Osječki matematički list 13 (2013), 155-162

Geometrijski pristup u rješavanju zadataka

Alija Muminagić* Zdravko Starc †

Sažetak

U rješavanju mnogih zadataka u nastavi matematike moguće je pristupati dvojako: algebarski ili geometrijski. Algebarski pristup zahtijeva transformacije za koje učenici, ponekad, teško shvaćaju njihovo porijeklo. S druge strane, geometrijski pristup u rješavanju zadataka zahtijeva zorni prikaz, sliku. Učenicima je tako olakšano razumijevanje danog problema. Slika je srž geometrijskog pristupa u rješavanju zadataka. Napominjemo da se elementi na slici moraju nalaziti u traženim odnosima. Slika ne smije sadržavati neki poseban slučaj između elemenata što bi moglo navesti na pogrešan put u rješavanju. U geometrijskom pristupu učenici nalaze veze između elemenata koji su za njih vidljivi. Nalazeći logičke veze između elemenata na slici učenici dolaze do ideje vodilje u rješavanju zadataka. U ovom članku dajemo zadatke iz nastave matematike u srednjoj školi koji su riješeni geometrijskim pristupom.

Ključne riječi: *zorni prikaz, geometrijski pristup, trokut*

Geometric approach in solving problems

Abstract

Solving many tasks in teaching mathematics can be approached in two ways, i.e. either algebraically or geometrically. The algebraic approach requires transformations whose background is sometimes har-

*Enighedsvej 58.1.th., 4800 Nykøbing F., Danmark
†Žarka Zrenjanina 93, 26300 Vršac, Srbija

dly understood by students. On the other hand, the geometric approach to problem solving requires visual presentation, a figure. It is a good way of giving a student the opportunity to better comprehend what they are asked to solve. The figure is the core of the geometric approach to problem solving. Note that elements in the figure should be presented in the required relationships. The figure should not contain any special case among the elements that could mislead students into wrongful solving. In the geometric approach students find connections between elements that are visible to them. By finding logical connections between elements in the figure students discover a guide to problem solving. In this article, we are going to present some tasks addressed in high-school mathematics classes that are solved by means of the geometric approach.

Keywords: *visual presentation, geometric approach, triangle*

Navedimo nekoliko zanimljivih zadataka u čijem rješavanju je korišten geometrijski pristup.

Zadatak 1. Neka je $0 < \alpha < \beta < 90^\circ$ i neka su γ i δ definirani s

(ii) $0 < \gamma < 90^\circ$ i $\operatorname{tg}\gamma$ je aritmetička sredina od $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{tg}\beta$,

(ii) $0 < \delta < 90^\circ$ i $\frac{1}{\cos\delta}$ je aritmetička sredina od $\frac{1}{\cos\alpha}$ i $\frac{1}{\cos\beta}$.

Dokazati da je $\gamma < \delta$.

Rješenje. Neka je $|OP| = 1$ i neka su točke A i B s iste strane pravca OP tako da je kut $\angle OPA = \alpha, \angle OPB = \beta, \angle POA = \angle POB = 90^\circ$ (slika 1). Tada je $|OA| = \operatorname{tg}\alpha, |OB| = \operatorname{tg}\beta, |PA| = 1/\cos\alpha, |PB| = 1/\cos\beta$. Neka je točka C polovište dužine $|AB|$.

Iz (i) slijedi $|OC| = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2} = \operatorname{tg}\gamma$, tj. $\angle OPC = \gamma$ i $|PC| = 1/\cos\gamma$. Neka je dalje točka Q centralno simetrična točki P s obzirom na točku C. Četverokut $APBQ$ je paralelogram (zašto?) i slijedi $|AQ| = |PB| = 1/\cos\beta$.

Iz (ii) proizlazi

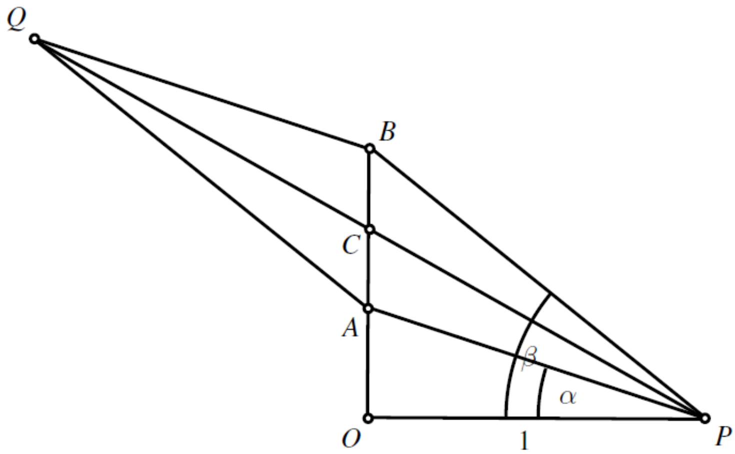
$$\frac{2}{\cos\delta} = \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} = |PA| + |PB| > |PQ| = \frac{2}{\cos\gamma}$$

i odavde slijedi $cos\gamma > \cos\delta$, tj. $\gamma < \delta$. ◀

Zadatak 2. Dokazati da u svakom trokutu vrijedi nejednakost

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$$

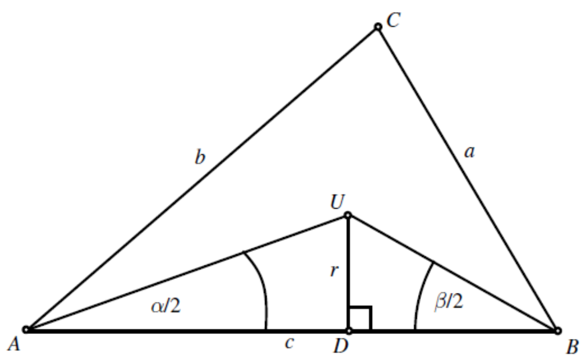
gdje su α, β, γ unutarnji kutovi trokuta.



Slika 1:

Rješenje. Dokazat ćemo najprije da za omjer polumjera upisane i opisane kružnice trokuta vrijedi

$$\frac{r}{R} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}.$$



Slika 2:

Neka je točka D ortogonalna projekcija središta U upisane kružnice na stranicu $\overline{AB}$ trokuta ABC (slika 1). Tada vrijedi prema *sinusovu poučku*

$$c = |AD| + |DB| = 2R\sin\gamma.$$

Iz pravokutnih trokuta ADU i BDU dobivamo

$$|AD| = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \quad |DB| = r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$$

pa je sada

$$c = r \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right) = 2R \sin \gamma$$

i odavde

$$\frac{r}{R} = \frac{2 \sin \gamma}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}} \tag{1}$$

odakle nakon množenja desne strane u posljednjoj jednakosti sa $\dfrac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}$ dobivamo niz jednakosti

$$\begin{aligned}
\frac{r}{R} &= \frac{2 \sin \gamma \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}}{\left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right) \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}} \\
&= \frac{2 \sin \gamma \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}}{\left(\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right) \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}} \\
&= \frac{2 \sin \gamma \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}}{\left(\frac{\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}} \right) \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}} \\
&= \frac{2 \sin \gamma \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right)} \\
&= \frac{2 \sin \gamma \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}}{\sin (90^\circ - \frac{\gamma}{2})} \\
&= \frac{2 \cdot 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} \\
&= 4 \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}
\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost proizlazi iz korištenja jednakosti $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, adicijske formule $\sin(x + y) = \sin x \cos x + \cos x \sin y$, $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$, te jednakosti $\sin(90^\circ - x) = \cos x$ i $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

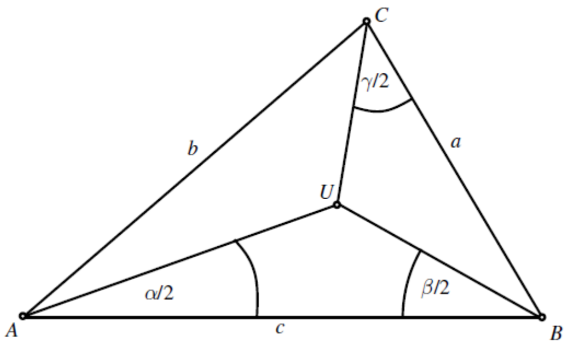
Dakle, $\frac{r}{R} = 4 \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}$ i odavde zbog $R \geq 2r$ (Eulerova nejednakost) iz (1) dobivamo $\sin\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \leq \frac{1}{8}$. ◀

Zadatak 3. Dokazati da u svakom trokutu vrijedi jednakost

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

gdje su α, β, γ unutarnji kutovi trokuta.

Rješenje. Neka je U centar upisane kružnice trokuta ABC (vidjeti sliku 3).



Slika 3:

Kako je

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$$

to je

$$\angle AIB = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\gamma}{2}) = 90^\circ + \frac{\gamma}{2},$$

pa je

$$\sin(\angle AIB) = \sin(90^\circ + \frac{\gamma}{2}) = \cos\frac{\gamma}{2}$$

jer je $\sin(90^\circ + x) = \cos x$, i slično

$$\sin(\angle AIC) = \cos\frac{\beta}{2}, \quad \sin(\angle BIC) = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Primjenjujući *sinusov poučak* u trokutima AUC i BUC dobivamo

$$|UA| = \frac{b\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}, \quad |UB| = \frac{a\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}. \tag{2}$$

Iz površine trokuta AUB,

$$p_{\triangle AUB} = \frac{1}{2} \cdot |IA| \cdot |UB| \cdot \sin(\angle AUB) = \frac{1}{2} \cdot |UA| \cdot |UB| \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

i površine trokuta ABC,

$$p_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma,$$

dobivamo

$$\frac{p_{\triangle AUB}}{p_{\triangle ABC}} = \frac{|UA| \cdot |UB| \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{ab\sin\gamma}$$

odakle prema (2) i $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ dobivamo

$$\frac{p_{\triangle AUB}}{p_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{b\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{a\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{2ab\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}},$$

tj.,

$$p_{\triangle AUB} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} \cdot p_{\triangle ABC}$$

i slično

$$p_{\triangle AUC} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} \cdot p_{\triangle ABC}$$
$$p_{\triangle BUC} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} \cdot p_{\triangle ABC}$$

Zbrajanjem posljednje tri jednakosti i zbog

$$p_{\triangle AUB} + p_{\triangle AUC} + p_{\triangle BUC} = p_{\triangle ABC}$$

dobivamo

$$1 = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} + \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} + \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

i nakon sređivanja

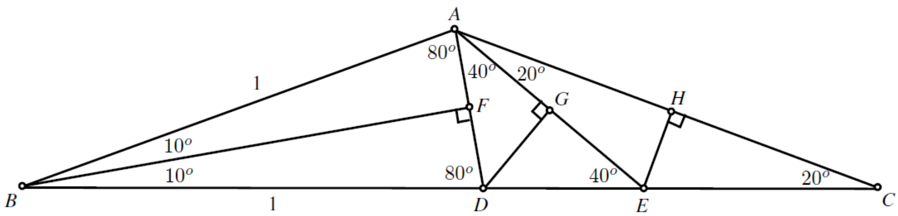
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

◀

Zadatak 4. Dokazati da vrijedi jednakost

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}.$$

Rješenje. Neka je trokut ABC jednakokračan i neka je $|AB| = |AC| = 1$, s kutovima uz osnovicu $\overline{BC}$, $\angle ABC = \angle BCA = 20^\circ$. Na osnovici $\overline{BC}$ odabiremo točke D i E takve da je $|BD| = |AB| = 1$ i $|DE| = |AD|$ (vidjeti sliku 4).



Slika 4:

Lako se dokazuje da su mjere ostalih kutova, kao na slici 4. Neka su točke F, G i H nožišta visina iz vrhova B, D i E u jednakokračnim trokutima ABD, ADE i AEC. Tada je $|AF| = \cos 80^\circ$, $|AD| = 2|AF| = 2\cos 80^\circ$, $|AG| = |AD|\cos 40^\circ = 2\cos 80^\circ \cos 40^\circ$, $|AE| = 2|AG| = 2 \cdot 2 \cdot \cos 80^\circ \cos 40^\circ$, $|AH| = |AE| \cdot \cos 20^\circ = 4\cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ$,

$$|AC| = 2|AH| = 8\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$$

i zbog $|AC| = 1$ dobivamo

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}.$$

◀

Predlažemo da dokaze navedenih tvrdnji provedete i na neki drugi način.

Literatura

[1] Opgavehjørnet 1983-1993, Jens Carstensen og Matematiklærerforeningen 1993.

[2] J. Carstensen, A. Muminagić, *Geometrijski dokazi nekih trigonometrijskih jednakosti*, Udruženje matematičara Bosne i Hercegovine, Sarajevo, Triangle 1(1997), No. 2, 87–88.

[3] J. Carstensen, A. Muminagić, *Geometrijski dokazi nekih trigonometrijskih jednakosti*, Matematičko-fizički list, LIII 3(2002.-2003.), Zagreb, 210–213.