Ристо Малчески, Македонија
Самоил Малчески, Македонија

ДИОФАНТОВИ АПРОКСИМАЦИИ

Теоријата на Диофантовите апроксимации е гранка о теоријата на броеви во кја се проучуваат апроксимациите на реалните броеви со рационалните. Познато е дека секој реален број може произволно добро да се апроксимира со рационални броеви. Меѓутоа, ако при апроксимирањето се бара броевите со кои се врши апроксимацијата да задоволуваат некој дополнителен услов, на пример, на определен начин да им се ограничи именителот, тогаш бараната точност не може секогаш да се постигне.

Пред да ги разгледаме Диофантовите апроксимации ќе се задржиме на рационалните и ирационалните броеви, при што ќе разгледаме неколку критериуми за докажување дали еден реален број е рационален или е ирационален. Притоа ќе сметаме дека читателот е запознаен со конструкцијата на реалните броеви, која може да се реализира на повеќе начини, од кои еден може да се види во [6]. Во нашите разгледувања за множествата природни, цели, рационални и реални броеви ќе ги користиме стандардните ознаки $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$, соодветно.

1. РАЦИОНАЛНИ И ИРАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

Секој рационален број α може да се запише во обликот

$$\alpha=\frac{p}{q},\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N},\ \mathrm{NZD}(p,q)=1. \tag{1}$$

Постоењето на ирационалните брови им било познато уште на античките математичари. На пример, се смета дека ирационалноста на бројот $\sqrt{2}$ ја докажал Питагора или некој од неговите ученици. Меѓутоа, утврдувањето дали некој реален број е рационален или ирационален секогаш не е едноставна задача. На пример, за добро познатата од математичката анализа Ојлерова константа C не се знае дали е рационален или е ирационален број. Сепак, за рационалните броеви се знае многу повеќе и постојат определени критериуми со кои може да се определи дали некој реален број е рационален. Во следната теорема ќе докажеме еден ваков критериум, при што ќе се задржиме на позитивните броеви, бидејќи пренесувањето на резултатите на негативните броеви е едноставно. Да се потсетиме, секој позитивен реален број α на единствен начин меже да се претстави со децимален запис:

$$\alpha=a_0,a_1a_2...a_n... \tag{2}$$

каде a_0 е ненегативен цел број, $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ за $i\geq1$ и не се сите a_n почнувајќи од некој n еднакви на 9. Последниот услов е потребен за да се обезбеди единственоста на записот, бидејќи без овој услов некои броеви би имале два децимални записа. На пример, $2{,}129999... = 2{,}13000...$, $1{,}999... = 2{,}000...$ итн. Понатаму, меѓу децималните записи на реалните броеви постојат *периодични* записи, т.е. записи кај кои почнувајќи од некое место, група цифри периодично се повторува. Во врска со периодичните децимални записи ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема 1. Реалниот број α е рационален ако и само ако неговиот децимален запис (2) е периодичен.

Доказ. Нека $\alpha = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NZD}(p,q) = 1$ е произволен рационален број. При делење на природниот број p со природниот број q можни остатоци се $0, 1, 2, ..., q-1$. Ако при делењето на p со q се појави остаток 0, тогаш делењето завршува и α има *конечен децимален запис*, кој всушност е периодичен децимален запис со периода цифрата 0. Ако при делењето на p со q не се појавува остаток 0, тогаш по најмногу q чекори, ќе се повтори остатокот кој се добива (принцип на Дирихле: имаме q делење и $q-1$ можни остатоци). Тоа значи дека ќе имаме повторување на цифрите кои се наоѓаат меѓу првите две повторувања на остатокот кој прв се повторува и со оваа постапка ќе добиеме *бесконечен периодичен децимален број*.

Обратно, да разгледаме реален број кој има бесконечен периодичен децимален запис

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 ... a_k (a_{k+1} a_{k+2} ... a_{k+s}), \tag{3}$$

каде со $(a_{k+1} a_{k+2} ... a_{k+s})$ е означена периодата која содржи најмалку цифри (со најмала должина) која за прв пат се јавува по цифрата a_k во децималниот запис на бројот α. Тогаш

$$\alpha(10^{k+s} - 10^k) = (10^s - 1)(10^k a_0 + \overline{a_1 a_2 ... a_k}) + \overline{a_{k+1} a_{k+2} ... a_{k+s}},$$

па затоа

$$\alpha = a_0 + \frac{\overline{a_1 a_2 ... a_k}}{10^k} + \frac{\overline{a_{k+1} a_{k+2} ... a_{k+s}}}{10^{k+s} - 10^k},$$

што значи дека α е рационален број. ■

Се поставуваат прашањата кога даден рационален број има конечен децимален запис, а кога има *чист периодичен децимален запис*, т.е. децимален запис во кој во (3) ја нема „*претпериодата*“ $a_1 a_2 ... a_k$, т.е. кога $k = 0$. Во врска со првото прашање точна е следнава теорема.

Теорема 2. Нека $\alpha = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $\mathrm{NZD}(p,q) = 1$ е рационален број. Бројот α има конечен децимален запис ако и само ако $q = 2^a 5^b$, каде $a, b \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Доказ. Нека α има конечен децимален запис, т.е. $\frac{p}{q} = a_0, a_1 a_2 ... a_k$. Според тоа,

$\frac{p}{q}=\frac{10^n a_0+\overline{a_1 a_2 ... a_k}}{10^n}$, од каде по евентуално кратење во дропката на десната страна на последното равенство добиваме дека $q=2^a 5^b$, каде $a,b\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Обратно, нека $q=2^a 5^b$, каде $a,b\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$. Имаме, $\frac{p}{q}=\frac{p}{2^a 5^b}$ и ако дропката ја прошириме со 5^{a-b} или 2^{b-a} (во зависност од тоа дали $a\geq b$ или $a<b$) добиваме, $\frac{p}{q}=\frac{r}{10^n}$ каде r и n се природни броеви. Нека

$$r=\overline{c_k c_{k-1}...c_1 c_0}=10^k c_k+10^{k-1}c_{k-1}+...+10c_1+c_0$$

е декадниот запис на r. Тогаш

$$\frac{p}{q}=\frac{r}{10^n}=10^{k-n}c_k+10^{k-1-n}c_{k-1}+...+10^{1-n}c_1+10^{-n}c_0,$$

што значи дека $\frac{p}{q}$ во децимален запис се запишува со помош на истите цифри како и бројот r и, можда, определен број нули пред нив, во случај кога $k<n$. Според тоа, бројот $\frac{p}{q}$ има конечен децимален запис. ■

Одговорот на прашањето: Кога рационален број има чист периодичен децимален запис го дава следнава теорема, која ќе ја презентираме без доказ.

Теорема 3. Нека $\alpha=\frac{p}{q},\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N},\ \mathrm{NZD}(p,q)=1$ е рационален број. Бројот α има бесконечен чист периодичен децимален запис ако и само ако $\mathrm{NZD}(q,10)=1$. □

Во претходните разгледувања презентиравме неколку тврдења во врска со рационалните броеви. Во следната теорема ќе дадеме критериум кој ја констатира ирационалноста на голем број реални броеви.

Теорема 4 ([2]). Нека $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n$ е полином со целобројни коефициенти и реалниот број α е корен на $P(x)$. Тогаш, или α е цел број или α е ирационален број.

Доказ. Бидејќи 0 е цел број, ќе го разгледуваме само случајот кога $\alpha\neq 0$. Нека претпоставиме дека α е рационален број, т.е. $\alpha=\frac{p}{q},\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N},\ \mathrm{NZD}(p,q)=1$.

Заменуваме $\alpha=\frac{p}{q}$ во равенката $P(x)=0$ и последователно добиваме

$$\frac{p^n}{q^n}+a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+...+a_{n-2}\frac{p^2}{q^2}+a_{n-1}\frac{p}{q}+a_n=0,$$
$$p^n=-q(a_1p^{n-1}+...+a_{n-2}p^2q^{n-3}+a_{n-1}pq^{n-2}+a_nq^{n-1}).$$

Од последното равенство следува $q\mid p^n$ и како $\mathrm{NZD}(p,q)=1$, добиваме $q=1$, т.е. $\alpha=\frac{p}{q}=p$ е цел број. ■

Последица 1. Ако природниот број p не е $n-$ти степен на ниту еден природен број, тогаш $\sqrt[n]{p}$ е ирационален број.

Доказ. Непосредно следува од теорема 4, применета на равенката $x^n - p = 0$. ■

Ирационалноста на некои реални броеви може да се констатира со помош на критериумот кој е даден во следната теорема и нејзината последица.

Теорема 5 ([1]). Ако $\alpha \in \mathbb{Q}$, тогаш постои реален број $c > 0$ таков што за секој рационален број $\frac{p}{q} \neq \alpha$ важи

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q}.$$

Доказ. Нека $\alpha = \frac{a}{b}, b \geq 1$. Ако $\frac{p}{q}$ е произволен рационален број таков што $\frac{p}{q} \neq \frac{a}{b}$, тогаш $aq - bp \neq 0$, па затоа за целиот број $|aq - bp|$ важи $|aq - bp| \geq 1$. Сега, ако земеме $c = \frac{1}{b}$, добиваме

$$|\alpha - \frac{p}{q}| = |\frac{a}{b} - \frac{p}{q}| = \frac{|aq-bp|}{bq} \geq \frac{1}{bq} = \frac{c}{q},$$

што и требаше да се докаже. ■

Последица 2. Нека α е реален број. Ако за секој позитивен реален број c постои барем еден рационален број $\frac{p}{q} \neq \alpha$ таков што $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{c}{q}$, тогаш α е ирационален број.

Доказ. Непосредно следува од теорема 5. ■

Важни математички константи π и e се ирационални броеви. Ламберт прв докажал дека бројот π е ирационален. Во следниот пример ќе ја докажеме ирационалноста на бројот e.

Пример 1([3]). Докажи дека бројот e е ирационален.

Решение. Од математичката анализа е познато дека

$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots.$$

Нека претпоставиме дека $e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $\text{NZD}(p,q) = 1$. Од $e = \frac{p}{q}$ следува дека $\frac{1}{e} p!$ е цел број, па затоа и

$$A = p!(\frac{1}{e} - (1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^p \frac{1}{p!}))$$

е цел број. Меѓутоа, $A = p!(\frac{1}{(p+1)!} - \frac{1}{(p+2)!} + \dots)$, па затоа

$$0 < A < p! \cdot \frac{1}{(p+1)!} = \frac{1}{p+1} < 1,$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека бројот e е ирационален. ■

2. НИЗИ НА ФАРЕЈ

Во овој дел ќе ги рзгледаме низите на Фареј, кои ќе ги користиме за апроксимирање на реалните броеви со рационални. Овде ќе спомeнеме дека апроксимирањето на реалните броеви со рационални, може да се направи на повеќе начини, како на пример со помош на таканаречените верижни дропки (види [5]), но низите на Фареј се важен инструмент при оценката на квалитетот на апроксимациите.

Дефиниција 1. *Низа на Фареј* F_n *од ред* $n \in \mathbb{N}$ е монотоно растеча низа од нескратливи дропки $\frac{a}{b}$ во интервалот $[0,1]$ за кои $b \le n$.

Пример 2. Низите на Фареј од ред 2, ред 3 и ред 5 се:

$$F_2 : \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1};\ F_3 : \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \text{ и } F_5 : \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}. \ \blacksquare$$

Лема 1 ([4]). Бројот на членови на низа на Фареј F_n од ред n е еднаков на

$$1 + \varphi(1) + \varphi(2) + ... + \varphi(n),$$

каде φ е Ојлеровата функција.

Доказ. Ако $\frac{a}{b}$ е елемент од низата на Фареј, тогаш $\mathrm{NZD}(a,b) = 1$ и за секој $b, 1 \le b \le n$ можните вредности на a за кои $\frac{a}{b}$ е елемент од низата на Фареј се точно $\varphi(b)$. Според тоа, вкупниот број членови на низата на Фареј е еднаков на $1 + \varphi(1) + \varphi(2) + ... + \varphi(n)$. $\blacksquare$

Теорема 6. Нека $\frac{a}{b} \in F_n$. Нека $y \in \mathbb{Z}$ е таков што $n - b < y \le n$ и $ay \equiv -1 (\mathrm{mod}\, b)$ и нека $x = \frac{ay+1}{b}$. Тогаш $\frac{x}{y}$ е дропката која во F_n следува непосредно по $\frac{a}{b}$.

Доказ. Од $x = \frac{ay+1}{b}$ следува $bx - ay = 1$ и $\mathrm{NZD}(x, y) = 1$. Од $y \le n$ следува $\frac{x}{y} \in F_n$ и $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} + \frac{1}{by} > \frac{a}{b}$. Нека $\frac{c}{d}$ е дропка во F_n кои непосредно е по $\frac{a}{b}$ и нека претпоставиме дека $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{x}{y}$. Тогаш $xd - yc \ge 1$, $cb - ad \ge 1$ и

$$\frac{1}{by} = \frac{bx-ay}{by} = \frac{x}{y} - \frac{a}{b} = (\frac{x}{y} - \frac{c}{d}) + (\frac{c}{d} - \frac{a}{b}) = \frac{xd-cy}{yd} + \frac{cb-ad}{bd} \ge \frac{1}{dy} + \frac{1}{db} = \frac{b+y}{bdy},$$

па затоа бидејќи $\frac{c}{d} \in F_n$ добиваме $b + y \le d \le n$, односно $y \le n - b$, што противречи на изборот на бројот y. $\blacksquare$

Забелешка 1. Од својствата на линеарните конгруенции непосредно следува дека броевите x и y кои ги задоволуваат условите во теорема 6 се еднозначно определени. На читателот, за вежба, му оставаме ова тврдење самостојно да го провери.

Последица 3. Ако $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ се соседни дропки во F_n, тогаш

1) $b+d>n$,

2) $bc-ad=1$ и

3) $\mathrm{NZD}(b,d)=1$.

Доказ. Сите три тврдења непосредно следуваат од

$$n-b<d\le n,\ ad\equiv -1(\mathrm{mod}\, b) \text{ и } c=\frac{ad+1}{b}.$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

Дефиниција 2. Нека $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ се нескратливи дропки. Дропката $\frac{a+c}{b+d}$ ја нарекуваме *медијанта* на дропките $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

Последица 4. Ако $\frac{a}{b}<\frac{x}{y}<\frac{c}{d}$ се три последователни членови на F_n, тогаш $\frac{x}{y}$ е медијанта на $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

Доказ. Од последица 3 следува $bx-ay=1$ и $cy-dx=1$. Решавајќи го последниот систем линеарни равенки по непознати x и y добиваме $x=\frac{a+c}{bc-ad}$, $y=\frac{b+d}{bc-ad}$. Според тоа, $\frac{x}{y}=\frac{a+c}{b+d}$, што и требаше да се докаже. ■

Последица 5. Секоја дропка од F_{n+1} со именител $n+1$ се наоѓа меѓу две соседни дропки од F_n и е нивна медијанта.

Доказ. Непосредно следува од последица 4. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

Забелешка 2. Од претходните разгледувања следува дека, знаејќи ја низата на Фареј F_n од $n-$ти ред, низата на Фареј од $(n+1)-$ви ред ја конструираме така што во F_n ги наоѓаме оние соседни дропки чиј збир на именители е $n+1$ и меѓу нив ја запишуваме нивната медијанта.

На пример, со овој алгоритам од низата $F_3:\frac{0}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{1}$ ја добиваме низата $F_4:\frac{0}{1},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{1}{1}$, а од низата $F_5:\frac{0}{1},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{1}{1}$ ја добиваме низата $F_6:\frac{0}{1},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{1}{1}$.

Пример 3. Нека $n\in\mathbb{N}$, $m=1+\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi(i)$ и $a_i, i=1,...,m$ се imенителите на дропките на низата F_n. Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{a_i a_{i+1}}=1.$$

Решение. Нека

$$F_n:\frac{b_1}{a_1},\frac{b_2}{a_2},\frac{b_3}{a_3},...,\frac{b_{m-1}}{a_{m-1}},\frac{b_m}{a_m}.$$

Според последица 3 имаме $a_i b_{i+1}-b_i a_{i+1}=1$ за $i=0,1,...,m-1$, па затоа

$$\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{a_i a_{i+1}}=\sum_{i=1}^{m-1}\frac{b_{i+1}a_i-a_{i+1}b_i}{a_i a_{i+1}}=\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{b_{i+1}}{a_{i+1}}-\frac{b_i}{a_i}\right)=\frac{b_m}{a_m}-\frac{b_1}{a_1}=1-0=1\,.\ \blacksquare$$

Пример 4. Низата $\{a_n\}$ е зададена со $a_1=1$ и $a_{2n}=a_n$ и $a_{2n+1}=a_{n+1}+a_n$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Нека m е природен број. Докажи дека бројот m во низата $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ се појавува точно $\varphi(m)$ пати.

Решение. Нека

$$S=\{\tfrac{k}{2^n}\mid k,n\in\mathbb{N}_0, k\le 2^n\}$$

и да го разгледаме пресликувањето $f:\mathbb{Q}\cap[0,1]\to S$ определено со

$$f(\tfrac{0}{1})=0\,,\ f(\tfrac{1}{1})=1 \text{ и } f(\tfrac{a+c}{b+d})=\tfrac{1}{2}(\tfrac{a}{b}+\tfrac{c}{d})$$

секогаш кога $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ се соседни членови на низа на Фареј од некој ред. Јасно, ова пресликување е биекција.

Со помош на индукција по n лесно се докажува дека ако $f(\frac{p}{q})=\frac{k}{2^r}$ за $k,r\in\mathbb{N}_0$ ($0\le p\le q$, $\mathrm{NZD}(p,q)=1$), тогаш $a_{2^r+k}=q$. Навистина, ако $k=2l,\ l\in\mathbb{N}_0$, тогаш од $f(\frac{p}{q})=\frac{l}{2^{r-1}}$ заради индуктивната претпоставка имаме $a_{2^r+k}=a_{2^{r-1}+l}=q$. Од друга страна, ако $k=2l+1$, нека $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ се такви што $f(\frac{a}{b})=\frac{l}{2^{r-1}}$ и $f(\frac{c}{d})=\frac{l+1}{2^{r-1}}$. Тогаш по дефиниција $f(\frac{a+c}{b+d})=\frac{k}{2^r}$, па затоа $a+c=p$ и $b+d=q$, а тогаш според индуктивната претпоставка имаме

$$a_{2^r+k}=a_{2^{r-1}+l}+a_{2^{r-1}+l+1}=b+d=q\,.$$

Според тоа, $a_m=n$ за непарно m ако и само ако $m=2^r+k$, при што $f(\frac{p}{n})=\frac{k}{2^r}$. Сега тврдењето на задачата следува од фактот дека нескратливи дропки $\frac{p}{n}$ има $\varphi(n)$.

Пресликувањето f е познато и како функција на Минковски. ■

3. НАЈДОБРА АПРОКСИМАЦИЈА

Дефиниција 3. За рационалниот број $\frac{a}{b}$ ќе велиме дека е *најдобра апроксимација* на реалниот број α, ако не постои рационален број $\frac{x}{y}$ за кој $y\le b$ и $|\alpha-\frac{x}{y}|<|\alpha-\frac{a}{b}|$.

Теорема 7. Ако $\alpha\in\mathbb{R}\cap(0,1)$ се наоѓа меѓу два соседни члена во F_n, тогаш барем еден од нив е најдобра апроксимација за α.

Доказ. Нека $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ се два последователни членови на F_n и $\frac{a}{b}<\alpha<\frac{c}{d}$. Нека притоа важи $|\alpha-\frac{a}{b}|\le|\alpha-\frac{c}{d}|$. Ако постои $\frac{x}{y}$ таков што $|\alpha-\frac{x}{y}|<|\alpha-\frac{a}{b}|$, тогаш $\frac{x}{y}\in(\frac{a}{b},\frac{c}{d})$. Бидејќи $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ се последователни членови на F_n, дропката $\frac{x}{y}$ не припаѓа на F_n, па затоа мора да важи $y>n\ge b$, што значи дека $\frac{a}{b}$ е најдобра апроксимација за α. ■

Забелешка 3. Можно и бројот $\frac{c}{d}$ од доказот на теорема 7 да е најдобра апроксимација за α, па дури и $|\alpha-\frac{c}{d}|$ да е поголемо. Зошто?

Пример 5. Определи ја дропка $\frac{p}{q}$, каде p и q се природни броеви помали од 100 и која е најблиску до $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Решение. Имаме, $\frac{41}{29}<\sqrt{2}<\frac{99}{70}$. Ако $\frac{q}{p}$ е дропка за која важи $\frac{41}{29}<\frac{q}{p}<\frac{99}{70}$, тогаш $\frac{70}{99}<\frac{p}{q}<\frac{29}{41}$. Сега, бидејќи $99\cdot 29-41\cdot 70=1$, заклучуваме дека дропките $\frac{29}{41}$ и $\frac{70}{99}$ се соседни членови во низата F_{99}. Според тоа, барем една од дропките $\frac{29}{41}$ и $\frac{70}{99}$ е најдобра апроксимација за бројот $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Со непосредна проверка се добива дека бараната дропка е $\frac{70}{99}$. ■

Теорема 8 ([4]). Нека $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ се два последователни членови на F_n и $\frac{a}{b}<\alpha<\frac{c}{d}$. Тогаш меѓу нескратливите дропки со именител $n+1$ најдобра апроксимација за α може да биде само медијантата $\frac{a+c}{b+d}$. Таа е најдобра апроксимација за α ако и само ако $b+d=n+1$ и $|\frac{a+c}{b+d}-\alpha|\le\min\{|\frac{a}{b}-\alpha|,|\frac{c}{d}-\alpha|\}$.

Доказ. Според последица 5, во множеството $F_n\cap(\frac{a}{b},\frac{c}{d})$ може да се наоѓа само еден елемент од F_{n+1}, а тоа е медијантата $\frac{a+c}{b+d}$, и тоа само кога $b+d=n+1$. Ако последниот услов е исполнет и ако важи $|\frac{a+c}{b+d}-\alpha|\le\min\{|\frac{a}{b}-\alpha|,|\frac{c}{d}-\alpha|\}$, тогаш $|\frac{a+c}{b+d}-\alpha|\le|\frac{x}{y}-\alpha|$ за секој $\frac{x}{y}\in F_{n+1}$.

Обратното тврдење е очигледно. ■

Теорема 9 (Дирихле), [1]. Нека $\alpha\in\mathbb{R}$ и $n\in\mathbb{N}$. Тогаш постои рационален број $\frac{p}{q}$ таков што важи

$$|\alpha-\frac{p}{q}|<\frac{1}{qn} \text{ и } 0<q\le n .$$

Доказ. *Прв начин.* Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\alpha \in [0,1)$ (Зошто?). Со $\{x\}$ го означуваме дробниот дел на бројот x, т.е. $\{x\} = x-[x]$. Разгледуваме $n+1$ броеви $0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, ..., \{n\alpha\}$ од интервалот $[0,1)$. Овој интервал да го поделиме на n интервали:

$$[0, \tfrac{1}{n}),\ [\tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}),\ ...,\ [\tfrac{n-1}{n}, 1).$$

Од принцип на Дирихле следува дека барем еден од овие интервали содржи два од дадените броеви. Нека се тоа броевите $\{k\alpha\} = k\alpha - [k\alpha]$ и $\{m\alpha\} = m\alpha - [m\alpha]$ и нека, на пример, $m > k$. Значи,

$$\tfrac{1}{n} > |\{m\alpha\} - \{k\alpha\}| = |\alpha(m-k) - ([m\alpha]-[k\alpha])|.$$

Земаме $q = m-k$ и $p = [m\alpha]-[k\alpha]$. Јасно, $0 < q \le n$ и притоа важи

$$|\alpha q - p| < \tfrac{1}{n}, \text{ т.е. } |\alpha - \tfrac{p}{q}| < \tfrac{1}{qn}.$$

Втор начин. Повторно ќе претпоставиме дека $\alpha \in [0,1)$. Нека $\frac{p}{q}$ и $\frac{c}{d}$ се соседни членови на низата F_n и нека $\frac{p}{q} \le \alpha \le \frac{c}{d}$. Нека е, на пример, $\frac{p}{q} \le \alpha \le \frac{p+c}{q+d}$. Тогаш

$$|\alpha - \tfrac{p}{q}| < \tfrac{p+c}{q+d} - \tfrac{p}{q} = \tfrac{qc-pd}{q(q+d)} < \tfrac{1}{qn},$$

бидејќи според последица 3 важи $qc - pd = 1$ и $b+d > n$, а притоа $0 < q \le n$. ■

Нека α е ирационален број. Ќе докажеме дека во овој случај именителите q на дропките кои го апроксимираат бројот α во теоремата на Дирихле може да бидат произволно големи, ако допуштиме бројот n да расте. Навистина, нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека именителите се ограничени одозгора со некој број q_0 за секој $n \in \mathbb{N}$. Да ставиме $x_q = \min\limits_{p} |\alpha - \frac{p}{q}|$, за $q = 1, 2, ..., q_0$ и нека $x = \min\limits_{1 \le q \le q_0} x_q$. Тогаш $x > 0$ бидејќи бројот α е ирационален и за секои $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$ точно е неравенството $|\alpha - \frac{p}{q}| \ge x$. Но, ова неравенствот за доволно големи n противречи на неравенството $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qn}$ од теоремата на Дирихле.

Понатаму, бидејќи $0 < q \le n$, од неравенството $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qn}$ следува неравенството $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$. Од претходните разгледувања следува дека последното неравенство за ирационален број α има решение со именител поголем од однапред зададен број. Според тоа, точна е следнава последица.

Последица 6. За секој ирационален број α неравенката $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ има бесконечно многу решенија по $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$. ■

Следната теорема дава забележително подобрување на резултатот од последицата 6.

Теорема 10 (Хурвиц). За секој ирационален број α неравенката $|\alpha-\frac{p}{q}|\leq\frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ има бесконечно многу решенија по $p\in\mathbb{Z}$ и $q\in\mathbb{N}$.

Доказ. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\alpha\in[0,1)$ (Зошто?). Нека претпоставиме дека тврдењето не е точно, т.е. дека не постојат такви p,q со $q>n$. Нека $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, ($\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$) се соседни членови на низата F_m меѓу кои се наоѓа α. За доволно голем m ќе важи $b,d>n$. Од претпоставката следува дека $|\alpha-\frac{a}{b}|>\frac{1}{\sqrt{5}b^2}$ и $|\alpha-\frac{c}{d}|<\frac{1}{\sqrt{5}d^2}$, па затоа

$$\frac{1}{bd}=\frac{bc-ad}{bd}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=|\alpha-\frac{a}{b}|+|\frac{c}{d}-\alpha|>\frac{1}{\sqrt{5}b^2}+\frac{1}{\sqrt{5}d^2},$$

од каде следува

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\frac{d}{b}<\frac{\sqrt{5}+1}{2}. \tag{1}$$

Сега да ја разгледаме медијантата $\frac{a+c}{b+d}$ на $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\frac{a}{b}<\alpha<\frac{a+c}{b+d}$. Јасно, $b,b+d>n$. Од претпоставката следува $|\alpha-\frac{a}{b}|>\frac{1}{\sqrt{5}b^2}$, $|\alpha-\frac{a+c}{b+d}|<\frac{1}{\sqrt{5}(b+d)^2}$, па затоа

$$\frac{1}{b(b+d)}=\frac{b(a+c)-a(b+d)}{b(b+d)}=\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}=|\alpha-\frac{a}{b}|+|\frac{a+c}{b+d}-\alpha|>\frac{1}{\sqrt{5}b^2}+\frac{1}{\sqrt{5}(b+d)^2},$$

од каде следува $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\frac{b+d}{b}<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, што противречи на неравенствата (1).

Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на теоремата. ■

Пример 6. Нека $\varphi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $\varepsilon>0$. Дропки $\frac{p}{q}>\varphi+\varepsilon$ за кои $|\varphi-\frac{p}{q}|\leq\frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q^2}$ има само конечно многу, бидејќи тогаш $\varepsilon<\frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q^2}$, т.е. $q^2<\frac{1}{\varepsilon(\sqrt{5}+\varepsilon)}$. Од друга страна, ако $\frac{p}{q}<\varphi+\varepsilon$, тогаш може да се докаже дека $|\varphi-\frac{p}{q}|>\frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q^2}$.

Според тоа, за секој $\varepsilon>0$ неравенката $|\varphi-\frac{p}{q}|\leq\frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q^2}$ има само конечно многу решенија по $p,q\in\mathbb{N}$, што значи дека константата $\sqrt{5}$ во теоремата на Хурвиц не може да се подобри.

Меѓутоа, може да се докаже дека за сите рационални броеви α кои не се од облик $\frac{a+b\varphi}{c+d\varphi}$, $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $|ad-bc|=1$, теоремата на Хурвиц е точна и ако $\sqrt{5}$ се замени со $\sqrt{8}$. ■

4. АЛГЕБАРСКИ И ТРАНСЦЕДЕНТНИ БРОЕВИ

Дефиниција 4. За комплексниот (специјално, реалниот) број α ќе велиме дека е *алгебарски* ако постои неконстантен полином P со рационални коефицинти таков што $P(\alpha)=0$. Ако таков полином за бројот α не постои, тогаш за α ќе велиме дека е *трансцендентен број*.

Бидејќи од $P(\alpha)=0$ следува $P(\alpha)Q(\alpha)=0$ за произволен полином $Q(x)$ со рационални коефициенти, јасно е дека за секој алгебарски број α постојат бесконечно многу полиноми со рационални коефициенти чиј корен е α. Од сите овие полиноми најчесто се разгледува полиномот со најмал степен. Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 5. *Минимален полином* на алгебарскиот број α е полиномот со рационални коефициенти со најмал степен чиј корен е бројот α. Степенот на минималниот полином на алгебарскиот број α го нарекуваме *степен* на α.

Теорема 11. а) Минималниот полином P_α на алгебарскиот број α е единствен до производ со константа.

б) Полиномот P_α е неразложлив над $\mathbb{Q}$, што значи дека P_α нема повеќекратни нули.

в) Ако $Q(x)$ е полином со рационални коефициенти таков што $Q(\alpha)=0$, тогаш полиномот Q е делив со минималниот полиномот P.

Доказ. а) Ако α има два различни монични (коефициентот пред највисокиот степен е 1) минимални полиноми P_1 и P_2 со степен n, тогаш полиномот P_1-P_2 има степен помал од n и ќе се анулира во α, што е противречност.

б) Ако P_α е разложлив во $\mathbb{Q}$, тогаш некој негов делител ќе се анулира за α, што противречи на фактот дека P_α е минимален полином.

в) Нека R е остатокот при делењето на полиномот P со полиномот Q. Според тоа, полиномот R се анулира во α и има степен помал од степенот на минималниот полином, па затоа мора да е $R\equiv 0$. ■

Теорема 12 (Луивил), [7]. За секој реален алгебарски број α со степен $n\geq 2$ постои позитивна константа c таква што за секој рационален број $\frac{p}{q}$ важи

$$|\alpha-\frac{p}{q}|\geq \frac{c}{q^n}.$$

Доказ. Нека α е реален алгебарски број со степен $n\geq 2$. Според теорема 11 а) α е корен на полином

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0,$$

со целобројни коефициенти ($a_n\neq 0$, $n\geq 2$). Тогаш $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$, каде $Q(x)$

е полином од $(n-1)-$ви степен со реални коефициенти. Нека $\frac{p}{q}$ е произволен рационален број. Овој број не може да се корен на полиномот $P(x)$, бидејќи во спротивно равенката $P(x)=0$ можеме да ја поделиме со $x-\frac{p}{q}$ и α ќе биде корен на полином со рационални коефициенти со степен помал од n, што противречи на фактот дека степенот на α е n. Затоа важи

$$|P(\tfrac{p}{q})|=\frac{|a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}q+...+a_0q^n|}{q^n}\neq 0. \qquad (1)$$

Броителот на десната страна во (1) е ненегативен цел број различен од 0, па затоа тој е поголем или еднаков на 1. Според тоа,

$$|P(\tfrac{p}{q})|\geq \frac{1}{q^n}, \text{ т.е. } |\tfrac{p}{q}-\alpha|\cdot|Q(\tfrac{p}{q})|\geq \frac{1}{q^n}.$$

Ќе разгледаме два случаја.

1) $\frac{p}{q}\in[\alpha-1,\alpha+1]=A$. Функцијата $|Q(x)|$ е непрекината на затворениот интервал A, што значи дека постои $\max_{x\in A}|Q(x)|=K<+\infty$. Затоа важи

$$\frac{1}{q^n}\geq|\tfrac{p}{q}-\alpha|\cdot|Q(\tfrac{p}{q})|\leq K|\tfrac{p}{q}-\alpha|, \text{ т.е. } |\alpha-\tfrac{p}{q}|\geq\frac{\frac{1}{K}}{q^n}.$$

2) $\frac{p}{q}\in A$. Тогаш $|\alpha-\frac{p}{q}|>1$ и како q е природен број добиваме $|\alpha-\frac{p}{q}|\geq\frac{1}{q^n}$.

Сега очигледно е дека доволно е да земеме $c=\min\{\frac{1}{K},1\}$. ■

Последица 7. Ако за секој $c>0$ и за секој $n\in\mathbb{N}$ постои рационален број $\frac{p}{q}\neq\alpha$ таков што

$$|\alpha-\tfrac{p}{q}|<\frac{c}{q^n},$$

тогаш α е трансцендентен број.

Доказ. Непосредно следува од теорема 12. ■

Пример 7 ([7]). Луивиловиот број

$$L=\frac{1}{10^{1!}}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+...=0{,}11000100...010...$$

е трансцедентен.

Навистина, нека $n\in\mathbb{N}$ и $c>0$ се произволни. За броевите

$$p=10^{k!}(\frac{1}{10^{1!}}+\frac{1}{10^{2!}}+...+\frac{1}{10^{k!}}) \text{ и } q=10^{k!}$$

важи

$$|L-\tfrac{p}{q}|=\frac{1}{10^{(k+1)!}}+\frac{1}{10^{(k+2)!}}+...<\frac{1}{10^{(k+1)!}}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...)$$
$$=\frac{2}{10^{k!}}\cdot\frac{1}{10^{k!k}}.$$

Да избереме k така што важи $k > n$ и $\frac{2}{10^{k!}} < c$. Тогаш

$$|L - \frac{p}{q}| < \frac{c}{(10^{k!})^k} < \frac{c}{q^n},$$

па од последица 7 следува дека L е трансцедентен број. ■

На почетокот споменавме дека броевите e и π се ирационални, при што тоа го докажавме за бројот e. Овде ќе спомeнеме дека овие два броја се и трансцедентни. Трансцедентноста на бројот e прв ја докажал Ермит во 1873 година, а додека доказот дека бројот π е трансцедентен прв го дал Линдеман во 1882 година. Со докажувањето дека бројот π е транцедентен, конечно се решил повеќевековниот проблем за квадратура на кругот, т.е. е докажано дека не е можно служејќи се само со лиијар и шестар да се конструира квадрат чија плоштина е еднаква на плоштината на даден круг.

На крајот од овој дел ќе презентираме уште една теорема, која всушност е подобрување на теоремата на Луивил и чиј доказ излегува од рамките на нашите разгледувања.

Теорема 13 (Рот). Нека α е реален алгебарски број со степен $n \geq 2$. Тогаш за секој $\varepsilon > 0$ неравенката

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

има само конечно многу решенија по $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$. □

5. РАВЕНКА НА ТУЕ

Дефиниција 6. Полиномот од две или повеќе променливи во кој сите мономи имаат еднаков степен го нарекуваме *хомоген полином*.

На пример, $x^3 + xyz + y^2z + z^3$ е хомоген полином со три променливи и е од трет степен.

Во нашите разгледувања ќе се задржиме на бинарните форми од вид

$$F(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + ... + a_ny^n, \tag{1}$$

каде $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$, т.е. на хомогените полиноми со две променливи од $n-$ти степен и целобројни коефициенти.

Нека (1) е бинарна форма со целобројни коефициенти, иредуцибилна над $\mathbb{Q}$ и со степен $n \geq 3$. Да забележиме дека бинарната форма (1) не може да биде иредуцибилна над $\mathbb{C}$. Имено,

$$F(x,1) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n),$$

каде $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ се алгебарски броеви од степен n, па затоа

$$F(x, y) = y^n F(\frac{x}{y}, 1) = a_0(x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y)...(x - \alpha_n y).$$

Но, иредуцибилноста над $\mathbb{Q}$ повлекува дека $F(x,1)$ нема повеќекратни корени, т.е. дека броевите $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ се по парови различни.

Дефиниција 7. Нека $n \geq 3$ и $m \neq 0$ е цел број. Диофантовата равенка од видот

$$F(x, y) = m \qquad (2)$$

ја нарекуваме *равенка на Туе*.

Во 1909 година, користејќи свои резултати од Диофантовите апроксимации, Туе докажал дека равенката (2) има само конечно многу решенија.

Прво ќе докажеме едноставен специјален случај на овој резултат.

Теорема 14. Ако равенката $F(x,1) = 0$ нема реални решенија, тогаш равенката (2) има само конечно многу целобројни решенија. Попрецизно, сите решенија го задоволуваат неравенството

$$|y| \leq \frac{|m|}{\min\limits_{1 \leq i \leq n} |\mathrm{Im}\, \alpha_i|},$$

каде $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ се корените на полиномот $F(x,1)$.

Доказ. Нека претпоставиме дека (x, y) е решение на равенката (2) и нека α_k е таков што $|x - \alpha_k y| = \min\limits_{1 \leq i \leq n} |x - \alpha_i y|$. Тогаш

$$|y| \cdot |\mathrm{Im}\, \alpha_k| = |\mathrm{Im}(\alpha_k y)| \leq |x - \alpha_k y| \leq |m|,$$

од каде што следува тврдењето на теоремата. ■

Теорема 15 (Туе). Равенката на Туе има само конечно многу целобројни решенија.

Доказ. Нека $F(x, y) = m$. При претходно воведените ознаки имаме

$$a_0 (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y)...(x - \alpha_n y) = m. \qquad (3)$$

Понатаму, можеме да претпоставиме дека $y \neq 0$, бидејќи за $y = 0$ имаме најмногу две решенија. Ја делиме (3) со y^n, земаме апсолутни вредности и добиваме

$$|a_0| \cdot |\alpha_1 - \tfrac{x}{y}| \cdot |\alpha_2 - \tfrac{x}{y}| \cdot ... \cdot |\alpha_n - \tfrac{x}{y}| = |\tfrac{m}{y^n}|. \qquad (4)$$

Како и во доказот на теорема 14, нека α_k е таков што

$$|x - \alpha_k y| = \min_{1 \leq i \leq n} |x - \alpha_i y|, \text{ т.е. } |\alpha_k - \tfrac{x}{y}| = \min_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i - \tfrac{x}{y}|.$$

Нека

$$\gamma = \tfrac{1}{2} \min_{i \neq j} |\alpha_i - \alpha_j| > 0.$$

За доволно големо y двете страни на (4) може да се направат произвоно мали. Ова посебно важи и за најмалиот множител на левата страна, односно за $|\alpha_k - \frac{x}{y}|$. Според тоа, постои $y_0 > 0$ таков што за $y \geq y_0$ важи $|\alpha_k - \frac{x}{y}| < \gamma$. За $i \neq k$ имаме

$$|\alpha_i - \tfrac{x}{y}| \geq |\alpha_i - \alpha_k| - |\alpha_k - \tfrac{x}{y}| \geq 2\gamma - \gamma = \gamma.$$

Затоа од (4) следува

$$|\alpha_k - \frac{x}{y}| \le |\frac{m}{a_0 y^n \gamma^{n-1}}| = \frac{c}{|y|^n}\ . \qquad (5)$$

Бидејќи $n \ge 3$, од теоремата на Рот следува дека неравенката (5) има само конечно многу решенија, што и требаше да се докаже. ■

6. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Докажи дека бројот
$$\alpha = 1 - \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^9} + \dots + \frac{(-1)^n}{2^{n^2}} + \dots$$
е ирационален.
2. Ако $a, b, c \in \mathbb{Q}$ и c не е квадрат на рационален број, тогаш $z = a + b\sqrt{c}$ е алгебарски број со степен 2. Докажи!
3. Докажи дека $\sin 10^\circ$ е алгебарски број со степен 3, а $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ е алгебарски број со степен 4.
4. Дали постојат броеви $a, b > 0$ такви што:

   а) $a, b \notin \mathbb{Q}$ и $a^b \in \mathbb{Q}$,

   б) $a, b, a^b \notin \mathbb{Q}$,

   а) $a \in \mathbb{Q}$ и $b, a^b \notin \mathbb{Q}$.
5. Докажи дека $\{n\sqrt{2}\} > \frac{1}{2n\sqrt{2}}$ за секој природен број n. Дали може константата $2\sqrt{2}$ во именителот да се подобри?
6. Ако се $p, q \in \mathbb{N}$ и $\frac{p}{q} < \sqrt{7}$, докажи дека $\sqrt{7} - \frac{p}{q} > \frac{1}{pq}$.
7. Ако a е природен број кој не е точен квадрат, определи го минимумот на изразот $q^2 |\sqrt{a} - \frac{p}{q}|$ по $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$.
8. Ако $z = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, каде a и b се природни броеви такви што и двата не се точни квадрати, докажи дека $2z^3\{z\} > 3$.
9. Дали постои ограничена низа реални броеви (x_n) која го задоволува условот $|x_m - x_n| \ge \frac{1}{|m-n|}$ за секои $m, n \in \mathbb{N}, m \ne n$.
10. Докажи дека меѓу 20 последователни природни броеви постои број d таков што неравенството $n\sqrt{d} \cdot \{n\sqrt{d}\} > \frac{5}{2}$ важи за секој природен број n.
11. Нека $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ се реални броеви и $m \in \mathbb{N}$. Докажи дека постојат цели броеви $p_1, p_2, \dots, p_n$ и природен број $q \le m^n$ такви што $|q\alpha_i - p_i| \le \frac{1}{m}$ за $i = 1, 2, \dots, n$.

12. Нека $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ и $m_1, m_2, ..., m_n \in \mathbb{N}$. Докажи дека постојат цели броеви $q_1, q_2, ..., q_n$ и p кои не се сите еднакви на нула такви што $|q_i| \leq m_i$ за секој i и $|q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + ... + q_n\alpha_n - p| < \frac{1}{(m_1+1)(m_2+1)...(m_n+1)}$.
13. Нека $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Со X_n да го означиме множеството од сите парови заемно прости природни броеви (a,b) такви што важи $a < b \leq n < a+b$. Докажи дека $\sum_{(a,b)\in X_n} \frac{1}{ab} = \frac{1}{2}$.
14. Докажи дека за секој ирационален број α постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $\{n\alpha\} < \frac{1}{n}$.
15. Докажи дека константата 1 од задача 10 не може да се подобри, односно дека за секој $K < 1$ постои ирационален број α таков што неравенката $\{n\alpha\} < \frac{K}{n}$ има само конечно многу решенија $n \in \mathbb{N}$.
16. За реалниот број α велиме дека е *апроксимабилен со степен* k ако постои константа C (која зависи од α) таква што неравенката $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{C}{q^k}$ има бесконечно многу решенија $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$). Нека $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$. Ако ирационалниот број α има степен на апроксимабилност k, тогаш и бројот $\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$ има степен на апроксимабилност k. Докажи!

ЛИТЕРАТУРА

1. Lang, S.: Introduction to Diophantine Approximations, Springer-Verlag, New York, 1995
2. Mićić, V., Kadelburg, Z.: Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd, 1989
3. Niven, I., Zuckerman, H. S.: An introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., New Yor, 1980
4. Ђукић, Д.: Апроксимације ирационалних бројева рационалним, Београд, 2015
5. Малешевић, Б.: Рационалне апроксимације реалних бројева и неке примене, Настава математике XLIII, 3, 1998
6. Малчески, Р.: Основи на математичка анализа (трето издание), Армаганка, Скопје, 2019
7. Шидловский, А. Б.: Диофантовы приближения и трансцедентные числа, Изд. Московского универзитета, Москва, 1982

Статијата е издадена во бугарското списание Математика 2/2021