 \le 28$. Тада је број c који представља збир цифара броја b и мањи или једнак 10. Како је $c \equiv 7 \pmod 9$ и $c \le 10$, то је $c = 7$.

151. *Прво решење:* Како је $9a^2 + 9b^2 + 9c^2 = 9(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) = a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2$, то из неједнакости $9a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 6abc \le a^3 + b^3 + c^3$ следи неједнакост $a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 - 6abc \le a^3 + b^3 + c^3$.

Добија се неједнакост $a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 - 6abc \leq 0$ и тада је $a(b^2 - 2bc + c^2) + b(a^2 - 2ac + c^2) + c(a^2 - 2ab + b^2) \leq 0$ или $a(b-c)^2 + b(a-c)^2 + c(a-b)^2 \leq 0$.

Како је лева стран неједнакости ненегативна (јер су сви брјеви у неједнакости ненегативни) неједнакост важи само ако је $b - c = a - c = a - b = 0$, тј. $a = b = c = 3$, а тражени троцифрени број је 333.

Друго решење: Из неједнакости $9a^2 + 9b^2 + 9c^2 - 6abc \leq a^3 + b^3 + c^3$ следи да је $9a^2 + 9b^2 + 9c^2 - a^3 + b^3 + c^3 \leq 6abc$ или

$a^2(9 - \text{a}) + b^2(9 - b) + c^2(9 - \text{c}) \leq 6abc$.

Тада је због једнакости $a + b + c = 9$, $a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b) \leq 6abc$.

Када се последња неједнакост подели са abc добија се неједнакост

$$\frac{a^2(b+c)}{abc} + \frac{b^2(a+c)}{abc} + \frac{c^2(a+b)}{abc} \leq 6 \quad \text{или} \quad \frac{a(b+c)}{bc} + \frac{b(a+c)}{ac} + \frac{c(a+b)}{ab} \leq 6.$$

Следи да је

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \leq 6.$$

Како је у претходној неједнакости израз у свакој од заграда најмање 2, то је неједнакост могућа једино ако важи једнакост, тј. ако је $a = b = c = 3$. То значи да је једини троцифрен број који испуњава дате услове број 333.

РЕВИЈАЛНО МАТЕМАТИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ

СРБИЈА МИСЛИ! СРБИЈА РЕШАВА!

151. 7

152. 3.

153. 2

154. 5.

155. 6 (М, А, Т, Е, И, К).

156. Љиља има $11 + 7 = 18$ година.

157. Кувар треба да припреми још $15 - 6 = 9$ шоља млека.

158. Кругова има 7, а коцки има 3. Збир броја кругова и броја коцки је $7 + 3 = 10$.

159. Најмањи двоцифрен број је 10, а највећи једноцфрен број је 9. Њихова разлика је $10 - 9 = 1$.

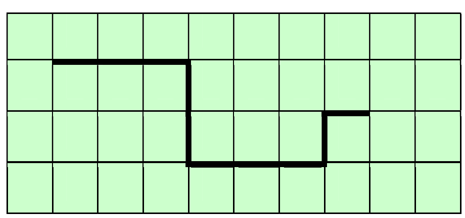
160. Трећа кока је снела $15 - 6 - 5 = 9 - 5 = 4$ јаја.

161. Укупан број коња који ће се такмичити је $4 \cdot 9 = 36$.

162. У сваком албуму ће бити $48 : 4 = 12$ фотографија.

163. У првој кутији Никола има 6 аутића. У другој $3 \cdot 6 = 18$ аутића, Броја аутића у трећој кутији је $40 - 6 - 18 = 34 - 18 = 16$.

164. Дужина изломљене линије је 3 cm + 2 cm + 3 cm + 1 cm + 1 cm = 10 cm



165. Од 17 часова и 33 минута до 18 часова има $60 - 33 = 27$ минута. Од 18 часова до 18 часова и 28 минута има 28 минута. То значи да је ТВ пренос ватерполо утакмице трајао $27 + 28 = 55$ минута.

166. Тражени број је $876 : 6 = 146$.

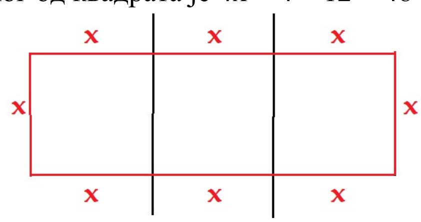
167. Дељеник се добија множењем количника и делиоца, па је дељеник једнак $7 \cdot 89 = 623$.

168. Решење 1: Како је 1 тона једнака 1 000 kg, сваки од берача треба да набере 1 000 : 5 = 200 kg малина. То значи да би сваки од њих требао да набере још по 200 – 138 = 62 kg малина.

Решење 2: Пет берача је набрало $5 \cdot 138 = 690$ kg малине. Како је 1 тона једнака 1 000 kg, То значи да треба да се набере још 1 000 – 690 = 310 kg. Следи да сваки берач треба да набере још по 310 : 5 = 62 kg малине.

169. Марко је 26. маја спавао 1 час и 38 минута, а 27. маја 8 часова и 8 минута. То значи да је Марко спавао укупно 9 часова и 46 минута. Како је 9 часова једнако $9 \cdot 60 = 540$ минута, Марко је спавао укупно 540 + 46 = 586 минута.

170. Ако је страница сваког од добијених квадрата једнака x, онда је обим правоугаоника једнак $3x + x + 3x + x = 8x = 96$ cm. Тада је $x = 96 : 8 = 12$ cm. Обим сваког од квадрата је $4x = 4 \cdot 12 = 48$ cm.



171. Решење је 1 234 + 5 678 = 6912.

172. Свака девојчица ће добити 3 456 ; 9 = 384 динара.

173. Производ бројева 346 и 82 је $346 \cdot 82 = 28\ 372$.
Четвртина броја 28 372 је 28 372 : 4 = 7093.

174. Ако је површина коцке 150 cm^2, онда је површина једне њене стране једнака 150 : 6 = 25 cm^2. То значи да је ивица коцке a једнака 5 cm.
Запремина коцке је $V = a \cdot a \cdot a = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 25 \cdot 5 = 125$ cm^3.

175. Решење 1: Површина свечане сале је $20 \cdot 15 = 300$ m^2.
Како се 20 cm у једном метру садржи 5 пута, то је за прекривање једног квадратног метра неопходно $5 \cdot 5 = 25$ плоча.
То значи да за 300 m^2 треба $300 \cdot 25 = 7\ 500$ плоча.
Цена 7 500 плоча је $7\ 500 \cdot 100 = 750\ 000$ динара.

Решење 2: Површина свечане сале је $20 \cdot 15 = 300$ m^2 $= 300 \cdot 100 \cdot 100 =$ 3 000 000 cm^2. Површина једне плоче је $20 \cdot 20 = 400$ cm^2.

За поплочавање свечане сале треба 3 000 000 : 400 = 7 500 плоча.
Цена 7 500 плоча је 7 500 · 100 = 750 000 динара.

176. Пресек скупова A и B је скуп { 7, 8, 9, 10, 11 }. Он има 5 елемената.

177. $\left(3-\frac{1}{4}\cdot 2+6,5\right):\frac{9}{7}=\left(3-\frac{1}{2}+6,5\right):\frac{9}{7}=9:\frac{9}{7}=9\cdot\frac{7}{9}=7.$

178. Из дељења 2023 : 67 добија се да је 2023 : 67 = 30 (13). Према томе збир количника и остатка је 30 + 13 = 43.

179. Тражене дужи су AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE и DE и има их укупно 10.

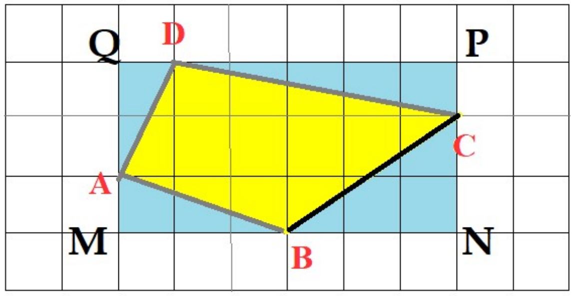
180. Решење 1: Из услова задатка је $\beta + \alpha = 90°$ и $\gamma + \beta = 180°$. Ако се од друге једнакости одузме прва добије се да је $\gamma - \alpha = 180° - 90° = 90°$. Дакле, угао γ је за 90° већи од угла α.
Решење 2: Из услова задатка је $\beta + \alpha = 90°$ и $\gamma + \beta = 180°$.
Тада је $\beta = 90° - \alpha$, па је $\gamma + \beta = \gamma + 90° - \alpha = 180°$ и $\gamma - \alpha = 180° - 90° = 90°$.
Дакле, угао γ је за 90° већи од угла α.

181. Бројевна вредност израза је: $(-7) + 8 + (-9) + |\ 10 - (-11)\ | = 1 + (-9) + |\ 10 + 11\ | = (-8) + 21 = 13$.

182. $\angle CAB = 180° - \angle ABC - \angle BCA = 180° - 54° - 65°$.
Следи да је $\angle CAB = 126° - 65° = 61°$.

183. Из услова задатка следи да 24% масе чоколаде чине лешници. То значи да за 1000 kg килограма чоколаде, треба 1 000 · 24% = 1 000 · 0,24 = 240 kg лешника.

184. Површина четвороугла ABCD се добија када се од површине правоугаоника MNPQ одузму површине троуглова ABM, BCN, CDP и DAQ. То значи да је тражена површина $P = 6 \cdot 3 - 3 \cdot 1/2 - 3 \cdot 2/2 - 5 \cdot 1/2 - 2 \cdot 1/2 = 18 - 3/2 - 3 - 5/2 - 1 = 18 - 4 - 4 = 18 - 8 = 10\ cm^2$.



185. Највећи могући број сабирака је када је збир дефинисан на следећи начин: $(-2022) + (-2021) + ... + (-1) + 0 + 1 + 2 + ... + 2021 + 2022 + 2023$. Тада је број сабирака $n = 2 \cdot 2022 + 1 + 1$ (2022 пара супротних бројева, нула и 2023). Значи да је $n = 4044 + 2 = 4046$.

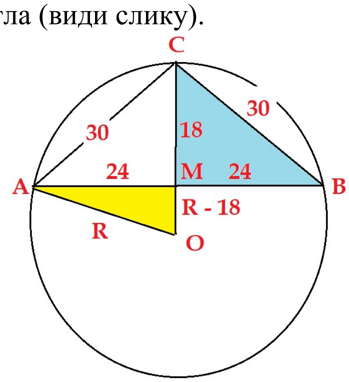
186. Ако 6 мајстора сазидају зграду за 32 дана, онда је за зидање те зграде неоходно $6 \cdot 32 = 192$ дневнице. Ако има 8 мастора онда они сазидају зграду за $192 : 8 = 24$ дана.

187. Збир углова у многоуглу са 18 страница је $(18 - 2) \cdot 180^{\circ} = 16 \cdot 180^{\circ}$. Како су у правилном многоуглу сви углови једнаки то ће један угао бити $16 \cdot 180^{\circ} : 18 = 16 \cdot 10^{\circ} = 160^{\circ}$.

188. Како је $\dfrac{3^7 \cdot 3^{10}}{3^{12} \cdot 3^5} = \dfrac{3^7 \cdot 3^{10}}{3^{12} \cdot 3^5} = \dfrac{3^{17}}{3^{17}} = 1$ то је вредност датог израза једнака 1.

189. Из $x^3 = 16x$, следи да је $x^3 - 16x = x(x^2 - 16) = x(x - 4)(x + 4) = 0$. Дата једначина има решења 0, 4 и -4 и њихов производ је 0.

190. Приметимо да је $AC^2 + BC^2 = 30^2 + 30^2 = 900 + 900 = 1800 < 2304 = 48^2$. То значи да је троугао тупоугли и да му се центар описаног круга налази изван троугла (види слику).



Из троугла BCM висина једнакокраког троугла CM је:
$CM^2 = 30^2 - 24^2 = 900 - 576 = 324$, па је $CM = 18$ cm.

Ако је О центар описаног круга, онда је из правоуглог троугла АОМ:
$AO^2 = AM^2 + OM^2$. Следи да је $R^2 = 24^2 + (R - 18)^2$) или
$R^2 = 576 + R^2 - 36R + 324$. Тада је $36R = 900$ и $P = 900 : 36 = 25$ cm.

191. Ако је $P = 6a^2 = 294$ cm^2, онда је $a^2 = 294 : 6 = 49$ cm^2, па је $a = 7$ cm. Тада, је запремина коцке једнака $a^3 = 7^3 = 343$ cm^3.

192. Ако целу неједначину помножимо са 12, добија се да је $6(x - 1) < 8x < 3x + 9$. Следи да је $6x - 6 < 8x$ и $8x < 3x + 9$. Тада је $-6 < 8x - 6x$ и $8x - 3x < 9$. Тада је $2x > -6$ и $5x < 9$, па је $x > -3$ и $x < 9/5$ или $-3 < x < 9/5$. Цели бројеви који задовољавају дату неједначину су $-2, -1, 0$ и 1 и има их 4,

193. Бочна висина пирамиде $h^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$, па је $h = 13$ cm. Површина пирамиде је $B + M = a^2 + 4ah/2 = 100 + 2 \cdot 10 \cdot 13 = 100 + 260 = 360$ cm^2.

194. Нека је на првој полици x, а на другој полици y књига. Из услова задатка је $x + y = 100$ и $x/2 + 2y/3 = 60$. Множењем друге једначине са 6, добија се $3x + 4y = 360$. Из прве једначине је $y = 100 - x$, па се заменом у другу добија $3x + 4(100 - x) = 360$. Следи да је $3x + 400 - 4x = 360$, па је $-x = -40$ и $x = 40$, $y = 60$. Дакле, на првој полици је било 40 књига.

195. Ако је $y = кx + n$, онда је $3 = 5к + n$ и $6 = 0 \cdot x + n$. Добија се да је $n = 6$ и $5к + 6 = 3$, па је $к = -3/5$. Права $y = -3/5\,x + 6$, пресеца координатне осе у тачкама А(10, 0) и В (0, 6). Дуж АВ при том има дужину $\sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$.
У правоуглом троуглу АВО, тражено одстојање је хипотенузина висина, па се из повврршине добија да је то растојање

$$d = \frac{10 \cdot 6}{2\sqrt{34}} = \frac{30}{\sqrt{34}} = \frac{30\sqrt{34}}{34} = \frac{15}{17}\sqrt{34} = 5{,}14 \; .$$

196. Из услова задатка следи да после пржења маса кафе износи 100% - 12% = 88% првобитне. Тада је $100 : 88 = x : 44$, па је $88x = 100 \cdot 44$. Следи да је $x = 4400 : 88 = 50$ kg.

197. Ако су углови троугла $3x$, $2x$ и $7x$, онда је $3x + 2x + 7x = 180°$. Следи да је $12x = 180°$, па је $x = 180° : 12 = 15$. Разлика највећег и најмањег угла је $7x - 2x = 5x = 5 \cdot 15° = 75°$.

198. Ако је мањи број x, онда је већи број $2x + 3$. Следи да је $2x + x + 3 = 60$, па је $3x + 3 = 60$, $3x = 57$ и $x = 19$.

199. Нека је висина дрвета x. Из сличности правоуглих троуглова које чине висина објекта и сенка објекта следи да је $1,8 : 4 = x : 20$. Дакле, $4x = 20 \cdot 1,8 = 36$. Тада је $x = 36 : 4 = 9$ m.

200. Нека је $|x - 3| = y$, Следи да је $y \geq 0$. Дата неједначина постаје

$$\frac{2}{y-1} + \frac{3}{y+2} \leq 0 .$$

Тада је $\dfrac{2(y+2) + 3(y-1)}{(y-1)(y+2)} \leq 0$, односно $\dfrac{5y+1}{(y-1)(y+2)} \leq 0$.

Како су $5y + 1$ и $y + 2$ позитивни бројеви разломак је негативан само када је израз $(y - 1) < 0$, тј. када је $y < 1$.
То значи да је $|x - 3| < 1$, односно $-1 < x - 3 < 1$, па је $2 < x < 4$.
Тражени збир је 3. јер постоји само једно целобнројно решење.

201. Нека је $A = 1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = 1 + 1 + (-1) + (-i) + (-1)^2 = 1$.

202. Нека је $\log_2 x = a$. Тада је $a^2 - 3 = 2a$, па је $a^2 - 2a - 3 = 0$.
Решења добијене квадратне једначине су $a_1 = -1$ и $a_2 = 3$.
То значи да је $\log_2 x = -1$ и $\log_2 x = 3$, па је $x_1 = 2^{-1}$ и $x_2 = 2^3$.
Производ решења је $2^2 = 4$.

203. Функција $y = 2^{x^2 - 3x}$ је растућа, па из $2^{x^2 - 3x} \leq 1 = 2^0$ следи да је $x^2 - 3x \leq 0$. Решење добијене једначине је $0 \leq x \leq 3$, па је збир целобројних решења неједначине једнак $0 + 1 + 2 + 3 = 6$

204. Израз $A = 10(\cos^4 30^\circ - \sin^4 30^\circ) = 10(\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ)(\cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ) = 10 \cos 60^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5$.

205. Из $x(x - 1)(x + 1)(x + 2) = 24$ следи да је $(x - 1)(x + 2)(x + 1)\,x = 24$.
Тада је $(x^2 + x - 2)(x^2 + x) = 24$ или $(x^2 + x - 1 - 1)(x^2 + x - 1 + 1) = 24$.
Добија се да је $(x^2 + x - 1)^2 - 1 = 24$, па је $(x^2 + x - 1)^2 = 25$. Следи да је $x^2 + x - 1 = 5$ или $x^2 + x - 1 = = -5$. То значи да је $x^2 + x - 6 = 0$ или $x^2 + x + 4 = 0$. Прва једначина има реална решења 2 и -3. Решења друге једначине x_3 и x_4 нису реална јер је дискриминанта једначине једнака -15.
За решења друге једначине тада, на основу Виетових формула, важе једнакости $x_3 + x_4 = -1$ и $x_3x_4 = 4$.
Тада је $x_3^3 + x_4^3 = (x_3 + x_4)(x_3^2 - x_3x_4 + x_4^2) = (x_3 + x_4)((x_3 + x_4)^2 - 3x_3x_4) = (-1)(1 - 12) = 11$.

206. Запремина лопте је $4/3\pi r^3 = 972\pi$. Тада је $4r^3 = 2916$, па је $r^3 = 729$ и $r = 9$.

207. Тражени збир је 1 + 3 + ... 197 + 199. Ако се направе парови 1 + 199, 3 + 197, 5 + 195 ..., а биће их 50, онда је збир сваког пара једнак 200.
Збир првих 100 парних бројева је 50 · 200 = 10 000.

208. Ако је ивица правилног тетраедра a, онда се висина тетраедра H добија применом Питагорине теореме из релације

$$H^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{3a^2 - a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$$. Следи да је $H = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Запремина тетраедра је $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 27\sqrt{3}$.

Из претходне једнакости је

$$a^3 = \frac{12 \cdot 27\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{12 \cdot 27\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 27 \cdot 6\sqrt{6} = (3\sqrt{6})^3.$$

Тада је $a = 3\sqrt{6}$ и $H = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 3 \cdot \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{4} = 6.$

209. Средиште дужи АВ је тачка С (0, 4) = С(p, q), па је $p = 0$ и $q = 4$. Квадрат полупречника круга је $r^2 = (1 - 0)^2 + (3 - 4)^2 = 1 + 1 = 2$. Тада је $p + q - r^2 = 0 + 4 - 2 = 2$.

210. Ако је $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} = \frac{1023}{512}$, онда је

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} = \frac{1023}{512} - 1 = \frac{511}{512}.$$

Добијени збир је збир геометријске прогресије чији је први члан 1/2, а количник 1/2 и низ има тачно n чланова

Тада је $\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{511}{512}$ и $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{511}{512}$.

.

Следи да је $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{511}{512} = \frac{1}{512} = \left(\frac{1}{2}\right)^9$, па је $n = 9$.

.

211. Дата функција је дефинисан само ако је функција под кореном ненегативна и ако је њен именилац различит од нуле.

Дакле, $\dfrac{5x - x^2}{x^2 - 6x + 9} = \dfrac{5x - x^2}{(x - 3^2} \geq 0 \;\; и \;\; x \neq 3$. Како је именилац увек позитиван то мора бити $5x - x^2 \geq 0$.
Тада је $0 \leq x \leq 5$. Природних бројева различитих од 3 у овом интервалу има 4 (1, 2, 4, 5).

212. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3tgx}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3\sin x}{\sin x \cdot \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{\cos x} = 3$

213. Нека је на шаховском турниру било n учесника. Сваки од њих је одиграо по $n - 1$ партију, али је партија A – B била иста као B – A.
То значи да је $n\,(n - 1) : 2 = 120$, па је $n\,(n - 1) = 240$.
Решавањем квадратне једначине $n^2 - n - 240 = 0$, добијају се решења $n = 16$ или $n = -15$. Огигледно једино решење је 16 играча.

214. Како је $2023 = 7 \cdot 289$ то у скупу бројева 1, 2, ... , 2023 има тачно 289 бројева дељивих са 7. Вероватноћа p = 289/2023 = 1/7. Вредност израза 578p = 578/7.

215. Тражена кутија има основу квадратног облика дужине x и висине y. Запремина те кутије је $V = x^2 \cdot y$, а $x + 2y = 30$. Тада је $y = (30 - x)/2$ и запремина $V = x^2(30 - x)/2 = 15x^2 - x^3/2$. Извод $V' = 30x - 3x^2/2 = x(60 - 3x)/2$. Функција има максимум када је $60 - 3x = 0$, па је $x = 20$ и y = 5. Максимална вредност запремине је $V = x^2\, y = 400 \cdot 5 = 2\,000\ cm^3$.

216. Запремина цистрне је $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24\ m^3 = 24\,000\ dm^3$.
Како је 1 dm^3 запремина која одговара запремини од 1 литра и како се од 1 литра (или 10 децилитара) сока може напунити 10 : 1,25 = 8 сокова, укупан број сокова ће бити $8 \cdot 24\,000 = 192\,000$.

217. Из податка да 3 мајстора за 4 ста напрве 50 посуда, закључујемо да један мајстр за један сат направи 50/12 = 25/6 посуде. Онда 7 мајстора за 6 сати, што је укупно 42 радна сата направе $42 \cdot 25/6 = 7 \cdot 25 = 175$ посуда.

218. Фондација Алек Кавчић је објавила 111/150 = 37/50 = 74/100 = 74 % од укупно потребних уџбеника.

219. Укупан број произведених пећи је $111 + (111 + 2) + (111 + 4) + ... + (111 + 28 \cdot 2) = 111 + 113 + 115 + ... + 163 + 165 + 167$, где је број сабирака једнак 29, јер 1. и 2. маја (државни празник) предузеће није производили пећи. Тражени збир је $(111 + 165) + (113 + 163) + (115 + 161) + ... + 167 = 276 + ... + 276 + 167 = 276 \cdot 14 + 167 = 3864 + 167 = 4031$.

220. Решење 1: Површина продајног центра је $25 \cdot 16 = 400$ m^2. Како се 20 cm у једном метру садржи 5 пута, то је за прекривање једног квадратног метра неопходно $5 \cdot 5 = 25$ плоча. То значи да за 400 m^2 треба $400 \cdot 25 = 10\,000$ плоча. Цена 10 000 плоча је $10\,000 \cdot 100 = 1\,000\,000$ динара.

Решење 2: Површина свечане сале је $25 \cdot 16 = 400$ m^2 $= 400 \cdot 100 \cdot 100 = 4\,000\,000$ cm^2. Површина једне плоче је $20 \cdot 20 = 400$ cm^2.
За поплочавање свечане сале треба $4\,000\,000 : 400 = 10\,000$ плоча.
Цена 10 000 плоча је $10\,000 \cdot 100 = 1\,000\,000$ динара.

ДИОФАНТОВО МАТЕМАТИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ЛЕТЊА ШКОЛА МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА – ЧАЧАК 2023.

221. Како је 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 81, то је централни број магичног квадрата једнак 81 : 3 = 27 (тачан је одговор Г).

222. Ако Милан сада има x година за 28 година ће имати $x + 28$, што је једнако 3х. Тада је 3х = $x + 28$, па је 2х = 28 и $x = 14$. Милан сада има 14 година (тачан одговор је Б).

223. Нека је средњи од тих бројева a. Тада је $a - 1 + a + a + 1 = 345$. Следи да је а = 345 : 3 = 115. Највећи од тих бројева је 116 (тачан је одговор В).

224. У сваком од 9 квадрата има по 4 права угла. То је укупно 9 · 4 = 36 правих углова (тачан одговор је Г).

225. Решења математичког ребуса су: 1 + 10 + 102 = 1 + 11 + 101 = 1 + 12 + 100 = 2 + 10 + 101 = 2 + 11 + 100 = 3 + 10 + 100 = 113.

226. Такви су правоугаоници који имају странице: 1 и 48, 2 и 24, 3 и 16, 4 и 12 и 6 и 8. Има их укупно 5 (тачан одговор је В).

227. Непарних страница има 62 (5 једноцифрених, 45 двоцифрених и 12 троцифрених), То је укупно 5 · 1 + 45 · 2 + 12 · 3 = 5 + 90 + 36 = 131 цифра (тачан одговор је Б).

228. Ако је најмањи од тих бројева x, онда је $x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 4 \cdot x + 6 = 1250$. Тада је $4 \cdot x = 1244$. Тада је $x = 1244 : 4 = 311$. Највећи од тих бројева је 311 + 3 = 314, а производ његових цифара је 3 · 1 · 4 = 12 (тачан одговор је Г).

229. Нека је страница квадрата a. Када се свака страница квадрата увећа за 4cm, његова површина се увећа за $4 \cdot a + 16 + 4 \cdot a = 48$. Тада је $8 \cdot a = 48 - 16 = 32$ и а = 32 : 8 = 4 cm (тачан одговор је А).

230. Математички ребус * + ** + *** + **** = 1113 има 10 решења. Та решења су: 1 + 10 + 100 + 1002 = 1 + 10 + 101 + 1001 =
1 + 10 + 102 + 1000 = 1 + 11 + 100 + 1001 = 1 + 11 + 101 + 1000 =
1 + 12 + 100 + 1000 = 2 + 10 + 100 + 1001 = 2 + 10 + 101 + 1000 =
2 + 11 + 100 + 1000 = 3 + 10 + 100 + 1000 = 1113.

231. Збир бројева 5 и 8 (у декадном систему) је 13. Декадни број 13 = 8 + 4 + 1 у бинарном систему се записују као 1101 (тачан одговор је В).

232. Природан број који је дељив са 2, 3, 5 и 8 је дељив са 3 · 5 · 8 = 120. Најмањи четвороцифрени броје који је дељим бројевима 2, 3, 5 и 8 је 9 · 120 = 1080, а тражени број је 1081 (тачан одговор је В).

233. Поред правих a и b има још $3 \cdot 4 = 12$ правих, па је укупан број правих једнак $2 + 12 = 14$ (тачан одговор је В).

234. Укупан број оса симетрије на свим датим сликама је $0 + 0 + 1 + 2 + 2 + 1 = 6$ (тачан одговор је Б).

235. Број 12138 једнак је $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 17$. Дакле, дати разломак се може скратити са простим бројевима 2, 3, 7 и 17.

236. Четвороугао NMCD састоји се из три правоугла троугла: BND (четвртина квадрата ABDE странице 6 cm), BCD (кетете су 6 cm и 8 cm) и BCM (четвртина квадрата BCFG странице 8 cm). Површина четвороугла NMCD је $36 / 4 + 6 \cdot 8 / 2 + 64 / 4 = 9 + 24 + 16 = 49\ \text{cm}^2$ (тачан је одговор А).

237. Како је $A = \dfrac{64^5 \cdot 8^4}{32^8} = \dfrac{(2^6)^5 \cdot (2^3)^4}{(2^5)^8} = \dfrac{2^{30} \cdot 2^{12}}{2^{40}} = 2^2 = 4$,

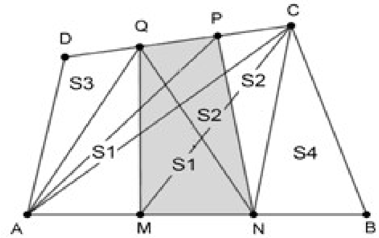
$$B = \frac{15^6 \cdot 14^5}{21^5 \cdot 10^4} = \frac{3^6 \cdot 5^6 \cdot 2^5 \cdot 7^5}{3^5 \cdot 7^5 \cdot 2^4 \cdot 5^4} = 3 \cdot 5^2 \cdot 2 = 150 \text{ и}$$

$$C = \left(-\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^5 \cdot 7^5 = \frac{(-32) \cdot 3^5 \cdot 7^5}{3^5 \cdot 7^5} = -32 ,$$

то је $A + B + C = 4 + 150 - 32 = 122$ (тачан одговор је Б).

238. Број је дељив са 9, ако му је збир цифара дељив са 9. Валентина је могла да напише број чији је збир цифара већи или једнак 4, а мањи или једнак 12. Према томе Валентина је написала бројеве чији је збир цифара једнак 9. Таквих комбинација има само две: $2 + 2 + 2 + 3$ и $3 + 3 + 2 + 1$. Првих бројева има 4 (2223, 2232, 2322 и 3222), а других 12 (1233, 1323, 1332, 2133, 2313, 2331, 3123, 3132, 3213, 3231, 3312 и 3321). Значи да је Валентина написала $4 + 12 = 16$ бројева (тачан одговор је В).

239. Нека је површина четвороугла $ABCD$ једнака S, а тражена $P(MNPQ) = S^*$. Како је из услова задатка $AM = MN = NB$ и $CP = PQ = QD$, онда је $S_1 = P(\Delta AMQ) = P(\Delta MNQ)$, $S_2 = P(\Delta NPQ) = P(\Delta CPN)$, $S_3 = P(\Delta AQD) = P(\Delta AQP) = \mathrm{P}(\Delta APC)$ и $S_4 = P(\Delta CBN) = P(\Delta CMN) = \mathrm{P}(\Delta CMA)$. Важе следеће једнакости (види слику):



$S = S_3 + 2S_1 + 2S_2 + S_4$; $S^* = S_1 + S_2$ и $S = 3S_3 + 3S_4$. Дакле, $3S_3 + 3S_4 = S_3 + 2S^* + S_4$, па $2S_3 + 2S_4 = 2S^*$ или $S^* = S_3 + S_4$. Из једнакости $S = 3S_3 + 3S_4 = 3S^*$ следи да је $S^* = 1/3S$, па је тражени однос 1 : 3 (тачан је одговор Г).

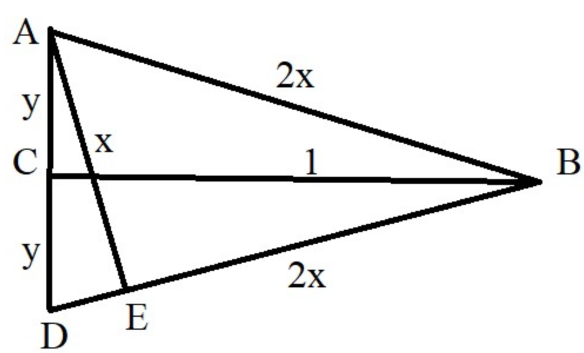
240. Нека је $\angle BAD = \alpha$. Како је BE основица једнакокраког троугла BEC, то је BC = CE = AD. Слично је и BF основица једнакокраког троугла ABF, па следи једнакост AB = AF = CD. Сада су троуглови ADF и CDE подуда-рни јер је: AD = CE, $\angle DAF = \alpha + 180° - 2\alpha = 180° - \alpha = \angle DCE$ и AF = CD. Из подударности троуглова је DE = DF.

241. Из $a^3 - 8a^2 + 13a - 6 = a^3 - a^2 - 7a^2 + 7a + 6a - 6 = 0$, следи да је $a^2 (a - 1) - 7a (a - 1) + 7a + 6(a - 1) = (a - 1)(a^2 - 7a + 6) = 0$. Даље је $(a - 1)(a^2 - 6a - a + 6) = (a - 1)(a - 6)(a - 1) = 0$. Решења једначине су 1, 6 и 1 и њихов збир је 8 (тачан је одговор Г).

242. Четвороугао ABCD је тетивни, па је $\angle ADC = 180° - \angle ABC = 180° - 130° = 50°$. Како је AC = CD, троугао ACD је једнакокрак и $\angle CAD = \angle ADC = 50°$. Из троугла ACD следи да је $\angle ACD = 180° - 50° - 50° = 80°$ (тачан одговор је Д).

243. Целобројна страница правоуглог троугла може бити катета или хипотенуза. Ако је катета a једнака 20, онда је $c^2 - b^2 = 400$ и дата једначина има решења: $c = 101$, $b = 99$; $c = 52$, $b = 48$; $c = 29$, $b = 21$; $c = 25$, $b = 15$. Ако је хипотенуза 20, онда је једино решење $a = 16$, $b = 12$. Како је полупречник круга уписаног у правоугли троугао једнак $(a + b - c) : 2$, то су одговарајући полупречници 9, 8, 6, 5 и 4.
Збир добијених вредности је 32 (тачан је одговор Г).

244. Ако конструишемо троугао BCD подударан датом троуглу ABC, добија се једнакокраки троугао ABD (AB = BD = $2x$ и $\angle ABD = 30°$).



Нека је AE висина добијеног једнакокраког троугла ABD и нека је катета AC = y. Како је у правоуглом троуглу ABE, $\angle ABD = 30°$, то је $\angle EAB = 60°$, па је AE = AB/2 = x. Из површине троугла ABD је $2y \cdot 1 : 2 = 2x \cdot x/2$. Следи да је $y = x^2$. Из Питагорине теореме је $y^2 + 1 = (2x)^2 = 4x^2$. Тада је $y^2 + 1 = 4y$, па је $y_2 - 4y + 4 - 3 = 0$. тј $(y - 2)^2 - 3 = 0$. Добија се да је $y = 2 - \sqrt{3}$ или $= 2 + \sqrt{3}$. Како је AC наспрам угла од 15, то је AC мања катета и мања од 1 и једнака $2 - \sqrt{3}$ (тачан одгпвор је А).

245. Из неједнакости аритметичке и геометријске средине су очигледне неједнакости

$$\frac{x+y}{y+z} + \frac{y+z}{x+y} \geq 2, \quad \frac{z+x}{x+y} + \frac{x+y}{z+x} \geq 2, \quad \frac{z+y}{x+z} + \frac{x+z}{z+y} \geq 2.$$

Њиховим сабирањем се добија

$$\frac{x+y}{y+z} + \frac{y+z}{x+y} + \frac{x+z}{x+y} + \frac{y+x}{x+z} + \frac{z+y}{x+z} + \frac{x+z}{z+y} \geq 6.$$

Следи да је

$$\frac{2x+y+z}{y+z} + \frac{2y+z+x}{x+z} + \frac{2z+x+y}{x+y} \geq 6, \text{ па је}$$

$$\frac{2x}{y+z} + 1 + \frac{2y}{x+z} + 1 + \frac{2z}{x+y} + 1 \geq 6.$$

Тада је $\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{x+z} + \dfrac{z}{x+y} \geq \dfrac{3}{2}$.

Једнакост важи када је $x + y = y + z = z + x$, тј. $x = y = z$.

246. На основу Чевине теореме је $\dfrac{AM}{MB} \cdot \dfrac{BN}{NC} \cdot \dfrac{CP}{PA} = \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{7}{8} \cdot \dfrac{CP}{PA} = 1$.

Тада је $\dfrac{CP}{PB} = \dfrac{6}{5} \cdot \dfrac{8}{7} = \dfrac{48}{35}$ (тачан одговор је Б).

247. Ако је $p + 4^k = q^2$, онда је $p = q^2 - (2)^{2k} = (q - 2^k)(q + 2^k)$. Да би број p био прост мора бити $q - 2^k = 1$ и $p = q + 2^k$. Из претходних једнакости је $q = 2^k + 1$ и $p = 2^k + 1 + 2^k = 2^{k+1} + 1$ и $p + 1 = 2q$.

Ако је $q = 2$, онда је $к = 0$ и $p = 3$

Ако је $q = 3$, онда је $к = 1$ и $p = 5$,

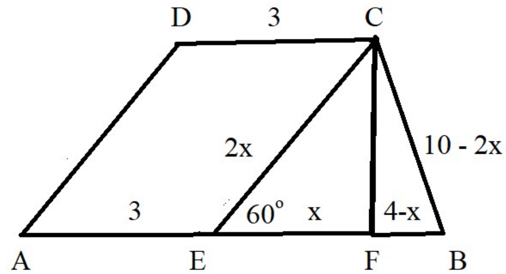
Ако је $q \geq 5$, онда је $q = 6a - 1$ или $q = 6a + 1$.

Ако је $q = 6a - 1$, онда је $p + 1 = 2q = 12a - 2$, па је $p = 12a - 3$, што није могуће, јер је p прост број и не може бити дељив са 3.

Ако је $q = 6a + 1$, онда је $p + 4^к = q^2 = 36a^2 + 12a + 1$.

Добија се једнакост $p = 36a^2 - 12a + 1 - 4^к$ и тада је број p дељив са 3, па не може бити прост.
То значи да једначина има само два решења (тачан је одговор В).

248. Како је трапез тангентни, то је AB + CD = 7 + 3 =10 = AD + BC. Ако конструишемо паралелограм AECD, онда је BE = 7 – 3 = 4. Нека је дуж EF = x. Тада је BF = 4 – x и CE = 2x (због угла од 60°). Како је и збир кракова AD и BC једнак 10, и како је AD = CE = 2x, то је BC = 10 – 2x.

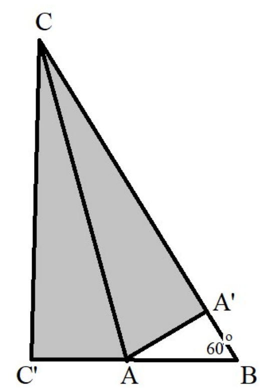


Из правоуглих троуглова CEF и BCF је $(2x)^2 - x^2 = (10 - 2x)^2 - (4 - x)^2$.
Следи да је $4x^2 - x^2 = 100 - 40x + 4x^2 - 16 + 8x - x^2$, па је 32x = 84 и $x = 84/32 = 21/8$. Тада је BC = 10 – 2x = 10 – 42/8 = 38/8 и CE = 42/8 и CE – BC = 42/8 – 38/8 = 4/8 = 1/2 (тачан одговор је А).

249. Нека је C' подножје висине из темена C на праву AB. Како је BC = 1, то је BC' = 1/2. Из AB = $2 - \sqrt{3} < 1/2$, то је троугао ABC тупоугли.

Дуж AC' = $\frac{1}{2} - 2 + \sqrt{3} = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$.

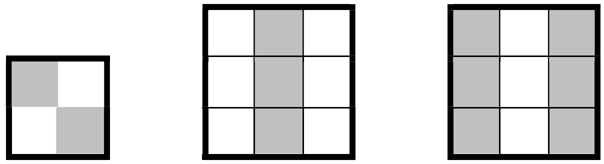
Ако је AA' висина троугла ABC из темена A, онда је AA' = $(2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$.



Троуглови ACC' и ACA' су подударни (AC = AC, AC' = AA' и ∠AC'C = ∠AA'C = 90° - ССУ).
Из подударности је ∠ACC' = ∠ACA' = 15°, јер је ∠BCC' = 30°. То значи и да је ∠CAB = 180° – 60° – 15° = 105° (тачан одговор је В).

250. Ако је $n = 2к$ паран природан број онда се квадратна табла n x n може прекрити са $к$ табли димензија 2 x 2.
Ако је n дељиво са 3, тј. $n = 3m$, онда се квадратна табла n x n може прекрити са m табли димензија 3 x 3.
Ако n није дељиво ни са 2 ни са 3 (n је непаран број који није дељив са 3), онда се квадратна табла n x n може поделити на n трака (колона) од којих су непарне колоне обојене белом, а парне колоне црном бојом.

Тада је на табли B = $(n^2 + n) : 2$ белих и C = $(n^2 - n) : 2$ црних поља, што значи да има n белих поља више него црних, тј.
B – C = n.



Нека је табла n x n прекривена са x табли димензиај 2 x 2 и y табли димензија 3 x 3 (x и y су ненегативни цели бројеви). Табле 2 x 2 имају по 2 бела и два црна поља, а табле 3 x 3 имају или 6 белих и 3 црна поља, или 3 бела и 6 црних поља (види гореу слику).
У првом случају на табли ће бити $2x + 6y$ белих и $2x + 3y$ црних поља. Тада је B – C = $n = 2x + 6y - 2x - 3y = 3y$, што није могуће јер број n није дељив са 3.
У другом случају на табли ће бити $2x + 3y$ белих и $2x + 6y$ црних поља. Тада је B – C = $n = 2x + 3y - 2x - 6y = -3y$, што није могуће јер број n није дељив са 3.
Дакле n је природан број који је дељив са 2 или 3, што значи да је облика 6*к*, 6*к* + 2, 6*к* + 3 или 6*к* + 4 и није облика 6*к* – 1 или 6*к* + 1.

ИЗДАВАЊЕ ОВЕ КЊИГЕ
И ОСТАЛЕ МАТЕМАТИЧКЕ АКТИВНОСТИ
МАТЕМАТИЧКОГ КЛУБА „ДИОФАНТ“
У ШКОЛСКОЈ 2022/23. ГОДИНИ ПОМОГЛИ СУ:

- Фондација Алек Кавчић – Београд
- „Греда“ –Ваљево
- ABsoft – Београд
- „Публик“ – Ваљево
- Development and Testing Center - Београд
- Selvans d.o.o. – Ваљево
- Aqua Casa – Београд
- Математички клуб „Диофант“ – Ваљево
- Wood master – Ваљево
- HRC d.o.o – Ваљево
- „Металац“ – Горњи Милановац
- „Spothopper“ – Ваљево
- „Раух“ – Коцељева
- „Блист“ – Ваљево
- Унитас фонд – Београд
- „Полиформ“ – Ваљево
- Делта холдинг – Београд

- ТИК – Ваљево
- X бренд – Ваљево
- „Енел“ – Ваљево
- Агенција „Trust Me“ – Ваљево
- Занатска машинбраварска радионица Владице Мишковића – Ваљево
- „Уна“ – Ваљево
- „Металпром“ – Ваљево
- Cuber Team – Ваљево
- Ауто школа „Отворени семафор“ – Ваљево
- „Одрипринт“ - Ваљево
- „Урбан техникс“ – Ваљево
- Ваљевска пивара – Ваљево
- Град Чачак
- Општина Мионица
- Општина Осечина
- проф. др Бранко Глишић - Princeton University (USA)
- проф. др Александар Миленковић - University of Alabama (USA)
- дипл. инг Александар Гогић