Ристо Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 10
НЕРЕШЕНИ ЗАДАЧИ ЗА НАТПРЕВАРИ ПО МАТЕМАТИКА – ВТОР ДЕЛ

Скопје, 2019

Рецензенти
вон. проф. д-р Слаѓана Брсаковска,
Природно-математички факултет, Скопје
доцент д-р Катерина Аневска,
ФОН универзитет, Скопје

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51:373.3(079.1)

МАЛЧЕСКИ, Ристо
Математички талент 10 : нерешени задачи за натпревари по математика. Д. 2 / Ристо Малчески. - Скопје : Армаганка, 2019. - 238 стр. ; 25 см

Библиографија: стр. 235-238

ISBN 978-608-4904-95-3

а) Математика - Основно образование - Задачи од натпревари
COBISS.MK-ID 111791626

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

> Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.
>
> Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.
>
> Леонардо да Винчи

Книгава која е пред тебе избирка нерешени задачи за учениците од седмо до деветто одделение во основното образование во Македонија. Истата е наменета за надарените ученици за математика и е продолжение на едицијата Математички талент, од која првите шест книги се во издание на АД Просветно дело, Скопје. Самата книга содржи 1889 нерешени задачи, кои се комплементарни со задачите содржани во соодветните збирки од седмо до деветто одделение. Имајќи предвид дека самата едиција содржи огромен број решени и нерешени задачи, можно е дел од задачите содржани во оваа книга да се повторуваат со задачите содржани во книгите Математички талент 4 – 8, но тој број е незначителе.

Рецензентите, проф. д-р Слаѓана Брсаковска и доц. д-р Катерина Аневска, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодарам.

И покрај вложениот напор, не можам да се ослободам од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збиркапе решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сум благодарен на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ми биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје Авторот
ноември, 2019 г.

I СЕДМО ОДДЕЛЕНИЕ

I.1. АЛГЕБРА

1. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$2-\{2-[6-(2-3)\cdot(-2)]:4-3\}\cdot 5.$$

2. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $-3-(3-3\cdot 3-3:3+3)+3$,

б) $-14-4\cdot(-2)-(-5-10:2)$,

в) $8-(18-6:3)+4+3\cdot(4-8):2$.

3. Определи ја цифрата на единиците на збирот $+3^{2012}+4^{2012}+7^{2012}$.

4. Определи ја последната цифра на разликата $6^{13}-2^{23}+9^{33}$.

5. Определи ја последната цифра на производот $27^{3}\cdot 9^{5}\cdot 7^{9}$.

6. Определи го збирот на цифрите на бројот

$$\underbrace{111...111}_{9\,цифри}\cdot\underbrace{111...111}_{18\,цифри}.$$

7. Со помош на четири тројки и четирите аритметички операции прикажи ја секоја од десетте цифри 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Користењето на заградите е дозволено.

8. Определи го збирот на сите парни броеви од 101 до 300.

9. За природните броеви a,b,c,d точно е неравенството $ad<bc$. Во кругот стави соодветен знак за се добие точно неравенство:

а) $\frac{a}{b}\ \bigcirc\ \frac{c}{d}$ б) $\frac{b}{a}\ \bigcirc\ \frac{d}{c}$

в) $-\frac{a}{b}\ \bigcirc\ -\frac{c}{d}$ г) $-\frac{b}{a}\ \bigcirc\ -\frac{d}{c}$.

10. Во кругот стави соодветен знак така што ќе добиеш точно равенство или неравенство:

$\frac{7}{8}-\frac{2}{3}\bigcirc\frac{7}{8}-\frac{1}{3}$, $\qquad 4\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\bigcirc 4\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}$,

$\frac{11}{12}+\frac{3}{4}\bigcirc\frac{11}{12}+\frac{5}{8}$, $\qquad \frac{11}{13}:\frac{11}{15}\bigcirc\frac{1}{13}:\frac{1}{15}$,

$\frac{17}{11}-\frac{24}{25}\bigcirc\frac{34}{22}-\frac{35}{36}$, $\qquad -3,3:8\bigcirc -3,4:8$.

11. Какви треба да бидат броевите x и y, за да равенството $\frac{3}{x}\cdot\frac{y}{3}=1$ биде точно, ако $x\neq 0$?

12. Што е поголемо $\frac{222221}{222223}$ или $\frac{333331}{333334}$? Одговорот да се образложи.

13. Кој збир е поголем $\frac{2018}{2017}+\frac{2017}{2018}$ или $\frac{17}{18}+\frac{18}{17}$?

14. Во бројот 0,1234567891011121314...47484950 пречкртај 85 децимали така што бројот кој ќе се добие биде најмал.

15. Собери ги броевите 345,09 и 16,017, а потоа помножи ги со 0,01.

16. Определи го бројот кој е за $\frac{2}{3}$ поголем од разликата на броевите $\frac{7}{5}$ и $\frac{3}{4}$.

17. Ако број се намали за 6,2%, се добива бројот 4,69. Кој е тој број?

18. Пресметај ја вредноста на изразот:
    а) $(2,7-\frac{3}{7}):3$,
    б) $2-(4+12:4)+4-3\cdot(5-9):(-2)$,
    в) $\frac{5-8}{6-10}:\frac{-1-2}{6+2}$,
    г) $\frac{1}{2}-2:\frac{1}{3}-4\cdot\frac{1}{2}$.

19. Пресметај ја вредноста на изразот:
    а) $8:(2\frac{2}{25}-0,08)+\frac{3}{4}\cdot 4-6$,
    б) $(1\frac{1}{2}-2\frac{3}{4}):2$.

20. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$8-6\cdot\frac{2}{3}-(0,5\cdot 10-7,5:5).$$

21. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(0,43+0,6)\cdot 0,49+(21,6-1,74)\cdot 6,2-0,35\cdot 40+14+\frac{1,8+1,2\cdot 5}{7,8}+\frac{0,35\cdot 0,5}{7}.$$

22. Броевите $A=20,06\cdot 20,26,\ B=201,1\cdot 2,021$ и $C=2016\cdot 0,2016$ подреди ги по големина.

23. Дали бројот $294,85$ е поголем или помал од $(324-32,4)+32,4\cdot 0,1$ и за колку?

24. Колку пати разликата на броевите $\frac{6}{5}$ и 0,75 е поголема од бројот $\frac{1}{4}$?

25. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2018\cdot 2019}+\frac{1}{2019\cdot 2020}.$$

26. Пресметај го збирот $a+b$, каде

$$a=\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{4\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 199} \text{ и } b=\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{6\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{100\cdot 199}.$$

27. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\frac{984+98,4+9,84}{0,123+1,23+12,3}$,

б) $2013+2013^2+(-2013)^3+2013^4$,

в) $(1-0,9988)^2:(1-0,98)^2+(1-0,9988)^2\cdot(1-0,98)^2$

г) $\frac{(-1)^0+(-1)^1+(-1)^2+\ldots+(-1)^{2009}+(-1)^{2010}}{(-1)^0\cdot(-1)^1\cdot(-1)^2\cdot\ldots\cdot(-1)^{2009}\cdot(-1)^{2010}}$.

28. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\frac{-2^6\cdot 6^5}{2^9(-3)^3}+\frac{-3^6\cdot 6^5}{3^9(-2)^3}$,

б) $1-\frac{2+\frac{3}{4}}{2-\frac{3}{4}}\cdot\frac{1-\frac{3\cdot 2-5}{3\cdot 4-9}}{1+\frac{3\cdot 2-5}{3\cdot 4-8}}$,

в) $\frac{0,5-\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}-0,25}+\frac{0,5+\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}+0,25}$.

29. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\frac{6\cdot 2^{-20}+3\cdot 7^{-19}}{14^{-19}}:(2^{19}+7^{19})$,

б) $\frac{3^{93}+3^{93}+3^{93}}{(9^2)^8\cdot 27^{19}}$,

в) $\frac{5^5+(-5)^5-|-5|}{5^{-1}+5^0}$.

30. Пресметај ја вредноста на изразот $M=2040\frac{1}{3}-|-ab-c|$, ако a е помалиот од броевите $\frac{2}{3}$ и $\frac{11}{16}$, b е реципрочната вредност на изразот $(1+\frac{1}{|-2-\frac{3}{5}|}):9$ и $c=1\frac{2}{13}+2\frac{4}{19}+3\frac{5}{13}+4\frac{6}{13}+5\frac{7}{19}+6\frac{8}{19}$.

31. На таблата е запишан изразот
$$2:3:5:7.$$
Со допишување на два пара загради се добиваат изрази со различни вредности. Определи ги сите можни резултати кои може да се добијат на овој начин.

32. Дадени се броевите: $-0,5, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, -1\frac{1}{4}$.

а) Подреди ги дадените броеви во растечки редослед.
б) Определи го збирот на дадените броеви.

33. Броевите $\frac{1}{3}; 0,3; 24\frac{1}{2}; -1\frac{1}{3}; -1\frac{3}{4}; -8\frac{1}{4}; 0; -8,5$ подредеи ги по големина, а потоа определи го нивниот збир.

34. Определи ја вредноста на изразот
$$-a-\frac{1}{b-\frac{1}{c}}$$
ако $a=0,3333...$, $b=0,4444...$, $c=0,6666...$.

35. Ако $a+b=-0,7$, подреди ги по големина вредностите на изразите $|a+b-0,5|, |-2-a-b|, |a+0,3+b-1|$.

36. Колку е 15% од 27,6?

37. Определи го бројот x кој е еднаков на 3,6% од:
$$(3+4,2:0,1):[(1:0,3-2\frac{1}{3})\cdot 0,3125].$$

38. Дропката $\frac{8}{7}$ запиши ја како периодичен децимален број. Која цифра стои на 2020-тото место?

39. Рационалниот број 0,12121212... запиши го во вид на дропка.

40. Определи го збирот на првите 2014 децимали на бројот $\frac{6}{7}$.

41. Определи ги природните броеви m и n така што во низата
$$2, 5, 5, m, n, 11$$
ниту еден број не е помал од претходниот и аритметичката средина на сите шест броја е природен број.

42. Дадени се рационалните броеви $\frac{1}{2}, x, y, \frac{1909}{2018}$ кои се подредени во растечки редослед. Определи ја нивната аритметичка средина ако разликите на секои два соседни броја (од поголемиот го одземаме помалиот) се еднакви.

43. Кој од броевите $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ треба да се избрише за аритметичката средина на преостанатите броеви е 1,4?

44. Првиот број е 2015, вториот е 2016, третиот е аритметичката средина на првите два, четвртиот е аритметичката средина на првите три, петтиот е аритметичката средина на првите четири броја итн. секој број по вториот е еднаков на аритметичката средина на претходно запишаните броеви. Определи го 2015-тиот број.

45. Нека $a_1 < a_2 < ... < a_{2015}$ се последователни цели броеви такви што
$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2013} - a_{2014} + a_{2015} = 2016.$$
Определи ја вредноста на изразот
$$\frac{a_{1008}}{4} \cdot \frac{a_{1948}}{a_{866} - a_{127}}.$$

46. Рационалните броеви a, b, c се такви што едниот од нив е позитивен, другиот е негативен и третиот е еднаков на 0. Ако $\frac{(b-a)(c-b)}{b} < 0$, определи кој број е еднаков на 0, кој е позитивен и кој е негативен.

47. Дропката $\frac{281}{140}$ запиши ја како збир на три дропки со едницифрени именители.

48. На таблата се запишани два природни броја. Марко го помножил првиот број со збирот на цифрите на вториот број и го добил бројот
$$201620162016201620162016,$$
а Илија го помножил вториот број со збирот на цифрите на првиот број е го добил бројот
$$201720172017201720172017.$$

Докажи дека барем еден од двајцата згрешил при пресметувањата.

49. Определи ја најмалата вредноста на изразот $2^k \cdot 8^m \cdot 32^n$, каде k,m,n се $(-1),1,2$ во некој редослед.

50. Ако

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n,$$
$$(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n-3)\cdot (2n-1) \text{ и}$$
$$(2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot (2n-2)\cdot (2n),$$

пресметај ја вредноста на изразот: $\frac{100!!\cdot 99!!}{98!!\cdot 101!!}$.

51. Кој е најмалиот број собироци на левата страна на бројниот ребус

$$\overline{BROJ}+\overline{BROJ}+...+\overline{BROJ}=\overline{AAAAAA}$$

во кој на еднаквите букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различните букви соодветствуваат различни цифри.

52. Дешифрирај го бројниот ребус

$$\overline{VPRA}+\overline{RPRV}=\overline{ARKVK}$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

53. Ако $\overline{abcd}+\overline{bcd}+\overline{cd}=2007$, колку од цифрите a,b,c,d се точни квадрати?

54. Определи ги сите четирицифрени броеви $\overline{abcd}$ такви што

$$\overline{abc}+\overline{acd}+\overline{bcd}=2019.$$

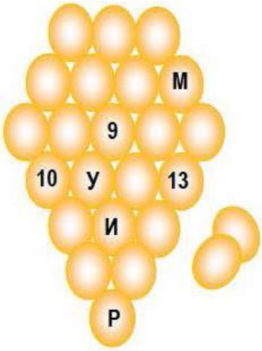
(Цифрите a,b,c,d не мора да се различни.)

55. Во равенството $\overline{abcd}+2007=\overline{efgh}$ буквите a,b,c,d,e,f,g,h означуваат различни цифри. Определи ја најголемата можна вредност на бројот $\overline{efgh}$.

56. Реши го бројниот ребус $TR^I=IKS$ во кој на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри.

57. Докажи дека не постојат цифри a,b,c,d и e такви што

$$\overline{abcd,e}\cdot e=\overline{cadeb}.$$



58. Бројот кој го замислив е РУМИ. Бројот кој го запишав на секое зрнце е еднаков на збирот на двата броја од горниот ред до кој зрнцето се допира. Ако некое зрнце се допира само до едно зрнце од горниот ред, тогаш броевите во тие две зрнца се еднакви. Кој број го замислив?

59. Производот на два трицифрени броја се запишува само со помош на цифрата 3. Кои се тие броеви?

60. Нека a,b,c се броевите $-3,-5,7$, во некој распоред. Определи ја најмалата вредност на изразот $|a+b|-|b+c|$.

61. Реши ја равенката:

а) $(3\frac{5}{4}-1\frac{3}{4})x=0$,   б) $(-8)\cdot(x+\frac{1}{2})=0$.

62. Реши ја равенката:

а) $2x-\frac{3}{7}=\frac{1}{2}$,   б) $\frac{-6+12}{x+3}=\frac{1}{3}-\frac{2}{5}$,

в) $0,5-\frac{1}{4}x=0,25:\frac{1}{8}$,   г) $((6\frac{3}{7}-\frac{0,75x-2}{0,35})\cdot 2,8+1,75):0,05=235$.

63. Реши ја равенката:

а) $\frac{x+1}{4}-2=8$,   б) $5-2(x-3)=23$,

в) $x-1\frac{1}{2}=\frac{x}{2}+0,5$.

64. Реши ја равенката:

а) $2x-3,5=-8,5$ б) $|x-3|=5$.

65. За кои вредности на променливата x:

а) дропката $\frac{x}{8}$ има вредност $\frac{125}{1000}$,

б) дропката $\frac{8}{5x}$ има вредност $\frac{1}{5}$,

в) дропката $\frac{100}{x}$ има вредност 800, г) дропката $\frac{x-7}{4x}$ има вредност 0.

66. Реши ја равенката:

$$(\frac{3}{4}\cdot 2\frac{2}{3}+2,5:2\frac{1}{2})\cdot x-(1,75-2\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{11}):2\frac{1}{2}=1.$$

67. Реши ја равенката:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{2007\cdot 2009}=\frac{8p}{2009}.$$

68. Реши ја равенката

$$(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{4})...(1+\frac{1}{n})=2019.$$

69. Реши ја равенката

$$24960:(3360-\frac{300\cdot(200-6x)}{115})=8.$$

70. Реши ја равенката $2|x|=6-x$.

71. Реши ја равенката:

а) $||x|-15x|=-x^3$,

б) $2^{-3}\cdot x:(0,2^{-1}-2)=(9^3)^4:(-27)^8$,

в) $|1-a|\cdot(-a)+2a$, каде $a=(-4)\cdot(-4,5)-8$.

72. Во табелата десно зад секоја фигура е скриен некој број, така што зад еднаквите фигури се кријат еднакви броеви. Во секој ред збирот на скриените броеви е запишан во крајното десно поле. Определи го збирот на четирите скриени броја.

★	♡	♡	$6\frac{1}{2}$
♡	✥	☺	$7\frac{1}{2}$
✥	✥	★	$8\frac{1}{2}$
★	☺	☺	$1\frac{1}{2}$

73. Од броевите a,b,c,d,e се избираат два броја е се запишува нивниот збир. Така се добиени броевите –22; 2; –14; –4; 6; –2; 12; –8; –6; –12. Определи ги броевите a,b,c,d,e.

74. Определи го бројот на точките кои имаат целобројни координати (x,y) такви што $|x|=|y|<7$.

75. Во множеството цели броеви реши ја равенката: $|xy|=12$.

76. Определи го природниот број n за кој важи $n(n+1)(2n+1)=84$.

77. Броевите 1, 3, 6, 10, 15, ... се познати како триаголни броеви и секој од нив се добива по формулата $\frac{n(n+1)}{2}$ каде n е природен број. За која вредност на n се добива:
а) најмалиот трицифрен триаголен број,
б) најголемиот триаголен број кој е помал од 2020?

78. Реши ја равенката: $\frac{|2x-\frac{3}{4}|}{5}=6$.

79. Докажи дека за секој рационален број a важи $|a|-a\geq 0$.

80. Определи ги сите вредности на параметарот a за кои точно четири природни броја се решенија на неравенката $x\leq a+6$.

81. Во множеството цели броеви реши ја неравенката:

$$|2x-1|+3<8.$$

82. Во множеството цели броеви реши ја неравенката

$$113<z+\frac{z}{2}<115.$$

83. Определи ги сите цели броеви n за кои важи: $\frac{1}{3}<\frac{1-n}{5}<\frac{11}{12}$.

84. Дадена е функцијата $f(x)=2x-1$. Пресметај $f(-3)+2f(1)$.

85. Вера точно помножила пет едноцифрени броја и множењето го запишала на хартија. Славко избришал две цифри во записот и на нивно место запишал други две цифри, по што записот бил:

$$4\cdot 5\cdot 4\cdot 5\cdot 4=2247.$$

Како изгледал записот пред исправките на Славко?

86. Пополниги празните полиња во квадратот прикажан на цртежот десно така што збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков.

1/6		
	5/12	
		2/3

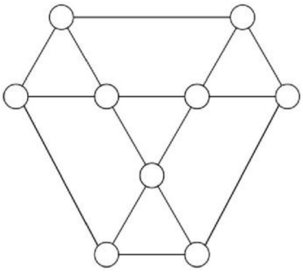
87. Пополни ги празните полиња во табелата прикажана на цртежот десно така што збирот на броевите запишани во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков.

-11		
	-10	
-1		

88. На цртежот десно е даден магичен квадрат во кој се запишани степените $3^1, 3^2, ..., 3^9$ и за кој производот на броевите запишани во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков. Кој број е запишан во централното квадратче?

3^4		3^2
3^8		

89. Деветте кругчиња на фигурата десно се темиња на 4 мали и 3 големи триаголници. Во кругчињата запиши ги броевите од 1 до 9 така што збирот на броевите запишани во секој триаголник е еднаков.



90. За секои два ненулти броја a и b дефинираме

$$a * b = a + b^{-1} \text{ и } a \setminus b = ba^{-1}.$$

Определи

$$\max\{(2*3)\setminus 4, (2\setminus 3)*4, (3*4)\setminus 2, (3]4)(2\}.$$

91. За секои броеви a и b операцијата $*$ е определена со

$$a * b = (a - 2b)(3a - b).$$

Определи

$$\min\{2*5, 5*7, 3*7, 7*5\}.$$

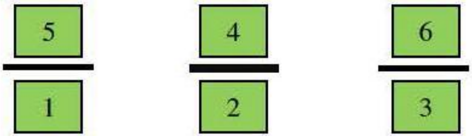
92. Определи го збирот на броевите запишани во 101-виот коридор на дијаграмот прикажан на цртежот десно.

1	3	5	7	9	
1	4	7	10	13	
1	5	9	13	17	
1	6	11	16	21	
1	7	13	19	25	

93. Ако ги искористиме шесте картончиња

1	2	3	4	5	6

можеме да составиме три дропки, секоја од кои е еднаква на природен број.



Кој е најголемиот број дропки, еднакви на природни броеви, кои може да ги составиме ако ги искористиме сите картончиња:

- при 8 картончиња со броевите од 1 до 8,
- при 10 картончиња со броевите од 1 до 10,
- при 22 картончиња со броевите од 1 до 22.

За секој случај наведи најмалку по еден пример.

94. Низата 1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, 38, ... е добина така што е запишан бројот 1, а потоа секој број е добиен кога на претходниот број му се додаде збирот на неговите цифри. Дали бројот 20110000002012 е член на оваа низа?

95. Формираме низа броеви на следниов начин: првиот број е еднаков на 7, вториот број е еднаков на збирот на цифрите на вториот степен на 7, зголемен за 1, третиот број е еднаков на збирот на цифрите на ворите степен на претходниот број зголемен за 1 итн. Кој број е на 2016-тото место во низата?

96. Нека a_1 е четирицифрен природен број таков што сите негови цифри не се еднакви меѓу себе. Со M_1 и m_1 да ги означиме соодветно најголемиот и најмалиот број кој може да се добие со разместување на цифрите на a_1. Нека $a_2 = M_1 - m_1$ и од a_2 да ги составиме соодветно најголемиот и најмалиот број M_2 и m_2 кои можат да се добијат со разместување на неговите цифри. Нека $a_3 = M_2 - m_2$ итн. при што добиените броеви ги запишуваме како четирицифрени броеви. На пример, ако $a_1 = 2322$, тогаш

$$M_1 = 3222, m_1 = 2223,\ a_2 = 3222 - 2223 = 0999,$$

$$a_3 = 9990 - 0999 = 8991$$

итн.

а) Ако $a_1 = 2134$, определи го a_8.

б) Определи го a_8 при произволно a_1.

I.2. ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

97. Еден број при делење со бројот 8 дава остаток 5, а друг број при делење со бројот 8 дава остаток 3. Докажи дека производот на овие броеви при делење со бројот 8 дава остаток 7.

98. Ако бројот 1000 се подели со некој број се добива остаток 8. Ако бројот 900 се подели со истиот тој број се добива остаток 1. Со кој број сме ги поделиле броевите 1000 и 900?

99. Буквите a и b замени ги со цифри така што петцифрениот број $\overline{12a3b}$ ќе биде делив со 15. Колку решенија има задачата?

100. Определи ги цифрите x и y така што бројот $\overline{2018xy2018}$ е делив со 18.

101. Во бројот $\overline{111111x999999}$ определи ја цифрата x така што тој ќе биде делив со бројот 7.

102. Пред и по бројот 357 допиши ги цифрите 3, 5 и 7 така што добиениот број биде делив со 3, 5 и 7.

103. Определи го најголемиот шестцифрен број $\overline{456abc}$ кој е делив со 7, 8 и 9.

104. Определи трицифрен број кој е делив со 9, чија цифра на десетките е за 5 поголема од цифрата на единиците, а производот на цифрите со кои е запишан бројот е еднаков на 0.

105. Определи го најмалиот природен број кој е делив со 5 и чиј збир на цифри е еднаков на 2017.

106. Некој природен број е делив со 7. При делење на тој број со 4, 5 или 6 се добива остаток 2. Определи го најмалиот таков број.

107. Докажи дека збирот на 12 последователни природни броеви не е делив со 4.

108. Докажи дека ако бројот $\overline{abcab}$ при делење со 91 дава остаток 9, тогаш барем една од неговите цифри е еднаква на 1.

109. Дадени се пет природни броеви a,b,c,d,e чиј збир е еднаков на 2009. Збирот на некои три од овие броеви е 1000. Докажи дека производот $abcde$ е делив со 4.

110. Докажи дека бројот $2^{1988}-1$ е делив со 5.

111. Докажи дека бројот $2019^{2019}+1$ е делив со 10.

112. Докажи дека бројот $10^{1990}-10$ е делив со 81.

113. Докажи дека бројот

$$1^{1988}+2^{1988}+3^{1988}+4^{1988}+5^{1988}+6^{1988}$$

е делив со 5, но не е делив со 10.

114. Определи ги цифрите a и b така што при делење на бројот $\overline{34a5b}$ со бројот 36 се добива остаток 2.

115. Определи го најголемиот непарен трицифрен број запишан со различни цифри кој при делење со 3 дава остаток 2, а при делење со 5 дава остаток 4.

116. Определи ги сите целобројни вредности на бројот a за кои вредноста на дропката $\frac{8}{3a+1}$ е цел број.

117. За кои вредности на x вредноста на изразот $\frac{x+3}{x}$ е цел број?

118. За кои целобројни вредности на променливата x вредноста на изразот $\frac{3x+2}{x}$ исто така е цел број?

119. За колку вредности на целиот број x бројот $\frac{x+2017}{x+1}$ е исто така цел број?

120. Определи ги сите природни броеви n за кои вредноста на дропката $\frac{24}{3n-4}$ е квадрат на природен број.

121. Да ги разгледаме правилните дропки со количник 108:

$$\frac{1}{108},\frac{2}{108},\frac{3}{108},\ldots,\frac{107}{108}.$$

Колку од овие дропки се нескратливи?

122. Определи го збирот на првите 51 природни броеви, секој од кои е заемно прост со бројот 583.

123. а) Броевите 1, 2, 3, ..., 100 подели ги на 50 групи од по два заемно прости броја.

     б) Докажи дека ако броевите 1, 2, 3, ..., 100 се поделат на помалку од 50 групи, тогаш ќе постои група во која броевите не се по парови заемно прости.

124. Определи три рационални броеви кои се поголеми од $\frac{1}{2}$ и се помали од $\frac{5}{12}$, а чии именители и броители се заемно прости броеви.

125. Определи ги сите прости броеви p такви што и броевите $p+8$ и $p+10$ се прости.

126. Докажи дека, ако p е прост број, тогаш:

     а) p^3+1987 е сложен број,

     б) $p^{1987}+1987$ е сложен број.

127. Ако p е прост број, тогаш $p^{11}+2019$ е сложен број. Докажи!

128. Определи го најголемиот прост делител набројот $11^{2016}+11^{2018}$.

129. Определи го производот $a\cdot\overline{ab}\cdot\overline{bb}$ $(a\neq b)$, ако тој е четирицифрен број и точно два од трите множители се прости броеви.

130. Дадени се 999 различни прости броеви. Докажи дека меѓу нив има најмалку 250 броеви кои имаат иста цифра на единиците.

131. Определи го најголемиот заеднички делител на броевите 20072007 и 200720072007.

132. Производот на два броја е 1350, а нивниот најголем заеднички делител е 15. Кои се тие броеви?

133. Нека a,b,c,d се природни броеви такви што

$\text{NZD}(a,b)=24,\ \text{NZD}(b,c)=36,\ \text{NZD}(c,d)=54,\ 70<\text{NZD}(d,a)<100$.
Определи го $\text{NZD}(d,a)$.

134. Определи го бројот на делителите на бројот:
а) 2019, б) 2020

135. Нека N е најмалиот природен број кој има точно 18 природни делители. Определи го збирот на цифрите на бројот N.

136. Определи го најмалиот природен број кој што е делив со 132 и има збир на цифри еднаков на 60.

137. Нека a,b и c се различни цифри и бројот $A=\overline{5ab37c2}$ е делив со 792. Определи ја вредноста на изразот $a+b-c$, ако b е непарен број.

138. Збирот на два природни броја е 2018. Определи го збирот на цифрите на најголемиот остаток кој може да се добие ако поголемиот од двата броја го поделиме со помалиот.

139. Определи ги четирите најмали последователни природни броеви такви што првиот е делив со 2, вториот е делив со 3, третиот е делив со 5 и четвртиот е делив со 7.

140. Определи ги сите трицифрени природни броеви кои се деливи со 25 и чиј збир на цифри е еднаков на 14.

141. Определи го најмалиот природен број кој завршува на 13, делив е со 13 и збирот на цифрите му е 13.

142. Определи ги целите броеви x,y,z за кои важи $x<y<z$ и $xyz=2009$.

143. Во множеството цели броеви реши ја равенката: $x^2|y|=2009$.

144. Во 20 пакети се распределени 109 чоколади. Во некои пакети има по k чоколади, а во некои има по 3 чоколади. Определи ги сите можности за k. За секој случај определи во колку пакети има поо 3 чоколади?

145. Производот на четири последователни природни броја е петцифрениот број $\overline{9302*}$. Определи ги овие броеви.

146. Нека a,b,c се три ненулти цифри такви што никои две од нив не даваат еден и ист ненулти остаток при делење со 3, а меѓу шесте трицифрени броја запишани со помош на овие цифри барем четири се парни и барем еден е точен квадрат. Кој е тој точен квадрат?

147. Определи го најмалиот природен број n за кој збирот на сите природни броеви кои се помали или еднакви на n е делив со 2014.

148. Марко запишал 100 броја. Првиот запишан број е 2, вториот е 3, а секој број, освен првиот и последниот, е еднаков на збирот на бројот кој е пред него и бројот кој следува по него. Определи го збирот на сите броеви кои ги запишал Марко.

149. Се собираат последователните природните броеви деливи со 3, т.е. $3+6+9+12+...$. Колку такви броеви треба да се соберат за да се добие збир кој е 100 пати поголем од најголемиот собирок?

150. За еден природен број ќе велиме дека е интересен ако е непарен и е еднаков на збирот на три последователни природни броја. Докажи дека:

а) збир на два интересни броја не е интересен број,

б) производ на два интересни броја е интересен број.

151. Низата $a_1,a_2,a_3,...,a_n,...$ е зададена со формулите

$a_{2k-1}=2^k$ и $a_{2k}=(a_{2k-1}+a_{2k+1}):2$, за $k\in\mathbb{N}$.

а) Запиши ги првите седум члена на оваа низа.

б) Докажи дека сите членови на низата од видот a_{2k} се деливи со бројот 3.

в) Определи го најголемиот природен број n за кој 2^n е делител на a_{2018}.

I.3. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

152. Цифрата на единиците на еден природен број е 0. Ако оваа цифра се пречкрта се добива број кој е за 27405 помал од почетниот број. Определи го почетниот број.

153. На страните на коцка се запишани броевите од 1 до 6. При фрлање еднаш збирот на броевите на околните четири страни на коцката е 12, а вториот пат е 15. Кој број е запишан на страната која што е спротивна на страната на која е запишан бројот 3?

154. Гостинот на еден хотел забележал дека двоцифрениот број на неговата соба е еднаков на разликата на квадратите на два броја. Помалиот од броевите е еднаков на цифрата на десетките на бројот на собата, кој пак е двапати поголем од цифрата на единицата. Опрдели го бројот на собата.

155. Апсолутната вредност на разликата на цифрите на еден двоцифрен број не е поголема од 3, а збирот на неговите цифри е еднаков на 9. Определи го овој двоцифрен број.

156. Збирот на три цели броеви е 0, а збирот на нивните апсолутни вредности е 8. Определи ги овие броеви.

157. Производот на три последователни цели броја е еднаков на осумкратната вредност на нивниот збир. Определи ги овие броеви.

158. Определи ги сите трицифрени броеви кои се петпати поголеми од производот на своите цифри.

159. Определи го најмалиот позитивен рационален број кој при делење со $\frac{35}{396}$ и $\frac{28}{297}$ дава целоброен количник.

160. На писмена работа по математика требало да се пресмета вредноста на следниов израз:

$$\frac{13}{31}+\frac{31}{13}+\frac{389}{403}-31{,}13+13{,}31\,.$$

Третина од учениците добиле резултат $-18{,}82$; две седмини од учениците добиле резултат $-45{,}44$; а преостанатите 8 ученици не ја решавале задачата. Колку ученици точно ја решиле задачата?

161. Збирот на три броја е еднаков на 1365. Ако првиот број го помножиме со 8, вториот со 4, а третиот со 6, тогаш добиените производи ќе бидат еднакви. Определи ги овие три броја.

162. Определи ја дропката која е еднаква на $\frac{5}{7}$ и чиј збир на броителот и именителот е еднаков на 60.

163. Броителот на дропката $\frac{23}{42}$ зголеми го, а именителот намали го за ист број x така што ќе ја добиеш дропката $\frac{7}{6}$. Определи го бројот x.

164. Рационалниот број $-\frac{4}{7}$ е добиен со скратување на рационален број чиј броител и именител имаат збир 885. Определи го почетниот рационален број.

165. Дадена е дропката $\frac{1988}{1987}$. Кој број треба да се додаде на броителот и да се одземе од именителот за да по скратувањето се добие дропката $\frac{2}{3}$?

166. Кој број треба да се одземе од броителот на дропката $\frac{537}{463}$ и да се додаде на нејзиниот именител за да се добие дропка еднаква на $\frac{1}{9}$?

167. Определи ги броевите a,b,c ако се знае дека нивниот збир е поголем од бројот a за $\frac{5}{2}$, од бројот b за $\frac{59}{6}$ и од бројот c за $\frac{5}{3}$.

168. Определи ги двоцифрените броеви кај кои цифрата на единиците е еднаква на $\frac{1}{6}$ од самиот број.

169. Бројот x е за 25% поголем од бројот y, а бројот z е толку проценти поголем од y колку проценти што е y помал од x. За колку проценти z е помал од x?

170. Определи ги броевите a и b за кои се знае дека меѓу броевите $a+b$, $a-b$, $\frac{a}{b}$ и ab три броја се еднакви, а четвртиот е различен од нив?

171. Три природни броеви x,y,z се однесуваат како $a:b:\overline{ab}$ каде a и b се цифри, а производот на броевите x,y,z е 1995. Определи ги овие броеви.

172. Пабло со помош на цифрите од 0 до 9 запишал три природни броја a,b,c, при што секоја цифра ја искористил само по еднаш.

а) Кои броеви ги запишал Пабло ако се знае дека $a:b:c=2:3:4$ и c е најмалиот можен број.

б) Дали е можно за броевите на Пабло да важи $a:b:c=1:2:3$?

173. Во табелата 4×2011 во секој од првите три реда броевите се запишани според некое правило. Во четвртиот ред е запишан збирот на броевите во соодветната колона.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...	2011
Прв ред	1	3	5	7	9	2	4	6	8	1	3	5	7	...	
Втор ред	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	...	
Трет ред	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	...	
Четврт ред															

а) Кои броеви се запишани во колоната со реден број 2011?

б) Определи го збирот на едноцифрените броеви во четвртиот ред.

174. Стрелките на часовникот (минутната и часовната) се преклопени во 12 часот. Определи го најмалото време кое треба да помине за да стрелките на часовникот повторно бидат преклопени.

175. Определи го аголот кој го зафаќаат стрелките на часовникот во 11:45 часот.

176. Марко е три пати помлад од неговиот татко, а два пати е постар од неговата сестра. Таткото и сестрата заедно имаат 42 години. Колку години има Марко?

177. Еден натпревар започнал меѓу 10 и 11 часот во моментот кога часовната и минутната стрелка биле во спротивни насоки, а завршил меѓу 16 и 17 часот во моментот кога стрелките се преклопувале. Колку време траел натпреварот?

178. Баба Јованка има 10 внуци и сите имаат различен број години. Ана е најстара. Ако збирот на годините на сите внуци е 180, кој е најмалиот број години што може да ги има Ана?

179. Кога се родил Иван годините на сестра му биле 25% од годините на мајка му. Сега годините на Иван се $\frac{1}{4}$ од годините на мајка му, а сестра му е трипати помлада од татко му. По 9 години Иван ќе биде трипати помлад од татко му. Колку години има сестрата на Иван?

180. Мојот роденден е на 18 ноември. Четворицата мои пријатели имаат родендени на 3 ноември, 12 номеври, 21 ноември и 1 декември. Решивме да направиме прослава на датум кој е најблизок до сите роденде-

ни. (Тоа значи дека збирот на деновите од избраниот датум до сите родендени е најмал можен.) Кој датум треба да го избереме за прославата?

181. Стојан завршува определена работа за 30 минути, Алекса ја завршува истата работа за 60 минути, а Никола за 180 минути. За колку минути ќе биде завршена оваа работа ако сите тројца работат заедно?

182. Кучето Виор јаде црево свињска салама за 3 минути, а црево телешка салама за 4 минути. Кучето Џек јаде црево свињска салама за 7 минути, а црево телешка салама за 6 минути. Секое црево салама кучињата може да ја јадат истовремено од двата краја на цревото. Кое е најмалото време за кое двете кучиња заедно можат да изедат црево свињска и црео телешка салама?

183. Еден работник завршил $\frac{3}{8}$ од својата работа. Ако работи уште $3+\frac{2}{3}$ часови, тој ќе заврши $\frac{5}{6}$ од работата. За колку време работникот ќе ја заврши целата работа?

184. Еден автомеханичар врши генерален ремонт на автомобил за 10 дена. Ако му се придружи друг механичар и му помогне во работата 2 дена, тогаш работата ќе биде завршена за 6 дена. За колку дена вториот механичар сам може да го заврши ремонтот?

185. Фирма почнала да гради две еднакви куќи. На едното градилиште испратиле 15 работници, а на другото испратила 12 работници (сите работници имаат еднаква постојана продуктивност). Кога помалата група ја завршила половината од работата, на неа и се приклучиле нови n работници. Градбата на двете куќи завршила истовремено. Определи го n.

186. Дадена порачка може со 8 исти машини да се исполни за 19 дена. Првите два дена работеле само 6 од машините. Потоа биле вклучени уште n такви машини и порачката била завршена за 12 дена. Определи го n.

187. Цената на една книга е 100 денари и уште $\frac{1}{3}$ од вредноста на книгата. Определи ја цената на оваа книга.

188. Продавачот во понеделник ја зголемил цената на јаболката за $x\%$. Продажбата се намалила, па затоа во средата тој ја намалил цената на јаболката за $y\%$ и сватил дека сега цената е иста како и пред зголемувањето. Определи ја разликата $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$.

189. Милан потрошил $\frac{3}{4}$ од парите кои ги имал, потоа потрошил $\frac{1}{2}$ од парите кои му останале, па потрошил 20% од новиот остаток, по што му останале 100 денари. Колку пари имал Милан на почетокот?

190. Лазар влегол во продавница да купи топка за играње и планирал да потроши $\frac{5}{6}$ од парите кои ги имал. При купувањето дознал дека топката поевтинила за 40%. Лазар купил топка, потоа потрошил 50 денари за сладолед и му останале 700 денари. Колку пари имал Лазар на почетокот?

191. Јане и Славе имале еднакви суми пари. Јане купил бомбони по цена од 150 денари за килограм, а Славе купил бомбони по цена од 100 денари за килограм. По која цена треба да ја продаваат мешавината од бомбоните за да ги повратат вложените пари (без заработувачка)?

192. Маја има месечен џепарлак од 1200 денари. Таа секој месец третина од својот џепарлак го троши во слаткарница, а за останатиот дел купува книги. Во слаткарницата цените се зголемиле за 50%, а книгите поскапеле 30%. Затоа родителите и го зголемиле џепарлакот на Маја за 500 денари. Дали сега Маја има доволно пари?

193. Тројца другари поделиле 7777 денари. Колку добил секој од нив ако две петтини од сумата на Јован е еднаква на сумата на Мирко, а седум деветтини од сумата на Мирко е еднаква на сумата на Симон?

194. Трговец купил стока за 212100 денари. Тој продал $\frac{2}{3}$ од стоката со добивка од 5%. Остатокот од стоката го продал со $\frac{1}{70}$ загуба. Определи ја вкупната добивка на трговецот.

195. Тројца другари поделиле определена сума пари на следниов начин: првиот добил $\frac{1}{3}$ од сумата и уште 72 денари, вториот добил $\frac{1}{3}$ од ос-

татокот и уште 72 денари и третиот добил $\frac{1}{3}$ од новиот остаток и уште 72 денари. Колку пари поделиле другарите и колку добил секој од нив?

196. Цената на фудбалска топка се зголемила за 20% и сега изнесува 1620 денари. Менаџерот на продавницата забележал дека по покачувањето на цената опаднала продажбата на топката, па затоа одлучил истата да ја намали за 10%. Колку денари сега е повисока цената на топката во однос на цената која топката ја имала пред зголемувањето на цената?

197. За едно евро Пабло си купува леб и млеко. Но, цените се зголемиле за 20%, па сега Пабло може да купи млеко и половина леб. Ако цените се зголемат за уште 20% и Пабло си купи млеко, колку пари ќе му останат?

198. Во една продавница женска ташна чини 2400 денари. Три пријателки минувајќи покрај продавницата го прочитале следното соопштение: „Само денес попуст! Ако во продавницата влезете со 500 денари, тие за нас вредат 1000 денари“. Пријателките пресметале дека ако влезат во продавницата една по друга и секоја купи по една ташна, тие имаат точно пари за да купат три ташни.
Првата влегла со целата сума, а секоја следна влегла со сумата која преостанала по купувањето на претходната. Колку денари имале трите пријателки пред да влезат во продавницата?

199. Ако Вера за една година вложи во банката 25000 денари, таа ќе добие камата од $p\%$. На вложените пари кои се над 25000 денари Вера добива камата од $(p+2)\%$. Колку пари вложила Вера ако каматата на сите пари кои ги вложила била $(p+0,4)\%$?

200. Мирослав од банка позајмил сума од 24000 денари. Годишната каматна стапка е 8%, а заемот треба да се врати по 6 месеци. Колку пари вкупно треба да врати Мирослав?

201. Цената на влезницата за ракометен натпревар е 400 денари. Кога цената на влезницата се намалила, бројот на посетителите се зголемил за 50%, а приходот за 20%. Определи ја новата цена на влезницата?

202. Билетите за ена претстава се продаваат по цени:

Вид билет	За возрасен	За ученик	За дете од предшколска возраст
Цена	450 денари	270 денари	90 денари

На претставата присутвувале 204 лица чии билети вкупно чинеле 60480 денари. За колку бројот на присутните возрасни е поголем од бројот на децата од предшколска возраст?

203. Управителот на зграда која има два влеза почнал да собира пари за да стави нови броеви на вратите на становите. Иванов од станот број 105 изразил сомнеж: Во првиот и вториот влез има еднаков број станови. Зошто од становите во вториот влез на зградата се собрани 40% повеќе пари отколку од становите од првиот влез? Управителот појаснил дека за двоцифрените броеви се плаќа двојно, а за трицифрените тројно повеќе отколку за едноцифрените. Колку станови има во еден влез? (Во целата зграда становите се нумерираат последователно почнувајќи од првиот стан во првиот влез.)

204. Главата на рибата е долга $9\,cm$. Опашката е еднаква на должината на главата плус половина од должината на телото. Телото е долго колку збирот од должините на главата и опашката. Колку е долга рибата?

205. Чекорот на Илина е за 20% пократок од чекорот на Никола, но за исто време Илина прави 20% повеќе чекори од Никола. Определи го односот на нивните брзини.

206. Предните гуми на еден автомобил се трошат за $20000\,km$, а задните за $22000\,km$. На автомобилот истовремено се ставени и предни и задни гуми. По колку километри треба да се сменат местата на предните и задните гуми, за да автомобилот измине најмногу километри додека сите гуми се потрошат?

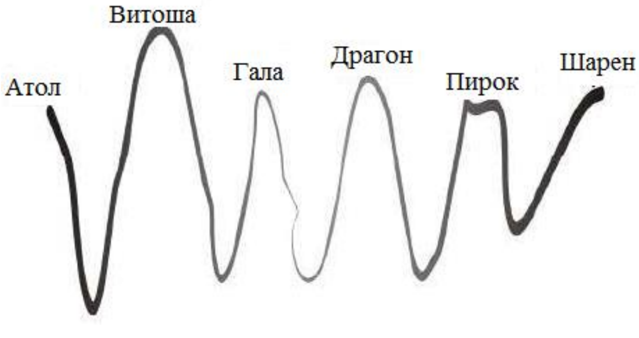
207. Марко со автомобил поминал определен пат во четири етапи. Во првата етапа за една петтина од вкупното време поминал една четвртина од вкупниот пат. Во втората етапа со должина $120\,km$ возел со брзина која е еднаква на средната брзина во последните две етапи. Во третата етапа за 102 минути поминал две третини од патот кој му преостанал по првите две етапи. Преостанатите $72\,km$ ги поминал во четвртата етапа за точно еден час. Определи ја должината на патот кој го поминал Марко, како и колку време тој возел.

208. Патот од местото A до местото B велосиедистот го поминал со постојана брзина од $15\,km/h$. На враќање поливна од патот од местото B до местото A тој возел со постојана брзина од $10\,km/h$, а втората половина ја поминал со постојана брзина од $14\,km/h$. Определи ја просеќната брзина со која велосипедистот го поминал патот од A до B и обратно.

209. Патнички воз го минува патот меѓу местата A и B за 6 часа, а теретен воз го минува за 10 часа. Ако возовите тргнат во пресрет еден кој друг, едниот од A, а другиот од B, по колку време тие ќе се сретнат?

210. Патот меѓу два града автомобил го поминал за 3 дена. Првиот ден автомобилот поминал $\frac{3}{8}$, а вториот ден $\frac{5}{12}$ од целиот пат. Третиот ден поминла $45\,km$ повеќе од $\frac{1}{6}$ од целиот пат. Колку е долг патот меѓу овие два града?

211. Пабло последователно ги поминал шесте планински врвови: Атол, Витоша, Гала, Драгон, Пирок и Шарен, при што растојанието од Аток до Шарен е 10 километри и 500 метри. Од Атол до Пирок тој поминал 7200 метри, при што Гала е точно на средината меѓу нив. Од Витоша до Драгон поминал 3300 метри, а од Драгон до Шарен поминал 4800 метри. Колку метри поминал Пабло од Гала до Драгон?



212. Воз се движи со $54\,km/h$ и за 6 секунди поминува покрај пешак кој во истата насока се движи со брзина од $6\,km/h$. Колку метра е долг возот?

213. Два воза, секој со должина $250\,m$, се разминуваат еден со друг со еднаква брзина од $45\,km/h$. Колку секунди ќе поминат од моментот ко-

га се сретнале машинистите, до моментот кога се сретнале кондукторите кои се наоѓале на задните врати на послените вагони?

214. Марија и Илина тренираат трчање по кружна патека долга $400\,m$. Тие тргнуваат од едно исто место на патеката, но во различни насоки. По 5 минути тие се среќаваат по шести пат. Марија тча со брзина $3\,m/s$. Илина исто така трча со постојана брзина. Определи ја брзината на Илина?

215. Кога од едно полно буре ќе се прелее во друго празно буре $\frac{1}{6}$ од течност, а потоа $\frac{2}{3}$, тогаш второто буре не собира уште 48 литри. Колку литри собира секое буре, ако првото буре собира двапати повеќе течност од второто?

216. Во три цеистерни има вкупно 1560 литри млеко. Ако од првата цистерна одлееме $\frac{3}{7}$ од млекото, од втората одлееме $\frac{1}{4}$ од млекото и од третата одлееме $\frac{1}{5}$, тогаш во сите три цеистерни ќеостане исто количество млеко. Колку млеко има во секоја цистерна?

217. Во три цистерни има млеко. Ако од првата цистерна се одлее $\frac{1}{4}$ од млекото, од втората $\frac{1}{5}$ и од третата $\frac{1}{6}$ од млекото, тогаш во трите цистерни ќе остане исто количество млеко. Колку млеко имало во секоја цистерна, ако во сите цистерни вкупно имало 1135 литри млеко?

218. Во 3 сада е турена вода. Ако $\frac{1}{2}$ од водата во првиот сад ја туриме во вториот сад, потоа $\frac{1}{3}$ од водата која сега е во вториот сад ја туриме во третиот сад и на крајот $\frac{1}{4}$ од водата која е во третиот сад ја туриме во првиот сад, тогаш во трите сада ќе има по $6\,l$ вода. Колку вода имало на почетокот во секој сад?

219. Од полн сад со чист алкохол се одлева $\frac{1}{4}$ од содржината и се долева вода. Потоа од садот се одлева $\frac{1}{3}$ од содржината и се долева вода. Што има сега повеќе во садот, вода или алкохол?

220. Секој од трите сада собира цел број литри вода, а сите три сада заедно собираат 30 литри вода. Ако го наполниме првиот сад, па целата вода ја прелееме во вториот сад, вториот сад ќе биде полн $\frac{2}{3}$, а ко водата ја прелееме во третиот сад, тој ќе биде полн $\frac{3}{4}$. Колку литри собира секој од трите сад?

221. Колку литри чиста дестилирана вода треба да се измешаат со 120 литри 10% (десетпроцентен) раствор на алкохол за да се добие 4% (четирипроцентен) раствор на алкохол?

222. Направен е мешавина од 10 литри 45% раствор на алкохол и 5 литри од 60% алкохол. Колку проценти алкохол содржи добиената мешавина?

223. Трговец продал $32\,kg$ болка, а потоа уште една четвртина од остатокот, по што му останале $126kg$ јаболка. Колку јаболка имал трговецот на почетокот?

224. Во $1000kg$ свежи јагоди има 99% вода. Во текот на транспортот испарило извесно количество вода, така што потоа јагодите тежеле $500\,kg$. Колку проценти вода сега содржат јагодите?

225. Фармерот Иван има два резервоара за вода. Водата од покривот на куќата се собира во резервоар кој собира 100000 литри, а водата од покривот на амбарот во резервоар кој собира 25000 литри. Проекцијата на покривот на куќата е $200\,m^2$, а проекцијата на покривот на амбарот е $80\,m^2$. Во монетот во големиот резервоар има 35000 литри вода, а во малиот резервоар има 13000 литри вода. Според прогнозата за времето, утре ќе врне дожд и Иван сака да е сигурен дека во резервоарите ќе собере што е можно повеќе вода. Дали треба тој определено количество вода да префрли од еден во друг резервоар?

226. Ако $1cm^3$ мраз има маса $0{,}92\,g$, колкава е масата на $1\,dm^3$ мраз?

227. Цистерна полна со акохол има форма на правоаголен паралелопипед чии рабови се со должини $2{,}5\,m$, $160\,cm$ и $7{,}5\,dm$. Колку тони алкохол има во цистерната ако 1 литар алкохол тежи $800\,g$?

228. На дијаграмот десно е прикажана распределбата на учениците од петто до осмо одделение во училиштето на Пабло. Петтоодделенците се 65, а остриот агол е 72°. Колку ученици учат во секое одделение?

229. Распределбата на цвеќињата во цветната градина е прикажана на дијаграмот десно. Бројот на лалињата е 75. Колкку се магнолии? Колку вкупно цвеќиња има во градината?

230. Бројот на розите, каранфилите и млалињата во една продавница за цвеќе се однесува како $3:8:5$. Каранфилите се за 24 повеќе од лалињата. Колку цветови има од секој вид?

231. Во овошната градина има два вида дрвја - јаболка и круши, а јаболката се 40% од сите дрвја. Во текот на пролетта се засадени уште круши и јаболката станале 20% од сите дрвја. Есента се засадени уште јаболка и јаболката станаче 60% од дрвјата. Колку пати се зголемил бројот на дрвјата на крајот од годината?

232. Од сите ученици во едно училиште 70% се пријавиле за учество на натпреварот Кенгур, а 45% се пријавиле за учество училишниот натпревар по математика. Секој ученик се пријавил на барем еден натпревар,а 42 ученика се пријавиле и на двата натпревари. Колку ученици учат во ова училиште?

233. Во седмо одделение на едно основно училиште има 140 ученици. На прашањето колку ученици учат во училиштето директорот на училиштето одговорил: „Бројот на учениците во седмо одделение е еднаков на две седмини од една трстетина од бројот на сите ученици во училиштето.“ Колку ученици има ова училипште?

234. Во математичката секција имало 25 члена. Кога во секцијата се запишале 7 нови членови, процентот на девојчињата во секцијата се зголемил за 10. Колку девојчиња имало потоа во секцијата?

235. Во понеделникот во одделението на Марко биле отсутни $\frac{1}{12}$ од учениците. Во вторникот дошол 1 ученик повеќе и биле отсутни $\frac{1}{18}$ од учениците. Колку ученици учат во одделението на Марко?

236. На состанокот на математичката секција во седмо одделение имало 12 присутни, а биле отсутни $\frac{1}{7}$ од вкупниот број членови на секцијата. Колку членови имала математичката секција во седмо одделение?

237. Оценката на тест со 20 прашања е $2+0,2t$ каде t е бројот на точните одговори. Колкав процент од прашањата се точно одговорени, ако оценката е 4,60?

238. Учениците од едно одделение работеле писмена вежба по математика. Третина од учениците погрешно решиле една задача, четвртина од учениците погрешно решиле две задачи, шестина погрешно решиле три задачи и осмина погрешно ги решиле сите четири задачи. Колку ученици точно ги решиле сите задачи, ако во одделението нема повеќе од 30 ученици?

239. Од 32 ученика во едно одделение оценка 5 по математика имаат 18,75% од учениците. Колку ученици во ова одделение немаат оценка 5 по математика?

240. Бројот на учениците кои учествувале на општинскиот натпревар бил $\overline{abc}$, $a \neq 0$. Прва награда освоиле $\frac{3}{25}$ од вкупниот број натпреварувачи и Вера забележала дека тој број е еднаков на еден од броевите $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ac}$. Колку ученици учествувале на натпреварот?

241. За период од d денови Ана и Јана решиле по еднаков број задачи. Ана решавала по 7 задачи на ден. Јана првиот ден решила една задача, а секој следен ден решавала една задача повеќе од претходниот ден. Определи го d ?

242. Ана и Иван живеат во зграда во која на секој кат има по 5 станови. Бројот на станот на Иван е 4 пати поголем од бројот на станот на Ана, а збиор на броевите на нивните станови е 70. Определи ги броевите на становите на Ана и Иван.

243. На шаховски турнир секој од деветте учесници одиграл по една партија со секој друг учесник. Нерешено завршиле 1,4 пати повеќе партии отколку што завршиле со победник на некој од шахистите. Колку партии завршиле нерешено?

244. Бројот на членовите на библиотеката во 2012. година бил за една петтина поголем отколку во 2011. годинe, во 2013. година било за една петтина поголем отколку во 2012. година, во 2014. година бил за една петтина поголем отколку во 2013. година, а во 2015. година бил за три петтине помал отколку во 2014. година. Бројот на членовите на библиотеката во 2015. година бил за 6176 членови помал отколку во 2011. година. Колку чланови имала библиотеката во 2015. годинe?

245. Кабловска телевизија констатирала дека од сите семејства кои живеат во една населба нејзини претплатници се 97,9%. Кој е најмалиот можен број семејства во оваа населба?

246. Денес дискот на компјутерот на Борјан е пополнет 40%. Секој месец се пополнува 10% од слободниот простор на дискот. Колку слободен простор ќе има на дискот по два месеци, ако целиот диск имакапацитет од 2 гигабајти?

247. Во едно друштво повеќе деца посакале сок, а помалку деца посакале сендвич, а едно дете не избрало ништо. Потоа меѓу љубителите на сендвичи 70% сакале сендвич со шунка, а 30% сакале сендвич со кашкавал. Се покажало дека од тие што избрале сок 56,25% сакале сок од портокал, 37,5% сок од јаболко, а еден одговорил дека сака сок од јагоди. Колку деца биле во ова друштво?

248. Во една компанија работат жени и мажи кои имаат или црна или црвена коса. Мажите се 45% од бројот на сите вработени. Односот на бројот на мажите со црвена коса спрема бројот на мажите со црна коса е еднаков на количникот на бројот на вработените со црвена коса и бројот на вработените со црна коса. Определи го количникот на бројот на мажите со црвена коса и бројот на жените со црвена коса кои се вработени во оваа компанија.

249. Група од n спортски новинари прогнозирале два натпревари. Од нив 20% го погодиле резултатот на првиот натпревар, 25% го погодиле

резултатот на вториот натпревар, 70% немале ниту една точна прогноза и 12 новинари ги погодиле и двата резултата. Определи го n.

250. Мачка и пол за два и пол дена јаде три и пол глувци. Колку глувци ќе изедат 100 мачки за 45 дена?

251. Ангел, Бане и Ване играат со топчиња. Во првиот круг на играта Ангел ги добил половината од топчињата на Бане и третина од топчињата на Ване, по што имал двапати повеќе топчиња отколку на почетокот на играта. Уште по неколку круга Ангел и Бане останале без топчиња, а Ване имал 50 топчиња. Колку топчиња имал Ване на почетокот, ако тој играта ја почнал со помалку топчиња и од Ангел и од Бане?

252. Илија има жолти, црвени и плави топчиња. Црвените и плавите топчиња се во однос $5:7$. Жолтите топчиња се $\frac{1}{7}$ од сите топчиња и се за 9 помалку од црвените. Колку топчиња има Илија?

253. На еден остров $\frac{3}{4}$ од мажите се оженети, а $\frac{2}{3}$ од жените се омажени, при што бројот на оженетите мажи е еднаков на бројот на омажените жени. Колкав дел од населението на овој остров не е во брак?

254. Во една златара има 400 златни прачки. Од секоја прачка се леат 10 златници и останува злато така што од остатокот на 20 прачки може да се излее нова прачка. Колку златници се излеани од дадените златни прачки?

255. Меѓу секои 2017 жители на еден мал град има барем 20 жени и барем 17 мажи. Кој е најголемиот можен број жители на овој град?

256. Во еден ресторант има 19 маси, секоја со по 4 столици. Бројот на зафатените места на неколку од масите е $77\frac{7}{9}\%$ од бројот на зафатените места на останатите маси, а бројот на слободните места на дел од масите е $\frac{5}{6}$ од бројот на слободните места на останатите маси. Определи го најголемиот можен број на маси со по 4 слободни места.

257. Еден модел на ташни се продавал по една иста цена во две продавници A и B. Во месец мај цената на ташните во двете продавници

била зголемена за 20% во продавницата A и за 30% во продавницата B. Во месец јуни цената на ташните била намалена соодветно за 30% во продавницата A и за 20% во продавницата B. Определи го односот на цените на ташните во месец јуни во продавбиците A и B.

258. Неколку фудбалски тима учествувале на турнир на кој секој тим играл по еден натпревар со секој друг тим. На турнирот за победа се добивале по 3 бода, за нерешен резултат по 1 бод и за пораз по 0 бодови. Борис разбрал дека на крајот од турнирот тимовите вкупно освоиле S бодови. Дали Борис може да определи колку тимови учествувале на турнирот и колку натпревари завршиле нерешено ако:
а) $S=41$, б) $S=42$, в) $S=43$, г) $S=44$.

I.4. ГЕОМЕТРИЈА

259. На цртежот десно должината на AB спрема должината на BC се однесува како $1:3$. Должината на BC спрема должината на CD се однесува како $5:8$. Определи го односот на должините на отсечките AC и CD.

260. На права се означени точки A, B, C и D такви што $\overline{AB}=13\,cm$, $\overline{BC}=11\,cm$, $\overline{AD}=12\,cm$ и $\overline{CD}=14\,cm$. Определи го збирот на отсечките BD и AC.

261. Аголот α е седум пати поголем од аголот β, а нивниот збир е еднаков на 72°. Определи ги аглите α и β.

262. Нацртај два суплементни агли и конструирај ги нивните симетрали. Докажи дека симетралите се заемно нормални.

263. За аглите на $\triangle ABC$ важи $\alpha=\beta=\frac{1}{3}\gamma$. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.

264. Аглите α, β, γ се $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{9}{20}$ од правиот агол. Дали овие агли може да бидат внатрепни агли на некој триаголник?

265. Во рамнокрак триаголник симетралата на надворешниот агол при врвот и симетралата на внатрешниот агол при основата се сечат под агол од 28°. Определи ги аглите на овој триаголник.

266. Во триаголникот ABC центрите на впишаната опишаната кружница се симетрични во однос на страната AB. Определи ги внатрешните агли на овој триаголник.

267. Две висини на триаголникот не се помали од страните кон кои се повлечени. Определи ги аглите на овој триаголник.

268. Правите на кои лежат висините на рамнокрак тапоаголен триаголник повлечени кон краците на триаголникот формираат агол од 48°. Определи ги аглите на овој триаголник.

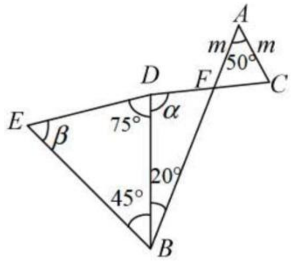
269. Во триаголникот ABC аголот при темето C е еднаков на 40°. Симетралите на внатрешниоти надворешниот агол во темето C во пресекот со правата AB определуваат рамнокрак триаголник CDE. Определи ги аглите на триаголникот ABC.

270. Висината AD повлечена кон кракот BC на рамнокракиот $\triangle ABC$, $\overline{AD}=\overline{BC}$, го дели аголот при основата на два дека кои се разликуваат за 30°. Определи ги внатрешните агли на $\triangle ABC$.

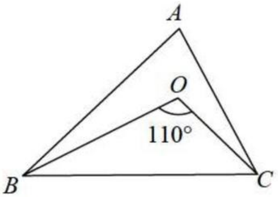
271. Во $\triangle ABC$ важи $\gamma=40^\circ$. Симетралите на аголот γ и надворешниот агол γ_1 ја сечат правата AB во точките D и E така што B лежи меѓу D и E. Триаголникот CDE е рамнокрак. Определи ги внатрешните агли на $\triangle ABC$.

272. Средината на страната AC на $\triangle ABC$ е еднакво оддалечена од другите две страни. Аголот при темето C е еднаков на $\frac{2}{5}$ од аголот при темето B. Определи ги аглите на овој триаголник.

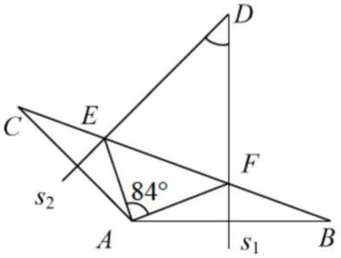
273. Нека α,β,γ се агли на триаголник. За глите α и β се исполнети релациите на цртежот десно. Определи го аголот γ.



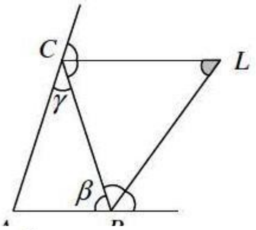
274. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ е избрана точка O таква што $\measuredangle OBC = 2\measuredangle OBA$ и $\measuredangle OCB = 2\measuredangle OCA$. Ако $\measuredangle BOC = 110^\circ$, определи го $\measuredangle BCA$.



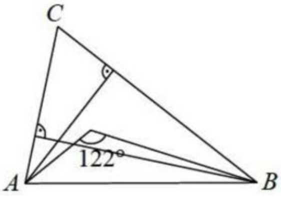
275. На цртежот десно симетралите на страните AB и AC на триаголникот ABC, s_1 и s_2 се сечат во точката D и ја сечат страната BC во точките F и E, соодветно и важи $\measuredangle FAE = 84^\circ$. Определи го $\measuredangle FDE$.



276. Нека CL и BL се симетралите на надворешните агли во темињата C и B на триаголникот ABC (цртеж десно). Нека $CL \parallel AB$ и $\beta : \gamma = 2 : 1$. Определи го $\measuredangle BLC$.



277. Во остроаголниот триаголник ABC симетралите на аглите повлечени во темињата A и B зафаќаат агол од 122°. Определи го аголот кој го зафаќаат висините повлечени во темињата A и B.



278. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$ и $\measuredangle ACB = 80^\circ$. Точката O во триаголникот е таква што $\measuredangle ABO = 30^\circ$ и $\measuredangle BAO = 10^\circ$. Определи го $\measuredangle ACO$.

279. Во рамнокрак $\triangle ABC\,(\overline{AC} = \overline{BC})$, симетралата на $\measuredangle BAC$ у висината AD се сечат под агол од 15°. Опрдели ги аглите на $\triangle ABC$.

280. Во $\triangle ABC, \overline{BC} > \overline{AC}$ аглите α и β се разликуваат за 30°. Ако D е точка на страната BC таква што $\overline{CD} = \overline{AC}$, определи го $\measuredangle BAD$.

281. Надворешните агли на триаголникот се еднакви на 20%, 35% и 45% од збирот на надворешните агли. Определи го аголот меѓу симетралата на најмалиот агол и најмалата страна на триаголникот.

282. Даден е правоаголен $\triangle ABC$. Точката M припаѓа на хипотенузата AB и е таква што $\overline{BM} = \overline{BC}$, а точката N припаѓа на катетата CA и е таква што $\overline{CN} = \overline{CP}$, каде P е подножјето на висината на триаголникот повлечена од темето C. Определи го $\measuredangle CNM$.

283. Симетралите на надворешните агли на $\triangle ABC$ формираат триаголник чии внатрешни агли се еднакви на $30^\circ, 70^\circ, 80^\circ$. Определи ги внатрешните агли на $\triangle ABC$.

284. Во $\triangle ABC$ отсечката BD е висина, а отсечката BM е симетрала на агол. Во $\triangle BMC$ отсечката MK е висина. Ако $\measuredangle MBD = 20^\circ$ и $\measuredangle BMK = 50^\circ$, определи ги аглите на $\triangle ABC$.

285. Даден е $\triangle ABC$, $\measuredangle ACB = 90^\circ$. Ако симетралата на хипотенузата и тежишната линија CC' зафаќаат агол од 50°, определи ги аглите на $\triangle ABC$.

286. Во $\triangle ABC$ внатрешниот агол во темето A е еднаков на 48°, а симетралите на внатрешниот и надворешниот агол во темето A ја сечат правата BC во точките M и K, соодветно. Ако $\triangle AMK$ е рамнокрак, определи ги аглите на $\triangle ABC$.

287. Даден е рамнокрак триаголник ABC со основа AB и агол при врвот C еднаков на 30°. Точките D и E се подножја на висините повлечени од темињата A и B, соодветно, а точките F и G се средини на страните BC и AC, соодветно. Докажи дека правите DG и EF се заемно нормални.

288. Дадени се квадрат $ABCD$ и рамностран триаголник CDE кој е во надворешноста на квадратот. Точката F е пресек на отсечките AE и CD, Определи ја големината на $\measuredangle EFC$.

289. Правиот агол на триаголник чии остри агли се еднакви на 36° и 54° со висината, симетралата на аголот и тежишната линија кои тргнуваат

од темето на правиот агол е поделен на четири агли. Определи ги големините на овие четири агли.

290. Даден е рамнокрак триаголник ABC, со основа AB. Симетралата на $\measuredangle BAC$ со спротивниот крак формира агол од 57°. Определи го аголот меѓу симетралите на аглите при основата на триаголникот ABC.

291. Нека симетралата на кракот AC на рамнокракиот $\triangle ABC$ и симетралата на $\measuredangle BCA$ се сечат во точка која припаѓа на кракот AB. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.

292. Во правоаголниот $\triangle ABC$ ($\measuredangle C = 90^\circ$) важи $\overline{BC} < \overline{AC}$. Нека D, E, F се точки на хипотенузата AB такви што CD е визина, CE е симетралата на правиот агол и CF е тежишна линија. Ако еден од аглите $\measuredangle BCD$, $\measuredangle DCE$, $\measuredangle ECF$ и $\measuredangle FCA$ е двапати поголем од некој друг агол од нив, определи ги аглите на триаголникот.

293. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{AC}$. На правата BC е земена точка D така што C е меѓу B и D. Докажи дека $\measuredangle ABD > \measuredangle ADB$.

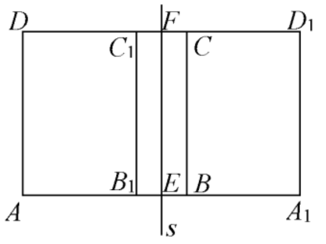
294. Во $\triangle ABC$ ($\overline{BC} > \overline{AC}$) аглите α и β се разликуваат за 30°. Ако D е точка од страната BC таква што $\overline{AC} = \overline{CD}$, определи го $\measuredangle BAD$.

295. Квадратна нива со плоштина $6162{,}25\, m^2$ треба да се загради со 3 реда жица. Колку метри жица се потребни за заградување на нивата?

296. Периметарот на правоаголник со должини на страни x и y е еднаков на 200, а неговата плоштина е 634. Определи ја вредноста на изразот $x^2y + y^2x$.

297. Градината на дедо Марко има форма на правоаголник со должина $36\, m$ и ширина еднаква на $\frac{5}{6}$ од должината. Определи ги периметарот и плоштината на градината.

298. Квадратите $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ се осносиметрични во однос на правата s (цртеж десно). Периметарот на квадратот $ABCD$ е еднаков на $24\, cm$, а периметарот на правоаголникот AA_1D_1D е еднаков на $34\, cm$.



Определи го периметарот на правоаголникот $AEFD$.

299. За колку проценти ќе се зголеми плоштината на квадратот, ако неговиот периметар се зголеми за 40%?

300. Подот на една соба има плоштина $21\,m^2$ и на него се послани три килими во форма на правоаголник. Плоштината на првиот е $8\,m^2$, на вториот е $7\,m^2$ и на третиот е $6\,m^2$. По два килими заеднички покриваат површина со плоштина $2\,m^2$, а сите три заеднички покриваат површина со плоштина $1\,m^2$.

     а) Колкава е плоштината на делот од подот кој не е покриен со килимите?

     б) Колкава е површината на делот од подот кој е покриен само со најголемиот килим?

301. Квадрат и правоаголник имаат еднакви периметри кои изнесуваат $48\,cm$. Определи ги должините на страните на правоаголникот, ако должината на подолгата страна на правоаголникот е еднаква на $\frac{3}{2}$ од должината на страната на квадратот.

302. Дадени се три квадрати со плоштини $4\,cm^2, 9\,cm^2, 36\,cm^2$. Два од дадените квадрати треба да се поделат на по два дела, така што од добиените 5 делови да може да се состави нов квадрат. Со цртеж прикажи ги поделбите и новиот квадрат.

303. Определи го бројот на триаголниците со периметар 20, чии страни се цели броеви.

304. Определи го периметарот на рамнокрак триаголник таков што должините на две негови страни се $17\,cm$ и $7\,cm$.

305. Даден е триаголник чии должини на страни изразени во сантиметри се цели броеви. Определи ги најголемиот и најмалиот можен периметар на овој триаголник ако едната негова страна има должина $2019\,cm$, а другата има должина $2018\,cm$.

306. Мерните броеви на страните на рамнокрак триаголник се дадени со следните равенства $a = 265 - 7x, b = 81 + x, c = 115 + 3x$, каде x е раци-

онален број. Колку најмногу може да биде периметарот на овој триаголник?

307. Во триаголникот ABC мерните броеви на должините на страните се три последователни природни броја. Нека P е средината на страната BC и нека симетралата на $\measuredangle BCA$ нормална на отсечката AP. Определи ги мерните броеви на должините на страните на триаголникот ABC.

308. Докажи дека во произволен триаголник должината на секоја тежишна линија е помала од неговиот полупериметар.

309. Определи ги сите остроаголни триаголници чии мерни броеви на аглите (изразени во степени) се прости броеви.

310. Точката S е центар на кружницата впишана во $\triangle ABC$, $\overline{AC} = 13\,cm$ и $\overline{BC} = 14\,cm$. Правата a која минува низ точката S и е паралелна на страната AB ги сече страните AC и BC во точките P и Q, соодветно. Определи го периметарот на $\triangle CPQ$.

311. Должините на страните на $\triangle ABC$, изразени во сантиметри, се природни броеви и важи $b = 3a$ и $c = 36\,cm$. Определи ги најголемата и најмалата можна вредност на периметарот на $\triangle ABC$.

312. Должината на страната AB на $\triangle ABC$ е еднаква на $5\,cm$, а должината на висината CD е еднаква на $3\,cm$. Дали може периметарот на овој триаголник да биде еднаков на $10\frac{1}{3}\,cm$?

313. Во триаголникот $ABC\,(\overline{AB} > \overline{AC})$ низ точките A и C се повлечени прави кои се нормални на симетралата на $\measuredangle ABC$. Овие нормали ги сечат правите BC и AB во точките K и M, соодветно. Определи ја должината на страната AB ако $\overline{KC} = 5\,cm$ и $\overline{MB} = 8\,cm$.

314. Во рамнокрак триаголник $ABC\,(\overline{AC} = \overline{BC})$, со периметар еднаков на $22\,cm$ е повлечена тежишната линија AA_1. Периметрите на триаголниците ABA_1 и AA_1C се $17\,cm$ и $19\,cm$, соодветно. Определи ги должините на страите на $\triangle ABC$.

315. Периметарот на $\triangle ABC$ е еднаков на 34. За страните a,b,c важи $a:b=3:8$ и $b:c=4:3$. Определи ги должините на страните на $\triangle ABC$.

316. Во рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC}=\overline{BC}$, со периметар $22\,cm$, е повлечена тежишната линија AA_1. Ако $L_{\triangle ABA_1}=17\,cm$ и $L_{\triangle AA_1C}=19\,cm$, определи ги должините на страните на $\triangle ABC$.

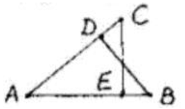
317. При мерењето на должините на страните и едната дијагонала на даден четириаголник се добиени броевите $1\,cm, 2\,cm, 2{,}8\,cm, 5\,cm, 7{,}5\,cm$. Определи ја должината на измерената дијагонала.

318. Докажи дека секоја тежишна линија на триаголникот:
а) е помала од полупериметарот на триаголникот,
б) е помала од полузбирот на страните кои имаат заедничка крајна точка со таа тежишна линија.

319. Даден е остроаголен триаголник ABC и полуправите Ax и Ay, такве што аглите xAB и yAC немаат заеднички внатрешни точки со триаголникот и $\measuredangle xAB=\measuredangle yAC<90^\circ$. Нека се B' и C' подножјата на нормалите повлечени од темињата B и C на полуправите Ax и Ay, соодветно, и нека M е средината на страната BC. Докажи дека $\overline{MB'}=\overline{MC'}$.

320. На страните AB и BC на ромбот $AABCD$ се земени точки E и F така што $\overline{AE}=\overline{BF}$. Ако $\measuredangle BAD=60^\circ$, докажи дека $\triangle DEF$ е рамностран.

321. На цртежот десно важи $\overline{AB}=\overline{AC}$ и $\overline{AD}=\overline{AE}$. Докажи дека $\overline{BD}=\overline{CE}$.



322. На краците на остриот $\measuredangle xOy$ се дадени точки A и B такви што $\overline{OA}=\overline{OB}$. Ако M е произволна точка на симетралата на $\measuredangle xOy$, тогаш $\overline{MA}=\overline{MB}$. Докажи!

323. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC и AC во точките P и Q, соодветно. Правата која минува низ средината на страната AB и е паралелна на правата PQ ги сече правите BC и AC во точките D и E, соодветно. Докажи дека $\overline{AE}=\overline{BD}$.

324. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ во кој важи $\measuredangle ACB = 45^\circ$. Докажи дека $\overline{CH} = \overline{AB}$.

325. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Нека AD и BE се висините, H е ортоцентарот, M е средината на страната AB и G е средината на отсечката CH. Докажи дека правата MG е симетрала на отсечката DE.

326. Докажи дека центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ е најблиску до она теме на $\triangle ABC$ кое е теме на неговиот најголем агол.

327. Во $\triangle ABC$ важи $\measuredangle A = 120^\circ, \measuredangle B = 20^\circ$, а симетралата на аголот A (до пресекот со спротивната страна) има должина $2\,cm$. Определи ја разликата на должините на страните BC и AB.

328. На катетите AC и BC на правоаголниот триаголник ABC соодветно се земени точки M и N такви што $\overline{AM} = \overline{BN}$. Нека D е точка таква што ABD е рамнокрак правоаголен триаголник со прав агол во темето D, при што точките C и D се од иста страна на правата AB. Докажи дека MND е рамнокрак правоаголен триаголник.

329. Нека ABC е остроаголен триаголник и точките D и E се подножјата на висините повлечени од темињата A и B, соодветно. Докажи дека симетралите на отсечките DB и EA се сечат на страната AB.

330. Даден е рамнокрак триаголник $ABC\,(\overline{AB} = \overline{BC})$. На полуправите $CA,$ $AB,$ BC земени се точки D, E, F, соодветно такви што $\overline{AD} = \overline{AC},$ $\overline{BE} = \overline{BA},$ $\overline{CF} = \overline{CB}$. Определи го збирот $\measuredangle ADB + \measuredangle BEC + \measuredangle CFA$.

331. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ со основа AB. На продолжението на отсечката CA, преку темето A, земена е произволна точка D, а на отсечката BC земена е точка E така што $\overline{AD} = \overline{BE}$. Докажи дека основата AB ја полови отсечката DE.

332. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C. Ако хипотенузата AB ја продолжиме преку темето A за отсечка $\overline{AM} = \overline{AC}$ и преку темето B за отсечка $\overline{BN} = \overline{BC}$, тогаш $\measuredangle MCN = 135^\circ$. Докажи!

333. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C. Во надворешноста на триаголникот се коснтруирани квадрати $ABMN$ и $ACPQ$. Докажи дека центрите на овие квадрати се на еднакво растојание од средината D на катетата BC.

334. Во $\triangle ABC$ точката M е средина на отсечката AB. Правата p која минува низ точката M и е паралелна со симетралата на $\measuredangle ACB$ ги сече правите BC и AC во точките D и E ,соодветно. Докажи дека $\triangle CDE$ е рамнокрак.

335. Даден е $\triangle ABC$. Во темето A е повлечена отсечка AD нормална на AC и таква што $\overline{AD} = \overline{AC}$ и е повлечена отсечка AE нормална на AB и таква што $\overline{AE} = \overline{AB}$. Притоа точките D и B се на различни страни од AC, а точките C и E се на различни страни од AB. Докажи дека $\overline{BD} = \overline{CE}$.

336. Во рамнокракиот $\triangle ABC \, (\overline{AC} = \overline{BC})$, со периметар $22\,cm$ е повлечена тежишната линија AA_1. Периметрите на триаголниците ABA_1 и AA_1C се еднакви на $17\,cm$ и $19\,cm$. Определи ги должините на страните на триаголникот $\triangle ABC$.

337. Даден е агол од 63°. Само со линијар и шестар подели го на:
а) седум еднакви агли,
б) три еднакви агли.

338. Конструирај правоаголен триаголник ABC за кој се дадени хипотенузата $c = 6\,cm$ и висината $h_c = 2\,cm$.

339. Конструирај рамнокрак триаголник со агол при врвот 105° и висина која соодветствува на кракот еднаква на $4\,cm$.

340. Конструирај триаголник за кој се дадени $c = 4\,cm$, $a + b = 9\,cm$ и $\alpha = 75^\circ$.

341. Конструирај триаголник за кој е дадено $t_c = 5\,cm, b = 4\,cm$ и $\alpha = 75^\circ$.

342. Конструирај $\triangle ABC$ ако $a = 6\,cm, \alpha = 60^\circ$ и $h_c = 4\,cm$.

343. Конструирај триаголник ABC ако $h_a = 3\,cm$, $t_a = 3{,}5\,cm$ и $\beta = 30^\circ$.

344. Конструирај $\triangle ABC$ за кој се познати страната $c = 7\,cm$, висината $h_c = 4\,cm$ и радиусот на опишаната кружница $R = 5\,cm$.

345. Во рамнината се дадени права p и точки A' и B' кои се од иста страна на правата p. Конструирај $\triangle ABC$ таков што $A, B \in p$ и AA' и BB' се висини на $\triangle ABC$.

346. Конструирај $\triangle ABC$ таков што $a = 6\,cm, h_a = 4\,cm$ и $h_b = 5\,cm$.

347. Конструирај го $\triangle ABC$ за кој се дадени $h_c = 3\,cm, t_c = 4\,cm$ и радиусот на опишаната кружница $R = 3\,cm$.

348. Конструирај го $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle A = 75^\circ, h_b = 3\,cm$ и $h_c = 4\,cm$.

349. Конструирај $\triangle ABC$ ако е даден збирот на страните $\overline{AB} + \overline{AC} = 8\,cm$, $\measuredangle CAB = 60^\circ$ и висината $\overline{CC'} = 3\,cm$.

350. Дадени се три неколинеарни точки A_1, B_1 и C'. Конструирај $\triangle ABC$ ако A_1 и B_1 се средините на страните BC и AC, соодветно и ако C' е подножјето на висината повлечена од темето C.

351. Конструирај четириаголник $ABCD$ ако

$$\overline{AB} = 5\,cm, \overline{BC} = 6\,cm, \overline{CD} = 6\,cm, \overline{DA} = 3\,cm \text{ и } \measuredangle BAC = \measuredangle DAC.$$

352. Дадени се три неколинерани точки A, C, E. Конструирај правоаголник $ABCD$ ако A и C се негови темиња, а E е точка на дијагоналата BD.

353. Конструирај трапез $ABCD$ за кој се дадени

$$\overline{AB} = 7\,cm, \overline{CD} = 3\,cm, \measuredangle DAB = 90^\circ \text{ и } \measuredangle BAC = 45^\circ.$$

354. Во правоаголник P даден е помал правоаголник P'. Конструирај права s која множеството точки $P \setminus P'$ го дели на два дела со еднакви плоштини.

355. Дадени се права p, точка A на неа и точка M која не лежи на правата p. Конструирај кружница k која минува низ точката M и ја допира кружницата k во точката A.

356. Еден многуаголник вкупно има 252 дијагонали. Колку страни има овој многуаголник?

357. Определи го бројот на страните на многуаголникот кај кој бројот на страните е два пати поголем од бројот на дијагоналите повлечени од едно невово теме.

358. Дали постои четириаголник чии должини на страни се $7\frac{2}{15}\,cm$, $34{,}98\,cm$, $25{,}53\,cm$ и $2\frac{1}{6}\,cm$. Образложи го одговорот?

359. Од три рамнострани триаголници со должина на страна a состави трапез. Определи ги аглите и средната линија на трапезот.

360. Аглите на четириаголникот $ABCD$, изразени во степени, се еднакви на $x+20, x-20, x+100$ и $x+60$. Докажи дека четириаголникот $ABCD$ е трапез.

361. Дијагоналите на делтоидот со неговите страни зафаќаат осум агли. Два од овие агли се еднакви на 78° и 43°. Определи ги аглите на делтоидот.

362. Даден е праваоголник $ABCD, \overline{AB} > \overline{BC}$. Нормалата од темето B повлечена кон дијагоналата AC, ја сече дијагоналата AC во точката E и отсечката AE е три пати подолга од отсечката CE. Определи го аголот под кој се сечат дијагоналите на правоаголникот.

363. Даден е правоаголник $ABCD\,(\overline{AB} > \overline{BC})$. Нормалата повлечена од темето B на дијагоналата AC ја сече дијагоналата AC во точката E така што отсечката AE е три пати подолга од отсечката CE. Определи под кој агол се сечат дијагоналите на правоаголникот.

364. Во правоаголникот $ABCD$ симетралата на аголот во темето B ги сече правите AC и AD во точките E и F, соодветно. Низ точката E е

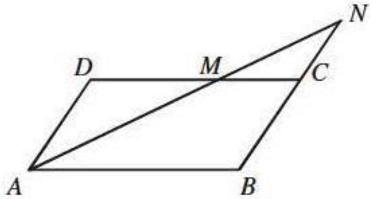
повлечена права паралелна со AB која дијагоналата BD ја сече во точката K. Докажи дека правата FK е нормална на дијагоналата AC.

365. Даден е остроаголен разностран триаголник ABC со ортоцентар H и центар на опишаната кружница O. Нека D е втората пресечна точка на првата BO и опишаната кружница. Докажи дека четириаголникот $AHCD$ е паралелограм.

366. Даден е остроаголен триаголник ABC со ортоцентар H и центар на опишаната кружница O. Нека точката D е таква што $ADBH$ е паралелограм. Докажи дека O е средина на отсечката CD.

367. Над секоја страна на $\triangle ABC$ е конструиран правоаголник со иста ширина, а потоа се повлечени правите кои ги содржат вторите страни на правоаголниците кои се паралелни со страните на $\triangle ABC$. Нека овие прави се сечат во точките A_1, B_1 и C_1. Докажи дека правите AA_1, BB_1 и CC_1 се сечат во една точка.

368. На цртежот десно AM е симетрала на $\measuredangle BAD$, $\overline{DM} = 5\,cm$ и $\overline{CN} = 3\,cm$. Определи го периметарот на паралелограмот $ABCD$.



369. Даден е паралелограм $ABCD$. Нека CF и DE се паралелни висини на паралелограмот. Докажи дека триаголниците AED и BCF се складни.

370. Докажи дека за секој трапез (кој не е паралелограм) разликата на должините на неговите основи е поголема од разликата на должините на неговите краци.

371. Даден е трапез $ABCD\,(AB \parallel CD)$. Нека P е пресекот на симетралите на надворешните агли во темињата A и D, а Q е пресекот на надворешните агли во темињата B и C. Докажи дека должината на отсечката PQ е еднаква на половината на периметарот на трапезот $ABCD$.

372. Дијагоналите AC и BD на трапезот $ABCD$ ја сечат неговата средна линија EF во точките M и N, соодветно и притоа важи $\overline{MN} =$

$\overline{EM}+\overline{NF}$. Долж=ината на помалата основа на трапезот е $10\,cm$. Определи ја должината на неговата поголема основа.

373. Даден е паралелограм $ABCD$ со тап агол во темето B. Страните AB и BC се продолжени преку темето B и на продолженијата се земени точки E и F соодветно така што BE и BF се основи на рамнокраките триаголници BCE и ABF. Докажи дека триаголникот DEF е рамнокрак.

374. Даден е паралелограм $ABCD$ и права p која со паралелограмот има само една заедничка точка и тоа темето D. Нека A',B',C' се подножјата на нормалите повлечени од точките A,B,C на правата p. Докажи дека $\overline{AA'}+\overline{CC'}=\overline{BB'}$.

375. Во паралелограмот $ABCD$ на страната AB е дадена точка K таква што $\measuredangle AKD=\measuredangle DKC$. Ако S е средината на отсечката KD, докажи дека CS е нормнална на DK.

376. Даден е квадрат $ABCD$ со центар S. Докажи дека

$$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=\vec{o}.$$

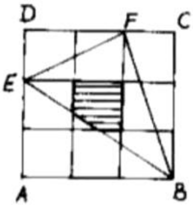
377. Во рамностран $\triangle ABC$ е повлечена висината $CD\,(D\in AB)$. Симетралата на $\measuredangle CAD$ ја сече отсечката CD во точката E и симетралата на $\measuredangle DCA$ ја сече отсечката AD во точката F. Двете симетрали се сечат во точката S. Определи ги внатрешните агли на четириаголникот $DESF$.

378. Определи го аголот кој го зафаќаат правите на кои лежат две несоседни страни на правилен петаголник.

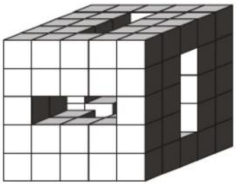
379. Во конвексен четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AB}=\overline{CD}$. Нека M,N,P,Q се средини на отсечките BD,BC,AC,AD. Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ е ромб.

380. Плоштината на паралелограмот е еднаква на P. Определи ја плоштината на триаголникот ABM, каде M е произволна точка од страната CD.

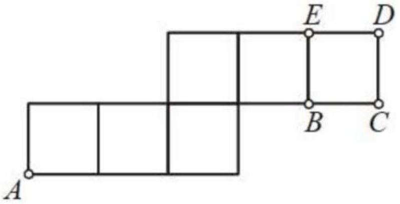
381. Квадратот $ABCD$ со должина на страна $3\,cm$ е поделен на 9 складни единечни квадрати (цртеж десно).
а) Определи ја плоштината на триаголникот EBF.
б) Определи ја плоштината на штрафираниот дел од фигурата.



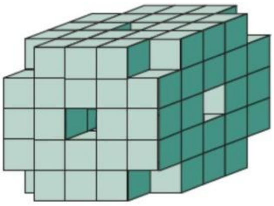
382. Од 125 коцки со раб $1\,cm$ е направена коцка со раб $5\,cm$. Потоа некои коцки се извадени и е добиено телото прикажано на цртежот десно. (Телото има три отвори кои одат од една до спротивната на неа страна.)
а) Пресметај го волуменот на добиеното тело.
б) Пресметај ја плоштината на добиеното тело.



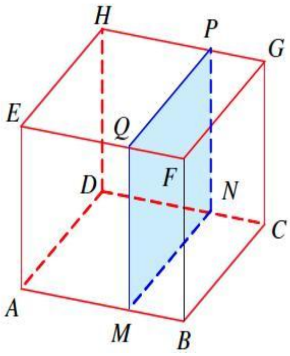
383. На цртежот десно е дадена мрежа од коцка. Со која буква ќе се совпадне буквата A кога мрежата ќе ја превиткаш и ќе направиш коцка?



384. Од коцка составена од 125 коцки со раб $1\,cm$ се отстранети коцките во темињата на големата коцка. Потоа се отстранети сите коцки кои ги поврзуваат централните коцки на предната и задната страна, како и коцките кои ги поврзуваат централните коцки на левата и десната, односно на горната и долната страна.
а) Определи го волуменот на добиеното тело.
б) Определи ја плоштината на добиеното тело.



385. Коцка $ABCDEFGH$ со раб $10\,cm$ е поделена со рамнина паралелна на ѕидот $BCFG$, на два правоаголни паралелопипеди (цртеж десно). Плоштината на паралелопипедот $MBCN$ $QFGP$ е $\frac{2}{3}$ од плоштината на паралелопипедот $AMNDEQPH$. Определи ја плоштината на паралелопипедот $AMNDEQPH$.



386. Како треба да се составаат 12 коцки со раб a за да се добија квадар со најмала и квадар со најголема плоштина? Определи ги овие плоштини.

387. За да се обојат сите ѕидови во внатрешноста на една комора во форма на квадар потребно е двапати повеќе боја отколку што е потребно за да се обои таванот на комората. Должината на комората е еднаква на $7\,m$, а ширината е еднаква на $5\,m$. Определи го волуменот на комората.

388. Ако секој раб на правоаголен паралелопипед се зголеми за по $1cm$, тогаш неговата плоштина се зголемува за $7102\,cm^2$.

а) Определи го збирот на должините на рабовите на паралелопипедот?
б) Ако мерните броеви на рабовите изразени во сантиметри се цели броеви определи ја најмалата можна должина на најголемиот раб.

389. Во коцка со раб $60\,cm$ се наредени 216 исти топки кои се една до друга и секоја топка од секоја страна (горе, долу, напред, назад, лебо и десно) се допира или до ѕид на кутијата или до топка. Топките треба да се прередат во кутија во форма на правоаголен паралелопипед и повторно да се наредени на истиот начин. Какви може да бидат димензиите на новата кутија, ако таа не е повисока од $120\,cm$?

390. Пресметај ја вредноста на изразот $(a+b):c$ каде a,b,c се бројот на темињата, рабовите и ѕидовите на осумаголна призма.

I.5. ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

391. Како само со помош на садови од $4\,l$ и $9\,l$ од чешма ќе налееме $6\,l$ вода?

392. Како може од јаже со должина $\frac{2}{3}\,m$ да се отсече $0,5\,m$ без користење на метро?

393. Во кутија има 100 топчиња: 31 црвено, 10 плави, 20 зелени, 15 кафеави, 10 портокалови и 14 жолти. Колку топчиња треба да извади Пабло за да е сигурен дека меѓу нив има 15 топчиња од иста боја?

394. Во еден двор има 2017 кокопки, некои од кои се црвени, а останатите се бели. Меѓу секои 71 кокошки има барем 17 бели кокошки. Кој е најголемиот можен број црвени кокошки?

395. Нека a, b, c се броеви различни од 0. Колку различни вредности може да има изразот $\frac{|a|}{a} + \frac{b}{|b|} + \frac{|c|}{c}$?

396. Секој од броевите $a_1, a_2, ..., a_{10}$ е еднаков на 1 или -1. Дали е можно да важи равенството

$$a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_9a_{10} + a_{10}a_1 = 0.$$

397. Во државата Латернија се пишува со писмо чија азбука содржи 19 букви, а името на секој жител се состои од три зборови. Законот во оваа држава пропишува дека не смее да постојат двајца жители со исти иницијали (почетните букви на сите три дела на името). Дали може во Латернија да има 7000 жители?

398. а) Распореди 6 точки на 4 отсечки така што на секоја отсечка да има по 3 точки.

б) Нацртај 5 отсечки со еднакви должини така што на секоја отсечка да има по 4 од вкупно 10 точки.

в) Нацртај 6 отсечки на кои се наоѓаат 9 точки и тоа по 3 на секоја отсечка.

г) Нацртај 6 отсечки на кои се наоѓаат 12 точки и тоа по 4 на секоја отсечка.

д) Нареди 24 столици во 6 реда, така што во секој ред ќе има по 5 столици.

399. Во рамнината се дадени 27 точки такви што 7 се обоени во црвена, а по 10 во плава и зелена боја. Меѓу точките не постојат три колинеарни точки. Колку триаголници чии темиња се обоени во точно две различни бои се определени со дадените точки?

400. Дадени се 4 плави и 5 црвени точки такви што меѓу деветте точки нема три колинерани точки. Колку триаголници чии темиња не се од иста боја определуваат овие точки?

401. Секој природен број е обоен во црвена или плава боја. Познато е дека ако бројот n е црвен, тогаш бројот $n+6$ е исто такла црвен; ако m е

плав, тогаш $m+15$ исто така е плав. Дали може боењето да се направи така што меѓу природните броеви од 1 до 2015 да има :

а) точно 671 црвени,

б) точно 1000 црвени.

402. На колку начини бројот 2018 може да се запише како производ на точно три различни цели броеви? Редоследот на множителите не е важен.

403. Колку има парни петцифрени природни броеви чии цифри се меѓусебно различни и се различни од нула, и секои две цифри се заемно прости?

404. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 10000 и чиј производ на цифрите е еднаков на 42.

405. Во седмо одделение на едно училиште има 154 ученици. За работата на математичката школа во овие одделенија се предложени 13 теми. Секоја од темите им се допаѓа на половината од учениците. Ученик се запишува во школата, ако му се допаѓаат најмалку 11 од предложените теми. Определи го збирот на цифрите на најголемиот можен број ученици кои може да се запишат во школата?

406. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 2019 и чиј производ на цифри е еднаков на 42.

407. На колку начини бројот 250 може да се запише како производ на шест меѓусебно различни цели броеви?

408. На еден меѓународен турнир во карате учествувале 2019 каратисти од 63 земји. Докажи дека постои земја од која има најмалку 33 каратисти.

409. За колку петорки (a,b,c,d,e) природни броеви е точно неравенството $a+b+c+d+e\leq 10$? (Редоследот на броевите е важен. На пример, петорката $(1,1,1,2,3)$ е различна од петорката $(1,1,2,3,1)$.)

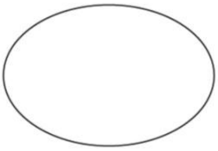
410. Определи го бројот на сите петцифрени броеви $\overline{abcde}$ такви што $b=a+c$ и $d=c+e$. (Ако a,b,c,d,e се цифри и $a\neq 0$, тогаш $\overline{abcde}$ го означува бројот $10^4a+10^3b+10^2c+10d+e$.)

411. Определи го најголемиот број различни природни броеви, кои се помали или еднакви на 2016 и се такви што нивниот збир не е делив со нивната разлика.

412. Ако $a > b > c > d > e$, најдете го бројот на петцифрените броеви $\overline{abcde}$ деливи со $4, 5$ и 9.

413. На колку начини бројот 450 може да се претстави како производ на шест различни цели броеви чија апсолутна вредност не е поголема од 6? (Производите не ги сметаме за различни ако се разликуваат само по редоследот на множителите.)

414. Кој е најголемиот број делови на кои со помош на пет прави може да се подели фигурата прикажана на цртежот десно?



415. Филип составува триаголници од чкорчиња. Колку различни триаголници може да состави ако за еден триаголник може да употртеби најмногу 10 чкорчиња со иста должина?

416. Определи го бројот на триаголниците чиј периметар е еднаков на 49 и чии должини на страни се прости броеви.

417. Точката M е средина на страната AB на квадратот $ABCD$. Ги поврзуваме секои две од точките A, B, C, D, M. Колку триаголници ќе има на добиениот цртеж? (Темињата на триаголниците не мора да се меѓу споменатите пет точки.)

418. Определи го бројот на остроаголните триаголници чии темиња се наоѓаат во темињата на правилен седумаголник.

419. Ангел располага со летвички со различни должини чии мерни броеви изразени во сантиметри се сите прости броеви од 1 до 40. Со неколку од летвичките направил квадратна рамка со страна $40\,cm$. Со кои летвички Ангел ја направил рамката?

420. На секоја страна на триаголникот земени се по 4 точки така што ниту една не се совпаѓа со темињата на триаголникот. Колку триаголници се опреелени со овие точки?

421. Во рамнината се дадени 10 прави такви што меѓу било кои четири од дадените прави има две паралелни прави. Докажи дека меѓу десетте прави има четири паралелни прави.

422. Дадени се 101 природни броеви. Докажи дека меѓу нив постојат два броја чија разлика е делива со 100.

423. а) Во 11 кафези се сместени 55 зајаци. Докажи дека најмалку во еден кафез има непарен број зајаци.

  б) Во 13 кафези се сместени 55 зајаци. Докажи дека во еден кафез се сместени најмалку 5 зајаци.

424. Во едно училиште учат 1111 ученици. Докажи дека во тоа училиште има најмалку два ученика кои имаат исти иницијали и има најмалку четири ученика кои слават роденден во ист ден.

425. Во едно деветгодишно училиште во секое одделение има по 4 паралелки, а во училиштето учат 1199 ученици. Докажи дека има одделение со најмалку 34 ученици.

426. Во едно одделение има 64 ученици. Дали може 2018 бомбони да се поделат на учениците од ова одделение така што секој ученик ќе добие различен број бомбони?

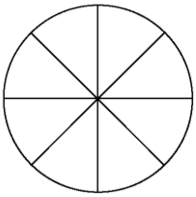
427. Нека a,b,c,d,e,f,g се во некој редослед броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Докажи дека $(a-1)(b-2)(c-3)(d-4)(e-5)(f-6)(g-7)$ е парен број.

428. Градовите A,B,C,D,E,F се поврзани секој со секој со автобуска или железничка линија (не и со двете). Докажи дека при било каков распоред на линииите секогаш постојат 3 града кои меѓусебно се поврзани со линии од ист вид.

429. Во еден регион на регионалниот натпревар по математика учествувале 2200 ученици кои се родени 2004, 2005, 2006, 2007, 2008 и 2009 година. Докажи дека постојат најмалку два ученика кои се родени во ист ден и во иста година. Докажи дека постојат 7 натпреварувачи кои слават роденден ист ден.

430. Броевите a,b,c,d,e,f,g,h,k се различни од нула. Докажи дека меѓу броевите $aek, dch, bfg, -gec, -afh$ и $-bdk$ има барем еден позитивен и барем еден негативен.

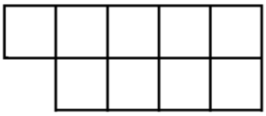
431. Дали постојат дванаесет различни природни броеви такви што меѓу нив да не постојат седум броеви чиј збир е делив со 7?



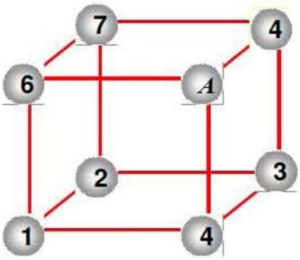
432. Круг е поделен на осум исечоци (цртеж десно). Во секој исечок запиши различни троцифрени броеви кои се запишуваат само со цифрите 1 и 2 така што секои два броја кои се запишани во исечоци со заеднички радиус се разликуваат само во една цифра, т.е. разликата на тие два броја е 1, 10 или 100.

433. На колку различни начини празните полиња во квадратната таблица на цртежот десно може да се пополнат со природни броеви така што збирот на броевите во секој ред и во секојаколона ќе биде еднаков на 2006?

1		
	1	
		1



434. Правоаголник со димензии 2×5 е поделен на 10 единечни квадратчиња, а потоа е отстрането долното лево аголно квадратче (цртеж десно). Во преостанатите 9 квадратчиња треба да се распоредат броевите 1, 2, 3, ..., 9 така што збирот на броевите во секоја колона, почнувајќи од втората, е за еден поголем од збирот на броевите во претходната колона. На колку начини ова може да се направи?

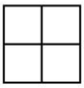


435. Во секое теме на коцката десно е запишан по еден број. Во еден чекор на два броја кои лежат на еден и ист раб може да се додаде 1. По неколку чекори сите броеви биле еднакви. Определи ги вредностите на A за кои е тоа можно.

436. Броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 распореди ги во темињата на дадена коцка така што збировите на броевите запишани на сите ѕидови од коцката се еднакви.

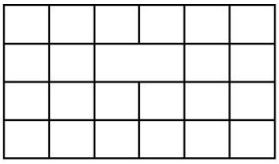
437. Дали квадратна 3×3 табла може да се пополни со броевите $-3, 0$ и 3 така што збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала е различен?

438. Во полињата на квадратна табела 4×4 распореди прости броеви така што производот на броевите во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков на 1989.



439. Во кутија има еднакви по димензија картончиња. Предната страна на секое картонче е поделена на четири квадратчиња (цртеж десно). Секое квадратче е обоено во жолта, плава, зелена или црвена боја. Определи го најмалиот број картончиња кои треба да ги извадиме за да сме сигурни дека меѓу картончињата има најмалку пет еднакво обоени? (Картончињат може да се вртат и има доволно многу од сите можни видови боења.)

440. Од множеството $\{1,2,3,4,5\}$ се избираат три броја и со овие три броја се пополнува квадратна 3×3 таблица така што во секој ред и секоја колона се запишани различни броеви. На колку начини тоа може да се направи?

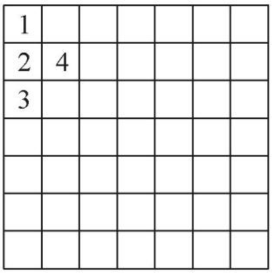


441. Колку правоаголници се содржани во фгурата прикажана на цртежот десно? (Квадратите се исто така правоаголници.)

442. На тркалезна маса со дијаметар $160\,cm$ се распоредени 2018 еднакви монети со дијаметар $20\,mm$. Ниту една монета нема дел кој е надвор од масата и не постојат две монети кои целосно или делумно се преклопуваат. Колкав дел од масата не е покриен со монетите?

443. На секое поле од табла со димензии 4×4 има две мравки Секоја мравка преминува во поле сосоедно по страна, така што од секое поле двете мравки преминуваат во различни полиња. Кој е најголемиот број полиња што моше да останат празни?

444. Дадена е табла составена од мали квадратчиња. Под *табло* ќе подразбираме квадратен дел од таблата исечен по страните на квадратчињата.



а) Колку различни таблоа содржи квадратна табла со димензии 7×7 од која е исечено централното квадратче?

б) Колку различни таблоа содржи квадратна табла со димензии 9×9 од која е исечено централното квадратче?

в) Пресметај го бројот на таблоата за табла 7×7 од која недостасува едно од квадратчињата 1, 2, 3 или 4.

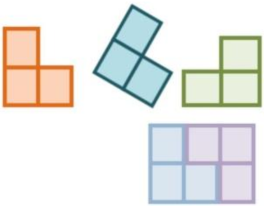
445. Во таблицата даден на цртежот десно во секои две полиња кои имаат заедничка страна се запишани броеви кои не се заемно прости. Притоа броевите во таблицата се различни и најголемиот број е 76.

2	14	8	4	38
16	60	12	76	19
40	5	15	6	57
42	35	20	52	39
44	30	5	10	26

а) Пополни таблица 5×5 со истите својства во која ќе користиш броеви помали од 100 и ќе искористиш што е можно повече различни броеви од броевите запишани во горната таблица.

б) Пополни таблица 5×5 со истите својства во која најголемиот број запишан во неа ќе биде најмалиот можен број.

446. Располагаме со доволен број аголни тримина со кои правоаголник со димензии 2×3 може да се покрие како на цртежот десно.



а) Со аголни тримина покриј го правоаголникот $m\times n$ ако

- $m=6, n=3$,
- $m=6, n=4$ така што ќе нема правоаголници со помали димензии кои се составени од тримеина.

б) Во секој од правоаголници $3\times 6, 4\times 6$ и 12×12 постави најмал можен број аголни тримина така што не може да се постави тримино кое ќе покрива само непокрини полиња.

447. На шаховски турнир учествуваче 40 деца од градовите Штип. Велес и Ресен. Секое дете играло со секое по една партија. Определи го најголемиот број партии кои може да ги одиграат деца од различни градови.

448. Во една продавница има 350 сувенири. Секои два сувенири се продаваат по различна цена и цените им се 1 ден., 2 ден., 3 ден., ..., 350 ден. Елена има 50 монети од по 2 денара и 50 монети од по 5 денари и нема други пари. Таа сака да купи еден сувенир на кој ќе ја плати точната сума без да и се враќа кусур. Колку различни избори на сувениорт може да направи Елена?

449. Еден извиднички одред иам 30 членови и тоа: 15 сениори и 15 јуниори. За следниот собир на извидниците правилото за избор на учесниците било: Учесниците застануваат во круг. Почнува да се брои од командантот на одредоот кој е сениор и се брои во круг. Деветтиот извидник нема да учествува и излегува од кругот. Броењето продолжува од следниот и така се додека не останат 15 извидници кои ќе учествуваат на собирот. Како треба во кругот да се распоредат извидниците за да на собирот учествуваат само сениори?

450. Шест фудбалски тима учествуваат на турнир во кој секој тим игра со секој друг тим по два пати. Победникот во секој натпревар добива 3 бода, поразениот 0 бодови, а за нерешен резултат двата тима добиваат по 1 бод. На крајот на турнирот табелата изгледала ваша:

1) Стрела	22 бода,
2) Виор	17 бода
3) Бура	14 бода
4) Победа	12 бода
5) Непобедени	10 бода
6) Напрдок	7 бода.

Колку натпревари завршиле нерешено?

451. Групата од девет цифри 123456789 е последователно запишана 2015 пати и така е добиен еден многуцифрен бој. Во овој број први се избришани сите цифри кои се запишани на непарните места, гледано од лево на десно. Во добиениот број (со околу два пати помалку цифри) е направено истото: избришани се сите броеви кои се на непарните места. Оваа операција се прави се додека не остане една цифра. Која е таа цифра?

452. Дванаесет деца застанале во круг и почнале игра со топка. Правилото било секое дете да ја додава топката на дете кое е лево од него. На колку начини може да се подава топката така што сите девца ќе учествуваат во играта?

453. На годишната средба на Зелените Змејови во редица се наредиле 1000 земјови кои имале една или две глави. Ако еден змеј е со една глава, тогаш секој змеј кој стои преку девет змејови од него е со две глави. Кој е најголемиот број змејови со една глава?

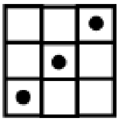
454. а) Дадени се 10 картички на секоја од кои е запишана по една од цифрите од 0 до 4, секоја цифра точно на две картички. Дали може картичките да се наредат во ред така што двете нули ќе бидат една до друга, двете единици преку една картичка, двете двојки преку две картички, двете тројки преку три картички и двете четворки преку четири чартички.

б) Дадени се 20 картички на секоја од кои е запишана по една од цифрите од 0 до 9, секоја цифра точно на две картички. Дали може картичките да се наредат во ред така што двете нули ќе бидат една до друга, двете единици преку една картичка итн. двете деветки преку девет чартички.

455. Алекса на таблата запишал 60 броја, не задолжително различни. Бојан за секои два запишани броја го пресметал нивниот производ. Се покажало дека меѓу добиените производи има точно 600 негативни броеви. Колку нули може да има меѓу броевите кои ги запишал Алекса.

456. На таблата е запишан произволен трицифрен природен број чија цифра на единиците не е 0. Во секој потез од таблата се брише бројот кој е запишан на таблата и наместо него се запишува апсолутната разлика на тој број и бројот запишан со истите цифри но во обратен редослед. Докажи дека на таблата по неколку потези ќе биде запишан бројот 0.

457. На полица се наредени томовите на една десеттомна енциклопедија. Во еден чекор можеме да ги замениме местата на два соседни тома. Кој е најмалиот број чекори со кој томовите со сигурност може да се наредат според броевите во редослед 1, 2, 3, ..., 10 одлево-надесно, при произволен почетен распоред?



458. Ненултите цифри се распоредени во деветте квадратчиња на цртежот, така што добиените трицифрени броеви хоризонтално отлево надесно се деливи со 21, а добиените трицифрени броеви вертикално одгоре надолу се деливи со 12. Најдете го збирот на цифрите на трицифрениот број запишани на означената дијагонала.

459. Во темињата и на страните на n-аголник се запишани различни природни броеви од 1 до $2n$ така што бројот запишан на секоја страна на n-аголникот е еднаков на збирот на броевите запишани во темињата, кои лежат на таа страна. Дали е тоа можно, ако:

а) $n=3$; б) $n=5$; в) $n=6$?

II ОСМО ОДДЕЛЕНИЕ

II.1. АЛГЕБРА

1. Цифрата на единиците на бројот n^2+2n е еднаква на 4 (n е природен број). Определи ја цифрата на десетките на бројот n^2+2n.

2. Еден од двоцифрените броеви $\overline{ab}, \overline{bc}$ и $\overline{ca}$ е аритметичка средина на другите два броја. Докажи дека $a=b=c$.

3. Дадени се броевите $\overline{ABBCD}, \overline{BAC}, \overline{AC}$ и C. Почнувајќи од вториот број секој број е еднаков на производот на цифрите на претходниот број. Определи ги овие броеви. (Во броевите на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.)

4. Определи го четирицифрениот број $\overline{abcd}$ за кој важи
$$\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=1990.$$

5. Определи го бројот на решенијата на бројниот ребус
$$\overline{ab}+\overline{cde}+\overline{fghi}=2006$$
во кој буквите a,b,c,d,e,f,g,h,i соодветствуваат на различни цифри?

6. Реши го бројниот ребус во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:
$$\overline{abcd}\cdot 9=\overline{dcba}.$$

7. Реши го бројниот ребус во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:
$$\overline{ab}^a=\overline{bcb}.$$

8. Реши го бројниот ребус во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:
$$\overline{aa}^b=\overline{abba}.$$

9. Производот на два трицифрени броја се запишува само со помош на неколку цифри 7. Кои се тие броеви?

10. Определи ја цифрата на единиците на збирот

$$1^1+2^2+3^3+4^4+5^5+6^6+7^7+8^8+9^9+10^{10}.$$

11. Определи ја цифрата на единиците на производот

$$(9-5)\cdot(9^2-5^2)\cdot(9^3-5^3)\cdot\ldots\cdot(9^{10}-5^{10}).$$

12. Природниот број n е запишан со помош на 150 единици и определен број нули. Дали n е точен квадрат на природен број?

13. Пресметај ја вредноста на изразот: $\frac{4^{13}-4^{12}-6\cdot4^{10}}{2^{19}+2^{17}+2^{13}}$.

14. Пресметај ја вредноста на изразот: $\frac{5\cdot4^{15}\cdot9^9-4\cdot3^{20}\cdot8^9}{5\cdot2^9\cdot6^{19}-7\cdot2^{29}\cdot27^6}$.

15. Преесметај ја вредноста на изразот: $\frac{2^{35}\cdot3^{32}-4^{17}\cdot81^8}{256^4\cdot9^{16}}$.

16. Пресметај ја вредноста на изразот: $(\frac{9^{10}\cdot(-4)^{25}\cdot18^{10}}{8^{50}\cdot(-3)^{220}})^{2017}+(\frac{12^{100}\cdot3^{100}}{(-6)^{200}})^{2018}$.

17. Изразот $\frac{16^{n+1}\cdot2^{5n+3}}{8^{3n}}:\frac{4^2}{4^n}$ запиши го во вид на степен со основа 2.

18. Докажи дека вредноста на изразот $\frac{(8^5)^{4n}}{(32^{3n})^4}$ не зависи од n.

19. Докажи дека изразот $\frac{7^{2n+3}\cdot7^{3n+2}}{7^{5n+2}}$, $n\in\mathbb{N}$ не зависи од вредноста на n.

20. Определи го природниот број n за кој важи:

а) $\frac{3\cdot5^9+2\cdot5^9}{5^6}=5^n$ б) $\frac{3^{12}\cdot9^{11}:27^{10}}{3^n}=3$.

21. Определи го бројот n за кој важи $180^{3n-4}=0{,}018^n\cdot(0{,}1)^{-8}$.

22. Определи ги сите вредности на природниот број n за кои важи

$$(5\sqrt{2})^n < (2\sqrt{5})^4 .$$

23. Докажи дека $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$ е точен квадрат на природен број.

24. Кој број е поголем 202^{303} или 303^{202}?

25. Кој број е поголем 31^{11} или 17^{14}?

26. Броевите $20^{19}, 2^{109}, 210^9$ и 10^{29} подреди ги по големина во опаѓачки редослед.

27. Броевите

$$a = 22^{22}, b = 222^2, c = 22^{22^2}, d = 22^{2^2}, e = 2^{2^{22}}, \ f = 2^{222}, d = 2^{2^{2^2}}$$

подреди ги по големина во опаѓачки редослед.

28. Дропките $x = \frac{111...110}{111...111}, y = \frac{222...221}{222...222}, z = \frac{333...331}{333...333}$, во кои секој броител и секој именител содржи по 2020 цифри, подреди ги по големина во опаѓачки редослед.

29. Што е поголемо $5^{13} \cdot 13^{31} \cdot 31^5$ или $13^5 \cdot 31^{13} \cdot 5^{31}$?

30. Бројот 2^{2007} има m цифри, а бројот 5^{2007} има n цифри. Определи го збирот $m+n$.

31. Нека $a:b = 2:3$ и $a+b = c$, Определи ја вредноста на изразот $\frac{2a-b+3c}{6a+b-c}$.

32. Определи ја вреDrдноста на изразот: $\frac{(1,75:\frac{2}{3}-1,75\cdot 1\frac{1}{8}):\frac{7}{12}}{(\frac{17}{80}-0,0325):400} : (6,79 : 0,7 + 0,3)$.

33. Пресметај ја вредноста на изразот: $15,75^2 - 14,25^2$.

34. Определи ја вредноста на изразот:
    - а) $2013^2 - 2012 \cdot 2014$,
    - б) $\frac{2012^2-4024-8}{2008\cdot 2012\cdot 2014}$,
    - в) $201120112014 \cdot 201120112013 - 201120112016 \cdot 201120112011$.

35. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{B-A}{1010}$, каде

$$A=1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+...+2017\cdot 2018$$

и

$$B=2\cdot 3+4\cdot 5+6\cdot 7+...+2018\cdot 2019.$$

36. Рационалниот број 0,12121212... запиши го како дропка.

37. Пресметај ја вредноста на изразот $3,\overline{3}\cdot 6,\overline{6}$. Резултатот запиши го како децимален број. (Забелешка: $3,\overline{3}=3,33333$

38. Определи ги цифрите a и b $(a\neq b)$ така што бројот $0,ab(b)$ биде еднаков на нескратлива дропка кај која збирот на броителот и именителот е еднаков на 17.

39. Определи ги цифрите a и b $(a\neq b)$ така што бројот $0,ab(ab)$ биде еднаков на нескратлива дропка кај која збирот на броителот и именителот е еднаков на 17.

40. Реши ја равенката

$$\tfrac{1}{4}(\tfrac{2}{3}x+7)-\tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{5}{2})-\tfrac{1}{8}(\tfrac{3}{5}x+7)=0.$$

41. Реши ја равенката:

а) $\frac{3-5x}{2}=1-\frac{5x-2}{4}$, б) $(x-2)^2=(x-4)^2$.

42. Реши ја равенката

а) $(x+2)^2-(x-3)^2-\frac{2x-1}{2}=4$, б) $\frac{x-2}{5}-\frac{3x+2}{6}=\frac{2}{3}-x$,

в) $(((x:2)\cdot 3):4)\cdot 5+6=7$,

43. Определи го параметарот a така што решенијата на равенката $||a|x|-3|+3|=3$ се цели броеви.

44. Определи го параметарот k така што $\frac{4}{7}$ е решение на равенката $(3x-1)k=2x-1$.

45. За кои целобројни вредности на параметарот a равенката

$$\tfrac{3}{2}x-3=2(1-a)$$

има негативно решение.

46. Нека x помалото решение на равенката $|x|=3$, а y е решението на равенката $\frac{1}{1+\frac{y}{1+\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{3}$. Определи го збирот $3x+2y$.

47. Определи ја најмалата можна вредност на $a:b$, ако $a<b<0$ и
$$||3a-4b|-4b|=|2a+5b|.$$

48. а) Реши ја равенката $|x|+|x+1|+|x+2|=2$.
б) За кои природни броеви n равенката $|x|+|x+1|+...+|x+n|=n$ има решение.

49. Определи го збирот на корените на равенката $|-2x-1|=3$.

50. Нека броевите a и b се такви што равенството $|ax+2|=|x+b|$ е исполнето за секој x. Определи го производот ab.

51. Нека a,b,c,d се ненулти реални броеви за кои изразите
$$A=|2013x+a|+|bx+2013| \text{ и } B=|cx+d|-|x-2013|$$
примаат една иста вредност за секој x. Определи ги броевите a и b.

52. Определи ја најмалата можна вредност на изразот:
а) $|x-1|+|x-2|+|x-3|$,
б) $|x-1|+|x-2|+|x-3|+...+|x-9|$.

53. За броевите a,b,c,d важи $c<d, a+b=c+d$ и $a+d<b+c$. Подреди ги овие броеви по големина.

54. Докажи, ако x и y се реални броеви такви што $x>2$ и $y>2$, тогаш $xy>x+y$.

55. За кои вредности на променливата x важи:
а) $\frac{1}{x}<1$, б) $\frac{-5}{3-x}<0$, в) $|x|=x$.

56. Реши ја неравенката: $\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}>-\frac{5}{4}$.

57. Реши ја неравенката: $-\frac{1}{6}x-\frac{3}{4}<-\frac{2}{3}$ и прикажи го множеството решенија на бројната права.

58. Реши ја неравенката: $\frac{1}{3}<\frac{1-n}{5}<\frac{22}{33}$. Кои цели броеви се решенија на дадената неравенка?

59. Реши ја неравенката:

$$|x-2|<2x+1.$$

60. За броевите a,b,c важи $a+b=332, b+c=408, c+a=466$. Определи ги овие броеви.

61. За кои вредности на параметарот m системот равенки

$$\begin{cases} mx-y=2 \\ 2x+y=3m \end{cases}$$

има целобројно решение?

62. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1987 \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1988 \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=1989. \end{cases}$$

63. Дадена е функцијата $f(x)=-3x+1$. Пресметај $f(-2)$ и $f(\frac{2}{7})$.

64. Дадена е функцијата $f(x)=-\frac{1}{2}x-5$. Пресметај $f(-3)$ и $f(\frac{7}{2})$.

65. Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е зададена со $f(x)=-\frac{1}{2}x-3$. Пресметај $f(-\frac{4}{3})+f(\frac{3}{4})$.

66. Линеарната функција $f(x)=ax+b$ е таква што $f(6)=0$ и $f(3)=-3$. Нацртај го графикот на функцијата $g(x)=\frac{1}{3}f(x)+2$.

67. За функцијата $f(x)=ax+b$ важи $f(4)=2f(2)$. Пресметај $f(0)$.

68. Кој од подредените парови $(-1,-\frac{3}{2}),(0,-\frac{1}{2})$ и $(10,-11)$ ја задоволува равенката $x+y=-\frac{1}{2}$?

69. Дадена е функцијата $f(x)=mx$. Определи го параметарот m така што функцијата минува низ точката $M(-1,2)$. За најдената вредност на m докажи дека изразот $f(-n)f(-n-1)$, $n\in\mathbb{N}$ е делив со 8.

70. Определи го параметарот k така што правата

$$(k+2)x-ky=(k-1)y+x-15$$

ќе минува низ точката $A(2,3)$.

71. Дадена е функцијата $y=(2m+1)x+6$.

а) Определи ја вредноста на параметарот m така што графикот на функцијата минува низ точката $A(4,3)$.

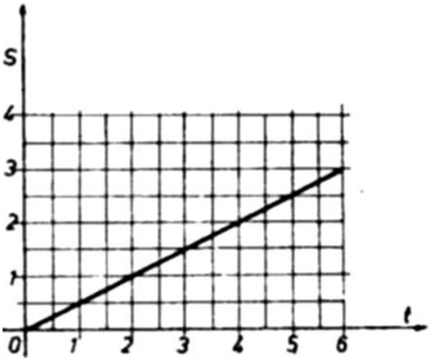
б) Опре3дели ја оддалеченоста на координатниот почеток до таа права.

72. Определи го бројот m така што точката $A(-2,2)$ припаѓа на графикот на функцијата $y=(-3m+2)x+m-1$. Потоа нацртај го графикот на функцијата и најди ги пресечните точки со координатните оски.

73. Дадени се правите $y=mx+m-1$ и $y=nx+3$. Определи ги параметрите m и n така што првата права минува низ координатниот почеток, а втората права на $x-$оската отсекува отсечка со должина -3. За најдените вредности на m и n реши ја неравенсвката

$$|mx+m-1|>|nx+3|.$$

74. На цртежот десно графички е прикажано како во зависност од времето t (во секунди) при рамномерно движење се менува патот s (во метри) кој го поминува некое тело. За кулку секунди телото минува пат од $1m$? Колкав пат телото минува за 1 секунда?



75. Определи ја функцијата $f(x) = kx + n$ чиј график е паралелен на графикот на функцијата $g(x) = 5x + 3$ и минува низ точката $A(1,10)$.

76. Што е поголемо $2 - \sqrt{5}$ или $\frac{-1}{2+\sqrt{5}}$?

77. Определи го најмалиот и најголемиот природен број x за кој бројот $a = \sqrt{66 - \sqrt{x+1}}$ исто така е природен.

78. Определи ги сите реалне броеви a такви што броевите $a + \sqrt{15}$ и $\frac{1}{a} - \sqrt{15}$ се цели.

79. Дејан напишал комјутерска програма со која се множат три од внесените шест број и се испишува нивниот производ. Програмата трите од внесените шест броја ги избира случајно и може еден број да го избере повеќе пати. Дејан ги внесол броевите $\sqrt{7}, \sqrt{9}, 4, 5, 6, \sqrt{11}$. Колку различни рационални броеви може да испише комјутерот?

80. Дали $\sqrt{a}$ е рационален број, ако:
   а) $a = 1^{100} + 2^{100} + ... + 2003^{100}$,
   б) $a = 1^{103} + 2^{103} + ... + 2006^{103}$.

81. Докажи дека $\sqrt{2} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}}$ е рационален број.

82. Дали бројот $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - 1 + \sqrt{2}$ е рационален или ирационален.

83. Дали $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{7-2\sqrt{12}}$ е рационален број?

84. Докажи дека $\sqrt{5}$ е ирационален број.

85. Докажи дека бројот $\sqrt{2} + 2$ е ирационален.

86. Пресметај: $\sqrt{6+\sqrt{35}} + \sqrt{6-\sqrt{35}}$.

87. Пресметај: $(6+\sqrt{35})(\sqrt{14}-\sqrt{10})\sqrt{6-\sqrt{35}}$.

88. Нека a и b се непарни цели броеви. Докажи дека бројот $\sqrt{a^2+b^2}$ е ирационален.

89. Докажи дека бројот $\sqrt{\overline{abcabc}}$ не е рационален.

90. Докажи дека бројот $a=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{899}+\sqrt{900}}$ е природен.

91. Определи ја ведноста на изразот

$$\sqrt{(x-\sqrt{5})^2}-\sqrt{(7-x)^2}-(x-\sqrt{5})(7-x),$$

аа $x=7+\sqrt{5}$.

92. Ако $\sqrt{49-x^2}-\sqrt{25-x^2}=3$, определи ја вредноста на изразот

$$\sqrt{49-x^2}+\sqrt{25-x^2}.$$

93. Упрости го изразот $\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(x-1)^2}+2\sqrt{3}$, ако $x=2-\sqrt{3}$.

94. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+...+\frac{1}{2008\sqrt{2007}+2007\sqrt{2008}}.$$

95. Упрости го изразот:

$$3(x-1)^2-\tfrac{5}{3}(x+1)^2-\tfrac{4}{3}(x-2)^2.$$

96. Докажи дека $(ab+cd)^2=(a^2+c^2)(b^2+d^2)$ ако и само ако $ad=bc$.

97. Докажи дека ако $(x+y-2)^2=x^2+y^2$, тогаш

$$(x-2)(y^2+(y-2)^2)=(y-2)(x^2+(x-2)^2).$$

98. Нека $2a+b=-1$ и $a\neq -b$. Определи ја вредноста на изразот

$$2a^2+3ab+a+b^2+b.$$

99. Нека $a^2+b^2+c^2+2017=6(10a-7c)=52b$. Определи ја вредноста на изразот $a-b+c$.

100. Определи ја бројната вредноста на изразот $a(a+2)+c(c-2)-2ac$, ако $a-c=7$.

101. Определи ги сите тројки позитивни реални броеви a,b,c такви што $abc=1$ и $ab+bc+ca+a+b+c=6$.

102. Определи ја вредноста на изразот $xy-2yz$ ако x,y,z се реални броеви такви што

$$x^2+6y=4(xz-z^2-1) \text{ и } 2x+3y=4z.$$

103. Нека x и y се различни реални броеви за кои важи

$$y(x^2+2019)=x(y^2+2019).$$

Определи ја вредноста на производот xy.

104. Нека $a+b+c=0$ и $a^2+b^2+c^2=1$. Определи ја вредноста на изразот $a^4+b^4+c^4$.

105. За реалниот број $a, a>1$ важи $a-\sqrt{a}=\frac{1}{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}$. Определи ја вредноста на изразот $a+\frac{1}{a}$.

106. Определи ги реалните броеви x,y,z за кои важи

$$xy+yz+zx=2x\sqrt{y-1}+2y\sqrt{z-1}+2z\sqrt{x-1}.$$

107. За $x=-1{,}5$ и $y=0,2$ пресметај ја вредноста на изразот

$$(4x-3y)^2-(2x-y)(8x-9y).$$

108. Определи ја вредноста на изразот

$$\frac{m^4+(m^2-1)^2}{1+m^2(m-1)},$$

за $m=(2+\frac{1}{3})^3(1-\frac{1}{2})^2(1-\frac{1}{7})^3$

109. Определи ја вредноста на изразот $\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}-\frac{ab}{a+b}-\frac{cd}{c+d}$, ако $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

110. Пресметај ја вредноста на изразот a^2+b^2, ако $a+b=24$ и $ab=143$.

111. Нека $a+b=1$ и $a^2+b^2=2$. Определи ја вредноста на изразот a^4+b^4.

112. Нека x и y се реални броеви такви што $x+y=xy=-1$. Определи ја вредноста на изразот x^9+y^9.

113. Ако деленикот е $a^4+b^4+12a^2b^2$, делителот е еднаков на количникот и остатокот е $10a^2b^2$, определи го делителот (количникот).

114. Докажи дека вредноста на полиномот

$$P(x,y)=2x^2+3y^2+7xy+5x-2$$

е еднаква на 1 за $2x+y-1=0$.

115. За полиномите $A(x)$ и $B(x)$ е исполнето:

$$A(x)+4x^2+1=2x^2-3 \text{ и } B(x)-(2x^2-3x-1)=5x-4.$$

Определи го полиномот $C(x)=A(x)\cdot B(x)$.

116. Разложи го на множители изразот: n^3+7n^2-36.

117. Полиномот x^3+3x^2-4x разложи го на прости множители.

118. Изразот x^3+4x^2+x-6 разложи го на множители.

119. Изразот $(3x^2-21)^2-x^4-10x^2-25$ разложи го на множители.

120. Разложи го на прости множители изразот:

$$4b^2(b-2)+4a^2(2-a)+a^2b^2(a-b).$$

121. Определи ја вредноста на изразот

$$\frac{(2ab+b)(a^3-3ab^5+ab)+(a^3-2ab)(a^2+b)}{(a^2b-2b^2)(2a^3-b)-(64a^2+48ab+9b^2)(a^5-b^4)}$$

ако $4a^2+9b^2+4a-24b+17=0$.

122. Коефициентите на полиномот $P(x)$ од втор степен се три едноцифрени позитивни броеви. Ако $P(10)=245$ пресметај $P(100)$ и $P(-10)$.

123. Докажи дека не постои полином $P(x)=ax^2+bx+c$, $a,b,c\in\mathbb{Z}$ таков што $P(7)=1985$ и $P(17)=1986$.

124. Дадена е функцијата $f(x)=x^3+3x^2-4$. Определи $f(99998)$.

125. Даден е полиномот $P(x)=4x^4+x^3+8x^2+x+4$.

а) Запиши го дадениот полином како производ на два полинома од втор степен.

б) Докажи дека $2\,|\,P(n)$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

126. Даден е полиномот $P(x,y)=(2x-5y)^2-(x+3y)^2-2x(x-17y)$. Определи го збирот на коефицинтите на дадениот полином. Полиномот $P(x,y)$ разложи го на прости множители.

127. Определи ја вредноста на полиномот $P(x,y)=x^{2019}+2019y$ ако

$$x^2+y^2+2x-6y+10=0.$$

128. Определи ја вредноста на полиномот $P(x,y)=2019x^2-1989y^2$, ако x и y го задоволуваат равенството $x^2+y^2+2x-2y+2=0$.

129. Кои од точките $A(-\frac{3}{4},-12)$, $B(\frac{6}{5},\frac{5}{6})$ и $C(15,\frac{2}{5})$ припаѓаат на графикот на функцијата $f(x)=\frac{6}{x}$.

130. За функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ важи $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$. Пресметај $f(1)$.

131. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$x^{1988}+y^6+z^4+146=2x^{994}+16y^3+18z^2.$$

132. Упрости го изразот:

$$(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})^2+(\frac{x}{z}+\frac{z}{x})^2+(\frac{y}{z}+\frac{z}{y})^2-(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})(\frac{x}{z}+\frac{z}{x})(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}).$$

133. Упрости го изразот: $\dfrac{(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2})(\frac{x-y}{x+y}-1)}{(\frac{x+y}{x-y}+1)(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})}$.

134. Упрости го изразот: $\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{19^3-1}{19^3+1}$.

135. Определи ја најмалата вредност на изразот $\frac{\overline{ab}}{a+b}$, каде $\overline{ab}$ е двоцифрен број и $a+b$ е збирот на неговите цифри.

136. Определи ја најмалата вредност на изразот $\frac{\overline{abc}}{a+b+c}$, каде $\overline{abc}$ е трицифрен број и $a+b+c$ е збирот на неговите цифри.

137. За кои вредности на променливите x и y изразот
$$A(x,y)=2x^2+2xy+y^2-2x+2y+2$$
прима најмала вредност?

138. Определи ја најмалата вредност на изразот
$$A=2a^2-2ab+5b^2-4a-16b+21,$$
како и вредностите на a и b за кои истата се достигнува.

139. Определи ја најголемата вредност на изразот $2(3x+10y)-(x^2+4y^2)$.

140. За кои броеви m и n изразот $\frac{1-(3m+n-2)^2}{(2m+3n-5)^2+1}$ прима најголема вредност?

141. Докажи дека за $a\neq\pm\frac{1}{2}$ изразот $4a^2[(\frac{2a}{2a-1}-\frac{1}{2a+1})-(\frac{1}{2a-1}-\frac{-1}{2a+1})]$ е позитивен.

142. Докажи дека за секој x важи
$$(3x-4)(7x+8)-1{,}5x(24x+4)-5(1-2x)<0.$$

143. Ако $a+b\geq 1$, докажи дека $a^4+b^4\geq\frac{1}{8}$.

144. Определи ги сите природни броеви n такви што неравенството
$$(x+y+z)^2\leq n(x^2+y^2+z^2)$$
е исполнето за секои реални броеви x,y и z.

145. Нека a,b,c се позитивни броеви. Докажи дека $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq a+b+c$.

146. За целите броеви a и b важи $a^2-14a+b^2-6b=6$. Определи ја најмалата вредност на изразот $4a-3b$.

147. Определи го природниот број a за кој изразот $M=(a^2+3a+1)^2-1$ прима најмала можна вредност поголема од 1000.

148. Во магичниот квадрат прикажан на цртежот десно збирот на броевите запишани во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков на 1. Пресметај ја вредноста на изразот $a+bg+cf+de$.

0,5	*a*	*b*
c	*d*	0,25
e	*f*	*g*

149. За секој позитивен број x со $[x]$ го означуваме најголемиот цел број кој е помал или еднаков на x (на пример, $[2,3]=2,\ [-1,5]=-2, [\frac{4}{3}]=1$ итн. Определи го бројот на репенијата на равенката $[x]=\frac{4x-1}{5}$.

150. Определи го бројот на решенијата на равенката $[x]=\frac{3x-1}{7}$.

II.2. ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

151. Определи ги сите четирицифрени броеви $\overline{abcd}$ кои се точни квадрати и се такви што постои цифра $k, k>0$ со својство да бројот чии цифри од лево кон десно се последователно $a-k,b-k,c-k,d-k$ е исто така точен квадрат.

152. Определи го целиот број a таков што

$$m=(3a-2)(a-1) \text{ и } n=a(2a-1)$$

се последователни парни броеви.

153. Нека x и y се цели броеви. Ако првиот број се подели со вториот, се добива колични 2 и остаток 2, а ако нивниот збир се подели со нивната разлика, се добива количник 2 и остаток 8. Кои се тие броеви?

154. Докажи дека бројот $3^{1988}+3^{1990}$ еделив со 10.

155. Докажи дека за секој трицифрен број важи: или бројот е делив со 3, или двоцифрен број, односно едноцифрен број составен од неговите цифри е делив со 3.

156. Докажи дека квадрат на природен број при делење со 4 дава остаток 0 или 1.

157. Колку делители во множеството $\mathbb{N}$ има бројот $2^3 \cdot 4^5 \cdot 6^7$? Колку од овие делители се такви што се точен куб на некој природен број?

158. Определи го бројот на делителите на бројот $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^4$.

159. Колку делители на бројот $4^{2019} \cdot 19^4$ се еднакви на четврти степен на некој природен број?

160. Докажи дека збирот на квадратите на произволни пет последователни природни броеви е делив со 5, но не е делив со 25.

161. Со $d(n)$ го означуваме бројот на природните делители на природниот број n.

а) Пресметај $d(20^9)$.

б) Ако $\overline{abc}$ е трицифрен број чии цифри се 1, 2, 3 во некој редослед, определи ја најголемата можна вредност на $d(\overline{abcabc})$.

162. Определи го најголемиот трицифрен број кој има точно три делители?

163. Ако n е парен природен број, тогаш изразот $n^3 - 1990n$ е делив со 6. Докажи!

164. Ако $13 | (a^2 + b^2)$, докажи дека $13 | (2a + 3b)(3a + 2b)$.

165. Дали постои природен број n таков што важи

$$(1020^n - 1) | (2010^n - 1)?$$

166. За целите броеви x, y, z, t важи $9x - 42y = 21z - 49t$. Докажи дека производот xt е делив со 21.

167. Докажи дека за секој природен број n бројот $\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$ исто така е природен број.

168. Определи ги сите природни броеви n за кои изразот 10^n-1 е делив со 81.

169. Докажи дека збирот $2^n+2^{n+1}+2^{n+2}, n\in\mathbb{N}$ е делив со 14.

170. Докажи дека бројот $2+2^2+2^3+...+2^{30}$ е делив со 7.

171. Докажи дека бројот $A=2+2^2+...+2^{1988}$ е делив со 30.

172. Докажи дека бројот $3^{2n+3}+6\cdot 3^{n+2}+27$ е делив со 108 за секој природен број n.

173. Докажи дека бројот $6^{2n+2}+2^{n+3}\cdot 3^{n+2}+36$ е делив со 900 за секој природен број n.

174. Нека $2n=2+2^2+2^3+...+2^{1989}+2^{1990}$.

а) Докажи дека $n=2^{1990}-1$.

б) Докажи дека 93 е делител на n.

175. За кои вредности на природниот број b изразот $b^4-4b^3+4b^2$ е делив со 3?

176. Природниот број n е запишан со 60 седумки и определен број нули. Докажи дека вредноста на дропката $\frac{n-27}{3}$ е природен број, а вредноста на дропката $\frac{n+27}{9}$ не е природен број.

177. Определи ги сите целобројни вредности на променливата x за кои вредноста на изразот $\frac{3x+5}{x+1}$ е цел број.

178. Определи ги сите целобројни вредности на променливата x за кои вредноста на изразот $\frac{2x+3}{5x+1}$ е цел број.

179. Определи ги целобројните вредности на x за кои изразот $A=\frac{3x-7}{x+4}$ исто така е целоброен.

180. Докажи дека бројот $S=4a^2+3a+5$, каде a е цел број, е делив со 6 ако и само ако a не е делив со 2 и со 3.

181. Даден е четирицифрен број $\overline{abcd}$ чии цифри се четири последователни природни броја ($a<b<c<d$). Докажи дека бројот $\overline{bacd}$ е делив со 11.

182. Определи ги сите трицифрени броеви кои се запишани со различни цифри и се такви што трицифрениот број е делив со 7 и збирот на неговите цифри е делив со 7.

183. Определи го најмалиот цел број кој е делив со 15 и е решение на неравенката

$$\frac{(3x-1)^2}{22}+\frac{x^2-9}{11}<-\frac{(1-5x)(2x+1)}{22}-\frac{1-\frac{x^2}{2}}{11}.$$

184. Определи го најголемиот број k за кој бројот $2007!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2007$ е делив со 2007^k.

185. Определи го најмалиот природен број n со кој треба да се помножи бројот 2020 така што квадратниот корен на производот е природен број.

186. Определи го најмалиот природен број со кој треба да се помножи бројот 126 така што ќе се добие број кој е точен квадрат на некој природен број.

187. Определи го најмалиот природен број кој помножен со бројот 2646 дава куб на некој природен број.

188. а) Докажи дека $888889^2-111112^2=777777777777$.

б) Разложи го на прости множители бројот 249999.

189. Ако p е прост број поголем од 2, тогаш $p^{1987}+1987^p$ е сложен број. Докажи!

190. Дали постојат различни прости броеви p,q и r такви што бројот p е аритметичка средина на броевите q и r.

191. Дали постојат различни прости броеви p,q и r такви што бројот $\sqrt{p}$ е аритметичка средина на броевите $\sqrt{q}$ и $\sqrt{r}$.

192. Определи го природниот број n за кој важи $n(n+1)(2n+1)=84$.

193. Определи го најмалиот природен број со кој треба да се помножи бројот 276 така што ќе се добие број кој е точен квадрат на енкој природен број.

194. Определи ги четирите последователни природни броеви чиј производ е еднаков на 3024.

195. Определи го најмалиот природен број чиј производ на цифри е еднаков на 75600.

196. Двоцифрен број собран со бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед дава точен квадрат на природен број. Определи ги сите такви двоцифрени броеви.

197. За еден природен број ќе велиме дека е *добар* ако при неговото разложување на прости множители секој прост број има непарен степен. (На пример, $17=17^1, 35=5^1\cdot 7^1, 54=2^1\cdot 3^3$ се добри броеви.) Определи го најголемиот природен број n таков што постојат n последователни природни броеви кои се сите добри.

198. За колку целобројни вредности на параметарот a решението на равенката $a^2(x-3)=5-x$ е прост број?

199. Збирот $3+3^2+3^3+...+3^{11}+3^{12}$ запиши го како производ на прости броеви.

200. а) Разложи го на множители полиномот: $a^2+ac-b^2-bc+a+b+c$.
б) Нека x,y се природни броеви и p е прост број таков што $x^2+xp+x+y+p=y^2+yp+p^2$. Докажи дека $x=y$,

201. Од цифрите 1, 2, 3, 4 и 5 се составени сите петвифрени броеви во кои секоја цифра се јавува точно еднаш. Определи го бројот на делителите на збирот на овие броеви.

202. Во множеството природни броеви реши ја равенката:
$$20m+17n=2017 .$$

203. Определи ги сите трицифрени броеви $\overline{abc}$ кои се пет пати поголеми од производот на нивните цифри.

204. Нека $m=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n+57$. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот m е точен квадрат на некој природен број.

205. Во множеството цели броеви реши ја равенката: $x^2+y^2=2x$.

206. Определи го најмалиот природен број кој е 2015 пати поголем од збирот на своите цифри.

207. Во множеството цели броеви реши ја равенката: $x^2y=y^3+10$.

208. Во множеството цели броеви реши ја равенката: $xy-2x=7y-7$.

209. Во множеството цели броеви реши ја равенката: $xy-2x=5y-7$.

210. Во множеството природни броеви реши ја равенката:
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2009} .$$

211. Нека m,n и p се природни броеви такви што $m!+n!=12^p$. Определи ја најголемата можна вредност на p.

212. Определи природни броеви $n_1,n_2,...,n_k$, $k>1$ такви што
$$n_1n_2...n_k=1988 \text{ и } n_1+n_2+...+n_k=1988 .$$
Колку решенија има задачата?

213. Во множеството $\mathbb{N}$ реши ја равенката: $x^2+y^3+z^3=2^{2007}$.

214. Определи ги сите цели броеви x за кои изразот x^3+3x^2+4x+2 е квадрат на природен број.

215. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot\ldots\cdot 2^7=x^y.$$

216. Во множеството природни броеви реши ја равенката: $7^x=3\cdot 2^y+1$.

217. Определи ги сите двоцифрени природни броеви кои се четири пати поголеми од збирот на своите цифри.

218. На натпреварот по матемтика се решавале 20 задачи. За секоја точно решена задача се добиваат по 5 поени, за сеоја задача која не е решавана се добиваат 0 поени и за секоја погрешно решена задача се губат 3 поени. Колку задачи точно решил Алекса ако на натпреварот освоил 37 поени

II.3. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

219. На фудбалски натпревар во еден ред седишта на трибините седнал определен број гледачи. Потоа меѓу секои два гледачи седнал упте по еден гледач. Ваквиот начин на завземање на местата е повторен упте два пати, па потоа во тој ред имало 2009 гледачи. Колку гледачи на почетокот седнале во овој ред?

220. Кога трите последни цифри на шестцифрениот број a, во истиот редослед, ќе се префрлат на почетокот на бројот, се добива шест пати поголем број. Определи го бројот a.

221. Меѓу еден природен број и двократната вредност на неговиот квадрат има 11174 природни броеви. Определи го тој природен број.

222. Производот на три последователни непарни броеви е пет пати помал од бројот $\overline{bababa}$. Кои се тие броеви?

223. Бројот 1989 запиши го како збир на 13 последователни природни броеви.

224. Бројот 2019 е збир на $n\geq 2$ последователни природни броја. Определи ги сите вредности на n.

225. Ако ги собереме секои два од четирите броја a, b, c, d ги добиваме збировите: 1, 2, 5, 6, 9, 10. Определи ги овие броеви.

226. Ако од еден трицифрен број се одземе бројот 7, се добива број делив со 7, ако се одземе бројот 8, се добива број делив со 8 и ако се одземе бројот 9, се добива број делив со 9. Определи го овој трицифрен број.

227. Еден трицифрен број се зголемува за 45 ако цифрите на единиците и десетките ги заменат местата, а се намалува за 270 ако цифрите на стотките и десетките ги заменат местата. Што ќе се случи со овој број ако цифрите на стотките и единиците ги заменат местата?

228. Ако меѓу цифрите на еден двоцифрен број го запишеме тој двоцифрен број се добива четирицифрен број кој е 77 пати поголем од дадениот двоцифрен број. Определи го двоцифрениот број?

229. Цифрата на единиците на еден двоцифрен број е 2. Докажи дека, разликата на квадратот на тој број и производот на претходникот и следбеникот на овој број е 1.

230. Броевите 12 и 60 имаат интересно својство: нивниот производ е десет пати поголем од нивниот збир. Определи ги сите парови природни броеви кои го имаат ова својство.

231. Кој трицифрен број се зголемува за 54 ако ги замениме местата на цифрите десетките и единиците, а се намалува за 360 ако ги замениме местата на цифрите на стотките и десетките?

232. Ако двоцифрениот број го поделиме со збирот на неговите цифри се добива колични 4 и остаток 3. Но, ако од истиот тој број ја одземеме удвоената вредност на збирот на неговите цифри се добива бројот 25. Определи го овој двоцифрен број.

233. Ако даден четирицифрен број го читаме од десно на лево, тогаш прочитаниот број ќе биде 9 пати поголем од дадениот. Определи го почетниот четирицифрен број.

234. Цифрите на еден двоцифрен број се разликуваат за 5. Ако меѓу нив се запише цифрета 9, се добива трицифрен број кој е 11 пати поголем од двоцифрениот број. Определи го двоцифрениот број.

235. Четирицифрен број чија цифра на десетките е 0, а цифрата на единиците е еднаква на разликата на цифрата на илјадитите и цифрата на стотките, е точен квадрат на некој природен број. Определи го овој четирицифрен број.

236. Нека n е четирицифрен број запишан со различни цифри. Ако секоја цифра на n ја зголемиме за 2 или за 3, ќе добиеме четири пати поголем број од n. Определи го бројот n.

237. За еден природен број ќе велиме дека е интересен ако е сложен и ако не е делив со трет степен на прост број. На пример, броевите 4, 6, 12, 15 се интересни, но броевите 1, 5, 13, 54, 200 не се интересни. Определи го најголемиот можен број последователни интересни броеви.

238. На збирот на цифрите на бројот a е додаден квадратот на тој збир и е добиен бројот a. Определи го бројот a.

239. Четирицифрениот број $M=\overline{abcd}$ е запишан со ненулти цифри и е точен квадрат.

а) Секоја од цифрите на M е намалена за 1 и е добиен број кој е точен квадрат. Определи го M.

б) Определи го збирот $a+b+c+d$, ако бројот кој се добива кога првата цифра на M се намали за 3, а последната цифра на M се зглеми за 3 повторно е точен квадрат.

240. Од цифрите на еден трицифрен број може да се составаат 6 различни двоцифрени броја. Определи го овој трицифрен број ако тој е еднаков на половината на збирот на сите 6 двоцифрени броеви составени од неговите цифри.

241. Бранко избрал 4 различни броја, а Војо за секои два броја кои ги избрал Бранко ја пресметал разликата на поголемиот и помалиот број и ги добил броевите: 2, 2, 3, 4, 5, 6. Вера тврди дека Војо згрешил при пресметувањата. Дали Вера е во право?

242. Митко на таблата запишал пет природни броја. Ванчо успеал под секој од броевите да запише природен број така што збирот на броевите на Ванчо е еднаков на збирот на броевите на Митко и збирот на секои два броја запишани еден под друг е еднаков. Сите запишани броеви на таблата се различни. Ако првите четири броја запишани од Митко се

16, 13, 19 и 7, определи го петтиот број кој може да го запишал Митко. (Бројот 0 не е природен број.)

243. На секое теме на еден квадрат е придружен по еден природен број. Сите четири броја се различни. Потоа на секоја страна на квадратот е придружен производот на двата броја кои се придружени на темињата кои ги поврзува таа страна. Збирот на четирите добиени производи е еднаков на 124. Определи го збирот на броевите кои се придружени на темињата на квадратот.

244. Броителот на една дропка се зголемува за 32%, а именителот се зголемува за 54%. Дали вредноста на дропката ќе се зголеми или намали и за колку проценти?

245. Дропката $\frac{101}{110}$ прикажи ја како збир на две дропки со именители 5 и 22, чии броители се природни броеви.

246. Хемиското пенкало е за 20% поевтино од нотезот, а е за 25% поскапо од моливот. Колку чини секој од овие предмети, ако сите заедно чинат 610 денари?

247. Цената на влезницата за натпреаврите на еден клуб е намалена за 30%, но заради зглемувањето на бројот на гледачите, приходот не се намалил. Заколку проценти се зголемил бројот на гледачите?

248. Цената на еден производ прво се зголемила за 20%, а потоа се намалила за 20%. Горјан пресметал дека на тој начин почетната цена се намалила за 20 денари. Колку денари ќе се намалела почетната цена, ако цената на овој производ прво се зголемела за 10%, а потоа се намалела за 10%?

249. Цената на една стока прво се зголемила за 25%, а потоа новата цена е намалена за 25%. Дали крајната цена е поголема или е помала од почетната цена и за колку проценти?

250. По зголемувањето за 15% цената на еден компјутер е 48300 денари. Определи ја цената на компјутерот пред истата да се зголеми.

251. Цената на еден производ и носела на фабриката загуба од 20%. Затоа прво цената е зголемена 10%, а потоа таа е зголемена уште за 35%. Колку проценти сега е добиваката?

252. Третина од една стока е продадена по цена која е за 10% поголема од планираната, а половина од истата стока е продадена по сена која е 15% помала од планиораната. Со колку проценти повисока цена од планираната треба да се продаде остатокот ос стоката, за да на крајот се добие иста сума пари како и во случај кога целата стока би се продала по планираната цена?

253. Шестина од вкупното количество од некоја стока е продадена со заработувачка од 20%, а половина од вкупното количество стока е продадена со загуба од 10%. СО колку проценти заработка треба да се продаде остатокот од стоката за да се покрие загубата?

254. Стојан на своите 6 синови им оставил еднакви златници, кои тие ги поделиле така што најстариот син добил $\frac{1}{7}$ од златниците и уште 1 златник, вториот син добил $\frac{1}{7}$ од преостанатите златници и уште 2 златника, третиот син добил $\frac{1}{7}$ од преостанатите златници и уште 3 златника итн. Се покажало дека сите синови добиле еднаков број златници. Колку златници оставил Стојан и колку добил секој од синовите?

255. Една мала компанија има шест вработени. Просечната плата на двајца од нив е за 10800 денари поголема од просечната плата на другите четворица и е за 30% поголема од просечната плата на сите вработеии. Колку денари е просечната плата на сите вработени?

256. Милан купил вкупно 24 исти тетратки и исти моливи. Тетратката е за 60% поскапа од моливот. Ако милан купел двапати повеќе тетратки, а моливите беа за 8 помалку, тогаш тој ќе ја платеше истата сума. Колку моливи купил Милан?

257. Работник заработува 800 денари на час. То добил работа кој може да ја заврши за 16 часа. Ако работата ја зврши предвреме, му се плаќа надоместок од 75% за секој час порано завршена работа. Колку часа треба да работи работникот за да заработи по 1000 денари на час?

258. Од чаша полна со млеко, Самоил испил $\frac{1}{5}$ од млекот и ја дополнил со кафе. Потоа пак испил $\frac{1}{5}$ од полната чаша и пак ја дополнил со кафе.

Откако и третиот пат испил $\frac{1}{5}$ од содржината, во чашата останале $28\,cm^3$ повеќе млеко од кафе. Определи го волуменот на чашата.

259. Штотуку пресечено стебло тежло $2,25\,t$ и содржело 64% вода. По една недела стеблото содржело 46% вода. За колку се намалила маста на стеблото во текот на оваа недела?

260. Во еден магацин имало $1000\,kg$ јагоди кои содржат 92% вода. По извесно време количеството вода во јагодите се намалило на 90%. Колку тежат јагодите сега?

261. Легура од бакар и олово тешка $12\,kg$ содржи 45% бакар. Колку олово треба да се додаде на оваа легура за да истата содржи 40% бакар?

262. Колку вкупно злато има во две легури, за кои е познато дека:
а) вкупната маса на двете легури е $s\ kg$,
б) во првата легура има $a\%$ злато, а во втората има $b\%$ злато,
в) во првата легура има $r\ kg$ злато повеќе отколку во втората.

263. Еден работник ја остварува нормата за 6 часа, вториот за 5 часа, а третиот за 4,5 часа. Тројцата заедно изработиле 795 предмети. По колку предмети изработил секој од нив?

264. Двајца работници можат една работа да ја завршат за 24 дена. По заедничка работа од 10 дена едниот работник се разболел, па другиот продолжил сам да работи и работата ја довршил во следните 35 дена. За колку дена оваа работа ќе ја заврши самостојно секој од двајцата работници?

265. Група тракгористи за неколку дена треба да изора блок земјиште, при што дневната норма им била 360 декари. Тракористите ја натфрлиле нормата за $16\frac{2}{3}\%$ и последниот ден од определеното време им останало да изораат само 60 декари. Определи ја плоштината на блокот кој го изорале тракористите.

266. Осум лесни трактори можат да изораат една нива за 5 дена, а 5 тешки трактори можат да ја изораат истата нива за 3 дена. За колку дена два лесни и три тешки трактори ќе изораат нива чија плоштина се

однесува спрема плоштината на првата нива како $7:2$? (Тракторите од ист вид за исто време ораат еднаква плоштина.)

267. Часовник кој во текот на едно деноноќие доцни 6 минути, денес во 10 часот покажува точно време. Јолку е точното време кога утредента часовникот ќе покажува 17 часот и 52 минути.

268. Кога батеријата на мобилниот телефон на Мирко е полна таа целосно се празни или за 8 часа игра или за 200 часа мирување. Мирко тргнал на пат со полна батерија и кога пристигнал батеријата била полна 44%. Колку време Мирко играл на телефонот, ако тоа време е точно една четвртина од времето на патување?

269. По 5 години бројот на годините на братот спрема бројот на годините на сестрата ќе се однесува како $7:5$. Колку години сега има братот, а колку сестрата, ако пред една година братот бил два пати постар од сестрата?

270. Бројот на годините на таткото сега е еднаков на бројот на месеците кои ги имал неговиот син, кога таткото бил 9 пати постар од синот. Колку години има таткото ако се знае дека тој од синот е постар 26 години и 8 месеци?

271. На две клупи седат по шест деца. Сите имаат различен број години и бројот на годините на секое дете е цел број. Збирот и производот на годините на децата од едната клупа соодветно е еднаков на збирот и производот на бројот на годините на децата од другата клупа. Најстарото дете има 16 години. Колку години имаат децата кои седат на иста клупа со него?

272. Колку најмногу километри може да помине автомобил со исти гуми, ако се знае дека предните гуми се истрошени по поминати $50000\,km$, а задните по поминати $30000\,km$?

273. Загреб и Белград се оддалечени $400\,km$. Од Белград кон Загреб тргнува првиот автобус возејќи со просечна брзина $70\,km/h$. Истовремено од Загреб кон Белград тргнува вториот автобус возејќис со просечна брзина $90\,km/h$. На кое растојание од Белград ќе се сретнат автобусите?

274. На еден кроз натпреварувачите прво трчаат $4\,km$ право. Потоа завртуваат за 120° лево и трчаат право уште $3\,km$. Потоа повторно завртуваат лево за 120° и трчаат право уште $2\,km$. На крајот завртуваат десно за 60° и трчаат право уште $2\,km$ кадед што се наоѓа целта. Определи го најкраткото растојание од стартот до целта.

275. Дали може три пешаци да поминат пат од $36\,km$ за помалку од 6 часа, ако брзината на секој пешак е $5km/h$ и ако имаат мопед кој може да вози само едно лице со брзина која не е поголема од $15\,km/h$?

276. Точно во 12 часот од врвот на една кула во различни правци летнале четири муви. Секоја мува летала праволиниски и со коснтантна брзина. Брзината на првата мува е $8\,m/\min$, на втората $12\,m/\min$, на третата $15\,m/\min$ и на четвртата $18\,m/\min$. По 9 минути сите четири муви се нашле во иста рамнина, Кога повторно за првпат мувите ќе се најдат во иста рамнина?

277. Автомобил поаѓа од Скопје за Гевгелија и за еден час поминал 20 *km*. Колкаво растојание треба уште да помине автомобилот со брзина 110 *km*/h, за да средната брзина на автомобилот биде $80\,km$/h?

278. Автомобил минува $35\,km$ со $2\,l$ бензин. Автомобилот вози со постојана брзина и поминал $280\,km$ за 3 часа. Колку време ќе вози автомобилот со $5\,l$ бензин?

279. Во 12:30 од градот A за градот B часот тргнал велосипедист, а од градот B за градот A по истиот пат тргнал дру велосипедист. Во 14:10 растојанието меѓу нив било $3\,km$, а во 14:50 било $15\,km$. Секој од велосипедистите се движел со постојана брзина и никој од нив не стасал до целта за 3часа. Колку километри е растојанието од A до B?

280. Два чамци истовремено тргнуваа еден кон друг од пристаништата A и B. Во моментот на разминување тие се на растојание $700\,m$ од A. Кога стигнале во пристаништето кон кое патувале секој чамец направил пауза 10 минути и тргнал во спротивната насока. На враќање тие се разминале на $400\,m$ од пристаништето B. Определи го растојанието меѓу A и B. Чамците пативаат со константни брзини.

281. Од градот A за градот B тргнува камион, кој по 1 час, заради дефект, ја намалил првичната брзина за 40%. Определи го времето за кое камионот го поминал патот од A до B, ако е познато дека тој пристигнал со 2 часа закаснување.

282. Растојанието меѓу железничките станици A и B е $125\,km$. Од станицата A кон станицата B тргнува патнички воз кој се движи со брзина $80\,km/h$. Истовремено од станицата B кон станицата A тргнува товарен воз кој се движи со брзина $40\,km/h$. Возовите се сретнале во станицата C, при што до доаѓањето во C патничкиот воз направил пауза 8 минути, а товарниот – 5 минути. Определи го растојанието од A до C.

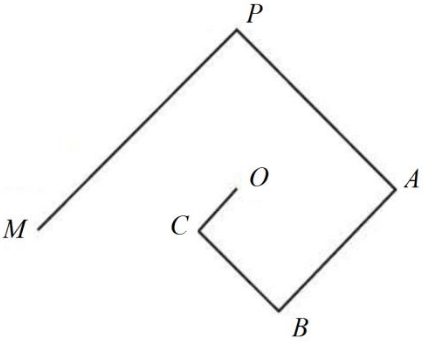
283. Градот C се наоѓа на патот меѓу градовите A и B и е два пати поблиску до A отколку до B. Во 8:00 од A за B тргнува камион, а од B за A тргнува автобус. Во 10:00 автобусот е на средината на патот меѓу A и C, а камионот е два пати поблиску до C отколку до A, но се уште не поминал низ C. Колку минути по 10:00 ќе се сретнат автобусот и камионот ако нивните брзини се константни?

284. Два прави пата се сечат во точката P. Ангел и Богдан трчаат со постојана брзина од $8\,km/h$ по првиот пат во насока на раскрсницата, при што Богдан е $12\,m$ по Ангел. Васил трча со постојана брзина од $6\,km/h$ по вториот пат исто така во насока на раскрсницата. Кога Васил е во P, тој е на средина меѓу Ангел и Богдан. Определи на какво растојание е Васил од точката P кога Ангел е на $50\,m$ од точката P.

285. По два пата кои се сечат, со еднакви брзини, се движат два автомобили A и B. Во 9 часот автомобилот B е на два пати поголемо растојание од раскрсницата од автомобилот A. По еден час, во 10 часот, автомобилот B е на три апти поголемо растојание од раскрсницата од автомобилот A. Во колку часот автомобилите минуваат низ раскрсницата?

286. Преку викенд секое утро Горјан во градината на неговиот дедо трча по иста патека, која е прикажана на цртежот десно. Тој знае дека должините на отсечките на патеката се однесуваат како $5:4:3:2:1$.

Но, едно утро Горјан не беше расположен и тој отсечките ги измна за различни времиња, кои се однесуваат како 3:4:2:1:5. Тој само отсечката MP ја истрча со вообичаената брзина 200 чекори во минута. Определи ја средната брзина со која Горјан тоа утро ја истрчал патеката.



287. Секогаш кога ќе згреши при изработката на домашната работа Марко кини лист од тетратката. Така му се случило од една тетратка да го скинал секој трет лист, а од друга иста таква тетратка секој четврт лист. Кога пребројал видел дека има скинато 21 лист. Колку листа имала на почетокот секоја од тетратките и за колку проценти е намален вкупниот број листови?

288. Две момчиња чекорат по подвижни скали, кои се движат нагоре, така што едното момче чекори два пати побрзо од другото. До врвот на скалите успеале да поминат 12 и 8 скалила. Определи колку скалила имаат подвижните скали.

289. Вредноста на променливата y е за 25% поголема од вредноста на променливата x. За колку проценти вредноста на проименливата x е помала од вредноста на променливата y?

290. Во земјата на змејовите сите змејови имаат по една, две или три глави.
    а) Дали е можно 40% од смејовите да имаат 60% од сите глави?
    б) Дали е можно 40% од змејовите да имаат 70% од сите глави?

291. Во ено училиште бројот на момчињата е еднаков на $\frac{2}{5}$ од бројот на исте ученици. Еден дека, заради натпревари по повеќе предмети отсуствувале 30% од момчињата и 40% од девојчињата. Определи го односот на бројот на момчињата и бројот на девојчињата кои тој ден биле на училипте.

292. Иван и Марија се членови на математичка секција во која има момчиња и девојчиња. Во секцијата има најмалку 70% девојчиња. Кој е најмалиот можен број членови во оваа секција?

293. Располагаме со автобуси и тролејбуси од исти видови. Во 5 автобуси и 2 тролејбуси може да се превезат 300 патници, а во 2 автобуси и 3 тролејбуси може да се превезат 230 патници. Колку патници може да се превезат со 1 автобус, а колку со 1 тролејбус?

294. Во една фудбалска екипа просекот на староста на 11 играчи кои го започнале натпреварот е 22 години. За време на натпреварот еден играч, заради повреда, го напуштил теренот, па просекот на староста на играчите на оваа екипа кои останале во игра е 21 година. Колку години има играчот кој го напуштил натпреварот?

295. Читајќи дневно ист број страници (освен последниот ден) Горјан прочитал книга од 264 страници. Ако дневно читал по 5 страници повеќе, тој книгата ќе ја прочитал 10 дена порано отколку ако дневно читал 5 страници помалку. Колку страници читал Горјан дневно (освен последниот ден).

296. Јован на компјутер треба да намали некоја слика на 31,2% од нејзината оригинална големина. Програмата која ја има на располагање овозможува само намалување на сликата на $p\%$ од нејзината почетна големина, каде $p \in \{1, 2, 3, ..., 99\}$. Како може Јован со двократна последователна примена на програмата да го добие бараното намалување? Определи ги сите решенија.

297. На еден натпревар учениците решавале три задачи. Првата задача ја решиле 82% од натпреварувачите, втората 78% и третата 78%. Првата и втората задача ја решиле 62%, парвата и третата 66%, а втората и третата 60%. Сите три задачи ги решиле 25 ученици. Колку ученици учествувале на натпреварот?

298. На тест по математика 30% од учениците добиле оценка 5, 40% од учениците добиле оценка 4, 8 ученици добиле оценка 3, а преостанатите ученици добиле оценка 2. Порсечната оценка на учениците кои го решавале тестот е 3,9. Определи го вкупниот број ученици кои го решавале тестот. Колку ученици добиле оценка 5, колку оценка 4 и колку оценка 2?

299. Една фудбалска екипа одиграла определен број натпревари. Во $\frac{2}{3}$ од натпреварите победила, $\frac{1}{4}$ од натпреварите ги загубила, а преостанатите натпревари ги одиграла нерешено.

а) Колку натпревари одиграла оваа екипа, ако се знае дека бројот на загубените натпревари е за 4 поголем од бројот на нерешените натпревари?

б) Во фудбалски натпревар за победа се добиваат 3 бода, за нерешен резултат се добива 1 бод и за загубен натпревар не се добива ниту еден бод. Колку бодови освоила оваа екипа?

300. На вага без тегови со помош на два вида топчиња со различна маса е воспоставена рамнотежа така што на едниот тас има само топчиња со маса a, а на другиот тас има само топчиња со маса b. Вкупниот број топчиња на двата таса е 195. Ако од едниот тас земеме 11 топчиња, тогаш повторна рамнотежа можеме да воспоставиме така што од другиот тас ќеземеме 2 топчиња и истите ги ставиме на тасот од кој зедовме 11 топчиња. По колку топчиња има од секој вид?

301. Елена избрала 4 од броевите запишани во табелата десно, а потоа Марија избрала други 4 броја. Се покажало дека збирот на броевите избрани од Елена е три пати поголем од збирот на броевите избрани од Марија. Кој е најмалиот број кој го избрала Марија?

16	–7	40
–1	8	–4
17	–10	–13

302. Г-нот Гранде сонувал чуден сон. Во градината му пораснало волшебно дрво кое родило златна монета. Ја набрал златната монета и на дрвото се појавиле 2 нови монети.

Дрвото раѓало златни и сребрени монети. По секое берење на златна монета се појавувале две нови – златни или златна и сребрена или две сребрени, но по берење на сребрена монета не се појавувале нови монети.

Гранде во сонот берел монети сè додека златните монети на дрвото не завршиле и тој се разбудил, па не успеал да ги преброи златните монети. Само памтел дека имало 2010 сребрени монети.

Колку златни монети набрал од дрвото г-нот Гранде?

303. За редица од броеви ќе велиме дека има различни разлики, кога разликите меѓу два соседни броја се различни. На пример, редицата $\boxed{1}\ \boxed{4}\ \boxed{2}\ \boxed{3}$ има различни разлики, бидејќи разликите помеѓу соседните броеви се различни ($3, 2$ и 1). Ако ги подредиме броевите $1, 2, 3, 4, 5$ и 6 во редица со различни разлики така што бројот 3 е на

третата позиција од лево кон десно (□ □ $\boxed{3}$ □ □ □), определи го збирот на последните три броја?

II.4. ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

304. Во еден замок живеат само витези, лажливци и дворјани. Витезите секогаш ја кажуваат вистината, лажливците секогаш лажат, а дворјаните последователно еден пат ја кажуваат вистината, а следниот пат лажат. На сите жители од замокот им задале последователно три прашања: "Дали си рицар?", "Дали си дворјанин?" и "Дали си лажливец?". Со "Да" одговориле 65 луѓе на првото прашање, 29 луѓе на второто прашање и 16 луѓе на третото прашање. За колку има повеќе витези отколку лажливци во замокот?

305. На кружница во произволен редослед се запишани цифрите 1, 2, 3, ..., 9. Секои три цифри прочитани во насока на стрелката на часовникот формираат трицифрен број. Определи го збирот на сите девет такви броеви?

306. Тројца алпинисти се искачиле на вкупно 20 планински врвови, при што секој алпинист се искачил на 12 од ови врвови. Лесно-достапни ќе ги наречеме врвовите на кои се искачиле сите тројца алпинисти, а тешко-достапни врвовите на кои се искачил само еден од алпинистите. Колку од овие 20 врвови се тешко -достапни, ако лесно-достапни се 7?

307. За време на подготовките за престојниот натпревар по математика учителот на учениците им ја задал следнава задача: *Определи трицифрен број чиј збир на цифри е 8 и таков што ако бројот се помножи трипати последователно се цифрата на стотките се добива четирицифрен број*. Сите ученици добиле различни резултати. Колку најмногу ученици членувале во секцијата?

308. Павел и Јован отишле во продавица во која цените се изразуваат во цел број евра. Петар купил 3 тетратки и 4 моливи и платил со банкнота од 10 евра при што не добил кусур. Јован купил 9 тетратки и 2

молива. Докажи дека и тој може да ја плати купената стока со банкнота од 10 евра без кусур.

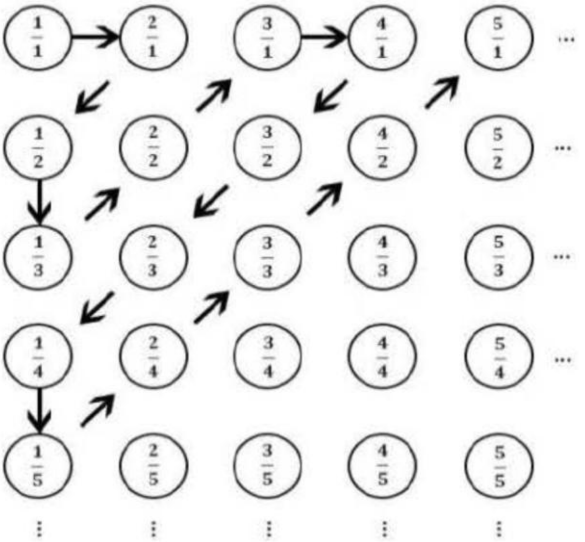
309. Во кутија има 11 топчиња и не секое од нив е запишан по еден од броевите од множеството $\{2^3, 2^4, ..., 2^{13}\}$. Од кутијата без гледање се извлекуваат по три тпќиња.

а) Дали може да се случи производот на бревите од извлечените топчиња да биде 2^{17}, ако на едно од извлечените топчиња е запишан бројот 2^{11}?

б) На колку различни начини може да се извлечат топчиња чиј производ на запишаните броеви ќе биде 2^{17}?

310. Определи го бројот подредени парови цели броеви (x, y) такви што $|x|+|y|<3$.

311. Бескрајната табела од дропки е добиена кога во првиот ред секој природен број е запишан со именител 1, во вториот ред со именител 2 итн. Ако започнеме од горниот лев агол на табелата и ги следиме стрелките во табелата, на кое место за првпат ќе се појави бројот 100?



312. Во групи се запишуваат обичните дропки така што во секоја група се наоѓаат дропките кои имаат еднаков збир на броителот и именителот. Групите се подредуваат една по друга по растечкиот збир. Дропките во секоја група се подредуваат по едно исто правило. Еве се првите четири групи:

$$\{\tfrac{1}{1}\}, \{\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{1}\}, \{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{2}, \tfrac{3}{1}\}, \{\tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{4}{1}\}, ...$$

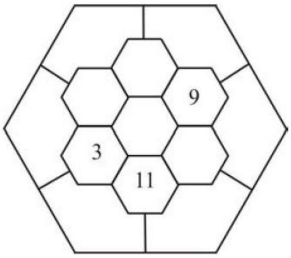
а) Запиши го правилото според кое се подредуваат дропките во секоја група. Запиши ги дропките во следната петта група.

б) Колку правилни дропки и колку природни броеви има во 39-тата група?

в) Во кои од првите 90 групи се среќава бројот 7 запишан како обична дропка?

г) Во која група и на кое место во целата низа од запишани дропки за прв пат се среќава бројот 2015?

313. Матеј ги запишал броевите од 1 до 13 во полињата нашестаголникот прикажан на цртежот десно така што разликата меѓу секои два соседни броја не е помала од 3 (соседни се полињата кои имаат заедни чки страни или делови од страни). Кој број го запишл о центарот на шестаголникот?



314. Во низата 1, 2, 3, ... ги пречкртуваме сите броеви кои:
а) се деливи барем со еден од броевите 8 или 12,
б) не се деливи ниту со 4, ниту со 6.
Кој број по пречкртувањето стои на 2009-тото место.

315. Група извидниви за појадок подготвила млеко, какао и пита. Илија го подели млекот и какаото (на секого му даде полна чаша млеко со какао) и целата пита на еднакви делови. На Мартин тој му налеа $\frac{1}{4}$ од целото млеко и $\frac{1}{6}$ од целото какао. На колку парчиња Илија ја подели питата?

316. На колку различни начини може околу тркалезна маса да седнат 3 момчиња и 2 девојчиња, така што еден до друг не седат две лица од ист пол?

317. Во купе на воз (дел од вагон) има 6 седишта. На колку начини на тие седишта може да седнат:
а) 6 патници,
б) 4 патници,
в) 8 патници (двајца секогаш ќе стојат).

318. На полица се наоѓаат 12 различни книги, 5 од кои се од математика, 4 се од физика и 3 се од хемија. На колку различни начини може да се

распоредат книгите на полицата, така што книгите од иста област ќе бидат една до друга?

319. На колку начини во одделение со 33 ученици може да се изберат:
   а) претседател, секретар и благајник на одделенската заедница,
   б) три делегати за училишната заедница?

320. Шест момчиња сакаат да играат баскет. На колку начини може да се поделат во два тима од по 3 играчи?

321. Колку петцифрени природни броеви x се палиндром, такви што и бројот $3x$ исто така е петоцифрен палиндром? (Еден број е палиндром ако исто се чита одлево-надесно као и оддесно-налево.)

322. Определи го бројот на трицифрените броеви во чиј запис има точно две еднакви цифри.

323. Определи го бројот на броевите кои се помали од 1000, завршуваат на цифрата 3 и се еднакви на збирот на квадратите на два прости броја?

324. Определи го бројот на природните броеви, за секој од кои збирот на двата негови најголеми делители, различни од самиот број, е еднаков на 555.

325. Определи го бројот на трицифрените природни броеви во чиј запис не се содржи цифрата 0, а производот на цифрите е делив со 15.

326. Определи го бројот на петцифрените броеви запишани со цифрите 0, 1 и 2.

327. Колку броеви помали од 1000000 можеме да запишеме само со помош на цифрите 2, 5 и 9?

328. Дадени се цифрите 2, 3, 4, 5 и 6. Колку трицифрени броеви, деливи со 3, може да се запишат со помош на дадените цифри:
   а) ако цифрите не се повторуваат,
   б) ако цифрите може да се повторуваат.

329. На колку начини може во два реда да се наредат четворица возрасни и четири деца, така што возрасните се во еден ред, зад редот на децата?

330. Учениците на натпреварот КЕНГУР се региострираат со шифра која содржи: одделение на учесникот, иницијали на учесникот и четири-

цифрен идентификационен број на ученикот (на пример една можна шифра е 7АБ2019). Колку најмлногу ученици може да се регистрираат на овој начин, ако ознаката за IV одделение е 0, за V оддеелние е 1, за VI одделение е 2, за VII одделение е 3, за VIII одделение е 4, за IX одделение 5, за I клас е 6, за II клас е 7, за III клас е 8, за IV клас е 9 и ако различни ученици имаат различни шифри.

331. За еден осумцифрен број ќе велиме дека е *посебен* ако е делив со 18 и е запишан само со цифрите 2, 0, 1 и 8 (секоја цифра се јавува барем еднаш). Определи го:

а) најголемиот цел број x кој е решение на неравенката

$$Mx < mx + 18 \cdot 10^8$$

каде M и m се најголемиот и најмалиот посебен број.

б) Бројот на сите посебни броеви од видот $\overline{abcd2018}$.

332. Определи го бројот на осумцифрените броеви чиј производ на цифри е еднаков на 50.

333. Даден е триаголник и на секоја негова страна се избрани по четири точки кои се различни од темињата на триаголникот. Колку четириаголници постојат чии темиња се некои од овие 12 избрани точки?

334. Даден е коневексен десетаголник. Определи го бројот на триаголниците чии темиња се темињата на дадениот десетаголник.

335. Во рамнината се дадени 7 точки такви никои три од нив не се колинеарни. Опрдели го бројот на:

а) отсечките,

б) триаголниците,

в) четириаголниците и

г) кружниците

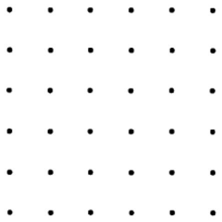
определени со овие точки.

336. Дадени се 2019 точки, од кои 2018 лежат на една права, а една не лежи на таа права. Колку најмногу рамнокраки триаголници со врв во таа точка може да има?

337. Во рамнината се дадени 10 црвени и 8 плави точки такви што било кои три не се колинеарни. Колку триаголници постојат со темиња во дадените точки такви што сите три темиња не се истобојни?

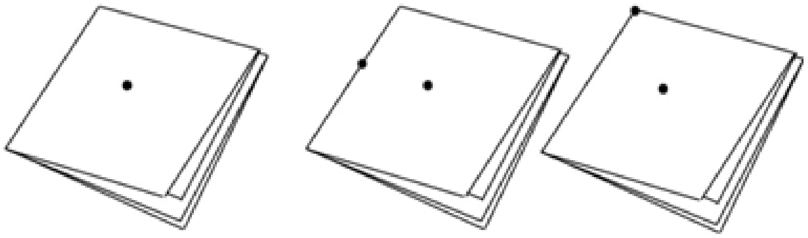
338. Дадени се 3 непаралелни прави и на секоја од нив по 5 различни точки. Определи го најголемиот број триаголници чии темиња се дадените точки.

339. На даден квадрат ги разгледуваме четирите темиња, четирите средини на страните и пресекот на дијагоналите на квадратот. Колку триаголници се определени со овие 9 точки.



340. На цртежот десно хоризонталното и вертикалното растојание меѓу две соседни точки е 1. Колку отсечки со краеви во дадените точки имаат должина 5.

341. Правоаголен лист хартија е свиткан на четири и со шило е пробиена една дупка. Потоа листот е одвитка. Секоја дупка ќе ја сметаме за точка. Низ секој две различни точки по одвиткувањето е повлечена права.



а) Колку прави може да се повлечат ако дупката е направена како на левиот цртеж: Дали бројот на правите зависи од местото на дупката?

б) Листот повторно е свиткан и е направена втора различна дупка. Колку прави може да се повлечат ако распоредот на точките е како на средниот, односно како на десниот цртеж?

в) Испитај го бројот на правите при произволен распоред на двете дупки.

г) Колку прави се добиаат ако на свитканиот лист се направат три дупки?

342. Докажи дека во секој конвексен седумаголник постојат две дијагонали такви што еден од аглите меѓу нив е помал од 13°.

343. Докажи дека во секој конвексен единаесетаголник постојат две дијагонали такви што еден од аглите меѓу нив е помал од 5°.

344. На таблата се запишани 24 различни природна броеви не поголеми од 50. Докажи дека меѓу овие броеви постојат два броја чиј збир е делив со 7.

345. Во квадрат со должина на страна $5cm$ произволно се избрани 1957 точки. Докажи дека постои швадрат со плоштина $1cm^2$ во кој се наоѓаат најмалку 79 одизбраните точки.

346. На едно тестирање 67 ученици одговарале на 6 прашања. Сите ученици дале одговори на сите прашања. На сите прашања одговорите се ДА или НЕ. За точно одговорено прашање под реден број k, $k=1,2,3,4,5,6$, ученикот добива k бодови, а за неточно одговрено прашање му се одземаат k бодови.

   а) Докажи дека барем 4 ученици освоиле еднаков број бодови на тестирањето.

   б) Докажи дека барем два ученика имале исти одговори на секое од шесте шрашања.

347. Дали е можно секоја точка на бројната оска која соодветствува на природен број да се обои во една од трите бои: плава, црвена или зелена така што сите точки не се обоени со иста боја, збирот на плав и црвен број да е зелен, збирот на плав и зелен број да е црвен, а збирот на црвен и зелен број да е плав?

348. На една олимпијада по математика учествувале по 5 пет ученици од VI, VII, VIII и IX одделение. Тие решавале пет задачи, секоја од кои се вреднувала онолку бодови колку што е нејзиниот реден број. Третата задача ја решиле сите ученици, а втората задача не ја решил ниту еден ученик. Четвртата задача ја решил по еден ученик од секое одделение, додека петтата задача ја репил само еден ученик. Колку ученици ја решиле првата задача и колку најмногу бодови може да има некој ученик, ако се знае дека во секое одделение се освоени еднаков број бодови?

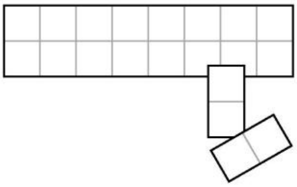
349. На шаховски турнир учествувале 44 деца од Штип, Велес и Ресен. Секое дете со секое друго дете одиграло по една партија. Кој е најголемиот можен број партии меѓу децата од различните градови?

350. На еден шаховски турнир секој шахист играл со секој шахист по две партии. Познато е дека непосредно пред почетокот на турнирот два

или три шахисти го откажале учеството на турнирот, па затоа се одиграни точно 84 партии помалку отколку што е планирано. Колку шахисти учествувале на турнирот?

351. На кошаркарски турнир секој тим одиграл со секој од останатите тимови по еден натпревар. На крајот на турнирот се покажало дека 90% од тимовите постигнале најмалку по една победа. Колку тимови учествувале на турнирот. (*Забелешка*. Во кошарката нема нерешени резултати.)

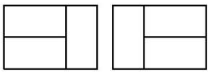
352. Располагаме со еднакви плочки со димензиии 1×2. На колку начини може со вакви плочки да се покрие:



а) Правоаголник со димензии 2×4,

б) правоаголник со димензии 2×8.

Двата прикажани начини на долните цртежи се сметаат за различни.

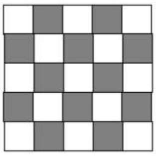


353. Чуварот на Магичниот град за влез во градот од Алиса побарал да помине по шаховска табла.

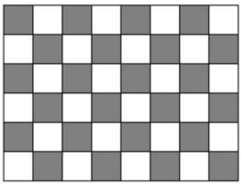
- На таблата нема златни ѕвезди. Еве ти кош со златни ѕвезди. Треба да постави по една ѕвезда на секое црно поле. – рекол чуварот.
- Па тоа е многу лесно! – извка Алиса.
- Не брзај, - рече чуварот. – Има дополнителни правила:
  1) На шаховската табла треба да се движиш само по соседни полиња, т.е. по полиња кои имаат заедничка страна, при што по некои полиња можеш да поминеш повеќе пати, но на секое поле треба да згазниш барем еднаш.
  2) Ако згазнеш на поле на кое нема ѕвезда, задолжително оставаш една, а ако згазнеш на поле на кое има барем една ѕвезда, можеш да избираш – или да оставиш или да земеш една ѕвезда.
  3) Само еднаш може да влезеш на таблата (од кое сакаш поле) и само еднаш да излезеш од неа, но кога ќе ја напустиш таблата на ниту едно бело поле не треба да има ѕвезда.

а) Помогни и на Алиса да влезе во МАгичниот град, ако шаховската абла има вид (I), односно вид (II). Прикажи од кое поле таа треба да тргне и опиши ги нејзините дејства при одењето по таблата.

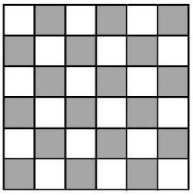
I



II



б) Задачата реши ја за табла со димензии $m\times n$.



354. Горјан сака да обои квадратна табла поделена на 36 еднакви квадратчиња (цртеж десно). Потемните полиња треба да се плави, жолти или црвени, така што во секој ред и во секоја колона треба да има плаво, жолто и црвено поле. Две полиња се соседни ако имаат заедничка страна. Останатите полиња треба да се обојат пспоред следнава шема:

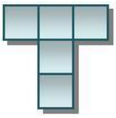
	1	2	3	4	5	6	7
Соседни полиња	плави	жолти	црвени	плави и жолти	плави и црвени	жолти и црвени	плави, жолти и црвени
Боење на белото поле	плаво	жолто	црвено	зелено	лилјаково	портокалово	црно

а) При даденото боење кој е најголемиот број црни полиња.

б) При дадено боење кој е најголемиот број лилјакови полиња.

в) Дади пример на боење со еднаков број зелени, портокалови и лилјакови полиња.

г) Ако се запазат сите услови, кој е бројот на различните боења на дадената табла? (оењата кои се совпаѓаат и се добиваат едно од друго со ротација или со симетрија ги сметаме за еднави.)



355. а) Определи го најмалиот број пентамина од видот прикажан на цртежот деснокои може да се постават на правоаголник 7×10 така што се исполнети условите:

- никои две од поставените пентамина немаат заедничко квадратче,
- на останатите непокриеи квадратчиња не може да се постави пентамино.

б) Определи ги димензиите на сите правоаголници во кои може да се поставаат точно четири пентамина од дадениот вид при услови на задачата под а).

356. Робот е програмиран така што по задавање на некој природен број тој го удвојува бројот или ги разместува цифрите на бројот на произволен начин, а потоа продолжува да извршува една од двете операции со добиените резултати. Ако на почетокот на роботот му е зададен

бројот 1 и добиените резултати се испишуваат на монитор, кои од броевите 2008, 2009, 2010, 2011 и 2012 може да се појават на мониторот.

357. На кружница се распоредени n клетки. Во секоја клетка е запишан или брјот 0 или бројот 1. Дозволена е следнава операција: се избира клетка C во која е запишан бројот 1 и броевите x и y запишани во соседните клетки се менуваат во $1-x$ и $1-y$, соодветно.

а) Нека $n=20$

а1) Ако на почетокот во една клетка е запишан бројот 1, а во сите останати 0, дали е можно по конечен број чекори во секоја клетка да се добие бројот 1?

а2) Ако на почетокот во две соседни клетки е запишан бројот 1, а во сите останати 0, дали е можно по конечен број чекори во секоја клетка да се добие бројот 1?

а3) Ако на почетокот во две клетки кои се преку една е запишан бројот 1, а во сите останати 0, дали е можно по конечен број чекори во секоја клетка да се добие бројот 1?

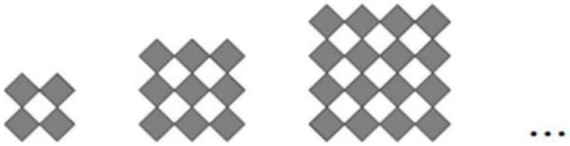
а4) Како треба да се изберат две клетки во кои на почетокот ќе се запише бројот 1, а во сите останати бројот 0, за да по конечен број чекори во секоја клетка да се добие бројот 1?

б) Нека $n=21$. Ако на почетокот во една клетка е запишан бројот 1, а во сите останати 0, дали е можно по конечен број чекори во секоја клетка да се добие бројот 1?

358. Две екипи *А* и *В* на еден математички квиз се натпреваруваат за купче од 2017 бомбони. Во оваа игра капитените на екипите наизменично повлекуваат потези, а прва почнува екипата *А*. Во еден потез е можно или да се земе една бомбона од некое од постојните купчиња или некое од постојните купчиња да се подели на две или повеќе помали купчиња со еднаков број бомбони во секое купче. Во играта победува онаа екипа чиј капитен ќе ја земе последната бомбона. Докажи дека екипата *В* има победничка стратегија.

359. Даден е квадрат со должина на страна $46\,cm$. Подели го дадениот квадрат на 1988 квадрати со целобројни должини изразени во сантиметри.

360. Да ја разгледаме низата фигури составена од бели и црни квадрати:



(првиот член има 4 црни и 1 бел квадрат, вториот член има 9 бели и 4 црни квадрати итн.).

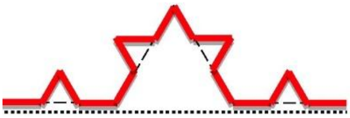
а) Колку се разликува бројот на црните и белите квадрати во шестиот член на оваа низа?

б) Во кој член разликата меѓу црните и белите квадрати ќе биде 1697?

в) Располагаме со 2016 бели квадрати. Колку од нив можеме да обоиме во црно и колку да оставиме бели за да склопиме фигура на дадениот начини да остане најмалиот можен број неискористени квадратчиња?

361. Отсечка со должина од $27\,cm$ се менува според следниот алгоритам од два чекори:

1) отсечката се дели на три дела, средниот дел се брише и се цртаат другите две страни на рамностран триаголник чија основа е избришаната отсечка;



2) потоа со секоја од добиените четири отсечки постапката се повторува (види цртеж).

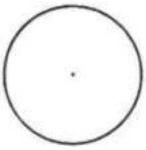
Алгоритамот е применет три пати. Од колку отсечки е составена добиената искршена линија и колкава е нејзината должина?

362. На таблата се запишани природните броеви од 1 до $2n$ $(n \geq 1)$. Горјан произволно избира n од запишаните броеви, ги подредува во опаѓачки редослед и запишува: $a_1 > a_2 > ... > a_n$. Останатите n броја тој ги подредува во растечки редолед и запишува $b_1 < b_2 < ... < b_n$. Определи го збирот $|a_1 - b| + |a_2 - b_2| + ... + |a_n - b_n|$.

363. Симон и Владо имаат три еднакви летви секоја со должина еден метар: бела, зелена и црвена. Симон ја расекол првата летва на три дела, а потоа Владо ја расекол втората летва на три дела. На крајот Симон треба да ја расече третата летва на три дела, но така што без разлика како Владо ја расекува втората летва, од добиените 9 дела да може да се направат три триаголника, секој од кои има по една бела, зелена и црвена страна. Како Симон треба да ја расече третата летва?

364. Даден е правилен шеснаесетаголник. Определи го бројот на правоаголните триаголници чии темиња воедно се и темиња на дадениот шеснаесетаголник.

365. Покрај ѕид во тркалезна соба со дијаметар на подот $3\,m$ се наоѓа скакулец. Тој почнува да скока. Секој негов скок има должина $2\,m$. Означи го делот на точките на подот во кои скакулецот може да стигне. Во кои точки на подот може да стигне скакулецот кој се наоѓа во аголот на квадратна соба со должина на страната $2\,m$?



366. На една кружница се запишани 100 ненулти броеви. После тоа секои два соседни броја се множат, па меѓу нив се запишува нивниот производ, а почетните броеви се бришат. Ако како резултат на оваа операција бројот на позитивни броеви не се менува, колку најмалку позитивни броеви имало на почетокот?

367. Во темињата и на страните на n-аголник се поставени различни природни броеви од 1 до $2n$ така што бројот поставен на секоја страна на n-аголникот е еднаков на збирот на броевите поставени во темињата, кои лежат на таа страна. Дали е можно тоа, ако:
а) $n=3$; б) $n=5$; в) $n=6$?

II.5. ГЕОМЕТРИЈА

368. Во $\triangle ABC$ важи $\measuredangle ABC=\measuredangle ACB+60^\circ$. Права која минува низ темето A ја сече страната во точката K. На полуправата AK е избрана точка M таква што $\measuredangle AMB=\measuredangle CBM=30^\circ$. Определи го $\measuredangle ANC$, каде N е пресекот на правите AB и CM.

369. Во правоаголен $\measuredangle ABC$ ($\measuredangle ACB=90^\circ$), AL ($L\in BC$) е симетрала на аголот во темето A. Точката K од хипотенузата е таква што

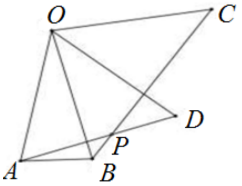
$\overline{CK}=\overline{BC}$ и CK ја сече AL во точка M. АКо M е средина на AL определи го $\measuredangle ABC$.

370. Во рамнокрак $\measuredangle ABC$ $(\overline{AC}=\overline{BC})$ точките M и N пришаѓаат на основата AB. Точката P од AC е таква што $\overline{AM}+\overline{AP}=\overline{AB}$. Точката Q припаѓа на BC и е таква што $\overline{BN}+\overline{BQ}=\overline{AB}$. Определи го аголот меѓу правите PN и MQ ако $\measuredangle ACB=30^\circ$.

371. Во рамнокрак $\measuredangle ABC$ $(\overline{AC}=\overline{BC})$ M е произволна точка од основата AB. Точката P од полуправата AC е таква што $\overline{AM}+\overline{AP}=\overline{AB}$. Точката Q припаѓа на полуправата BC и важи $\overline{BM}+\overline{BQ}=\overline{AB}$. Ако $\measuredangle BAC=30^\circ$, определи ги аглите на $\triangle MPQ$.

372. Во паралелограмот $ABCD$ важи $\measuredangle A>90^\circ$. Точките M и N се средини на страните DC и AB, соодветно, и важи $\overline{AM}=\overline{NB}$. Определи го $\measuredangle ACB$.

373. Триаголниците AOB, BOC и AOD се рамнокраки со основи AB, BC и AD (цртеж десно). Отсечките AD и BC се сечат во точката P и $\measuredangle ACP=135^\circ$. Ако $\measuredangle DOC=60^\circ$, определи го $\measuredangle OAB$.



374. Во остроголен $\triangle ABC$ се повлечени висините AH и BK. Нека M е средината на AB и триаголникот HMK е рамностран. Определи го $\measuredangle ACB$.

375. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle BAC=\measuredangle ABC+30^\circ$. Точката D е внатрешна за страната BC и $\overline{AC}=\overline{CD}$. Определи го $\measuredangle DAB$.

376. Даден е $\triangle ABC$ во кој точката M е средина на страната BC и $\measuredangle BAM=15^\circ$. Должината на висината на $\triangle ABC$ повлечена од темето C е еднаква на h и плоштината на $\triangle ABC$ е еднаква на h^2. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.

377. За страните a и b и соодветните висини h_a и h_b на еден триаголник е точно равенството $a+b=h_a+h_b$. Определи го најголемиот агол на овој триаголник.

378. Во рамноктак правоаголен триаголник ABC ($\measuredangle ACB=90^\circ$) отсечката AD е симетрала на агол, а точката E лежи на AB и $\overline{AE}=2\overline{BD}$. Определи го $\measuredangle BDE$.

379. Даден е $\triangle ABC$, во кој страната AB е најдолга. На страната AB се избрани точки D и E такви што $\overline{AD}=\overline{AC}$ и $\overline{BE}=\overline{BC}$. Определи го $\measuredangle ACE$ ако $\measuredangle ECD=20^\circ$.

380. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ во кој важи $\overline{CH}=\overline{AB}$. Определи го $\measuredangle ACB$.

381. Во правоаголен триаголник висината повлечена кон хипотенузата ја дели хипотенузата на два дела чија разлика е еднаква на должината на едната катета. Определи ги аглите на овој триаголник.

382. Надворешните агли на триаголникот се однесуваат како $9:16:20$. Повлечена е симетралата на најголемиот внатрешен агол и од темето на истиот агол е повлечена нормала на спротивната страна. Определи го аголот што го зафаќаат овие две прави?

383. Во остроаголен триаголник ABC точките D и E се подножја на висините повлечени од темињата C и A, соодветно, при што важи $\overline{AD}=\overline{BC}$. Ако F е подножје на нормалата повлечена од точката D на отсечката AE, докажи дека полуправата BF е симетрала на $\measuredangle ABC$.

384. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C и $\measuredangle BAC=20^\circ$. На хипотенузата AB се дадени точки O и D такви што D е средина на отсчката OB, а кружницата со центар во O и радиус OD ја допира страната AC. Определи го $\measuredangle BCD$.

385. Точката D е надворешна за рамностраниот триаголник ABC, е внатрешна за $\measuredangle ABC$ и $\overline{BD}=\overline{AC}$. Определи го $\measuredangle ADC$.

386. Во остраоголен $\triangle ABC$ со симетрала на агол CL $(L \in AB)$, симетралата на страната AB ја сече правата CL во точката O. Докажи дека:
а) точката O е надворешна за $\triangle ABC$,
б) $\measuredangle ABO = \measuredangle BCO$.

387. Висините CD и AF на $\triangle ABC$ се сечат во точката H. Определи го $\measuredangle ACB$ ако $\overline{AB} = \overline{CH}$.

388. Даден е триаголник ABC со агли при темињата A и B еднакви на 40° и 80°. Точките M, N и P лежат на страните AC, BC и AB, соодветно и се такви што $\overline{PM} = \overline{PN}$, $\measuredangle APM = 50^\circ$ и $\measuredangle BPN = 10^\circ$. Определи го $\measuredangle CPB$.

389. Даден е $\triangle ABC, \measuredangle ABC = 45^\circ$ и $\measuredangle ACB = 75^\circ$. Точката N припаѓа на правата CA и важи $\overline{NC} = \overline{NB}$ (точката A е меѓу точките C и N). Определи го $\measuredangle CNB$.

390. Во рамнокрак $\triangle ABC$ важи $\measuredangle ACB = 100^\circ$. На полуправата BC е избрана точка D таква што $\overline{BA} = \overline{BD}$. Точката M е внатрешна за $\triangle ABC$ и е таква што $\measuredangle MAB = 10^\circ$ и $\measuredangle MBC = 20^\circ$. Определи го $\measuredangle DMC$.

391. Во рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$ со $\measuredangle ACB = 80^\circ$, дадена е точка O таква што $\measuredangle BAO = 10^\circ$ и $\measuredangle ABO = 30^\circ$. Определи го аголот $\measuredangle ACO$.

392. Во рамнокракиот $\triangle ABC$ ($\overline{AC} = \overline{BC}$), $\measuredangle ACB = 20^\circ$. На кра ите AC и BC се земени точки N и M такви што $\overline{AN} = \overline{CM} = \overline{AB}$. Определи го $\measuredangle AOB$, каде O е пресечната точка на AM и BN.

393. Должините на страните AB и AC на $\triangle ABC$ се $5\,cm$ и $4\,cm$, соодветно, а неговата плоштина е еднаква на $10\,cm^2$. Определи го $\measuredangle CAB$.

394. Во надворешноста на рамностран $\triangle ABC$ е дадена точка M таква што $\measuredangle CMA = 30^\circ$ и $\measuredangle BMA = 45^\circ$. Определи го аголот $\measuredangle ABM$.

395. Во кружница $k(O, r)$ тетивата AB е симетрала на радиусот OP. Докажи дека AB е страна на рамнострана триаголник впишан во кружницата $k(O, r)$.

396. Во $\triangle ABC$ важи $\measuredangle BAC = 70^\circ$ и $\measuredangle ABC = 50^\circ$. Точката M е во внатрешноста на $\triangle ABC$ и важи $\measuredangle MAC = \measuredangle MCA = 40^\circ$. Определи ги $\measuredangle AMB$ и $\measuredangle BMC$.

397. Точката N припаѓа на страната AB на правоаголникот $ABCD$ и важи $\measuredangle ADN = \measuredangle CNB$, а M е средина на страната CD. Ако $\overline{MN} = \overline{DN}$, определи го $\measuredangle CNB$.

398. Внатре во квадрат $ABCD$ се наоѓа точка P таква што $\triangle ABP$ е рамнокрак со агли при основата $\measuredangle PAB = \measuredangle PBA = 15^\circ$. Докажи дека $\triangle PCD$ е рамностран.

399. Во $\triangle ABC$ висината и тежишната линија повлечени од темето A го делат $\measuredangle A$ на три еднакви дела. Каков е $\triangle ABC$, разностран, рамностран или рамнокрак.

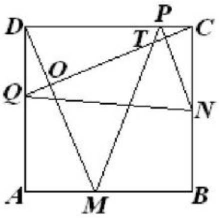
400. Дадени се $\triangle ABC$ и рамностраните $\triangle ABC_1$ и $\triangle BCA_1$ кои со $\triangle ABC$ немаат внатрешни заеднички точки.

а) Докажи дека $\overline{AA_1} = \overline{CC_1}$.

б) Определи го аголот меѓу правите AA_1 и CC_1.

401. Нека M, N, P, Q се соодветно точки на страните AB, BC, CD, DA на квадратот $ABCD$ такви што $\overline{AM} = \overline{NC} = \overline{PD} = \overline{QA}$. Докажи дека $\measuredangle PNC = \measuredangle NQM$.

402. На цртежот десно точките M, N, P, Q се на страните AB, BC, CD, DA на квадратот $ABCD$. Отсечката CQ ги сече DM и MP во точките O и T. АКо $\overline{AM} = \overline{DQ}$ и $\overline{OM} = \overline{OT}$, определи го збирот $\measuredangle CQN + \measuredangle NPM + \measuredangle PNQ$.



403. Нека M и N се точки на страните AB и BC, соодветно на квадратот $ABCD$ такви што $\overline{AM} = \overline{BN}$. Определи го збирот на аглите MAN, MDN и MCN.

404. Над хипотенузата AB на правоаголниот $\triangle ABC$ во неговата надворешност е конструиран квадрат $ABDE$. Докажи дека правата која го

поврзува темето на правиот агол C со пресекот на дијагоналите S е симетрала на правиот агол на $\triangle ABC$.

405. Дадени се квадрат $ABCD$ и точка M на страната BC. Ако N е точка од страната CD таква што $\measuredangle AMB = \measuredangle AMN$, определи го $\measuredangle MAN$.

406. Дадени се два правилна многуаголника такви што првиот има два пати повеќе страни од вториот, а внатрешниот агол на првиот е за 10° помал од внатрешниот агол на вториот многуаголник. Опредли колку страни имаат овие многуаголници и колкави се нивните внатрешни агли.

407. Основите на трапезот имаат должини $75\,cm$ и $33\,cm$, а краците имаат должини $45\,cm$ и $39\,cm$. Определи го аголот меѓу дијагоналата и подолгиот крак во темето на пократката основа.

408. Даден е четириаголникот $ABCD$ чии внатрешни агли се $x, x+10$, $x+30$ и $x+40$. Докажи дека $ABCD$ е трапез.

409. Страната AB на консвексниот четириаголник $ABCD$ е двапати подолга од нејзината спротивна страна CD. Дијагоналата BD е нормална на страната AD, а дијагоналата AC е нормална на страната BC. Определи го аголот меѓу дијагоналите на четириаголникот $ABCD$.

410. Во правоаголникот $ABCD$ нормалата повлечена од темето B на дијагоналата AC ја дели дијагоналата AC во однос $3:1$.Определи го аголот меѓу дијагоналите на овој правоаголник.

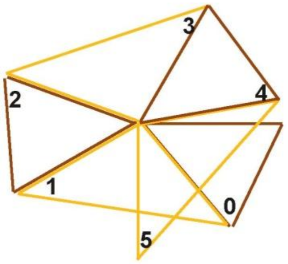
411. Определи го збирот на петте агли кои се во врвовите на произволна петкрака ѕвезда.

412. Дијаметарот AB на кружницата k со центар O, преку точката B е продолжен до произволна точка C. Низ низ точката C е повлечена права која кружницата ја сече во точките D и E (D е меѓу C и E). Ако $\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, докажи дека $\measuredangle AOE = 3\measuredangle OCD$.

413. Кружниците k_1 и k_2 се сечат во точките A и B. Правата p која минува низ точката B ги сече кружниците k_1 и k_2 соодветно уште во точките M и K. Тангентата на k_1 во точката M и тангентата на k_2 во точката K се сечат во точката C. Докажи дека $\measuredangle MAC = \measuredangle BAK$.

414. Нека D, E, F се симетричните точки на центарот на опишаната кружница на остроаголниот триаголник ABC во однос на страните BC, CA, AB, соодветно. Докажи дека отсечките AD, BE, CF се сечат во една точка.

415. Нека O е центарот на опишаната кружница околу правилниот петаголник $ABCDE$. Докажи дека кружницата опишана околу триаголникот ABO освен точките A и B, содржи и пресечни точки на уште два пара дијагонали на петаголникот.



416. Од два вида рамнокраки триаголници е конструирана спирала. Триаголниците имаат еднакви краци, но аголот меѓу краците во едниот триаголник е 100°, а во другиот е 50°. Почетокот на спиралата е в триаголникот обележан со 0. Секој следен триаголник (со соодветен број 1, 2, 3, ...) е долешен со еден крак до претходниот, при што двата вида се менуваат (цртеж десно). Определи го најмалиот број на првиот триаголник кој целосно ќе го покрие триаголникот со број 0.

417. Должините на двете страни на триаголникот се $6,21\,cm$ и $1,47\,cm$. Определи ја должината на третата страна, ако се знае дека таа е природен број.

418. Во $\triangle ABC$ должините на страните се a, b, c, а аголот γ (наспроти страната c) е еднаков на 120°. Докажи дека отсечките со должини $a+b, b$ и c определуваат триаголник.

419. Дадени се осум отсечки со должини $1cm$, $2\,cm$, $3\,cm$, $4\,cm$, $5\,cm$, $6\,cm$, $7\,cm$ и $8\,cm$. На колку различни начини можат да се изберат три од овие отсечки така што од нив може да се формира триаголник?

420. Во ранокрак триаголник $ABC, \overline{AC} = \overline{BC}$, односот на два од агите е 1:2. Нека $BL\,(L \in AC)$ е симетралата на $\measuredangle ABC$. Симетралата на BL ги сече страните AB и BC во точките P и M, соодветно. Определи го бројот на рамнокраките триаголници со темиња во точките A, B, C, P, M и L.

421. Кружницата чиј дијаметар е средната линија паралелна на хипотенузата AB на правоаголниот $\triangle ABC$ ја сече хипотенузата во точките M и N. Должините на катетите на $\triangle ABC$ се $\overline{AC}=6\,cm$ и $\overline{BC}=8\,cm$. Определи ја должината на отсечката MN.

422. Рамностран триаголник AMN е впишан во квадрат $ABCD$ така што темето M припаѓа на отсечката BC, а темето N припаѓа на отсечката CD.

а) Докажи дека правата AC е оска на симетрија на триаголникот AMN.

б) Должината на страната на квадратот е $1+\sqrt{3}$. Определи ја должината на страната на триаголникот AMN.

423. Нека E е средината на страната CD на квадратот $ABCD$ и нека F е подножјето на нормалата повлечена од B на правата AE. Докажи дека $\overline{CF}=\overline{CD}$.

424. Точките P и Q припаѓаат на страните BC и AC на $\triangle ABC$, соодветно, при што $\overline{AQ}=\frac{1}{4}\overline{QC}$ и $\overline{BP}=\frac{2}{3}\overline{PC}$. Ако AP и BQ се сечат во точката O и $P_{QOPC}=\frac{p}{q}P_{ABC}$, каде дропката $\frac{p}{q}$ е нескратлива, определи го збирот $p+q$.

425. На краците AB и AC на рамнокрак триаголник ABC соодветно се земени точките K и L така што $\overline{AK}=\overline{CL}$ и $\measuredangle ALK+\measuredangle JKB=60^{\circ}$. Докажи дека $\overline{KL}=\overline{BC}$.

426. Даден е рамностран $\triangle ABC$ со центар на опишана кружница O. Точките D и E припаѓаат на страните AB и AC, соодветно и се такви што $\overline{AD}+\overline{AE}=\overline{AB}$. Докажи дека $\overline{OD}=\overline{OE}$ и $\measuredangle DOE=120^{\circ}$.

427. Точките M и N се средини на страните BC и AD на четириаголникот $ABCD$, за кои важи $\measuredangle ABC=116^{\circ}$, $\measuredangle BCD=50^{\circ}$ и $\overline{AB}=\overline{CD}$. Определи го аголот $\measuredangle BMN$.

428. Во $\triangle ABC$ во пресекот U на симетралите на аглите β и γ е повлечена права паралелна на страната BC. Ако се B_1 и C_1 пресечните точки на

оваа права со страните AB и AC соодветно, тогаш точно е равенството $\overline{B_1C_1} = \overline{BB_1} + \overline{CC_1}$. Докажи!

429. Впишната кружница во правоаголниот $\triangle ABC$ ја допира хипотенузата AB во точката D. Докажи дека $\overline{AC} \cdot \overline{BC} = 2\overline{AD} \cdot \overline{BD}$.

430. Даден е рамнокрак остроаголен триаголник $ABC\,(\overline{AB} = \overline{BC})$, во кој AP е висина повлечена кон кракот BC. Точката K од отсечката BP и точката L од отсечката AK се такви што $\measuredangle PAB = \measuredangle KBL$ и $\overline{BK} = \overline{KL}$. Ако $\overline{PC} = 2$, определи ја должината на отсечката AL.

431. Над висината AD на рамностран $\triangle ABC$ како над дијаметар е конструирана кружница која ја сече страната AB во точка M. Во кој однос точката M ја дели страната AB?

432. Во рамнокрак триаголник BAC со основа AB отсечката CD е висина. Ако M е било која точка на кракот BC, докажи дека разликата на должините на отсечките CA и CM е поголема од разликата на должините на отсечките DA и DM.

433. Должините на страните a,b,c на $\triangle ABC$ се однесуваат како $4:6:7$. Триаголникот $A_1B_1C_1$ кој е сличен со $\triangle ABC$ има периметар $L_1 = 102\,cm$. Определи ги должините на страните на $\triangle A_1B_1C_1$.

434. Остриот агол на ромбот $ABCD$ е еднаков на 60°. Точките M и N припаѓаат на страните AB и BC и се такви што $\overline{MB} + \overline{BN} = \overline{AB}$. Докажи дека $\triangle MND$ е рамностран.

435. Околу рамностраниот $\triangle ABC$ е опишана кружница. На лакот BC кој не ја содржи точката A е земена точка M. Докажи дека $\overline{BM} + \overline{CM} = \overline{AM}$.

436. Точката P припаѓа на тежишната линија AM на триаголникот ABC, $\overline{AP} = 2\overline{AM}$ и $\overline{CP} = \overline{AB}$. Ако $\overline{BC} = 34\,cm$ и $\overline{AM} = 24\,cm$, определи ја должината на $\overline{BP}$.

437. Во $\triangle ABC$, $\measuredangle ABC = 18^\circ, \measuredangle ACB = 90^\circ$ и $AL\,(L \in BC)$ е симетрала на $\measuredangle BAC$. Определи ја вредноста на дропката $\frac{\overline{AB} - \overline{AL}}{\overline{AC}}$.

438. Должините на страните на триаголникот се три последователни природни броја. Определи ја разликата на отсечките кои ги формира висината на триаголникот повлечена на страната со средна должина.

439. Во рамностран $\triangle ABC$ ($\overline{AC}=\overline{BC}$) е повлеена симетралата на $\measuredangle BAC$. Ако $\measuredangle ACB = 36^\circ$ и $\overline{CL}=5$, определи ја должината на страната AB.

440. Во правоаголен $\triangle ABC$ е впишана кружница $k(O,r)$. Нека a и b се должините на катетите, а c е должината на хипотенузата на $\triangle ABC$. Докажи дека $a+b=c+2r$.

441. Ветер скршил дрво високо $16\,m$ и притоа врвот на дрвото ја допрел земјата на $8\,m$ одделеченост од подножјето на дрвото. На која висина од земјата е скршено дрвото?

442. Должините на катетите на правоаголниот триаголни се $a=6\,cm$ и $b=8\,cm$. Определи ја должината на висината повлечена кон хипотенузата на овој триаголник.

443. Определи ги должините на отсечките на кои допирните точки на впишаната кружница ги делат страните на правоаголен триаголник со должини на катети $3\,cm$ и $4\,cm$.

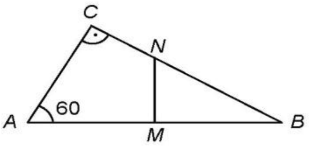
444. Должината на тежишната линија на правоаголен триаголник, повлечена од темето на правиот агол, е еднаква на $20\,cm$, а должината на нормалата повлечена од средината на хипотенузата до пресекот со катетата е еднаква на $15\,cm$. Определи ги должините на катетите на триаголникот.

445. Во правоаголен триаголник разликата на острите агли е еднаква на 60°. Ако m е производот на должините на страните, а n е производот на висините на овој триаголник, определи го количникот $\frac{m}{n}$.

446. Тежишните линии кои соодветствуваат на катетите на правоаголен триаголник имаат должини 10 и $4\sqrt{5}$. Определи ја должината на хипотенузата на овој триаголник.

447. Два правоаголни триаголника, од кои едниот има еднакви катети, а на другиот збирот на катетите е 20, имаат само заедника хипотенуза. Определи ја плоштината на конвексниот четириаголник формиран од овие два триаголника.

448. Во $\triangle ABC$ важи $\measuredangle ACB = 90^\circ$ и $\triangle BAC = 60^\circ$. Точката M е средина на страната AB, точката N припаѓа на страната BC и $MN \perp AB$. Ако $\overline{BC} = 6\,cm$, определи ја должината на отсечката MN.

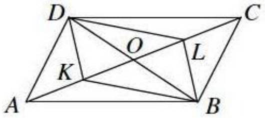


449. Во внатрешноста на рамностраниот $\triangle ABC$ е избрана точка O од која странта AC се гледа под агол од 150°. Докажи дека отсечките OA, OB и OC се страни на правоаголен триаголник.

450. Во правоаголен $\triangle ABC$ е повлечена висината CD (h_c) над хипотенузата и во триаголниците ABC, ADC и BDC се впишани кружниците $k(O,r),$ $k(O_1,r_1)$ и $k(O_2,r_2)$, соодветно. Докажи дека $h_c = r + r_1 + r_2$.

451. Два праволиниски пата p_1 и p_2 се вкрстуваат под агол од 75°. Местото M од патот p_1 е оддалечено $6\,km$, а од раскрсницата R е оддалечено $12\,km$. Определи го растојанието од местото M до патот p_2.

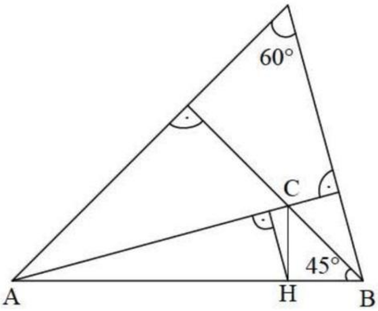
452. На цртежот десно четириаголниците $ABCD$ и $KBLD$ се паралелограми. Определи го бројот на паровите складни триаголници.



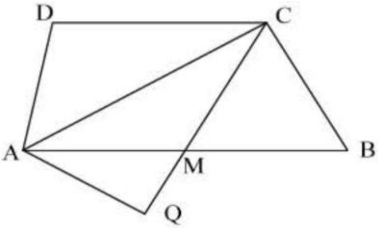
453. Дадени се права p, точка M на неа и полуправа MN. Правата q, паралелна со p ги сече симетралите на напоредните агли со теме во M во точките P и Q, а полуправата MN ја сече во точката S. Докажи дека S е средина на PQ.

454. Симетралата на $\measuredangle BAD$ на паралелограмот $ABCD$ го сече продолжението на страната DC во точката M, која од точката C е оддалечена $5\,cm$. Определи ги должините на страните на паралелограмот ако неговиот периметар е еднаков на $48\,cm$.

455. Даден е тапоаголен $\triangle ABC$ со $\measuredangle ACB > 90^\circ$ и $\overline{AC} = 5\,cm$. Аголот меѓу правите на кои лежат висините повлечени кон страните AC и BC е 60°. Ако $\measuredangle ABC = 45^\circ$, определи го растојанието меѓу подножјето на нормалата од точката C до страната AB и страната AC.

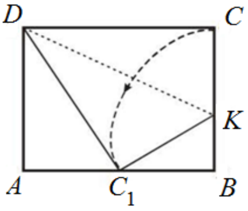


456. Во трапезот $ABCD$ дијагоналата AC е нормална на кракот BC, а аголот меѓу AC и основата CD е 30°. Растојанието од точката A до тежишната линија CM на триаголникот ABC е $5\,cm$. Определи ја должината на дијагоналата AC.



457. Даден е квадрат $ABCD$ со страна a. Изрази го во функција од a радиусот на кружницата која ги допира страните AB и BC и минува низ темето D на квадратот $ABCD$.

458. Правоаголен лист хартија е свиткан како што е прикажано на цртежот десно. Определи го односот $\overline{BK} : \overline{AD}$, ако C_1 е средината на AB.



459. Дадени се два произволни квадрати $AEDB$ и $ACFG$ кои не се преклопуваат, лежат во иста рамнина и имаат иста ориентација. Докажи дека $\overline{BG} = \overline{CE}$.

460. Даден е паралелограм $ABCD$. Точките M и N се средини на страните AD и BC, соодветно. Симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече MN во точката L. Нека CH $(H \in AB)$ е висината на паралелограмот, повлечена од темето C. Определи ја плоштината на паралелограмот $ABCD$, ако $\overline{CH} = \overline{ML} = h$ и $\overline{AD} = \overline{LN}$.

461. Даден е паралелограм $ABCD$. Ако темето A го поврземе со средините на страните BC и CD, тогаш добиените отсечки ја делат дијагоналата BD на три еднакви дела. Докажи!

462. Низ темето B на квадратот $ABCD$ е повлечена нормала на дијагоналата $BD, \overline{BD}=6\,cm$. Определи ја должината на отсечката која од оваа нормала ја отсекуваат продолженијата на страните DA и DC.

463. На страните AB и BC на ромбот $ABCD$, со остар агол 60°, се земени точки M и N соодветно, такви што $\overline{MB}+\overline{NB}=\overline{AB}$. Точката P е симетрична на N во однос на правата CD. Докажи дека $AD \parallel MP$.

464. Даден е конвексен четириаголник со нормални дијагонали. Дали задолжително постои конвексен четириаголник со барем два прави внатрешни агли, чии страни (во некое распоред) се еднакви на страните на дадениот четириаголник?

465. Даден е $\triangle ABC$, $\overline{AC}=7\,cm, \overline{BC}=8\,cm, \overline{AB}=6\,cm$. Права паралелна со страната AC отсекува од триаголникот трапез со должина на помалата основа еднаква на збирот на краците на трапезот. Определи ги должините на страните на трапезот.

466. Правоаголен трапез со висина $6\sqrt{3}$ има дијагонала еднаква на подолгиот крак и внатрешен агол од 60°. Определи ја должината на средната линија на овој трапез.

467. Дијагоналите на рамнокрак трапез се сечат под прав агол, а нивните делови се со должини $12\,cm$ и $9\,cm$. Пресметај ги периметарот и плоштината на трапезот. Определи ги растојанијата од пресечната точка на дијагоналите до основите на трапезот.

468. Даден е рамнокрак трапез чија плоштина е еднаква на квадратот на средната линија. Определи го растојанието од пресекот на дијагоналите до поголемата основа на овој трапез.

469. Средната линија на трапезот ја дели плоштината на трапезот во однос $7:3$. Определи го односот на должините на основите на овој трапез.

470. Во трапез $ABCD$ со основи AB и CD симетралите на внатрешните агли во темињата A и D се сечат на кракот BC. Докажи дека
$$\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{CD}.$$

471. Даден е трапез $ABCD$ $(\overline{AB} > \overline{DC})$ со периметар $L = 35\,cm$, $\measuredangle ABC = 50^\circ$, $\measuredangle ADC = 100^\circ$ и $\overline{BC} = 5\,cm$. Определи ја должината на основата AB.

472. Во консвексниот четириаголник $ABCD$ дијагоналите AC и BD се сечат во точката O. Права l низ точката O ги сече страните AB и CD во точките M и N, соодветно, а права m низ точката O ги сече страните BC и AD во точките P и Q, соодветно. Докажи дека:

а) Ако $ABCD$ е паралелограм, тогаш $\overline{MO} = \overline{ON}$ и $\overline{PO} = \overline{OQ}$.

а) Ако $\overline{MO} = \overline{ON}$ и $\overline{PO} = \overline{OQ}$, тогаш $ABCD$ е паралелограм.

473. Две спротивни страни на конвексен четириаголник лежат на заемно нормални прави и нивните должини се $8\,cm$ и $6\,cm$. Определи ја должината на отсечката која ги поврзува средините на дијагоналите на овој четириаголник.

474. Нека $k(O,r)$ е полукружница над отсечката AB како дијаметар. Кружницата $k_1(O_1,r_1)$ ги допира дијаметарот AB во неговата средина и полукружницата k. Кружниците $k_2(O_2,r_2)$ и $k_3(O_3,r_3)$ ги додираат полукружницата k, дијаметарот AB и кружницата k_1. Докажи дека точките O, O_2, O_1 и O_3 се темиња на ромб.

475. Нека A' и B' се подножјата на нормалите повлечени од крајните точки A и B на дијаметарот AB на дадена кружница k кон произволна тангента на таа кружница. Докажи дека збирот $\overline{AA'} + \overline{BB'}$ е константен, т.е. не зависи од изборот на тангентата.

476. Даден е правоаголник $ABCD, \overline{AB} > \overline{BC}$. Нека точката B_1 е симетрична на точката B во однос на дијагоналата AC. Правата AB_1 ја сече страната CD во точката E. Докажи дека $\overline{AE} = \overline{EC}$.

477. На катетите $\overline{AC} = b$ и $\overline{BC} = a$ на правоаголниот $\triangle ABC$ како над дијаметри се конструирани кружници k_1 и k_2. Правата p ги допира овие кружници во точките M и N. Изразија должината на отсечката MN во зависност од a и b.

478. Нека је $A_1A_2...A_{12}$ е правилен дванаестоаголник, D и E се подножјата на висините повлечени од темињата A_8 и A_1, соодветно во триаголникот $A_1A_5A_8$. Со M да го означиме подножјето на нормалата повлечена од тачката D на A_1A_8. Докажи дека $\overline{A_1M} = \overline{A_8E}$.

479. Во рамнокрак трапез $ABCD$, со крак со должина $6\,cm$, дијагоналата ја дели средната линија на делови од $2\,cm$ и $5\,cm$. Определи ги аглите на трапезот и неговиот периметар.

480. Конструирај рамнокрак триаголник ако висината која соодветствува на основата е $3\,cm$, а висината која соодветствува на кракот е $4\,cm$.

481. Конструирај $\triangle ABC$ за кој се дадени тежишната линија t_c, висината h_c и радиусот R на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

482. Конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на $20\,cm^2$.

483. Нека се дадени отсечки со должини a,b и c, $a+b>c$. Конструирај квадрат со плоштина еднаква на
а) $a^2+b^2+c^2$ б) $a^2+b^2-c^2$.

484. Дадени се три квадрати со должина на страни $1\,cm, 2\,cm, 3\,cm$. Конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на збирот на плоштините на дадените квадрати.

485. Низ пресекот A на кружниците $k_1(O_1,r_1)$ и $k_2(O_2,r_2)$ повлечи права p таква што таа на кружниците отсекува тетиви со еднаква должина.

486. Коструирај рамнокрак трапез за кој се дадени поголемата основа a, кракот c и дијагоналата f .

487. Докажи дека во произволен конвексен четириаголник со помош на една средна линија и отсечки кои се еднакви на половините на дијагоналите може да се конструира триаголник со страни паралелни на средната линија и дијагоналите на четириаголникот.

488. На основата BC на рамнокрак остроаголен $\triangle ABC$ определи точка M така што разликата на нејзините растојанија до краците на $\triangle ABC$ е еднаква на половина од должината на кракот AB.

489. Даден е квадрат $ABCD$ со должина на страна a. Нека E е точка од страната AB таква што $\overline{AE}:\overline{EB}=2:1$ и F е произволна точка од дијагоналата BD. Докажи дека
$$\overline{AF}+\overline{EF}\geq\frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

490. На симетралата на надворешниот агол кај темето C на $\triangle ABC$ земена е произволна точка C. Докажи дека
$$\overline{MA}+\overline{MB}\geq\overline{AC}+\overline{BC}.$$

491. Нека P е точка во внатрешноста на конвексниот четириаголник $ABCD$. Докажи дека збирот $\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}+\overline{DP}$ е најмал ако P е пресекот на дијагоналите AC и BD.

492. На симетралата на надворешниот агол α_1 на $\triangle ABC$ определи точка D така што збирот $\overline{CD}+\overline{BD}$ биде најмал можен.

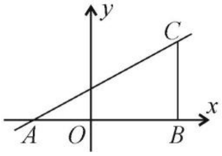
493. Дадени се кружница k и точка P во истата рамнина. Конструирај права p која ја сече кружницата во точки A и B така што збирот $\overline{PA}+\overline{PB}$ ќе биде најголем. Разгледај ги случаите кога P е надвор, внатре и на кружницата k.

494. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ е земена точка M. Докажи дека
$$\measuredangle AMB>\measuredangle ACB \text{ и } \overline{AM}+\overline{MB}<\overline{AC}+\overline{CB}.$$

495. Нека $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ се аглите на четириаголникот $ABCD$. Ако $\alpha=\beta$ и $\delta>\gamma$ докажи дека $\overline{BC}>\overline{AD}$.

496. Отсечката AL $(L\in BC)$ е симетрала на агол во правоаголен $\triangle ABC$. На хипотенузата AB е земена точка M таква што $\measuredangle ALM=90^\circ$. Докажи дека $\overline{AM}<\overline{BM}+\overline{AC}$.

497. На цртежот десно правата AC е график на функцијата $y=\frac{1}{2}x+2$ и $\overline{OB}=6$. Определи ја плоштината на $\triangle ABC$.



498. Во правоаголен координатен систем точките $A(5,1)$, $B(9,1)$ и $C(m,n)$ се темиња на рамнокрак

правоаголен триаголник. Определи го бројот на различните вредности на збирот $m+n$.

499. Во праоаголен координатен систем се дадени точките $A(0,2), B(4,0)$ и $C(x,5)$, каде $0<x<4$. Плоштината на триаголникот ABC е 8. Определи го x.

500. Висината CD на правоаголниот $\triangle ABC$ на хипотенузата отсекува отсечка $\overline{AD}=12\,cm$.

а) Определи ја плоштината на триаголникот ако $\measuredangle ACD=30^\circ$.

б) Под кој агол се гледа страната BC од центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$?

501. Во правоаголен триаголник едниот остар агол е три пати поголем од другиот, а должината на хипотенузата е $c=8\,cm$. Определи ги плоштината и периметарот на триаголникот.

502. Впишната кружница во правоаголен триаголник ја допира хипотенузата во точка која хипотенузата ја дели на две отсечки со должини m и n. Докажи дека плоштината на триаголникот е еднаква на mn.

503. Точката M е средината на хипотенузата на рамнокрак правоаголен $\triangle ABC$, а точката P припаѓа на катетата BC и е таква што $\measuredangle PAC=15^\circ$. Нека $CN\ (N\in AP)$ е нормална на AP и точката L е од отсечката AP таква што $\measuredangle LMN=90^\circ$.

а) Ако $\overline{CN}=h$, определи ја должината на отсечката AL.

б) Определи го односот $P_{LMN}:P_{ABC}$.

504. Определи ја плоштината на правоаголен триаголник чиј периметар е $36\,cm$, ако за страните на тој триаголник важи $\frac{a+b}{c}=\frac{7}{5}$ (a и b се катети, а c е хипотенуза).

505. Даден е правоаголен триаголник со периметар $(60+20\sqrt{3})\,cm$ и еден остар агол 30°. Определи ја плоштината на овој триаголник.

506. Во правоаголен триаголник едната катета е со должина $24\,cm$, а должината на хипотенузата е за $16\,cm$ поголема од должината на

другата катета. Определи ги плоштините на овој триаголник и на кругот опишан околу него.

507. Во правоаголен триаголник со должина на хипотенуза c еден од аглите е еднаков на четвртина од правиот агол. Определи ја плоштината на овој триаголник во функција од c.

508. Во правоаголен триаголник едниот остар агол е три пати поголем од другиот. Определи ја плоштината на овој триаголник ако хипотенузата е $c = 8\,cm$.

509. Определи ја плоштината на правоаголниот триаголник со хипотенуза $c = 4\,cm$, кај кој острите агли се однесуваа како $3:1$.

510. Даден е правоаголен триаголник со катета $12\,cm$ и хипотенуза која е за $8\,cm$ подолга од должината на другата катета. Определи ги плоштината и периметарот на овој триаголник.

511. Над страните на рамнокрак правоаголен триаголник ABC, надвор од него, се конструирани квадрати. Пресеците на дијагоналите на ови квадрати се темиња на $\triangle A_1B_1C_1$ со плоштина $36\,cm^2$. Определи го периметарот на $\triangle ABC$.

512. Нека H е ортоцентарот и O е центарот на опишаната кружница околу остроаголниот $\triangle ABC$. Нека M е втората преселна точка на правата AO со опишаната кружница. Докажи дека триаголниците BCM и BCH имаат еднакви плоштини.

513. Определи ја плоштината на $\triangle ABC$ во кој тежишната линија BM и симетралата на аголот $AL\,(L \in BC)$ се заемно нормални и важи $\overline{AL} = k$ и $\overline{BM} = m$.

514. Во рамностран триаголник со должина на страна $6\,cm$ е впишана кружница, а во кружницата е впишан квадрат. Определи ја плоштината на квадратот. Кој дел од триаголникот го зафаќа квадратот?

515. Триаголникот ABC е таков што тежишните линии $t_a = 6\,cm$ и $t_b = 10\,cm$ се заемно нормални. Определи ја плоштината на овој триаголник.

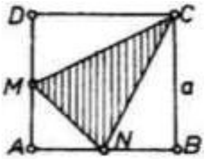
516. Тежиштето T на $\triangle ABC$ припаѓа на кружницата конструирана над страната $\overline{AB}=8\,cm$ како над дијаметар и притоа важи $\measuredangle TAB=30^\circ$. Определи ја плоштината на $\triangle ABC$.

517. Должината на една страна на триаголникот е $10\,cm$, а аголот наспроти неа е днаков на 150°. Определи ја плоштината на кругот опишан околу овој триаголник.

518. Определи го периметарот на $\triangle ABC$ ако $a=10\,cm, \beta=60^\circ$ и $\gamma=75^\circ$.

519. Низ темето B на паралелограмот $ABCD$ е повлечена права p која е паралелна на правата AC. Правата p ги сече продолжението на страната AD во точката E и продолжението на страната CD во точката F. Определи го периметарот на триаголникот DEF ако периметарот на паралелограмот $ABCD$ е $64\,cm$ и $\overline{AC}=25\,cm$.

520. Определи ја плоштината на триаголникот MNC прикажанна цртежот десно, ако плоштината на квадратот $ABCD$ е $16\,cm^2$, а точките M и N се средини на страните AD и AB, соодветно.



521. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ со должини на страни $\overline{AB}=16\,cm$ и $\overline{AC}=\overline{BC}=10\,cm$. Нека A_1, B_1, C_1 се средините на страните BC, CA, AB. Определи ја плоштината на $\triangle A_1B_1C_1$.

522. Определи ја плоштината на $\triangle AEC$ кој е впишан во квадратот $ABCD$ со должина на страна $a=6\,cm$, каде E е средината на BC.

523. Определи ги плоштината и периметарот на триаголникот чии страни се со должини $2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$ и $4\sqrt{2}$.

524. Даден е $\triangle ABC$ со должини на страни $a=20\,cm,\ b=13\,cm$ и $c=21\,cm$. Точката M е подножје на висината h_c. Нека N, P, Q се средините на страните AB, BC, CA, соодветно. Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ е рамнокрак трапез. Определи ги плоштината на $\triangle ABC$ и рамнокракиот трапез $MNPQ$.

525. На страната AB на рамностран триаголник ABC е дадена точка D која ја дели страната во однос $1:3$. Од оваа точка се повлечени нормали DE и DF на AC и BC, соодветно. Определи го односот $\overline{DE}:\overline{DF}$, ако плоштината на триаголникот ABC е $16\sqrt{3}$.

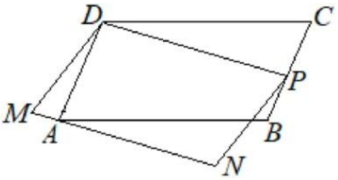
526. Во правоаголен координатен систем xOy е дадени точките $A(20,21)$ и $B(5,12)$. Определи ги периметарот и плоштината на $\triangle OAB$.

527. Даден е рамностран $\triangle ABC$ со страна a. Над страните на триаголникот (во неговата надворешност) се конструирани квадрати $ABNM$, $BCQP$ и $ACRS$. Определи ги плоштината и периметарот на добиениот шестаголник $MNPQRS$.

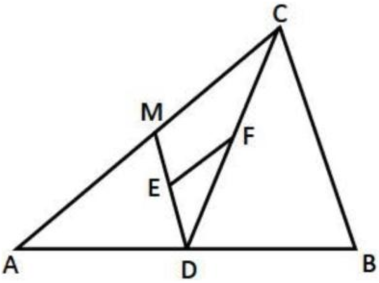
528. Плоштината на еден триаголник е еднаква на $100\,cm^2$, а радиусот на впишаната кружница е еднаков на $8\,cm$. Определи го периметарот на овој триаголник.

529. Плоштината на произволен четириаголник $ABCD$ е еднаква на плоштината на триаголникот ACM, каде точката M е четвртото теме на паралелограмот $DBCM$. Докажи!

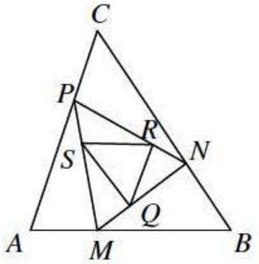
530. На цртежот десно се дадени паралелограмите $ABCD$ и $MNPD$, при што важи $\overline{MA}=3, \overline{AN}=15, \overline{BP}=7$ и $\overline{PC}=5$. Плоштината на петаголникот $ANPCD$ е еднаква на $81\,cm^2$. Определи ја плоштината на триаголникот AMD.



531. Во $\triangle ABC$ точката D е средина на страната AB, а точката M е средина на страната AC. Точките E и F се средини на отсечките MD и CD, соодветно. Ако збирот $P_{\triangle DBC}+P_{\triangle EDF}$ е за $9\,cm^2$ поголем од P_{MEFC}, определи ја плоштината на $\triangle ABC$.

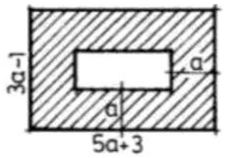


532. На цртежот десно точките M,N и P се такви што $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{BN}}{\overline{NC}}=\frac{\overline{CP}}{\overline{PA}}=\frac{1}{2}$ и точките P,Q и R се такви што $\frac{\overline{MQ}}{\overline{QN}}=\frac{\overline{NR}}{\overline{RP}}=\frac{\overline{PS}}{\overline{SM}}=\frac{1}{2}$. Плоштината на триаголникот ABC е P. Определи ја плоштината на триаголникот QRS.

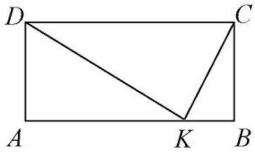


533. Во надворешноста на даден квадрат над секоја негова страна е конструиран рамнокрак триаголник со плоштина еднаква на плоштината на тој квадрат. Определи го периметарот на добиената фигура (четирикрака ѕвезда).

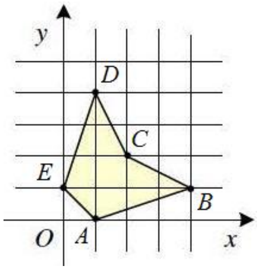
534. Определи ја плоштината на штрафираниот дел на фигурата прикажана на цртежот десно.



535. На страната AB на правоаголникот $ABCD$ е избрана точка K таква што $\measuredangle BKC=\measuredangle DKC$ и $\measuredangle AKD=\measuredangle BCK+15^\circ$. Ако $\overline{DK}=7,5\,cm$, определи го периметарот на правоаголникот.



536. Во правоаголен координатен систем xOy се дадени точките $A(0,1)$, $B(1,4)$, $C(2,2)$, $D(4,1)$ и $E(1,0)$. Определи ја плоштината на петаголникот $ABCDE$.



537. Во правоаголен координатен систем е даден четириаголник $ABCD$, $A(4,0), B(17,0), C(12,12), D(0,3)$. Определи ги плоштината и периметарот на четириаголникот $ABCD$.

538. Определи ги периметарот и плоиштината на четириаголникот кој е определен со графиците на функциите $y=\pm 0,5x\pm 4$.

539. Определи ја плоштината на четириаголникот $ABCD$ чии темиња имаат координати: $A(-3,-1), B(4,-1), C(3,5), D(-1,3)$.

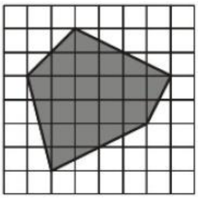
540. Во правоаголен координатен систем со единечна должина $1cm$ се дадени точките $A(-2,-2), C(5,4)$ и $D(-2,8)$. Определи ги координати-

те на точката B ако правата AD е паралелна со правата BC и плоштината на четириаголникот со темиња во точките A,B,C,D е еднаква на $49\,cm^2$.

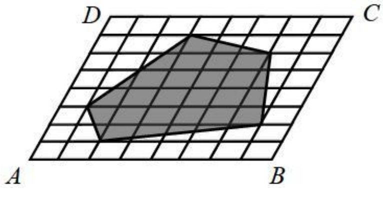
541. Во правоаголен координатен систем означи ги сите точки (a,b) за кои важи $a^4+17b^4+1=2b^2(4a^2+1)$. Определи ја плоштината на многуаголникот чии темиња се означените точки.

542. Братот и сестрата со чекори ги мереле должината и ширината на градина во форма на правоаголник. Кога братот одел по подолгата, а сестрата по пократката страна заедно направиле 270 чекори. Но, кога братот одел по пократкат, а сестрата по подолгата страна на правоаголникот, заедно направиле 290 чекори. Должината на чекорот на братот е $0,8\,m$, а должината на чекорот на сестрата е $0,6\,m$. Определи ја плоштината на градината?

543. Секое квадратче во мрежата на цртежот десно е со страна $3\,cm$. Определи ја плоштината на сивиот правоаголник.



544. Секоја од страните на паралелограмот $ABCD$ е поделена на осум еднакви делови и низ делбените точки се повлечени отсечки паралелни на страните така што е формирана мрежа од исти мали паралелограми. Плоштината на сивата фигура е $48\,cm^2$. Определи ја плоштината на паралелограмот $ABCD$.

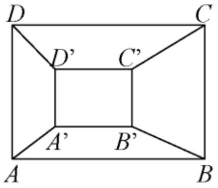


545. Во квадратна мрежа со должина на страните на единечните квадратчиња $1cm$ е конструиран квадрат со темиња во јазлите на мрежата и страни со должина $10\,cm$, кои се паралелни на линиите на мрежата. Конструиран е втор квадрат чии темиња се во јазлите на страните на првиот квадрат. Определи ја најголемата можна плоштина на вториот квадрат?

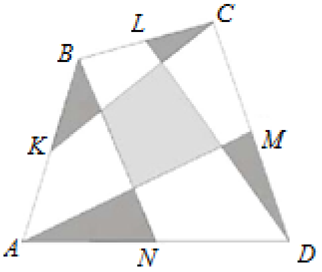
546. Од квадрат се отсечени четири правоаголни триаголници така што е добие правилен осумаголник. Определи ја плоштината на добиениот осумаголник ако должината на страната на квадратот е $10\,cm$.

547. Даден е правоаголник со страни a и b. Ако страната a се продолжи за b, а страната b се продолжи за a, се добива четириаголник со плоштина $100\,cm^2$. Определи го периметарот на почетниот правоаголник. Ако должините на страните на правоаголникот, изразени во сантиметри, се цели броеви определи го правоаголникот чија плоштина е најмала.

548. Во внатрешноста на правоаголникот $ABCD$ е сместен правоаголник $A'B'C'D'$ чии страни се паралелни на страните на правоаголникот $ABCD$ (цртеж десно). Ако $\overline{AB}=10\,cm,$ $\overline{BC}=7\,cm,$ $\overline{A'B'}=4\,cm$ и $\overline{B'C'}=3\,cm$, определи што е поголемо збирот на плоштините на трапезите $ABB'A'$ и $CDD'C'$ или збирот на плоштините на трапезите $ADD'A'$ и $BCC'B'$.

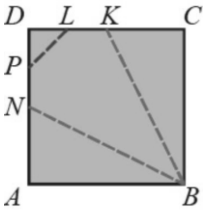


549. Нека K,L,M,N се средините на страните на конвексниот четириаголник $ABCD$ (цртеж десно). Ако плоштината на четириаголникот CK,AM,BN,DL е еднаква на $10\,cm^2$, пресметај ја плоштината на четирите сиви триаголници означени на цртежот.



550. Од квадрат A е отсечен најголем можен круг C. Потоа од C е отсечен најголем можен квадрат D, од D е отсечен најголем можен јруг E и на крајот од E е отсечен најголем можен квадрат F. Колку проценти од плоштината на A останала во F?

551. Даден е квадрат $ABCD$. Точките N и K се средини на страните AD и CD, соодветно, а точките P и L се средини на отсечките ND и DK. Колкав дел е плоштината на петаголникот $BKLPN$ од плоштината на квадратот $ABCD$?



552. Во круг со радиус 1 впишани се правоаголник $ABCD$ со должини на страни $\overline{AB}=a$ и $\overline{BC}=b$ и рамнокрак триаголник CDE со основа CD. За кои вредности на страната b триаголникот CDE и правоаголникот $ABCD$ имаат еднакви плоштини.

553. Даден е паралелограм $ABCD$, $\overline{AC}=8\,cm$, $\overline{BD}=6\,cm$ и аголот меѓу дијагоналите е еднаков на 30°. Определи ја плоштината на паралелограмот.

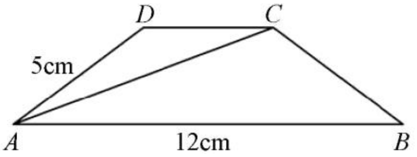
554. Плоштината на четириаголникот $ABCD$ е $75{,}9\,cm^2$. Растојанијата од внатрешна точка N до страните на четириаголникот се еднакви на $3\,cm$. Определи го периметарот на четириаголникот $ABCD$.

555. За четириаголникот $ABCD$ е познато дека

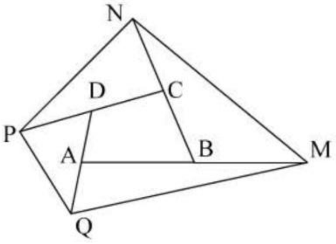
$$\overline{AB}=4\,cm, \overline{BC}=4\sqrt{2}\ cm, \overline{CD}=\sqrt{2}\ cm, \measuredangle BCD=90^\circ.$$

Определи ги периметарот и плоштината на четириаголникот $ABCD$.

556. На цртежот десно е прикажан рамнокртак трапез $ABCD$. Плоштината на триаголникот ABC е трипати поголема од плоштината на триаголникот ACD. Определи ја плоштината на трапезот $ABCD$.



557. Плоштината на четириаголникот $ABCD$ на цртежот десно е еднаква на $4{,}25\,cm^2$. Четириаголникот $MNPQ$ е добиен со удвојување на страните на четириаголникот $ABCD$. Определи ја плоштината на четириаголникот $MNPQ$.



558. Ако одејќи секогаш во ист правец секоја страна на правоаголникот се продолжи за нејзината должина, тогаш крајниоте точки на овие продолженија ќе бидат темиња на паралелограм чија плоштина е пет пати поголема од плоштината на дадениот правоаголник. Докажи!

559. Дадена е отсечката AB. Точката C е меѓу A и B и е таква што $\overline{AC}=4, \overline{BC}=7$. Во една полурамнина во однос на AB се конструирани квадрати $ACMN$ и $CBPQ$. Правите AP и CQ се сечат во точката L. Определи ја плоштината на четириаголникот $ALMN$.

560. Даден е паралелограм $ABCD$ со страни $\overline{AB}=4\,cm$ и $\overline{BC}=3\,cm$. Симетралата на $\measuredangle DAB$ ја сечe правата BC во точка P.
Плоштината на паралелограмот $ABCD$ е $S\,cm^2$. Определи ја плоштината на $\triangle ABP$.

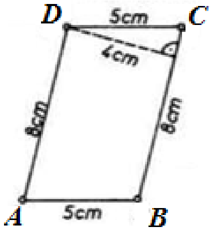
561. Должината на едната страна на правоаголникот е $a=20\,cm$, а нормалните растојанија од темињата на правоаголникот се $12\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на овој правоаголник.

562. Збирот на должините на двете од страните на еден паралелограм е $10\,cm$, а неговиот периметар е $18\,cm$. Должината на висината повлечена кон поголемата страна на паралелограмот е $3\,cm$. Определи ја плоштината на овој паралелограм.

563. Должините на страните на правоаголникот се $\sqrt{1987}-\sqrt{1787}$ и $\sqrt{1987}+\sqrt{1787}$. Определи ја плоштината и должината на дијагоналата на овој правоаголник.

564. Периметарот на ромбот е еднаков на $2p\,cm$, а збирот на неговите дијагонали е еднаков на $q\,cm$. Определи ја плоштината на овој ромб.

565. Определи ја плоштината на паралелограмот прикажан на цртежот десно.



566. Должината на едната дијагонала на трапезот е $37\,cm$, а мерните броеви изразени во сантиметри на висината h и другата дијагонала d на трапезот се решенијата на равенките $\frac{2(h-4)-1}{5}=3$ и $\frac{36-2d}{2}=5$. Определи ја плоштината на овој трапез.

567. Определи ги периметарот и плоштината на правоаголен трапез $ABCD$ со прав аго, во темето A, ако неговата пократка дијагонала е $\overline{AC}=5\,cm$, подолгиот крак е $\overline{BC}=6\,cm$ и остриот агол на трашезот е $\measuredangle ABC=30^\circ$.

568. Дијагоналата на рамнокрак трапез е долга $10\,cm$ и со поголемата основа формира агол од 45°. Определи ја плоштината на овој трапез.

569. Даден е трапез со основи $a=25\,cm, b=15\,cm$ и крак $c=8\,cm$. Определи ги кракот d и плоштината P на трапезот ако се знае дека збирот на аглите при поголемата основа на трапезот е прав агол.

570. Даден е трапез со основи $12\,cm$ и $10\,cm$. Аглите при поголемата основа се 30° и 45°. Определи ја плоштината на овој трапез.

571. Дадена е отсечка $\overline{AB}=10\,cm$ и на неа произволна точка M. Над отсечките AM и MB од различни страни на отсечката AB се конструирани рамнострани триаголници AMC и BMD. Докажи дека четириаголникот $ADBC$ е трапез и пресметај ја неговата плоштина.

572. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ таков што $\overline{AD}=\overline{DC}$ и $\measuredangle ADC=\measuredangle ABC=90^\circ$.

а) Определи го $\measuredangle DAB$ ако ратојанието од темео D до дијагоналата AC е двапати поголемо од растојанието од темето B до дијагоналата AC.

б) Определи ја плоштината на $ABCD$, ако растојанието на темето D до правата AB е 5.

573. Во секое теме на квадрат $ABCD$ со страна $7\,m$ има по еден полжав. Сите полжави почнуваат да се движат истовремено по страните на дадениот квадрат со брзина $1\,m/\min$. Полжавот од A пози кон B, полжавот од B кон C, од C кон D и од D кон A. Ако по n минути ($0<n<7$) полжавите се наоѓаат соодветно во точките A_n, B_n, C_n, D_n $(A_n \in AB, B_n \in BC, C_n \in CD, D_n \in DA)$, со помош на n изразија плоштината на четириаголникот $A_nB_nC_nD_n$.

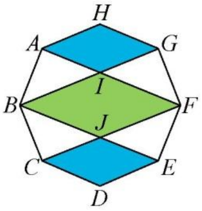
574. Дијагоналите на конвексен четириаголник $ABCD$ се сечат во точката O и го делат четириаголникот на триаголниците OAB, OBC, OCD и ODA. Докажи дека производот на плоштините на триаголниците OAB и OCD е еднаков на производот на плоштините на триаголниците OBC и ODA.

575. Во четириаголникот $ABCD$ аглите во темињата A, B и D се еднакви на 45°.

а) Докажи дека правите AC и BD се заемно нормални и дека $\overline{AC} = \overline{BD}$

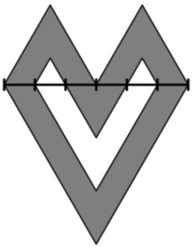
б) Определи ја плоштината на четириаголникот $ABCD$ ако $\overline{BD} = 10\,cm$.

576. Даден е правилен осумаголник $ABCDEFGH$ (цртеж десно). Докажи дека збирот на плоштините на четириаголниците $AIGH$ и $CDEJ$ е еднаков на плоштината на четириаголникот $BJFI$.



577. Должината на страната на правилниот шестаголник $ABCDEF$ е $2\,cm$. Правите определени со страните AB и CD се сечат во точката G. Определи ги периметарот и плоштината на триаголникот DFG.

578. Отсечката на цртежот десно е поделена на шест еднакви дела. Сите триаголници на цртежот се рамнострани. Колкав дел од површината на фигурата е бел?



579. Ден е осумаголник $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8$ за кој $\overline{B_1B_2} = \overline{B_3B_4} = \overline{B_5B_6} = \overline{B_7B_8} = b$ и збирот на секои два соседни агли е еднаков на 270°.

а) Докажи дека $B_1B_2 \parallel B_5B_6$ и $B_3B_4 \parallel B_7B_8$.

б) Определи ги должините на страните B_2B_3, B_4B_5, B_6B_7 и B_8B_1, ако е познато дека за осумаголникот постои внатрешна точка O која се наоѓа на еднакви растојанија од темињата и плоштината на триаголникот B_1B_2O е еднаква на $\frac{1}{8}$ од плоштината на осумаголникот.

580. Даден се правилен осумаголник $A_1A_2...A_8$ чиј радиус на опишаната кружница е еднаков на $6\,cm$ и правоаголник A_1MNA_7 (во кој лежи темето A_4 на осумаголникот) такви што осумаголникот и правоаголникот имаат еднакви плоштини. Определи ја плоштината на делот од правоаголникот кој е надвор од осумаголникот.

581. Дадена е кружница со радиус r во која е впишан и околу која е опишан правилен шестаголник. Со помош на радиусот r изрази ги периметрите и плоштините на двата шестаголници.

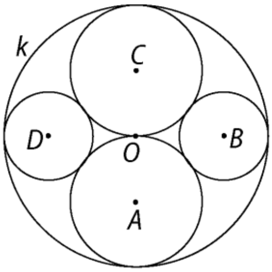
582. Радиусот на кружницата опишана околу правилен дванаесетаголник е $R = 12\,cm$. Определи ја плоштината на овој дванаесетаголник.

583. Правилен дванаесетаголник $A_1A_2A_3...A_{12}$ е впишан во кружница со радиус $10\,cm$. Определи ја плоштината на четириаголникот $A_1A_3A_4A_5$.

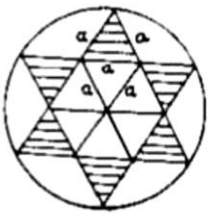
584. Нека $ABCDEFGHIJ$ е правилен десетаголник. Докажи дека $\overline{AD} = a + r$, каде a е должината на страната, а r е радиусот на опишаната кружница околу десетаголникот.

585. Над страните на рамностран $\triangle ABC$ со страна $a = 6\,cm$, во неговата надворешност, се конструирани квадрати, а потоа темињата на квадратите се поврзани така што е добиен конвексен шестаголник. Определи ги плоштината и периметарот на добиениот шестаголник.

586. Во кружницата $k(O, 6\,cm)$ се впишани две поголеми кружници кои се допираат во точката O и ја допираат кружницата k и две помали кружници кои ја допираат кружницата k и ги допираат поголемите кружници (цртеж десно). Определи ја плоштината на четириаголникот $ABCD$ чии темиња се центрите на впишаните кружници.



587. Во кружница со радиус $r = 12\,cm$ е впишана правилна шесткрака ѕвезда (цртеж десно). Определи ја плоштината на правилната шест-крака ѕвезда. Определи го односот на плоштината на кругот и ѕвездата.



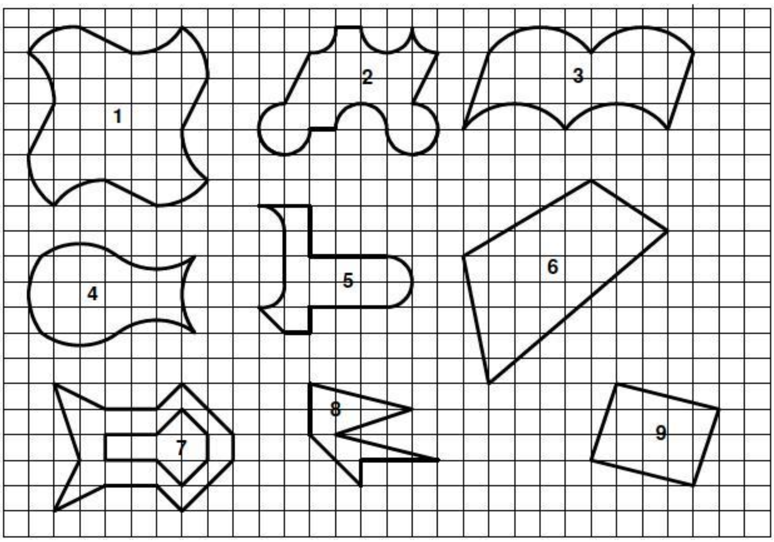
588. Периметрите на кружниците k_1 и k_2 се 2π и 10π, соодветно. Ако $k_1 \cap k_2 = \{A\}$, определи го периметарот на кружницата k_3 чиј дијаметар е еднаков на растојанието меѓу центрите на кружниците k_1 и k_2.

589. Нека P_1 е плоштината на круг со радиус $1cm$, а P_2 плоштината на рамностран триаголник со должина на страна $2\,cm$. Што е поголемо P_1 или $\frac{3}{2}P_2$?

590. Збирот на апсолутните вредности на решенијата на равенката $\frac{5+|x-1|}{2}=5$ е еднаков на мерниот број на страната на квадратот $ABCD$. Точката O е средина на страната AB. Определи ги плоштината и пеиметаротна фигурата определена со пресекот на дадениот квадрат и кругот со центар во O и радиус еднаков на должината на страната на квадратот $ABCD$.

591. Кружниците k и k_1 се сечат во точките A и B, $\overline{AB}=12\,cm$. Отсечката AB е страна на рамностран триаголник впишан во кружницата k и страна на квадрат впишан во кружницата k_1. Определиго периметарот на леќата определена со кружниците k и k_1.

592. Плоштината на едно квадратче во квадратната мрежа е 1.Определи ги плоштините на фигурите прикажани во мрежата.

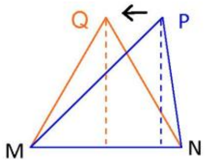


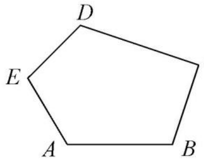
593. Три кружници со еднаков радиус се допираат надворешно. Определи ја плоштината на фигурата меѓу трите кружници.

594. Даден е $\triangle ABC$ со должини на страни $a=15\,cm, b=13\,cm$ и $c=14\,cm$. На страната AB се земени точки D и E такви што CD е висината, а CE тежишната линија на $\triangle ABC$. Определи ја плоштината на кругот опишан околу $\triangle CDE$.

595. Во кружен исечок со големина на шестина од кругот е впишаннов круг. Определи го односот на плоштините на кружниот исечок и впишаниот во него круг.

596. На цртежот десно е конструиан триаголник MNQ кој има еднаква плоштина со триаголникот MNP. Во дадениот случај велиме дека триаголникот MNP е трансформиран во еднаквоплоштен триаголник.





На левиот цртеж е даден петаголник $ABCDE$. Трансформирај го дадениот петаголник во еднаквоплоштен на него триаголник. Детално опиши ја постапката на трансформирање.

597. Колку страни може да има консвексен многуаголник чии дијагонали имаат еднакви должини?

598. Со D_n да го означиме бројот на дијагоналите на конвексниот $n-$аголник. Ако $D_{4n}:D_n=19$, определи го односот $D_{2n}:D_n$.

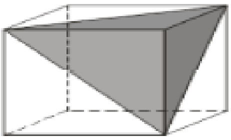
599. Ако бројот на страните на конвексен многуаголник се зглеми за 5, тогаш бројот на неговите дијагонали ќе се зголеми за 45. Колку страни има почетниот многуаголник?

600. Ако бројот на страните на еден конвексен многуаголник се зголеми за 5, тогаш бројот на неговите дијагонали се зголемува за 1990. Определи го бројот на страните на овој многуаголник.

601. Надворешниот агол на правилен $n-$аголник е еднаков на $\frac{4}{15}$ од правиот агол. Колку меѓусебно еднакви по должина има овој многуаголник?

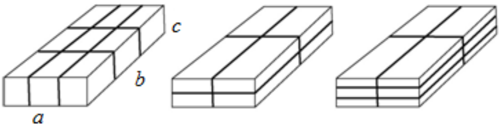
602. Должината на страната на правилен многуаголник со 252 дијагонали е еднаква на $10\,cm$. Определи го периметарот на овој многуаголник.

603. Должините на рабовите на правоаголен паралелопипед се различни природни броеви, изразени во сантиметри. Ако плоштината на затемнетиот дел од површината на паралелопипедот е $23{,}5\,cm^2$, најдете го збирот од волумените на различните паралелопипеди со овие својства.



604. Должините на рабовите на правоаголен паралелопипед се $\frac{1}{a}\,cm, \frac{1}{b}\,cm$ и $\frac{1}{c}\,cm$, а негоата плоштина е $p\,cm^2$. Познато е дека a,b,c се природни, а p е прост број. Определи ги броевите a,b,c и p.

605. Еден пакет е заврзан на три различни начин (види цртеж). За должините на неговите рабови важи $a+b>2c$. Во кој случај е потребен најдолг, а во кој најкраток конец?



606. Во низа од 19 коцки со должини на рабови $a_1, a_2, a_3, ..., a_{19}$ секоја коцка по првата има плоштина која е четири пати поголема од плоштината на претходната коцка.

а) Ако волуменот на деветнаесеттата коцка е p пати поголем од волуменот на седмта коцка, опрдели со колку цифри е запишан бројот p.

б) Ако волуменот на четвртата коцка е $512\,cm^3$, докажи дека важи $a_1+a_2+a_3+...+a_{18}=a_{19}-1$.

607. Дали постои квадар таков што мерните броеви на должините на неговите рабови изразени во сантиметри се природни броеви, а мерниот број на плоштината на квадарот изразен во квадратни сантиметри е прост број?

608. Дадена е правилна еднакворабна шестстрана призма $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ со должина на работ на основата $a=6\,cm$. Определи ги плоштината и волуменот на тристраната призма $ABDA'B'D'$.

609. Дијагоналниот пресек на права правилна пирамида е рамностран триаголник со плоштина $14\sqrt{3}\,cm^2$. Определи ги плоштината и волуменот на призмата.

III ДЕВЕТТО ОДДЕЛЕНИЕ

III.1. АЛГЕБРА

1. Во бројниот ребус

$$M\cdot A\cdot T\cdot E+M\cdot A\cdot T\cdot I+KA=2009,$$

ниту една буква не е 0 и на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри. Определи го бројот на различните решенија на овој ребус?

2. Определи ги сите трицифрени броеви $\overline{a0b}$ такви што $\overline{a0b}=6\cdot\overline{ab}$.

3. Докажи дека бројниот ребус во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри нема решение:

$$A+\overline{AB}+\overline{ABC}+\overline{ABCD}=2009.$$

4. Реи го бројниот ребус:

$$\overline{РУМЕН}+\overline{УМЕН}+\overline{МЕН}+\overline{ЕН}+Н=\overline{УСПЕХ}$$

во кој на различните букви му соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри.

5. Нека во зборот *РУМЕН* на различните соодветствуваат различни цифри. Познато е дека точно еден од броевите $\overline{РУМ},\overline{УМЕН},\overline{РУМЕН}$ е степен на бројот 3, точно еден од броевите е точен квадрат и точно еден од броевите е делив со 23. Определи ги трите броеви.

6. Реши го бројниот ребус: $9\cdot\overline{xy}=\overline{x0y}$.

7. Нека $A=\overline{abcde}$ и $B=\overline{decba}$ се петцифрени броеви такви што $A>B$, $a\neq 0, d\neq 0$. Нека $A_1=A-B=\overline{a_1b_1c_1d_1e_1}$ и $B_1=\overline{d_1e_1c_1b_1a_1}$, пти што во случајов може некоја од цифрите a_1,b_1,c_1,d_1,e_1 да е еднаква на 0.

а) Определи го збирот A_1+B_1 ако $A=54321$.

б) Определи го збирот A_1+B_1 за произволен број $A=\overline{abcde}$.

8. Определи го бројот на решенијата на бројниот ребус
$$\overline{aaa}\cdot\overline{abbc}=\overline{ddeeed}\,,$$
во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

9. Определи го 2019-тиот член на низата
$$1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, ...$$
во која секој непарен број се јавува колку што е неговата вредност.

10. Определи го 2010-тиот член на низата
$$2, 2, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 6, 6, ...$$
во која парните броеви последователно се повторуваат кулку што се нивните вредности.

11. Во низата 2, 3, 8, ... секој број е за 1 помал од квадратот на претходниот број. Определи ја цифрата на единиците на 2012-тиот член на оваа низа.

12. Дадената табела се пополнува на следниов начин:
    - Во првиот ред последователно се запишуваат природните броеви од 1 до n.
    - Во вториот ред истите броеви се запишуваат во произволен редослед.
    - Во третиот ред се запишуваат збировите на броевите во колоната.

    Целта е да се разместата броевите во вториот ред така што во третиот ред ќе се добијат точни квадрати. Ако тоа е можно,тогаш за низата во првиот ред ќе велиме дека е *квадратна*. На пример низата (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) е квадратна, а низата (1, 2, 3, 4) не е квадратна, бидејќи ниту еден од броевите $4+1, 4+2, 4+3, 4+4$ не е квадрат.

Прв ред	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Втор ред	8	2	6	5	4	3	9	1	7
Трет ред	9	4	9	9	9	9	16	9	16

    а) Определи ги сите квадратни низи за $n\le 25$.

    б) Испитај го постоењето на квадратни низи од видот
$$(n_1, n_1+1,...,0,1,2,...,n)\text{, каде } |n_1|<n.$$

13. Три рационални броја a,b,c се такви што еден е поголем од нула, другиот е еднаков на нула и третиот е помал од нула. Ако за овие

броеви важи $\frac{a(c-b)}{b}>0$, кој од нив е поголем, кој е помал и кој е еднаков на нула.

14. Спореди ги броевите 202^{303} и 303^{202}.

15. Броевите $a=2^{3^4}, b=3^{4^2}, c=4^{2^3}$ подреди ги по големина.

16. Определи ги квадратите на броевите 19999999993 и 129999999997.

17. Определи го природниот број n за кој важи

$$\frac{n-1}{n^2}+\frac{n-2}{n^2}+\frac{n-3}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}=\frac{45}{1+3+5+\ldots+2n-1}.$$

18. Нека a,b,c се природни броеви такви што $\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}$ е рационален број. Докажи дека $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ е цел број.

19. Нека a и b се цели броеви и $(a+b-2)^2=a^2+b^2$. Колку различни вредности може да прими збирот $a+b$?

20. Докажи дека $\underbrace{333...33}_{n}\cdot\underbrace{333...34}_{n}=\underbrace{111...1}_{n}\underbrace{222...2}_{n}$.

21. Докажи дека бројот $\underbrace{111...111}_{100}-\underbrace{222...222}_{50}$ е квадрат на природен број.

22. Збирот на целите броеви a,b,c е еднаков на нула. Докажи дека $2(a^4+b^4+c^4)$ е квадрат на цел број.

23. Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е зададена со $f(x)=-2x+3$.

а) Која од точките $A(1,5), B(-1,5), C(0,3)$ припаѓа на графикот на функцијата f ?

б) Во кои точки графикот на функцијата ги сече координатните оски?

24. Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е определена со $f(x)=3-2x$.

а) Нацртај го графикот на оваа функција во координатниот систем xOy.

б) Определи ја нулата на функцијата.

в) Определи го множеството вредности на x за кои функцијата f прима негативни вредности.

г) Определи ги целобројните позитивни решенија на неравенката $f(x) > -10$.

25. Дадени се права p со равенка $2x - 3y - 18 = 0$ и точка $B(6,-2)$ која припаѓа на p.

    а) Напиши ја равенката на правата q која минува низ координатниот почетоки е нормална на правата p.

    б) Определи ги координатите на пресечната точка A на правите p и q.

    в) Определи ги координатите на четвртото теме C на паралелограмот $ABCO$.

26. Дадена е функција $f(x-1) = 2x-1$. Определи ги функциите $f(x)$ и $f(\frac{1}{2}x)$ и точката на пресек на нивните графици.

27. Дадена е функција $f(x) = 2x-1$. Определи ја функцијата $g(x)$ за која важи $f(g(x)) = 6x+3$.

28. Нека $f(x)$ е линерна функција за која $f(0) \neq 0$ и $f(0)$ е единственото решение на равенката $f(xf(x)) = 0$. Пресметај $f(2019)$.

29. Нацртај го графикот на функцијата $y = || x - | x ||$.

30. Нацртај ги графиците на функциите $y = | x - 2 |$ и $y = -| x | + 2$, а потоа определи ја должината на отсечката која е заедничка за двата графика.

31. а) Во ист координатен систем нацртај ги графиците $f(x) = | 2x + 2 | - 3$ и $g(x) = | 3x + 3 | - | 2x + 4 |$.

    б) Определи ја полоштината на фигурата ограничена со графиците на функциите по а).

32. Определи ги периметарот и плоштината на фигурата ограничена со правите:

$$x = 5, 3x - 4y = -5, 3x + 4y = 11.$$

33. Определи ги темињата и плоштината на четириаголникот определен со графиците на функциите

$$y=-1,\ y=\frac{3}{2}x-4,\ y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{2}\text{ и } y=2x+7.$$

34. Нацртај ги графиците на функциите:
а) $f(x)=||x-1|-1|$, б) $f(x)=||x+1|+1$,
в) $f(x)=||x-1|+1|$, д) $f(x)=||x+1|-1|$.

35. Нацртај ги графиците на функциите:
а) $f(x)=|x-1|$, б) $f(x)=-|x+1|$,
в) $f(x)=2-|x+1|$, г) $f(x)=|x+1|-2$.

36. Нацртај ги графиците на функциите:
а) $f(x)=|x-2|$, б) $f(x)=-|x+2|$,
в) $f(x)=2-|x|$, г) $f(x)=|x|+2$.

37. Определи ја вредноста на параметарот m така што правите
$$mx+(2m+3)y+m+6=0 \text{ и } (2m+1)x+(m-1)y+m-2=0$$
се сечат на ординатната оска.

38. Дадена е права $y=kx+n$.

а) Определи ги параметрите k и n така што дадената права ќе минува низ точките $A(1,4)$ и $B(2,1)$, а потоа за најдените вредности на k и n реши ја неравенката $\frac{kx+n}{x}<3$.

б) Ако $n=3$, колку треба да биде k ако се знае дека правата го дели множеството точки $\{(x,y)\,|\,0\le x\le 4,\ x\le y\le 2\}$ на два дела со еднакви плоштини.

39. Дадени се функциите $f(x)=(2m-0{,}5)x+5$ и $g(x)=(7m+2)x-4$. Определи ја вредноста на m така што:
а) графиците на функциите ќе бидат паралелни,
б) функцијата $f(x)$ опаѓа, а функцијата $g(x)$ расте,
в) нулата на функцијата $f(x)$ е позитивен број.

40. Определи ги координатите на точката A која е симетрична на точката $B(5,-2)$ во однос на правата $3x-2y-6=0$.

41. Определи ја равенката на правата p која е симетрична на правата $84x+35y+245=0$ во однос на правата $y=-x$.

42. За функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ важи $3f(x-2)+f(2x-4)=x^2+2020$. Пресметај $f(0)$.

43. Дадена е функцијата $f(x)=\frac{x^2-x}{x+2}$. Пресметај $f(f(x))$.

44. Пресметај $f(7)$ ако $f(x^2-2x+8)=4x^2+2x+1$.

45. Реши ја равенката: $\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{|x-1|}}}=2017$.

46. Нека $v=1987$, $k=1787$ и $s=[(v^2-k^2):(\frac{1}{v}+\frac{1}{k})]:vk$. Реши ја равенката

$$(200x+800):s+(x-5):(s-198)=x:(2s-396)+1.$$

47. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\frac{a+b}{a+2b}+\frac{x}{b}=1+\frac{b(b-x)}{a(a+2b)}.$$

48. Реши ја равенката

$$(0,9x-0,4)-(0,8x-0,3)=(1,7x-0,7)(0,8x+0,3)-(1,7x-0,7).$$

49. Определи ја вредноста на параметарот a така што решението на равенката $\frac{x+a}{2}-(1-\frac{3x-a}{3})=2$ ќе биде еднакво на 2.

50. Решението на равенката

$$\frac{4x-2}{5}-\frac{1}{2}(\frac{1}{3}(x+9)-\frac{3x-1}{4})=3-\frac{2(6-x)}{3}$$

е апциса на пресекот на права p со $x-$оската. Правата p ја сече $y-$оската во точката $A(0,4)$. Иоредели ја равенката на правата p.

51. Изразот $\frac{m-9}{4}x+\frac{m+2}{3}x^2-x^3$ има вредност 16 за $x=-2$. Определи ја вредноста на изразот за $x=0,5$.

52. Определи го збирот на сите решенија на равенката:

$$||1-2\cdot 3|-|4\cdot 5-6x||=7.$$

53. Реши ја равенката: $|\frac{x-2}{3}-\frac{6-2x}{4}|=2$.

54. Реши ја равенката: $|x+|2x+|4x|||=2009$.

55. Реши ја равенката: $|x|+|2x-5|=4$.

56. Реши ја равенката: $|x-1|+|x+3|=2x+2$.

57. Реши ја равенката: $\sqrt{x^2-3x+\frac{9}{4}}=1+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

58. Реши ја равенката: $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2+6x+9}=13$.

59. Дадена е функцијата $f(x)=|2x-3|-2x$.

а) Определи ги вредностите на x за кои $f(x)=-3$.

б) Реши ја равенката $f(x)=a$, каде a е рален параметар.

60. Нека a и b се реални броеви. Определи го бројот a за кој равенката $|ax-1|+|x-b|=1$ има точно едно решение за секој број b.

61. Нека $a<b<c$. Определи ја најмалата вредност на изразот:

$$|x-a|+|x-b|+|x-c|.$$

62. Реши ја равенката: $x^3+x^2+x+1=0$.

63. Во множеството реални броеви реши ја неравенката: $\frac{2x+1}{5}<\frac{3x+2}{8}$.

64. За променливите x и y важи: $\frac{7y-3x}{2}=2-\frac{5}{6}x$. Определи ги целобројните вредности на променливата x за кои важи $1<y<2$.

65. Дадена е равенката: $\frac{5x-3}{5}:\frac{4}{3}=\frac{m}{2}$.

а) Реши ја равенката по x, а потоа определи го m така што ќе биде $x=5$.

б) За кои целобројни вредности на m ќе важи $0<x<1$?

66. Реши ја неравенката: $\frac{x+4}{3-x}<2$.

67. Определи го бројот на природните броеви n за кои важи $\frac{n^2-n}{n+1}<\frac{3}{2}$.

68. Определи ги вредностите на параметарот a за кои секое решение на неравенката $|x+a|<1$ припаѓа на интервалот $[-3,3]$.

69. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 2x+y=3. \end{cases}$$

70. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} 3y-2=0 \\ 2x+3y=4. \end{cases}$$

71. Реши го системот равенки:

$$\frac{x+y}{xyz}=\frac{1}{6},\ \frac{y+z}{xyz}=\frac{4}{15},\ \frac{z+x}{xyz}=\frac{7}{30}.$$

72. Ако $3x+26=5y-1$ и $55-2x=7y-a$ определи ја најголемата можна вредност на производот xy.

73. Определи ја функцијата $f(x)$ за која важи: $f(x)+5f(-x)=6x+12$.

74. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} xy=10, \\ xz=14, \\ xyz=70. \end{cases}$$

75. Во множеството реални броеви реши го системот равенки:

$$\begin{cases} |x|+|y|=1988 \\ y-x=2. \end{cases}$$

76. Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} |x|-|y|=3 \\ |x|+|y|=5. \end{cases}$$

77. Даден е системот равенки

$$\begin{cases} 2x-3y=7 \\ 4x+ay=b \end{cases}$$

кој има повеќе од едно решение. Пресметај го збирот $a+b$.

78. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+py=3 \\ px+4y=6 \end{cases}$$

а потоа определи ја вредноста на параметарот p така што за решението (x,y) на системот важи $|x-y|>1$.

79. Определи го реалниот параметар a за кој системот

$$\begin{cases} x+y=10 \\ 2x+(a-2)y=20 \end{cases}$$

има бесконечно многу решенија.

80. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} ax+y=1 \\ 9x+ay=-3 \end{cases}$$

ааде a е реален параметар.

81. Определи ги сите $x\in\mathbb{Z}$ за кои важи $\frac{2x-3y}{4}-\frac{2y-3x}{2}=1$ и $0\leq y\leq 3$.

82. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2+y^2=2x+2y-1 \\ y^2+z^2=2y+2z+3 \\ z^2+x^2=2z+2x+2. \end{cases}$$

83. Нека a,b,c се позитивни броеви такви што

$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}=k.$$

Определи ја вредноста на k.

84. Ако $a^2+b^2-2(bc+cd+da-c^2-d^2)=0$, тогаш $a=b=c=d$. Докажи!

85. Ако $a+b=3$ и $ab=2$, докажи дека $a^4+b^4=17$.

86. Нека a,b,c се реални броеви такви што $a+b+c=0$ и $abc=2019$. Докажи дека $a(a+b)(a+c)=2019$.

87. За реалните броеви a,b,c се исполнети условите
$$a+b+c=1,\ a^2+b^2+c^2=1 \text{ и } a^3+b^3+c^3=1.$$
Докажи дека $abc=0$.

88. Нека $x^2+x-7=(x-a)(x-b)$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Пресметај го збирот a^3+b^3.

89. Докажи дека, ако $a^2+ab+ac=x, b^2+ab+bc=y, c^2+ac+bc=z$, тогаш
$$(x+y+z)(abz+bcx+acy)=3xyz.$$

90. Ако
$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}+...+\frac{1}{1+x_{2019}}=2019$$
и ниту еден од броевите $x_1,x_2,x_3,...,x_{2019}$ не припаѓа на множеството $\{-1,0\}$ определи ја вредноста на изразот
$$\frac{1}{1+\frac{1}{x_1}}+\frac{1}{1+\frac{1}{x_2}}+\frac{1}{1+\frac{1}{x_3}}+...+\frac{1}{1+\frac{1}{x_{2019}}}.$$

91. Определи ја вредноста на изразот $\frac{x+2y}{x-2y}$ ако $x^2+4y^2=5xy$ и $0<x<y$.

92. Определи ја вредноста на изразот $x^2+\frac{1}{x^2}$, ако $x+\frac{1}{x}=3$.

93. Нека $x-\frac{2}{x}=\sqrt{2}$. Определи ја вредноста на изразот $\frac{x^4+4}{x^2}$.

94. Ако $a^2+a+1=0$, определи ја вредноста на изразот $a^{2019}+\frac{1}{a^{2019}}$.

95. Определи ја вредноста на изразот:
а) $2\sqrt{48}-3\sqrt{75}+7\sqrt{3}$,
б) $|a|-|b|$, ако $a=\frac{\frac{3}{4}-0,4}{0,5-\frac{2}{3}}$ и $b=\frac{\frac{3}{4}+0,4}{0,5+\frac{2}{3}}$.

96. Пресметај ја вредноста на изразот: $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})$.

97. Пресметај: $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})$.

98. Пресметај ја вредноста на изразот: $\sqrt{57-40\sqrt{2}}-\sqrt{57+40\sqrt{2}}$.

99. Упрости го изразот: $\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

100. Докажим дека вредноста на изразот $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ е цел број.

101. Докажи дека бројот

$$\sqrt{1+2006\sqrt{1+2007\sqrt{1+2008\sqrt{1+2009\cdot 2011}}}}$$

е природен и определи го неговиот најголем прост делител.

102. Определи ја вредноста на изразот

$$A=\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{12}}+\sqrt{9-2\sqrt{20}}+\ldots+\sqrt{31-2\sqrt{240}}.$$

103. Докажи дека за броевите $a=(\sqrt{3}+1)\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ и $b=\sqrt{(\sqrt{5}-4)^2}-1$ важи $b<1<a$.

104. Пресметај ја вредноста на изразот: $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}+3}$.

105. Рационализирај го изразот: $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

106. Броевите a и b се цели и $\sqrt{\sqrt{419-40\sqrt{19}}}$ е корен на равенката $x^4-ax^2+b=0$. Определи го збирот $a+b$. (Ако тврдиш дека некој број е рационален, треба да докажеш.)

107. Упрости го изразот: $(1-\frac{a}{2})^2+(1+\frac{a}{2})^2$.

108. Полиномот $9-6x+x^2$ запиши го како производ на два полиноми.

109. Разложи го на множиѕели полиномот: x^8+x^4+1

110. Даден е изразот

$$M=(m^2+5m)(m^2+5m+10)+24, \text{ каде } m\in\mathbb{Z}.$$

Докажи дека дадениот израз може да се запише како производ на четири последователни цели броеви.

111. Упрости го изразот: $\frac{x^3-27}{x-3}$.

112. Упрости го изразот $\frac{x^4-7x^3+12x^2}{3x^3-48x}$.

113. Упрости го изразот $P(x)=\frac{(a^2+b^2)x+ab(x^2+1)}{(a^2-b^2)x+ab(x^2-1)}$, а потоа реши ја равенката $P(x)=2$.

114. Пресметај ја вредноста на изразот $R(x)=\frac{x^3-x}{x^2-2x+1}$ за $x=10^4+1$.

115. Дадени се полиномите

$$P(x)=x^3+x^2-9x-9 \text{ и } Q(x)=(x-2)^2-(x-4)^2.$$

а) Упрости го изразот $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$.

б) Определи ги нулите на функцијата $f(x)$.

в) За кои вредности на x функцијата $f(x)$ не е определена?

116. Нека $f(x)=\frac{x}{1+x}$ и $g(x)=\frac{x}{1-x}$. Упрости го изразот:

$$f(x)-2f(x)g(x)+g(x),$$

а потоа пресметај ја неговата вредност за $x=0$ и $x=2$.

117. Упрости го изразот: $\frac{x^3+3x^2-4x}{(x-4)^2}:\frac{x-x^2}{8-2x}$.

118. Упрости ја дропката:

а) $\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)...(10^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)...(10^3+1)}$. б) $\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)...(n^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)...(n^3+1)}$.

119. Нека $x\in\mathbb{R}$ и $n\in\mathbb{N}$. Определи ги сите вредности на x за кои важи:

$$\frac{x^{2009}+1}{2}+\frac{2x^{2009}+1}{3}+...+\frac{nx^{2009}+1}{n+1}=n.$$

120. Определи ги сите вредности на реалните броеви a,b,c и d за кои важи

$$a^2+b^2+c^2+d^2=a(b+c+d).$$

121. За кои вредности на реалните броеви x, y, z е задоволено равенството

$$16x^2+9y^2+4z^2=8x+6y+4z-3.$$

122. Определи ги броевите a и b за кои важи: $a^2+b^2=2(2a-3b)-13$.

123. Сипореди ги броевите $m=202^{303}$ *и* $n=303^{202}$.

124. Докажи дека полиномот $x^{12}-x^9+x^4-x+1$ е позитивен за секој реален број x.

125. Ако за $a \le x \le y \le b$, тогаш $2 \le \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \le \frac{a}{b}+\frac{b}{a}$. Докажи!

126. Докажи: $\frac{1}{2009} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2007}{2008} < \sqrt{\frac{1}{2009}}$.

127. Докажи дека за секој a, $a \ne \pm\frac{1}{2}$ важи: $(\frac{4a^2}{2a+1}+\frac{1}{2a-1})(\frac{8a^3}{2a-1}+\frac{1}{2a+1})<0$.

128. Збирот на три реални броја е броја е еднаков на 0. Докажи дека збирот на кубовите на овие броеви е еднаков на нивниот трикратен производ.

129. Ако $a+b+c=1$, тогаш $a^2+b^2+c^2 \ge \frac{1}{3}$. Докажи!

130. Ако за реалните броеви x, y, z важи $x+y+z=8$ и $x^2+y^2+z^2=32$, определи ја најголемата можна вредност на бројот z.

131. За кои вредности на x изразот $x(x+2)(x+4)(x+6)$ има најмала вредност?

132. За коии вредности на x и y изразот $x^4+2x^2+y^2-2y+2$ прима најмала вредност?

133. Определи ја најмалата можна вредност на изразот $x^2-2|x-2|$.

134. Определи го бројот x за кој збирот $x+x^2$ е најмал.

135. Определи ја најголемата вредност на изразот $-3x^2+|x^2-1|+4x$.

136. Определи ја најголемата вредност на изразот $\frac{1}{x^2+|x-1|}$.

137. Определи ја најмалата можна вредноста на изразот

$$S=4x^2+5y^2-6xy-30x+5y+2018.$$

138. Определи ги вредностите на x и y за кои изразот

$$4x^2+9y^2-12x+30y+2019$$

има најмала вредност, а потоа определи ја таа вредност.

139. За кои вредности на x,y,z изразот $x^2+y^2+z^2-12y-14z=90$ прима најмала можна вредност? Определи ја таа вредност!

140. Определи ги вредностите на променливите x и y за кои изразот $\frac{8-(7+2x)^2}{11+(3x-y+1)^2}$ има најголема вредност.

141. За кои вредности на променливите x и y дропката $\frac{2x^2+2y^2-4y+7}{x^2+y^2-2y+2}$ достигнува најголема вредност. Која е таа вредност?

142. Определи ги вредностите на променливите a и b за кои изразот $5-\frac{1-a^2-4ab-4b^2}{2+(1+2a+3b)^2}$ има најмала вредност.

143. Определи ја најголемата вредност на изразот:

а) $\frac{1-(2x-y)^2}{10+(1-3x+y)^2}$ б) $4-\frac{1}{1+2x-x^2}$.

144. Дадена е функцијата $y=(2a-3b-\frac{4}{3})x+4a-6b+4$. Нацртај го графикот на оваа функција за оние вредности на a и b за кои изразот $A=\frac{2}{4a^2-12ab+9b^2+4}$ прима најголема вредност.

145. Определи ја најмалата вредност на изразот $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, ако x и y се позитивни реални броеви такви што $x+y=4$.

III.2. ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

146. Определи го збирот на непарните броеви од 51 до 200.

147. Докажи дека производот на четири последователни непарни природни броја зголемен за 16 е точен квадрат на природен број.

148. Бројот 2^{2006} е запишан како збир на кубови на неколку цели броеви. Определи го најмалиот можен број на тие броеви.

149. Докажи дека разликата на бројот запишна со 100 единици и бројот запишан со 50 двојки е точен квадрат на природен број.

150. Определи ги последователните броеви a и b кои се од облик
$$a = 2(n-3)(n+1) \text{ и } b = (n-2)(2n-1)$$
каде n е природен број.

151. Збирот на 12 различни природни броеви е 83. Докажи дека производот на овие броеви е делив со 420.

152. Нека a и b се природни броеви такви што $a < b$ и бројот $11a + 13b$ е делив со 12. Докажи дека бројот $b - a$ има најмалку шест различни природни делители.

153. Определи го четирицифрениот број $\overline{xyzt}$ за чии цифри се точни равенствата
$$(x+z)t = 14, (x+t)z = 8, (z+t)x = 14, xyzt = 0\ .$$

154. Докажи дека збирот на кубовите на три последователни броја е делив со 9.

155. Збирот на четири природни броја е s . Ако на првиот број му се додаде природниот број k , од второт се одземе k , третиот се помножи со k и четвртиот се подели со k , се добива ист збир. Докажи дека бројот s е делив со $(k+1)^2$.

156. Докажи дека збирот на бројот $\overline{xxyy}$ и бројот запишанс со истите цифри, но во обратен редослед е делив со 101.

157. Докажи дека за секој природен број n изразот $n^3-1987n$ е делив со 6.

158. Докажи дека бројот $2^{1991}+3$ е делив со 7.

159. Определи ги последните две цифри на бројот 7^{7^7}.

160. Докажи дека бројот $S=1+7+7^2+7^3+...+7^{2018}$ е делив со 19.

161. Докажи дека збирот $12+12^2+12^3+...+12^{2020}$ е делив со 13.

162. Определи го најголоемиот природен број n за кој 2^n е делител на $20^{18}+18^{20}+128^2\cdot 20^3$.

163. Докажи дека за секој природен број n изразот n^3+3n^2+2n е делив со 6.

164. Докажи дека за секој природен број n вредноста на изразот $\frac{n^2}{2}-\frac{2n}{3}+\frac{n^3}{6}$ е цел број.

165. Докажи дека за секој природен број n бројот $6^{2n+2}-2^{n+3}\cdot 3^{n+2}+36$ е делив со 900.

166. Ако природниот број n не е делив со 5, тогаш или n^2+1 или n^2-1 е делив со 5. Докажи!

167. Докажи дека за секои цели броеви a,b,c,d производот
$$abcd(a^2-b^2)(a^2-c^2)(a^2-d^2)(b^2-c^2)(b^2-d^2)(c^2-d^2)$$
е делив со 7.

168. Ако за природните броеви a,b и c важи $a+b+c=2010$, докажи дека збирот $a^3+b^3+c^3$ е делив со 6.

169. Ако збирот на два цели броја е делив со 10, тогаш квадратите на овие броеви имаат иста цифра на единиците. Докажи!

170. Определи ги сите природни броеви n такви што бредноста на изразот $\frac{10^{2n}-1}{3^4}$ е цел број.

171. Ако разликата на два трицифрени броја a и b е делива со 7, тогаш и шестцифрениот број c кој се добива со допишување еден по друг на броевите a и b е делив со 7. Докажи!

172. Дали постои цел број a таков што бројот a^2+a+1 е делив со 1988?

173. Дадени се трицифрените броеви $\overline{abc}$ и $\overline{def}$. Ако збирот на броевите $\overline{abc}$ и $\overline{def}$ е делив со 37, тогаш со 37 е делив и бројот $\overline{abcdef}$. Докажи!

174. Кој најмал четирицифрен природен број треба да се допише зад бројот 1989 за да се добие број кој е делив со 20 и 89?

175. Даден е полиномот $P(x)=x^3+5x^2+3x-9$.

а) Разложи го $P(x)$ на прости множители.

б) Докажи дека за секој непарен природен број n бројот $P(n)$ е делив со 8.

176. Нека $x=\underbrace{44...44}_{11}$. Докажи дека бројот x^2-x-2 е делив со 270.

177. Докажи дека за секој природен број a бројот $a^2+2ab+2b^2$ е делител на a^4+4b^4.

178. Докажи дека за секој природен број a бројот 6 е делител на бројот a^3-3a^2+2a.

179. Докажи дека за секој природен број a бројот 120 е делител на бројот a^5-5a^3+4a.

180. Докажи дека за секој природен број n изразот $3^{2n}-1$ не е делив со $2^{2n}-1$.

181. Дали за некој природен број n збирот на првите n природни броеви може да завршува на 2018?

182. Дали за некој природен број p збирот $1+2+3+...+p$ може да завршува на цифрите 2019?

183. Збирот на цифрите на бројот X е Y, а збирот на цифрите на бројот Y е Z. Ако $X+Y+Z=60$, определи го бројот X.

184. а) Докажи дека за секој природен број n изразот n^5-n е делив со 30.

     б) Ако a и b се природни броеви такви што $a^5+b^5=1990$, тогаш 5 е делител на $a+b$. Докажи!

185. Ако двоцифрениот број n го поделиме на 19, добива количник q и остаток 1. Ако ги запишеме цифрите на n во обратен редослед и добиениот двоцифрен број го поделиме на 14 добиваме количник $2q$ и остаток 1. Определи го бројот n.

186. Непарен број помал од 2013 дава остаток 2 при делење со 3 и дава остаток 6 при делење со 7. Определи го збирот на цифрите на најголемиот број со ова својство.

187. Нека $N=7+77+777+...+\underbrace{777...77}_{2016}$. Определи го остатокот при делење на N со 37.

188. Ако $2019!=60^k n$ и n и k се природни броеви, определи ја најголемата можна вредност на k.

189. Определи го природниот број n за кој збирот
$$1^{2016}+2^{2017}+3^{2018}+4^{2019}+5^{2020}+n$$
е делив со 13, а вредноста на изразот $|n-2019|$ е најмала можна.

190. Збирот на два броја е 168, а нивниот најголем заеднички делител е 24. Кои се тие броеви?

191. Збирот на природните броеви $a_1, a_2, ..., a_{49}$ е еднаков на 999. Која е најголемата вредност што може да ја има најголемиот заеднички делител на овие броеви?

192. Бројот a има вкупно 18 делители, а бројот b има вкупно 12 делители. Определи го најголемиот заеднички делител на броевите a и b ако нивниот најмал заеднички содржател е еднаков на 4000.

193. Определи ги сите цели броеви n такви што бројот $\frac{2n+1}{3n-1}$ исто така е цел број?

194. Определи ги сите цели броеви a за кои вредноста на изразот $\frac{a^2+1}{a-1}$ е цел број.

195. Определи ги сите цели броеви x за кои бројот $\sqrt{\frac{x+25}{x-5}}$ е точен квадрат на природен број.

196. Во равенката $\frac{x+n}{2}-(1-\frac{3x-n}{3})=2$, каде n е природен број определи ги сите вредности на параметарот n така што решението на равенката исто така ќе биде природен број.

197. а) Упрости го изразот: $R=\frac{n^2+2n-8}{n^2-4}$.

б) Определи ги сите цели броеви n за кои вредноста на изразот R е цел број.

198. Определи го најмалиот природен број n за кој и бројот $\sqrt{2020n}$ е природен.

199. Четирицифрен број е производ на три последователни прости броја, а се чита од десно на лево исто како и од лево на десно. Кој е тој број?

200. Докажи дека квадратот на ниту еден прост број не може да од облик $5n-2$ или $5n+2$, каде n е природен број.

201. Ако p е прост број поголем од 3, тогаш p^2+11 е делив со 12. Докажи!

202. Природниот број n има три делители. Докажи дека $\sqrt{n}$ исто така е природен број.

203. Нека N е најмалиот природен број кој има точно 2017 делители во множеството природни броеви. Докажи дека N има барем 605 цифри.

204. Докажи дека бројот $2015^{12}+2^{10}$ е сложен.

205. Докажи дека бројот 2003^2+2^{2003} е сложен.

206. Даден е бројот $33\cdot 12^n+19$, $n\in\mathbb{N}$.

  а) Провери дека за $n=3$ овој број е делив со 29.

  б) Провери дека за $n=2009$ овој број е делив со 5.

  в) Докажи дека за секој n бројот е сложен.

207. Докажи дека:

  а) $2^{32}\equiv 3(167)$, б) $11^{10}\equiv 9^{10}(\text{mod } 100)$,

  в) $20^{15}\equiv 2^{15}(\text{mod } 31)$.

208. Докажи дека:

  а) $2^{105}+1$ е делив со 99,

  б) $20^{20}-1$ е делив со 11 и со 61,

  в) $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 10+1$ е делив со 11.

209. Докажи дека за секој природен број n изразот $51^{n+2}+37^{n+1}+23^n$ е делив со 7.

210. Докажи дека за секој природен број n изразот $55^{2n+1}+36^{2n}+29^{2n-1}$ е делив со 13.

211. Определи го остатокот од делењето на 2019^{2019} со 10.

212. Определи го остатокот од делењето на 9^{100} со 100.

213. Определи го остатокот од делењето на 70^{70} со 23.

214. Докажи дека збирот $91^{92}+92^{91}$ е делив со 3.

215. Определи ги можните остатоци кои се добиваат при делење на куб на природен број со бројот 7.

216. Определи го најголемиот заеднички делител на броевите од видот $4^n+15n-1$, каде $n\in\mathbb{N}$.

217. Определи го најмалиот природен број n за кој изразот $2^{2000}+n$ е делив со 13.

218. Определи го најмалиот природен број n за кој 143 е делител на изразот $3^{2000}+4^{2000}+n$.

219. Определи го најголемиот петцифрен број n за кој бројот 3^n+4^n е делив со 91.

220. Определи ја последната цифра на бројот $9^{8^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{1}}}}}}$.

221. Определи ги последните две цифри на бројот $9^{8^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{1}}}}}}$.

222. Нека p е прост број поголем од 3. Определи го остатокот при делењето на бројот 2^{p^2} со 13.

223. Докажи дека бројот $3^{2009}+4^{2009}$ е делив со 7, но не е делив со 5.

224. Докажи дека бројот $1^{2009}+2^{2009}+...+998^{2009}+999^{2009}$ е делив со 1000.

225. Определи го бројот на точките од третиот квадрант на xOy рамнината кои припаѓаат на графикот на линеарната функција $5x+11y+217=0$ и чии координати се целобројни.

226. Определи ги најмалите природни броеви x и y за кои е точно равенството $500x-7y=1$.

227. Определи го бројот на целобројните решенија на равенката

$$20|x|+19|y|=2019.$$

228. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=1.$$

229. Во множеството цели броеви реши ја равенката: $x^2+y^2=2x$.

230. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^5-y^5-5x^3+4x+y=2008.$$

231. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$m(m+1)=n(n+2).$$

232. Во множеството цели броеви реши ја равенката $x^2-xy-2y^2=18$.

233. Во множеството цели броеви реши ја равенката $x^2y^2=3y^2+x^2$.

234. Во множеството природни броеви реши ја равенката $x!+48y=216$.

235. За кои природни броеви n постојат природни броеви a,b,c такви што $ab+bc+ca=2006^n$.

236. Ако a и b се природни броеви такви што $2^a-2^b=240$, определи ја вредноста на изразот $a+b$.

237. Определи ги сите природни броеви n такви што

$$2^4\cdot 3^{16}+5^2\cdot 3^{14}+3^n$$

е точен квадрат на некој природен број.

238. а) Докажи дека за секој природен број m постои природен број n таков што бројот n^2+9n-6 е делив со 2^m.

б) Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2+9x-6=2^y$$

239. Во множеството цели броеви реши јаравенката

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2007}.$$

240. Докажи дека равенката $x^2+y^2=1990$ нема решение во множеството природни броеви.

241. Докажи дека равенката $2015x+y^2=2017^{2017}$ нема решение во множествот природни броеви.

242. Докажи дека не постојат цели броеви x,y и z такви што

$$x^4+y^4=z^4+3.$$

243. Во множеството природни броеви реши ја равенката $x^3+y^3=2^{2006}$.

244. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 2019 и кои имаат точно 9 делители.

245. Во множеството природни броеви реши ја равенката: $2^x + 1 = 3^y$.

246. Во множеството природни броеви реши ја равенката: $4^x + 3 \cdot 2^x = 88$.

247. Во множеството природни броеви реши ја равенката: $5^x + 12^x = 13^x$.

248. Во множеството прости броеви реши ја равенката: $x^y + y^x = 177$.

249. Во множеството проси броеви реши ја равенката $3(p+q+r) = pqr$.

250. Определи ги сите прости броеви p и природни броеви x такви што $x! + 2 = p^2$.

251. Во множеството природни броеви реши ја равеката: $x^2 - y^2 = 45$.

252. Низата $\{a_n\}$ е определена со $a_1 = a_2 = 1$ и $a_{n+2} = a_n a_{n+1} + 1$ за $n \geq 1$. Докажи дека бројот $a_n - 3$ е сложен за секој $n \geq 6$.

III.3. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

253. Определи го најмалиот природен број кој почнува на цифрата 7 и е таков што ако таа седмица се префрли на местото на цифрата на единиците, тогаш се добива број кој е четири пати помал од бараниот број.

254. Определи ги сите трицифрени броеви кои се трипати поголеми од квадратот на збирот на нивните цифри.

255. Определи го збирот на цифрите на најмалиот природен број кој е точен квадрат и декадниот запис му започнува со цифрите 2018 во овој редослед.

256. Дали постои четирицифрен број кој се зголемува четири пати кога неговите цифри ќе се запишат во обратен редослед?

257. Определи четири последователни природни броја кај кои производот на првите два е за 38 помал од производот на вторите два броја.

258. Збирот на две дропки со едноцифрени именители е $\frac{73}{15}$. Определи ги сите дропки со дадените својства.

259. Разликата на една позитивна дропка и нејзината реципрочна вредност е еднаква на $\frac{7}{12}$. Определи го збирот на дропките.

260. Определи го збирот на сите реални вредности на x за кои $x+\frac{1}{x}$ е природен број, а x^2-3x е цел негативен број.

261. Збирот на природните броеви $1,2,3,...,n$ е трицифрен број запишан со исти цифри. Определи го бројот n?

262. Збирот на неколку последователни природни броеви е еднаков на 1000. Определи ги овие броеви.

263. Цифрата на единиците на еден трицифрен број е 7. Ако цифрата 7 се префрли на прво место од лево се добива трицифрен број кој е за 21 поголем од удвоениот почетен број. Определи го почетниот број.

264. Ако се соберат сите шест двоцифрени броеви кои можат да се формираат од цифрите на еден куќен број, тогаш половината од добиениот збир е еднаква на тој куќен број. Определи го овој куќен број?

265. Марко требало да го помножи бројот 78 со двоцифрен број во кој цифрата на десетките е три пати поголема од цифрата на единиците. Тој по грешка ги заменил цифрите во вториот множител и така добил производ кој е за 2808 помал од точниот производ. Определи го точниот производ.

266. Определи три непарни последователни природни броја такви што збирот на нивните квадрати е еднаков на чатирицифрен број запишан со исти цифри.

267. Шестцифрен број почнува со цифрата 1. Ако првата цифра се премести на последното место, се добива број кој е три пати поголем од дадениот. Кој е тој број?

268. Во еден двоцифрен број цифрата на десетките е двапати помала од цифрата на единиците. Ако овој број се зголеми за 18, се добива бројот кој е запишан со истите цифри, но во обратен редослед. Кој е тој број?

269. Едноцифрениот број x е зголемен за 10 и со тоа бројот x е зголемен за определен процент. Ако добиениот број го зголемиме за истиот процент, се добива бројот 72. Определи го бројот x.

270. Определи го природниот број чиј збир со збирот на квадратите на цифрите со кои е запишан е еднакво на 2006.

271. Определи ги сите двоцифрени броеви чиј збир на цифри не се менува со множење со броевите 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9.

272. Броевите $1^3=1,\ 8^3=512$ и $18^3=5832$ имаат интересно својство, збирот на нивните цифри е еднаков на 1, 8 и 18, соодветно.

    а) Најди уште еден природен број n таков што збирот на цифрите на бројот n^3 и еднаков на n.

    б) Определи ги сите природни броеви n такви што збирот на цифрите на бројот n^3 и еднаков на n.

273. Моливот чини 5 денари, хемиското пенкало чини 10 денари, а нотезот чини 50 денари. За 1000 денари може да се купат 100 од наведените артикли. По колку парчиња треба да се купат од секој аретикл?

274. Цените се зголемени за 25%, а платата на Марко се зголемила за 29%. За колку проценти се зголемила купувната моќ на Марко?

275. Цената на една стока се зголемила за 25%. За колку проценти треба да се намали новата цена за да стоката има иста цена како пред зголемувањето?

276. Горјан купил 20 топчиња (бели, црвени и плави) и за нив платил 20 денари. Белото топче чинело 0,5 денари, црвеното топче чинело 2 денари, а плавото топќе чинело 3 денари. По колку топчиња од секоја боја купил Горјан?

277. Ангел работи во информатичка фирма. Една седмица тој заработил 390 евра за 47 часа работа, од кои 7 часа биле прекувремена работа.

Следната седмица тој заработил 416 евра за 50 часа работни часа, од кои 8 часа биле прекувремена работа. Колку заработува Ангел за 1 час прекувремена работа?

278. Павел со автомобил тргнал од Скопје за Белград меѓу 9 и 10 часот и во Белград стигнал меѓу 15 и 16 часот. Колку време патувал Павел, ако во моментот кога тргнал од Скопје и во моментот кога пристигнал во Белград минутната и часовната стрелка зафачале прав агол?

279. Мува во 12 часот напладне застанала на секундната стрелка на часовник и решила да се вози според следното правило: ако во моментот кога една од трите стрелки на часовникот претекнува некоја од другите две и мувата е на стрелката која што претекнува таа се преместува на претекнатата стрелка, а ако е стрелката која што е претекната, таа се преместува на стрелката која што претекнува. Колку обиколки ќе направи мувата до полноќ?

280. Шетајќи покрај пат пешак забележал дека трелојбус го пристигнува секои 2 минути, а од спротивната страна со него се разминува тролејбус секои 2 минути. Пешакот се движи рамномерно и сите тролејбуси се движат рамномерно со еднаква брзина. Со кои брзини се движат пешакот и тролејбусите?

281. Четири сликари заедно цртале цртеж четири часа. Ако првиот сликар црта два пати побрзо, а вториот сликар црта два пати побавно, тогаш повторно ќе им треба исто време. Но, обратно, ако првиот сликар црта два пати побавно, а вториот црта два пати побрзо, тогаш ќе завршат за 2 часа и 40 минути. За колку време првите тројца ќе го нацртаат цртежот без помош на четвртиот сликар?

282. Владимир во 2003 година имал онолку години колку што изнесувал збирот на цифрите на годината на неговото раѓање. Колку години ќе има Владимир во 2020 година?

283. Дедото на Маја во 1969 година имал толку години колку што изнесувал збирот на цифрите со кои е запишана година во која е роден. Кога е роден дедото на Маја и колку години има?

284. Илија во 1970 година имал онолку години колку што е збирот на цифрите со кои е запишана годината во која е роден. Колку години имал Илија во2020 година?

285. Која година во дваесеттиот век е роден човек кој во 2014 година наполнил онолку години колку што е производот на цифрите со кои е запишана годината во која е роден?

286. Горјан е постар од Јована. Ако на збирот на годините на Горјан и Јована се додаде нивниот производ се добива бројот 14. Колку години секој од нив?

287. Марко и рекол на Марија: „Јас имав три пати повеќе години отколку што Вие имавте тогаш кога јас имав толку годиниколку што вие имате сега.“ На тоа Марија додала: „Кога јас ќе имам толку години колку што Вие имате сега, тогаш заедно ќе имаме 77 години.“ Колку години сега има Марко,а колку Марија?

288. Два работника можат една работа да ја завршат за 12 дена. Заедно работеле 5 дена, по што едниот работник се разболел, па другиот работник за да ја заврши работата работел уште 17,5 дена. За колку дена оваа работа може да ја заврши секој од двајцата работници?

289. Три еднакви трактори обработуваат две полиња со различни плоштини. Ако сите три трактори прво го изораат првото поле, а потоа два трактора го изораат и второто поле, тогаш целата работа ќе биде завршена за 12 часа. Ако сите три трактори ја завршат половината од целата работа, а втората половина ја заврши еден трактор, тогаш целата работа ќе се заврши за 20 часа. Определи го времето за кое два трактора ќе го изораат првото поле.

290. Четириесет крави испасуваат една ливада за 50 дена. За колку дена оваа ливада ќе ја испасат 20 крави? Колку крави може да ја испасат ливата за 75 дена?

291. Автобус бил запрен на средината на маршрутата која требало да ја помине за 5-минутна проверка од сообраќајната полиција. Потоа тој за да стигне навреме на крајната станица ја зголемил брзината за 25%. За колкуминути според редот на возење автобусот треба да стигне од почетната до крајанта станица?

292. Двајца велосипедисти од две различни место истовремено тргнале еден кон друг. Откако се сретнале првиот велосипедист возел уште 27 минути до местото од кое тргнал вториот велосипедист, а вториот

велосипедист возел уште 12 минути до местото од кое тргнал првиот велосипедист. Колку време патувал првиот, а колку вториот велосипедист, ако тие се движеле со различни постојани брзини?

293. Два велосипедисти истовремено тргнале еден кон друг од местата A и B. По средбата првиот велосипедист возел до местото B уште 27 минути, а вториот велосипедист возел до местото A уште 12 минути. Колку време возел првиот, а колку вториот велосипедист, ако секој од нив возлел со постојана брзина?

294. Двајца велосипедисти тргнале истовремено од местата A и B во пресрет еден на друг и се сретнале по определено време. Првиот велосипедист патот од A до B го поминал за 4 часа и 48 минути повеќе, а вториот за 3 часа и 20 минути помалку од времето поминато до срекавањето. За кое време секој од велосипедистите го поминал патот од A до B.

295. Откако ја поминал половината од патот меѓу местата A и B возачот на камионот, кој се движел со констатна брзина, ја зголемил брзината за 25%, па во местото B стигнал половина час порано од планираното време за пристигнување. За колку часа камионот го поминал патот од A до B?

296. Велосипедист тргнал од местото A во местото B и требало да стигне во определено време. По поминатите $10\,km$, кои ги минак за 40 минути, тој пресметал дека остатокот од патот ќе го мине за 24 минути порано отколку што е определенот време. Ако својата брзина ја намали за $3\,km/h$, тогаш тој во B ќе стигне 10 минути порано отколку шро е определеното време. Определи го растојанието меѓу местата A и B.

297. Еден велосипедист тргнал од селото A кон градот B, оддалечен $28\,km$. Кога поминал $2\,km$ велосипедистот го пристигнал камион, кој по извесно време стигнал во градот B, во него се задржал 22 минути и на враќање кон селото A го сретнал велосипедистот на растојание $8\,km$ од B. Определи ги брзините на движење на велосипедистот и камионот, ако велосипедистот пристигнал во B во исто време кога камионот пристигнал во A.

298. Два автомобила тргнуваат од местата A и B во пресрет еден кон друг. Секој од нив кога ќе стигне во едното место се враќа назад во

другото место. Првиот пат автомобилите се сретнале на $5\,km$ од местото A, а вториот пат на $3\,km$ од местото B. Определи го растојанието меѓу местата A и B.

299. Кога педалите на еден велосипед ќе направат едно полно завртување, задното тркало на велосипедот прави две завртувања. Дијаметарот на задното тркало е $70\,cm$. Колку метри ќе помине велосипедот при 115 завртувања на педалите?

300. Велосипедист од местото A до местото B вози со постојана брзина од $15\,km/h$, а од местото B до местото A вози со постојана брзина од $12\,km/h$. Притоа патот од В до А го поминува за 12 минути повевеќе од патот од A до B. Колку вкупно километри поминал велосипедистот?

301. Воз влегол во тунел за 15 секунди. До излезот на последниот вагон од тунелот поминале 30 секунди од влегувањето на возот во тунелот. Определи ја должината на возот и брзината на движење на возот, ако должината на тунелот е $300\,m$.

302. Колку најмногу километри може да помине автомобилист со комплет од 4 гуми ако се знае дека предните гуми се потрошени по поминати $30000\,km$, а задните гуми се потрошени по поминати $50000\,km$?

303. Патот меѓу местата A и B е долг $900\,km$. Од местата A и B еден кон друг тргнуваа автомобил и камион кои се движат со брзини $75\,km/h$ и $45\,km/h$, соодветно. По колку часа од тргнувањето на камионот ќе му остане да помине три пати подолг пат отколку на автомобилот?

304. Марко со велосипед тргнал со брзина $14\,km/h$ од местото A кон местото B. Кога му останале да помине уште $18\,km$ помалку отколку што поминал, Марко брзината ја зголемил на $21\,km/h$. Така средната брзина на Марко на патот од A до B била $16\,km/h$. Определи ја должината на патот од A до B.

305. Автобус според возен ред треба за определено време да го помине растојанието од $350\,km$ меѓу два града. При врнежи од снег автобусот

задоцнува 50 минути, а во летно време пристигнува 20 минути порано. Определи го времето според возниот ред, ако во лето автобусот се движи $15\,km/h$ побрзо одколку при врнежи од снег. (Брзините во сите случаи се константни.)

306. Гуливер, кој е висок 999 лилиметри, решил да направи кула од коцки. Првата коцка има висина $\frac{1}{2}$ лиликилометар, втората е висока $\frac{1}{4}$ лиликилометар, третата е висока $\frac{1}{8}$ лиликилометар итн. Колку коцки ќе има кулата кога таа ќе стане повисока од Гуливер? (1 лиликилометар е еднаков на 1000 лилиметри.)

307. Волуменот на коцката изразен во cm^3 е едно решение на равенката
$$(\tfrac{1}{1\cdot2}+\tfrac{1}{2\cdot3}+\ldots+\tfrac{1}{2009\cdot2010})\,||x|-1|=7\cdot\tfrac{2009}{2010}.$$
Определи ја должината на најкраткото растојание меѓу дијагоналата на коцката и работ кој со таа дијагонала нема заедничка точка.

308. Даден е квадар $ABCDEFGH$. Мравка од точката E кон точката C тргнала по најкраткиот пат. Должините на рабовите на квадарот се $\overline{AB}=6\,cm, \overline{BC}=18\,cm, \overline{BF}=10\,cm$. Во точката C мравката стигнува 2 секунди порано отколку што ќе стигне ако оди по рабовите EF, FG и GC. Со која брзина се движи мравката?

309. Во два сада има 35 литри течност. Ако од левиот сад прелееме во десниот онолку течност колку што дотогаш има во десниот, тогаш во едниот сад ќе има 5 литри течност повеќе отколку во другиот. Определи го количеството течност во секој сад ако се знае дека садовите содржат цел број литри течност.

310. Во една цистерна има 470 литри вода, а во друга има 340 литри вода. За еден час од првата цистерна истекува три пати повеќе вода отколку од втората. По 5 часа во првата цистерна останале 20 литри вода помалку отколку во втората. Колку литри вода истекува за 1 час од секоја цестерна?

311. Од 65% и 40% раствор на алкохол треба да се подготви 15 литри 55% раствор на алкохол. По колку литри треба да се земе од секој раствор.

312. Во морска вода има 3% сол. Колку литри слатка вода треба да се додадат на 40 литри морска вода за да се добие раствор со 2% сол?

313. Порција овошна салата содржи $\frac{3}{4}$ овошје, а остатокот е шлаг. Ако се додадат уште $40\,g$ шлаг, тогаш во порцијата ќе има двапати повеќе овочје отколку шлаг. Колку грама овошна салата има воедна порција? Колку грама овошје содржат 5 порции од оваа овошна салата?

314. Атанас, Борис, Цветан и Дамјан собирале стара хартија. Заедно собрале $288\,kg$ хартија. Колку килограми собрал секој од нив, ако се знае дека Атанас собрал $36\,kg$ повеќе од Борис, односно $\frac{3}{4}$ од количеството што го собрале Борис и Цветан заедно, а Дамјан собрал два пати повеќе од Цветан?

315. Во фудбалската лига на една држава се натпреваруваат 18 екипи. Во секое коло се натпреваруваат 9 парови, при што победничката екипа добива 3 бода, поразената добива 0 бода, а во случај на нерешен резултат двете екипи добиваат по 1 бод. По 6 одиграни кола е констатирано дека не постојат екипи со еднаков број освоени бодови. Колку натпревари до тогаш завршиле нерешено?

316. Марија читала книга која има 480 страници и ја прочитала за неколку дена, така што секој ден читала еднаков број страници. Ако Марија секој ден читала по 16 страници повеќе, тогаш книгата ќе ја прочитала 5 дена порано. За колку дена Марија ја прочитала книгата?

317. Во паркот на една клупа може да седнат 7 или 8 ученици. Кога од една група ученици седнале по 7 на една клупа, без места останале 8 ученици, а кога седнале по 8 на клупа, празни останале 4 клупи. Колку клупи има во паркот и колку ученици броела групата?

318. Антон, Теодора и Димитар на тест заедно освоиле 150 бодови. Димитар има толку бодови колку што се поените на Антон и $\frac{1}{4}$ од поените на Теодора. Теодора има толку бодови колку што се бодовите на Димитар, намалени за $\frac{2}{5}$ од бодовите на Антон. Колку бодови освоило секое дете?

319. Горјан и Пабло во првите две години на студии добиле по 15 оценки. Горјан забележал добил толку десетки колку што добил деветки

Пабло, толку деветки колку што добил осумки Пабло, толку осумки колку што добил седумки Пабло, толку седумки колку што добил шестки Пабло и толку шестки колку што добил десетки Пабло. И покрај разликите во оценките тие имале еден ист просел Колку шестки имал Горјан?

320. Во едно населено место има две училишта. Во првото учат $\frac{1}{3}$ од учениците од местото,а во второто сите останати ученици. На математичкиот турнир Кенгур се пријавиле 60% од учениците од првото и 45% од учениците од второто училиште. Колкав процент од учениците од ова населено место сепријавиле на натпреварот Кенгур?

321. Покрај патот меѓу два градаедно по друго се засадени 2019 дрвја – тополи и брези. Бројот на дрвјата меѓу било кои две тополи не е еднаков на 6. Определи го најголемиот можен број тополи меѓу овие 2019 дрвја.

III.4. ГЕОМЕТРИЈА

322. Точката N на страната AB на правоаголникот $ABCD$ е таква што $\measuredangle ADN = \measuredangle CNB$, а M е средина на CD. Ако $\overline{MN} = 2\overline{BC}$, определи го $\measuredangle CNB$.

323. Нека BD и CE се висините на $\triangle ABC$, $D \in AC$ и $E \in AB$. Докажи дека $\measuredangle ADE = \measuredangle ACE + \measuredangle CBD$.

324. На страната BC на даден $\triangle ABC$ е избрана точка M, а на отсечката AM е избрана точка N таква што
$$\overline{AM} = \overline{MC} = \overline{CN}, \overline{AN} = \overline{BM} \text{ и } \measuredangle AMC = 4\measuredangle MAB.$$
Определи го $\measuredangle BAC$.

325. Даден е рамнокрак правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C. Нека точките D и E припаѓаат на катетата AC и се такви што $\overline{CD} = \frac{1}{3}\overline{AC}$ и $\overline{CE} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. Докажи дека $\measuredangle CBD = \measuredangle ABE$.

326. Кружниците $k_1(A,r)$ и $k_2(B,r)$ се сечат во точките C и D. Полуправите AC и AD по вторпат ја сечат кружницата k_2 во точките E и F, соодветно. Ако $\measuredangle CAD = 75^\circ$, определи го $\measuredangle EBF$.

327. Правата p минува низ ортоцентарот на остроаголниот триаголник ABC и ги сече неговите страни AB и CA, при што ја сече страната CA во точката P. Правата q исто така минува низ точката H, нормална е на p и ги сече страните AB и BC, при што ја сече страната BC во точката Q. Правата која минува низ A и е паралелна со q и правата која минува низ B и е паралелна со p се сечат во точката R. Докажи дека точките P,Q и R се колинеарни.

328. Даден е четириаголник таков што збировите на квадратите на неговите спротивни страни се еднакви. Докажи дека дијагоналите на четириаголникот се сечат под прав агол.

329. Дали постои триаголник чии должини на висини се $2\,cm, 3\,cm$ и $4\,cm$? Образложи го одговорот.

330. Во $\triangle ABC$ важи $\measuredangle ABC = 60^\circ$. Симетралата AD на аголот во темето $A\,(D \in BC)$ и сметралата CE на аголот во темето $C\,(E \in AB)$ се сечат во точката O. Докажи дека $\overline{OD} = \overline{OE}$.

331. Висините повлечени од темињата B и C на остроаголниот $\triangle ABC$ ја сечат опишаната кружница околу триаголникот во точките B_1 и C_1, соодветно.Центарот на опишаната кружница лежи на отсечката B_1C_1. Определи го $\measuredangle BAC$.

332. Припишаната кружница на триаголникот ABC се допира до страната BC и до продолженијата на страните AB и AC во точките M,P,Q, соодветно. Ако $\measuredangle CAB = 40^\circ$ пресметај го $\measuredangle PMQ$.

333. Во триаголник ABC аглите при темињата A,B,C се однесуваат како $2:8:5$, соодветно, а BL, $L \in AC$ е симетрала на агол. Точката P лежи на страната BC и $\measuredangle BLP = \frac{5}{4}\measuredangle BAC$. Определи го $\measuredangle APL$.

334. Даден е трапез $ABCD$ во кој точките M и N се средини на основите AB и CD, соодветно. Ако $2\overline{MN}=\overline{AB}-\overline{CD}$, докажи дека $AD\perp BC$.

335. Во правоаголникот $ABCD$ точката M од страната CD е таква што $\overline{DM}=2\,cm$. Ако правите AC и BM се сечат под прав агол, определи го $\measuredangle BOM$, каде O е пресекот на дијагоналите на правоаголникот $ABCD$.

336. Даден е паралелограм $ABCD$ со тап агол во темето B. Страните AB и CB се продолжени преку темето B и на продолженијата се определени точки E и F така што отсечките BE и BF се основи на рамнокраки триаголници BCE и ABF. Докажи дека триаголникот DEF е рамнокрак.

337. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ таков што $\overline{AD}=\overline{BC}$. Нека точките P и Q се средини на страните AC и BD, соодветно. Докажи дека правата PQ зафаќа исти агли со правите AD и BC.

338. Над хипотенузата AB на правоаголен $\triangle ABC$ се избрани точки E и F такви што $\triangle CEF$ е рамностран (точката E е меѓу A и F). Точката D е средина на AB.

    а) Докажи дека $\measuredangle DCF=2\measuredangle ACE$.

    б) Ако S е надворешна точка за $\triangle ABC$, точките S и F се во иста полурамнина во однос на правата CE и $\triangle CDS$ е рамностран, докажи дека $CE\parallel FS$.

339. На кружница се избрани точки A,B,C,D такви што тетивите AC и BD се сечат, $\measuredangle ADC=\measuredangle DBC=80^\circ$ и $\measuredangle DCB=75^\circ$. Симетралата на $\measuredangle ACD$ ја сече точката BD во точката K. Определи го $\measuredangle KAC$.

340. Две кружници k и k' се сечат воточките A и B. Правите AD, $D\in k'$ и AC, $C\in k$ се тангенти на k и k', соодветно. Ако $\measuredangle CBD=150^\circ$ и $\measuredangle ACB=40^\circ$, определи го $\measuredangle ADB$.

341. Нека тетивите AC и BD на кружницата k се сечат во точката P. Аглите $\measuredangle CAD,\measuredangle ACB,\measuredangle APD$ се однесуваат како $2:3:4$. Определи го $\measuredangle CBD$.

342. Во правоаголен триаголник производот на должините на страните е четири пати поголем од производот на висините. Определи го аголот меѓу тежишната линија и висината повлечени кон хипотенузата.

343. Во остроаголниот триаголник ABC висините AA_1 и CC_1 (A_1 и C_1 се подножјата на висините) се сечат во точката H и важи $\overline{CH}=3cm$ и $\overline{C_1H}=1cm$. Ако M е средина на CC_1 определи го $\measuredangle AMB$.

344. Во $\triangle ABC$ страната BC е најкратка. Повлечена е висината CD и во $\triangle BCD$ е впишана кружница k со центар J, која ја допира страната CD во точката E.

а) Тангентата на k нормална на BC ја сече страната AB во точката N. Докажи дека триаголникот BCN е рамнокрак.

б) Ако M е средина на страната AC и ME е паралелна на BJ, определи го $\measuredangle BAC$.

345. На страните AB и CD на квадратот $ABCD$ се земени точки E и F, соодветно такви што $\overline{AE}:\overline{EB}=1:2$ и $\overline{CF}:\overline{FD}=1:1$. Отсечките BF и DE ја сечат дијагоналата AC во точките N и M, соодветно. Докажи дека триаголниците AME и CFN се слични.

346. Дадена е кружница k. Тетивите AM и BN на оваа кружница се сечат во точката P. Нека O е средината на лакот MN. Ако $\overline{ON}=\overline{OP}=\overline{OM}$, докажи дека P е ортоцентарот на триаголникот ABO.

347. Центарот на впишаната кружница во рамнокракиот триаголник ABC ја дели висината повлечена кон основата AB на отсечки со должини $5cm$ и $3cm$, сметајќи од темето C. Определи ги должините на страните на $\triangle ABC$.

348. Докажи дека кружницата чиј дијаметар е висината на рамностран триаголник ги сече две страни на триаголникот во точки што ги делат во однос $1:3$.

349. Докажи дека должината на средната линија на тангентен рамнокрак трапез е еднаква на должината на кракот.

350. Даден е $\triangle ABC$. Нека симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сече страната AB во точката M. Докажи дека $\overline{AM}:\overline{BM}=\overline{AC}:\overline{BC}$.

351. Во рамнокрак $\triangle ABC$ должината на основата е $\overline{AB}=3\,cm$, а должината на кракот е $\overline{BC}=5\,cm$. Определи го растојанието меѓу ортоцентарот H и тежиштето T на $\triangle ABC$.

352. Докажи дека нормалата повлечена во средината на отсечката која ги поврзува подножјата на висините спуштени кон две страни на еден триаголник ја дели третата страна на два еднакви дела.

353. Ако D е точка на страната BC на $\triangle ABC$ таква што $\overline{BD}=2\overline{DC}$, докажи дека $\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=3\overline{AD}^2+6\overline{CD}^2$.

354. Ако H,T,O,S се ортоцентарот, тежиштето, центарот на опишаната и центрот на впишаната кружница во $\triangle ABC$, докажи дека

$$\overline{SH}^2+2\overline{SO}^2=3(\overline{ST}^2+2\overline{OT}^2).$$

355. Ако за $\triangle ABC$ важи $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=5\overline{BC}^2$ докажи дека тежишните линии во темињата B и C се нормални.

356. Докажи дека радиусот на кружницата која ги допира катетите и опишаната кружница на правоаголен триагоилник е еднаков на дијаметарот на впишаната кружница на тој траголник.

357. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ и точка M на основата AB. Правата n која минува низ точката M и е нормална на основата AB ги сече кракот BC во точката N и продолжението на кракот AC во точката P. Докажи дека збирот $\overline{MN}+\overline{MP}$ не зависи од положбата на точката M.

358. Во $\triangle ABC$ важи $\overline{BC}=12\,cm, \overline{AC}=6\,cm$ и $\measuredangle ACB=120^\circ$. Ако симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сече страната AB во точката D, определи ја должината на отсечката CD.

359. Во рамнокрак $\triangle ABC$ ($\overline{BC}=\overline{AC}$) аголот при врвот е еднаков на 108°. Докажи дека симетралата AE на аголот при основата е два пати подолга од висината CD.

360. Нека се a и b катетите, c е хипотенузата и h е висината која соодветствува на хипотенузата во правоаголен триаголник. Докажи дека триаголникот чии должини на страни се $a+b, h$ и $c+h$ е правоаголен.

361. Даден е правоаголен $\triangle ABC$, со висина CD повлечена кон хипотенузата AB. Докажи дека триаголниците ADC и BDC се слични.

362. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C и тежиште T. Докажи дека $\overline{AT}^2 + \overline{BT}^2 = 5\overline{CT}^2$.

363. Даден е рамнокрак триаголник со основа a таков што кракот b е геометриска средина на основата a и h_a висината повлечена кон основата. Докажи дека $a = 2h_a$.

364. Над хипотенузата c на правоаголниот триаголник во надворешноста на триаголникот е конструиран квадрат. Докажи дека растојанието од центарот на квадратот до темето на правиот агол на триаголникот е еднакво на $\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

365. Докажи дека за страните a, b, c на правоаголен триаголник ABC важи $(a^4+b^4+c^4)^2 = 2(a^8+b^8+c^8)$.

366. Хипотенузата на правоаголниот триаголник со $n-1$ точка е поделена на n делови. Ако со $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ ги означиме растојанијата од темето на правиот агол до делбените точки, докажи дека

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2 = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n}c^2.$$

367. Околу правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C е опишана кружница. Нека CD е висина во триаголникот. Кружницата со центар во D минува низ средината на лакот AB и ја сече правата AB во точката M. Иарази ја должината на отсечката CM преку $\overline{AB} = c$.

368. Должините на страните на правоаголен триаголник се природни броеви. Определи ги периметарот и плоштината на оној триаголник кој

има најмала должина на хипотенузата, ако должината на една негова катета е еднаква на $55\,cm$.

369. Даден е триаголник ABC со ортоцентар H и центар на впишана кружница O. Докажи дека $\overline{BC}^2+\overline{AH}^2=4\overline{OA}^2$.

370. Нека r и R се радиусите на две кружници кои надворешно се допираат и нека S и T се допирните точки на една нивна заедничка надворешна тангента. Докажи дека $\overline{ST}=2\sqrt{rR}$.

371. Даден е правоаголен триаголник со прав агол во темето C. Над катетите CA и CB во надворешноста на триаголникот се конструираи квадрати $CDEA$ и $CBFK$.

    а) Докажи дека правата која ја содржи висината CC_1 минува низ средината M на отсечката DK.

    б) Од точките E и F се повлеени нормалите EE_1 и FF_1 на правата AB. Докажи дека $\overline{EE_1}=\overline{AC_1}$ и $\overline{FF_1}=\overline{BC_1}$.

372. Определи го растојанието меѓу ортоцентарот и тежиштето на рамнокрак триаголник со основа a и крак b.

373. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ со основа AB. Нека M е точка од правата AB таква што M не припаѓа на отсечката AB, тогаш разликата на растојанијата од точката M до правите на кои лежат краците на триаголникот не зависат од изборто на точката M Докажи!

374. Аглите на триаголникот се однесуваат како $2:3:7$. Најголемата страна на триаголникот има должина $1\,m$. Определи ги должините на другите две страни.

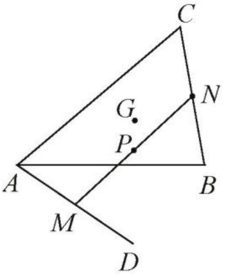
375. Во $\triangle ABC$ симетралата на аголот A ја сече страната BC во точката D. Низ точката D е повлечена права паралелна на AC, која страната AB ја сече во точката E. Низ точката E е повлечена права паралелна на BC, која страната AC ја сече во F. Докажи дека $\overline{AE}=\overline{CF}$.

376. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\overline{BC}=12\,cm$ и $\overline{AC}=6\,cm$ и $\measuredangle ACB=120^\circ$. Симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сече страната AB во точката D. Определи ја должината на отсечката CD.

377. Во рамнината на даден $\triangle ABC$ со тежиште T е дадена права p која не го сече $\triangle ABC$. Нека A_1, B_1, C_1, T_1 се подножјата на нормалите повлечени од A, B, C, T на правата p, соодветно. Докажи дека
$$\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = 3\overline{TT_1}.$$

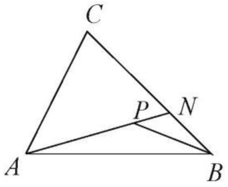
378. Даден е триаголник ABC и точки M, N, P такви што $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{CA}$. Определи го збирот $x + y$, каде x, y се реални броеви такви што $\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB}$.

379. На цртежот десно G е тежиште на $\triangle ABC$ и D е точка различна од G, а M и N се средините на отсечките AD и BC. Точката P е средината на MN. Определи го бројот k за кој важи $\overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DG}$



380. Во рамнокрак триаголник $ABC, \overline{AC} = \overline{BC}$ е повлечена симетралата $BD, D \in AC$. Низ точката D е повлечена права нормална на BD која правата BA ја сече во точката M. Ако $\overline{AD} = 12\,cm$, определи ја должината на BM.

381. Нека точката N припаѓа на страната BC на $\triangle ABC$ и $\overline{CN} = 2\overline{NB}$, а точката P припаѓа на AN и важи $\overline{AP} = 3\overline{PN}$. Изрази го векторот $\overrightarrow{BP}$ преку векторите $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.



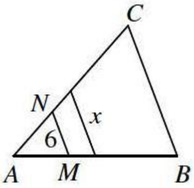
382. Даден е триаголник ABC, $\measuredangle BAC = \measuredangle ABC = 2\measuredangle ACB$. Симетралите на аглите $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle ABC$ се сечат во точката I и по втор пат ја сечат опишаната кружница околу триаголникот ABC во точките A_1 и B_1, соодветно. Нека $N = BB_1 \cap AC$, $P = CI \cap A_1B_1$ и O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот IPA_1. Правата OP ја сече страната AC во точката M.

а) Определи го односот $\overline{CM} : \overline{MN}$.

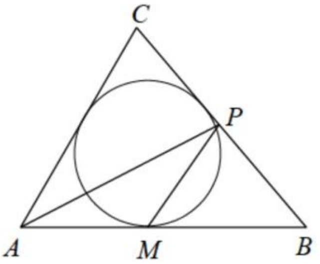
б) Ако $\overline{CM} = 5$, определи го радиусот на опишаната кружница околу триаголникот A_1B_1N.

383. Во $\triangle ABC$ со тежишна линија $CM\ (M \in AB)$, врз страните BC и AC се земени точки P и Q, соодветно, такви што триаголниците ABC и MPQ имаат заедничко тежиште. Пресметај $\overline{BP}:\overline{PC}$ и $\overline{AQ}:\overline{QC}$.

384. На цртежот точката M припаѓа на AB на триаголникот ABC и важи $\overline{AM}:\overline{MB}=1:2$. Низ точката M е повлечена права паралелна на BC која страната AC ја сече во точката N и важи $\overline{MN}=6\,cm$. Определи ја должината на средната линија на триаголникот ABC.



385. Даден е $\triangle ABC,\ \overline{AB}=9\,cm, \overline{BC}=8\,cm$ и $\overline{AC}=7cm$. Точката P е средина на страната BC, а точката M е допирната точка на впишаната кружница во $\triangle ABC$ со страната AB. Определи го односот на плоштините на $\triangle APM$ и $\triangle ABC$.



386. Нека ABC е правоаголен триаголник таков што важи $\measuredangle ACB=90^\circ$ и $\measuredangle ABC>\measuredangle BAC$. Нека точките D и K се такви што D припаѓа на катетата BC, а K на отсечката AD и $\measuredangle KBD=\measuredangle BKD=\measuredangle BAC$.

а) Докажи дека $\overline{AK}=2\overline{CD}$.

б) Ако точката D е средина на катетата BC и правата BK ја сече катетата AC во точка M определи го односот $\overline{AM}:\overline{MC}$.

387. Даден е $\triangle ABC$. Точките P и Q припаѓаат соодветно на страните BC и AC и се такви што $\overline{BC}=3\overline{BP}$ и $2\overline{AC}=3\overline{AQ}$. Тежипната линија $CM\ (M \in AB)$ на $\triangle ABC$ ја сече PQ во точка N. Определи го односот $\overline{CN}:\overline{NM}$.

388. а) Докажи дека изразот

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{a(b+c-a)+b(c+a-b)+c(a+b-c)}{ab+bc+ca}$$

прима една иста вредност за секои допустливи вредности на променливите.

б) Триаголникот со страни a,b,c е таков што $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$ е природен број. Колку различни вредности може да има овој природен број? Не е задолжително a,b,c да се природни броеви.

389. Точката N е средина на страната AC на $\triangle ABC$ и $\measuredangle ABN=15^\circ$. Точката M е внатрешна за $\triangle ABC$ и е таква што $\measuredangle AMC=90^\circ$ и $\measuredangle MCA=75^\circ$. АКо $\overline{AM}=10$, определи го растојанието меѓу центрите на опишаните кружници околу $\triangle ABM$ и $\triangle ACM$.

390. На страната AB на $\triangle ABC$ земени се произволни точки M и N. АКо точките T,T_1 и T_2 се тежишта на триаголниците ABC, ANC и BMC, докажи дека точките T,T_1 и T_2 се колинеарни.

391. Даден е триаголник ABC, $\overline{AC}=2$, $\measuredangle ABC=30^\circ \measuredangle BAC=45^\circ$. Точката D е таква што $\measuredangle ADB=75^\circ$, $\measuredangle DAC=15^\circ$ и точките C и D лежат во иста полурамнина во однос на правата AB. Правата CD ја сече правата AB во точката M и M е средина на отсечката DE. Определи го радиусот на кружницата опишана околу $\triangle ACE$.

392. Во квадрат со страна a впишан е лак со центар во темето на квадратот и радиус a. Во преостанатиот дел на квадратот е впипшана кружница со радиус 1. Пресметај го a.

393. Даден квадрат е расечен на 100 помали квадрати од кои 99 имаат должина на страна $1\,cm$. Определи ја плоштината на овој квадрат.

394. Даден е правоаголник $ABCD\,(\overline{AB}=40\,cm, \overline{AD}=30\,cm)$. Нека p е правата нормална на рамнината на правоаголникот низ точката D и T е точка на правата p таква што $\overline{DT}=10\ cm$. Определи го растојанието од точката T до дијагоналата AC.

395. Во правоаголник $ABCD$ со должини на страни $\overline{AB}=10\,cm$ и $\overline{BC}=5\,cm$ е впишана полукружница со дијаметар AB. Во кој однос полукружницата ја дели дијагоналата на правоаголникот?

396. Во правоаголникот $ABCD$ нормалата повлечена од темето B на дијагоналата AC ја дели дијагоналата AC во однос $3:1$. Определи го аголот меѓу дијагоналите на правоаголникот.

397. Во правоаголникот $ABCD$ точката M припаѓа на страната CD и е таква што $\overline{DM}=2\,cm$. Ако правите AC и BM се сечат под прав агол, определи го $\measuredangle BOM$, каде O е пресекот на дијагоналите на правоаголникот.

398. Нека a и b се должините на страните, а d_1 и d_2 се должините на дијагоналите на паралелограмот. Докажи дека $d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$.

399. Даден е паралелограм $ABCD$. Правата r отсекува на отсечката AB една третина, а од страната AD една четвртина, сметајќи од теето A. Во кој однос правата r ја дели дијагоналата AC?

400. Од темето C на паралелограмот $ABCD\,(\overline{AC}>\overline{BD})$ се повлечени нормалите CE и CF на правите AB и AD. Докажи дека

$$\overline{AB}\cdot\overline{AE}+\overline{AD}\cdot\overline{AF}=\overline{AC}^2.$$

401. Едната дијагонала на правоаголен трапез го дели тој трапез на два триаголника, од кои едниот е рамностран. Определи го односот на дијагоналите на овој трапез.

402. Нормалата повлечена од темето B на паралелограмот $ABCD$ на дијагоналата AC ја дели оваа дијагонала на два дела со должини $15\,cm$ и $6\,cm$. Разликата на должините на страните на паралелограмот е еднаква на $7\,cm$. Определи ги должините на страните на страните на овој паралелограм.

403. Во трапез $ABCD$, $\overline{AB}=15\,cm, \overline{BC}=9\,cm$, дијагоналата BD ја дели дијагоналата AC во однос $3:1$. За колку сантиметри треба да се продолжи кракот BC за да се пресече кракот AD?

404. На страните AB и CD на ромбот $ABCD$ се дадени точки M и N такви што $\overline{AM}:\overline{AB}=\overline{CN}:\overline{CD}=1:3$. Правата MN ги сече продолженијата на страните AD и BC во тоичките P и Q. Докажи дека

пресекот на дијагоналите на ромбот лежи на правата MN и дека $\overline{MP} = \overline{MN} = \overline{NQ}$.

405. Во разнокрак трапез $ABCD$ дијагоналите AC и BD се сечат во точката S. Низ пресечната точка S се повлечени прави паралелни со краците AD и BC, кои основата AB ја сечат во точките M и N, соодветно. Докажи дека $\overline{AM} = \overline{BN}$.

406. Дадени се паралелограм $ABCD$ и точки M,N,P такви што $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = n\overrightarrow{AC}$, P е средина на MN и $\overrightarrow{AP} = 19\overrightarrow{AD}$. Определи ја разликата $m-n$.

407. Даден е квадрат $ABCD$ со страна $2\,cm$. Нека O е пресекот на дијагоналите на квадратот и P е точка таква што $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 7\overrightarrow{PC} - 5\overrightarrow{PD} = \vec{0}$. Определи ја должината нна отсечката OP.

408. Во конвексен петаголник $ABCDE$ точките O,M,K,I,H се средини на страните AB,BC,CD,DE,EA, соодветно.

Која од двете искршени линии $HKOIMH$ или $ADBECA$ има помала должина.

409. Бројот на дијагоналите на правилен $n-$ аголник е двоцифрен број чии цифри се прости броеви. Определи ги сите можни вредности на n.

410. Дадена е права m и точки A,B,C кои не лежат на една права и се на растојание $1\,cm$, $3\,cm, 5\,cm$ од правата m. Точката D е четвртото теме на паралелограмот $ABCD$. Определиго растојанието од темето D до правата m.

411. Во рамнината се дадени отсечките AB и CD така што отсечката AB се гледа од точките C и D под агол од 30°, а отсечката CD се гледа од точките A и B под агол од 60°. Определи ја должината на отсечката AB ако $\overline{CD} = 10\sqrt{3}\,cm$.

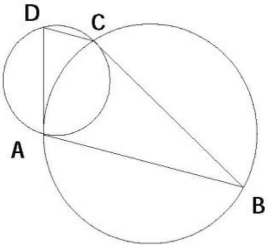
412. Во кружница се впишани два квадрата така што е добиена правилна осумкрака ѕвезда. Определи ги должините на страните на оваа ѕвезда.

413. Нека кружниците $k(O,r)$ и $k'(O',R)$ надворешно се допираат во точката S, а правите p и q се сечат под прав агол во точката S, при што правата p ги сече k и k' во точките A и B, а правата q ги сече k и k' во точките C и D. Докажи дека $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=4(r^2+R^2)$.

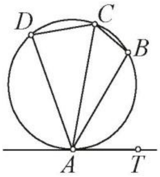
414. Полукружница чиј дијаметар е страната на правоаголникот ја дели неговата дијагонала во однос 9:1. Определи го односот на страните на правоаголникот.

415. Нека AB е дијаметар на дадена кружница, а правата t е нејзина произволна тангента. Ако A' и B' се подножјата на нормалите повлечени од точките A и B на правата t, тогаш $\overline{AA'}+\overline{BB'}=\overline{AB}$. Докажи!

416. На цртежот десно правите AB и AD се тангенти на кружниците и важи $\measuredangle ABC=30^\circ$ и $\measuredangle BCD=150^\circ$. Определи го аголот $\measuredangle ADC$.



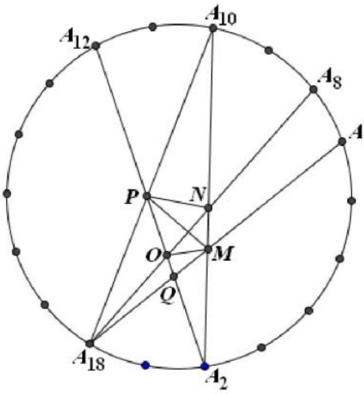
417. На цртежот десно аглите $\measuredangle BAT, \measuredangle BAC, \measuredangle CAD$ се однесуваат како $6:2:3$ и $\measuredangle ACD=81^\circ$. Определи го $\measuredangle ABC$.



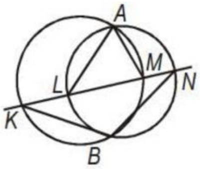
418. Во кружница k е впишан правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C. Нека точката K е средина на лакот BC на кружницата k кој не ја содржи точката A, N е средина на отсечката AC и M е другата точка на пресекот на правата KN и кружницата k. Тангентите на кружницата k во точките A и C се сечат во точката E. Докажи дека $\measuredangle EMK$ е прав.

419. Точките $A_1, A_2, ..., A_{18}$ (во овој редослед) ја делат кружницата на 18 еднакви лаци (цртеж десно).

а) Докажи дека $\triangle A_2A_{18}O$ и $\triangle NPO$ се рамнострани.



б) Определи ги аглите на $\triangle MNP$ и на $\triangle MQO$.

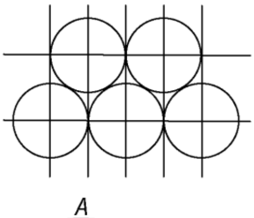


420. Две кружници се сечат во точки A и B. Права ги сече кружниците во точките K, L, M, N (цртеж десно). Ако $\measuredangle LAM = 64^\circ$, определи го $\measuredangle KBN$.

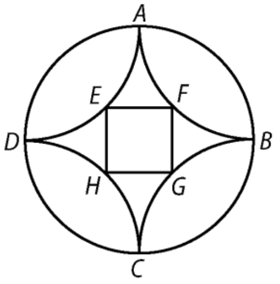
421. Кружниците k_1, k_2, k_3 по парови надворешнмо се допираа и важи $k_1 \cap k_2 = A$, $k_1 \cap k_3 = B$ и $k_2 \cap k_3 = C$. Правата AB по втор пат ги сече k_2 и k_3 во точките D и E, соодветно, а правата CD ја сече k_3 во точката F. Определи го $\measuredangle DEF$.

422. Точките A, B, C се наоѓаат од иста страна на рамнината Σ и од неа се оддалечени $7\,cm, 17\,cm, 27\,cm$, соодветно. Должината на тежишната линија AD на $\triangle ABC$ е еднаква на $25\,cm$. Определи ја должината на проекцијата на отсечката AD врз рамнината Σ.

423. Нацртај спирала составена од пет полукружници чии центри се наоѓаат на една права, а дијаметарот на секоја следна полукружница е еднаков на $\frac{3}{4}$ од дијаметарот на почетната полукружница. Определи ја должината на спиралата ако дијаметарот на првата кружница е r.



424. На цртежот десно дијаметарот на секоја од петте кружници е еднаков на $10\,cm$. Определи го растојанието меѓу сосоедните хоризонтални и соседните вертикални прави.



425. На цртежот десно кружницата има радиус $1\,cm$ и лаците AFB, BGC, CHD и DEA се четвртини на кружница со радиус $1\,cm$. Квадратот $EFGH$ е поставен така што добиениот цртеж е осносиметричен. Определи ја должината на страната на квадратот $EFGH$.

426. Во кружница се впишани квадрат и правилен петаголник така што не постојат темиња кои се совпаѓаат. Докажи дека меѓу деветте лаци на

кои темињата ја делат кружницата постои барем еден лак кој соодветствува на централен агол помал или еднаков на 9°.

427. Околу квадратот $ABCD$ е опишана кружница. Нека EF е дијаметар на оваа кружница при што точката E припаѓа на помалиот лак AB. Нека K и L се средините на отсечките CE и CB, соодветно. Докажи дека отсечките DL и FK се сечат на дијагоналата AC.

428. Кружницата $c(O_1,r_1)$ одвнатре ја допира кружницата $k(O,r)$ во точката A и притоа важи $r>2r_1$. Полуправа со почеток во точката O ја допира кружницата c во точката C и ја сече кружницата k во точката B. Определи ја големината на $\measuredangle BAC$.

429. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ конструирана е полукружница со дијаметар AB. Нека E е точка на страната BC таква што правата DE е тангента на оваа полукружница. Во кој однос точката E ја дели страната BC?

430. Кружниците k_1 и k_2 се сечат во точките A и B. Нека CD е дијаметар на кружницата k_1, при што точката C е надвор од кружницата k_2, а точката D е внатре во неа. Правите AD и BD ја сечат кружницата k_2 уште во точките M и N соодветно, а правите CD и MN се сечат во точката E. Докажи дека $\overline{AC}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{EN}=\overline{AD}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{EM}$.

431. За $\triangle ABC$ се дадени темето $B(-4,-5)$ и равенките $5x+3y-4=0$ и $3x-8y+13=0$ на двете негови висини. Определи ги координатите на темињата A и C.

432. Конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на плоштината на даден правоаголник.

433. Конструирај правоаголен триаголник за кој се дадени проекциите p и q на катетите врз хипотенузата.

434. Конструија правоаголен триаголник за кој се дадени хипотенузата и радиусот на впишаната кружница.

435. Конструирај правоаголен триаголник за кој е дадена едната катета и проекцијата на другата катета врз хипотенузата.

436. Конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на плштината на даден рамностран триаголник.

437. Конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на збирот на плоштините на два дадени правоаголника.

438. Конструирај рамностран триаголник чија плоштина е еднаква на разликата на плоштините на два рамнострани триаголника.

439. Конструирај правилен: а) десетаголник, б) петаголник.

440. Нека се дадени отсечки со должини a,b,c. Конструирај отсечка со должина $x=\frac{a\sqrt{ab+c^2}}{b+c}$.

441. Конструирај квадрат со плоштина еднаква на плоштината на даден триаголник.

442. Даден е триаголник ABC. Околу темињата на триаголникот ABC опиши кружници кои две по две надворешно се допираат.

443. Конструирај триаголник ABC за кој се дадени: тежишната линија $t_c = 4\,cm$ која е повлечена од темето C, страната $\overline{BC} = 6\,cm$ и аголот $\measuredangle BAC = 60^\circ$.

444. Конструирај квадрат чии две спротивни темиња лежат на дадена права p, а другите две темиња лежат на две дадени кружници.

445. Конструирај кружница k која минува низ дадена точка A и ја допира дадената кружница $k_1(O, r = 2\,cm)$ во дадена точка B.

446. Определи го периметарот на триаголникот чии темиња се: $A(-4,0)$, $B(0,0)$ и $C(0,3)$

447. Периметарот на еден рамнокрак триаголник е $64\,cm$, а должината на кракот е за $11\,cm$ поголема од должината на основата. Определи ја должината на висината повлечена од едно од темињата на основата на триаголникот.

448. Даден е остроаголен триаголник ABC со периметар 16. Од темето C се повлечени нормали кон симетралите на надворешните агли во те-

мињата A и B и нека K и L се подножјата на овие нормали, соодветно. Определи ја должината на отсечката KL.

449. Даден е квадрат $ABCD$ со должина на страна a. Нека M е средина на страната BC, а X е подножјето на нормалата повлечена од темето A на отсечката MD. Изрази го периметарот на триаголникот ABX во зависност од a.

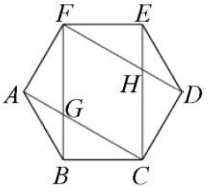
450. На продолжението на страната AC преку точката C на $\triangle ABC$ е земена точка M таква што $\overline{AM}=\overline{AB}$, а на продолжението на страната CA преку точката A е земена точка P таква што $\overline{AP}=\overline{AB}$.
а) Докажи дека правите BM и BP се нормални на симетралите на аглите CAB и BAP, соодветно.
б) Докажи дека триаголникот PBM е правоаголен и определи го неговиот периметар ако $\overline{AB}=3\,cm$ и $\measuredangle MPN=30^\circ$.

451. Ако a,b,c се должините на страните, s е полупериметарот и l_a е должината на симетралата на внатрешниот агол во темето A на $\triangle ABC$, докажи дека $l_a=\frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$.

452. Дадена е кружница k и точка D надворешна за k. Во точката D се повлечени тангентите DP ($P\in k$) и DQ ($Q\in k$) на k. Низ точка A, внатрешна за отсечката DP, е повлечена втората тангента на k, која ја сече отсечката DQ во точката E. Низ точката C, внатрешна на отсечката DE, е повлечена втората тангента на k, која ја сече отсечката AE во точката B. Определи го периметарот на четириаголникот $ABCD$ ако $\overline{AB}+\overline{AD}=9$.

453. Во рамнокрак трапез $ABCD$, $\measuredangle BAD=60^\circ$, средната линија на трапезот е со должина 16, а делот од средната линија кој се наоѓа меѓу дијагоналите е со должина 8. Определи го периметарот на трапезот.

454. На цртежот десно е прикажан правилен шестаголник $ABCDEF$ со должина на страна $\overline{AB}=6\,cm$. Определи го периметарот на четириаголникот $GCHF$.



455. Еднакви кругови со радиус $3\,cm$ се сечат така што во пресечните точки тангентите на кружниците се заемно нормални. Определи го периметарот на пресекот на круговите.

456. За еден многуаголник ќе велиме дека е *HS*-многуаголник, ако важи:
   1) должината на секоја негова страна е природен број,
   2) должината ма секоја негова страна е еднаква на полупроизводот на соседните две страни.

   а) Јасно, ромб со должина на страна 2 е *HS*-четириаголник. Дали постои *HS*-четириаголник чии должини на страни се различни од 2?

   б) Определи ги сите можни вредности на периметрите на *HS*-петаголник и *HS*-шестаголник.

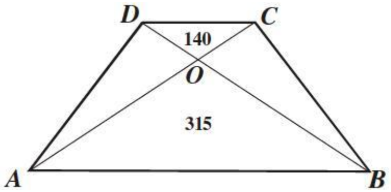
   в) Определи го најголемиот периметар на *HS*-$n-$аголниците за $n>6$.

457. Дали постои триаголник чии висини се $h_a=3\,cm,$ $h_b=6\,cm$ и $h_c=9\,cm$. Образложи го одговорот!

458. Должините на страните на $\triangle ABC$ се $a=15, b=13$ и $c=14$. Определи ја неговата плоштина.

459. Во правоаголен $\triangle ABC$ со хипотенуза AB, симетралата на $\measuredangle A$ ја дели страната BC на два дела со должини $5\,cm$ и $13\,cm$. Определи ги периметарот и плоштинатана на $\triangle ABC$.

460. Во трапезот $ABCD$ со основи AB и CD дијагоналите AC и BD се сешат во точка O. Плоштините на триаголниците ABO и CDO се еднакви на $315\,cm^2$ и $140\,cm^2$, соодветно. Определи ја плоштината на триаголникот BOC.



461. Должината на основата на рамнокрак триаголник е $0,2\,dm$, а должината на неговиот крак е $0,26\,dm$. Определи ја плоштината на овој триаголник.

462. Во координатната рамнина xOy е дадена правата $4x+3y=n, n>0$ која од координатниот почеток O е оддалечена 12. Определи ја плоштината на триаголникот кој оваа права го зафаќа со координатните оски Ox и Oy?

463. Точката A е пресек на графикот на функцијата $y=\frac{3}{4}x+12$ со $x-$оската, а точката B е пресек на графикот на функцијата $y=-\frac{4}{3}x+12$ со $x-$оската. Точката C е пресек на графиците на двете функции. Докажи дека триаголникот ABC е правоаголен. Определи ги плоштината и периметарот на овој триаголник.

464. Определи ги равенките на двете прави кои што минуваат низ точката $T(3,4)$, со $x-$оската формираат триаголник со плоштина $P=14$ и едната права минува низ координатниот почеток.

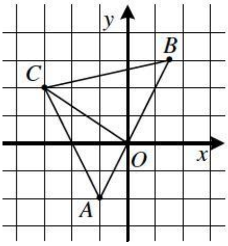
465. Триаголникот ABO е ограничен со координатните оски и правата $5x+12y=50$.

а) Определи ги координатите на темињата на $\triangle ABO$.

б) Периметарот на $\triangle ABO$.

в) Плоштината и волуменот на телото кое се добива со ротација на овој триаголник околу оската Oy.

466. На цртежот десно во координатен систем Oxy се дадени точките $A(-1;-2)$, $B(1,5;3)$ и $C(-4;1,5)$. Определи го односот $P_{AOC}:P_{BOC}$.



467. Должините на страните на еден правоаголен триаголник се природни броеви. Определи ги периметарот и плоштината на оној триаголник кој има најмала должина на хипотенузата, ако должината на едната катета е 55.

468. Од сите правоаголни триаголници со дадена хипотенуза c, определи го оној триаголник кој има најголема плоштина. Определи ги должините на катетите на овој триаголни?

469. Плоштината на правоаголниот триаголник ABC е еднаква на 54, а за должините на неговите страни важи $2b=c+a$. Определи го периметарот на овој триаголник.

470. Докажи дека плоштината на правоаголен триаголник е еднаква на производот на отсечките кои на хипотенузата ги формира впишаната кружница.

471. Во внатрешноста на триаголникот ABC е земена точка P таква што триаголниците ABP, BCP и ACP имаат еднаква плоштина. Докажи дека точката P е тежиштето на триаголникот.

472. Ако едната катета на правоаголниот триаголник ја зголемиме за $1cm$, а другата ја намалиме за $2\,cm$ добиваме правоаголен триаголник со иста плоштина. Ако едната катета ја зголемиме за $2\,cm$, а другата за $8\,cm$, тогаш плоштината на триаголникот ќе се зголеми за $24\,cm^2$. Определи ја плоштината на почетниот триаголник.

473. Ако a и b се катетите на правоаголен триаголник, а R и r се радиусите на опишаната и впишаната кружница во овој триаголник, тогаш $a+b=2(R+r)$. Докажи!

474. Даден е правоаголник $ABCD$ со должини на страни $\overline{AB}=2\,cm$ и $\overline{AD}=1cm$. Точките M и N припаѓаат на страните AB и AD, соодветно и $\overline{AM}=m$, $\overline{AN}=n$. Правите BN и DM се сечат во точката O и важи $P_{OBCD}-P_{AMON}=\frac{1}{2}$. Определи ја вредноста на изразот $m+2n$.

475. Даден е рамнокрак $\triangle ABC\ (\overline{AB}=\overline{AC}=5\,cm, \overline{BC}=6\,cm)$. На страните AC и BC се избрани точки D и E, соодветно такви што $\overline{AD}=\overline{CE}=2\,cm$. Отсечките AE и BD се сечат во точката S. Определи ја плоштината на $\triangle ABS$. .

476. Даден е паралелограм $ABCD$. Точката M е средина на страната BC, а точката P е пресечната точка на AM со BD. Плоштината на паралелограмот $ABCD$ е $24\,cm^2$. Определи ја плоштината на триаголникот BMP.

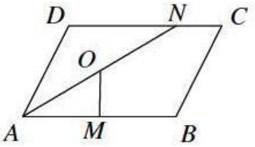
477. Во кружница со радиус $r=12\,cm$ е впишан рамнокрак триаголник со агол при врвот 30°. Определи ги периметарот и плоштината на овој рамнокрак триаголник.

478. Симетралата на хипотенузата AB на правоаголниот $\triangle ABC$ отсекува триаголник чија плоштина е три пати помала од плоштината на $\triangle ABC$. Определи ги внатрешните агли на $\triangle ABC$.

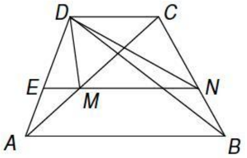
479. Нека ABC е рамностран триаголник, L е точка на страната AB, K е точка на страната BC и M е пресекот на отсечките AK и CL. Ако четириаголникот $BKML$ е тетивен, тогаш неговата плоштина е еднаква на плоштината на триаголникот CAM. Докажи!

480. Даден е правоаголник $ABCD\,(\overline{AB}=8\,cm, \overline{BC}=5\,cm)$ и точка M на страната CD таква што $\overline{CM}:\overline{MD}=3:2$. Нека E е пресечната точка на правите AM и BC и F е пресекот на симетралата на $\measuredangle A$ и правата BC. Определи ја плоштината на $\triangle AFE$.

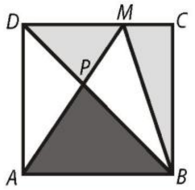
481. На цртежот десно е даден паралелограм $ABCD$ со плоштина $48\,cm^2$. Точката N припаѓа на страната CD, точката M е средина на AB, а O е средина на AN. Определи ја плоштината на $\triangle AOM$.



482. Даден е трапез $ABCD$ со основи AB и CD. Нека $EN \parallel AB$, M е пресек на AC и EN, и плоштината на триаголникот AMD е еднаква на $20\,cm^2$.Определи ја плоштината на триаголникот BND.



483. Даден е квадрат $ABCD$. Нека M е произволна точка на страната CD и нека P е пресечната точка на отсечките AM и BD (цртеж десно). Што е поголемо: плоштината на триаголникот ABP или збирот на плоштините на триаголниците MDP и BCM?



484. Даден е правоаголен $\triangle ABC$, со висина CD повлечена кон хипотенузата AB и $\overline{AC}:\overline{BC}=3:4$. Определи го односот на плоштините на триаголниците ADC и BDC.

485. Рамностран $\triangle ABC$ со должина на страна a, зафаќа со рамнината Σ агол од 45° при што една страна на $\triangle ABC$ е паралелна со Σ. Нацртај ја ортогоналната проекција на $\triangle ABC$ врз рамнината Σ и определи ја нејзината плоштина.

486. Права која минува низ средината M на кракот AD на трапезот $ABCD$ го дели трапезот на два дела со еднакви плоштини и го сече другиот крак во точката N. Определи го односот $\overline{BN}:\overline{CN}$ во зависност од должините на основите $\overline{AB}=a, \overline{CD}=b$.

487. Даден е паалелограм $ABCD$ со $\overline{AB}=6, \overline{BC}=3$ и $\measuredangle BAD=30^\circ$. Ортогоналните проекции на тежиштето на $\triangle ABD$ на правите AB, BC, CD и DA се U, Q, V и P, соодветно. Определи го збирот

$$\frac{1}{\overline{GP}}+\frac{1}{\overline{GQ}}+\frac{1}{\overline{GU}}+\frac{1}{\overline{GV}}.$$

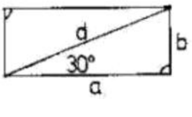
488. Нека C_1 е допирната точка на впишаната кружница во правоаголниот триаголник ABC и хипотенузата AB. Докажи дека плоштината на триаголникот е еднаква на $\overline{AC_1}\cdot\overline{BC_1}$.

489. Во $\triangle ABC$ симетралата на $\measuredangle CAB$ ја сече страната BC во точката N, а симетралата на $\measuredangle CBA$ ја сече страната AC во точката P, при што важи $\overline{PN}=1$. Симетралите AN и BP се сечат во точката Q. Темето C припаѓа на кружницата која минува низ точките P, Q и N. Определи ја плоштината на $\triangle NPQ$.

490. Тетивата AB на кружницата k ја дели k на два лаци чии должини се однесуваат како $1:5$. Точката C од k го полови големиот лак AB. Плоштината на триаголникот ABC е еднаква на $900\,cm^2$. Определи ја должината на отсечката AC.

491. Определи ги должините на страните на правоаголникот чија дијагонала има должина $10\,cm$ и кој има најголема плоштина.

492. Дијагоналата d на правоаголникот со страната a зафаќа агол од 30°, а $b=5\,cm$. Определи ги должините на страната a, дијагоналата d, плоштината и периметарот на правоаголникот.



493. Даден е квадрат $ABCD$ со должина на страна a. Точката E е симетрична на точката C во однос на точката A. Определи ја плоштината на четириаголникот $BCDE$.

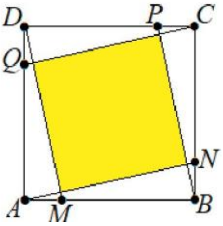
494. Периметарот на ромбот е еднаков на $68\,cm$, а неговите дијагонали се однесуваат како $15:8$. Определи ја плоштината на нему сличниот ромб, чија страна е со должина $34\,cm$.

495. Периметарот на правоаголникот е $28\,cm$, а должината на неговата дијагонала е $10\,cm$. Определи ја плоштината на овој правоаголник.

496. Краците на правоаголниот трапез се еднакви на $50\,cm$ и $130\,cm$, а неговата помала основа е еднаква на $40\,cm$. Определи ја плоштината на овој трапез.

497. Околу кружница со радиус $5\,cm$ е опишан трапез со плоштина $90\,cm^2$. Определи го збирот на краците на дадениот трапез.

498. Точките M, N, P, Q припаѓаат на страните на квадратот $ABCD$, $\overline{AB} = 12\,cm$ и се такви што важи $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ}$ и $\measuredangle ANC = 105^\circ$. Определи ја плоштината на обоениот дел од квадратот.

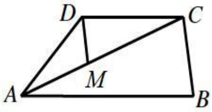


499. Во паралелограм $ABCD$ кружницата опишана околу $\triangle BCD$ по вторпат ја сече дијагоналата AC во точката M. Ако односот на плоштината на $\triangle BDM$ и паралелограмот е $1:18$, определи го односот на должините на дијагоналите на паралелограмот.

500. Основите на трапезот се $\overline{AB} = 50\,cm$ и $\overline{CD} = 30\,cm$. Основата CD е продолжена преку точката C до точка M. Определи ја должината на отсечката CM, ако се знае дека отсечката AM го дели трапезот на два дела со еднакви плоштини.

501. Во триаголникот ABC точката N е средина на тежишната линија $CM\ (M \in AB)$. Правата AN ја сече страната BC во точката P. Плоштината на триаголникот ABC е еднаква на $36\,cm^2$. Определи ја плоштината на четириаголникот $BPMN$.

502. Даден е трапез $ABCD$ ($AB \parallel CD$) и точка $M \in AC$ таква што $DM \parallel BC$. Плоштините на триаголниците AMD и MCD се $12\,cm^2$ и $16\,cm^2$. Определи ја



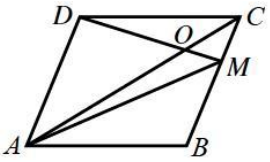
плоштината на трапезот $ABCD$.

503. Даден е трапез $ABCD\,(AB\parallel CD, \overline{AB}>\overline{CD})$. Точките M и N се средини на AD и BC. Симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече MN во точката L. Нека $CH\ (H\in AB)$ е висината на трапезот повлечена од темето C и нека $\overline{CH}=\overline{ML}=h,\ \overline{AD}=\overline{LN}$. Определи ја плоштината на трапезот.

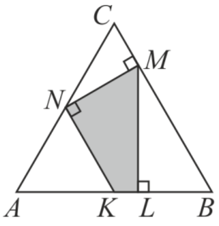
504. Даден е правоаголен трапез $ABCD\,)AB\parallel CD, \overline{AB}>\overline{CD})$ со прав агол во темето A. Кружницата со дијаметар BC го сече кракот AD во точките M и N. Плоштините на триаголниците BMC и BNC се $20\,cm^2$ и $12\,cm^2$. Определи ја плоштината на трапезот.

505. Даден е рамнокрак трапез $ABCD$ со заемно нормални дијагонали. Должината на средната линија на трапезот е m. Определи ја плоштината на овој трапез.

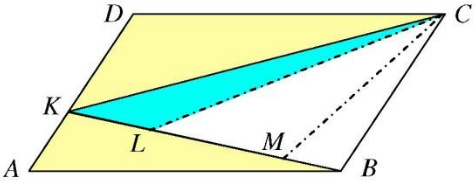
506. Даден е паралелограм $ABCD$. Нека точката M припаѓа на страната BC, отсечката DM ја сече дијагоналата AC во точката O (цртеж десно), а плоштините на триаголниците ABM и COM се $8\,cm^2$ и $1\,cm^2$. Определи ја плоштината на паралелограмот $ABCD$.



507. Даден е рамностран $\triangle ABC$ со плоштина 32. Точката N е средина на страната AC, точката M припаѓа на страната BC и важи $NM\perp BC$, и точките K и L припаѓаат на страната AB и се такви што $ML\perp AB$ и $KN\perp NM$. Определи ја плоштината на четириаголникот $KLMN$.



508. На цртежот десно $ABCD$ е паралелограм и $\overline{BK}=24\,cm$. Определи ја должината на ML ако $P_{KLC}=0,25(P_{ABK}+P_{DCK})$ и $12P_{MBC}=P_{ABCD}$.



509. Во триагоникот ABC точките M и N се средини на страните AC и BC соодветно, а P и Q се средини на отсечките AM и BN, соодветно. Плоштината на триаголникот ABC е еднаква на $32\,cm^2$. Определи ја плоштината на четириаголникот $PQMN$.

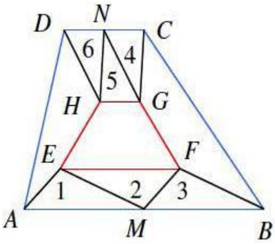
510. На правата p се дадени точки A, B, C така што точката B е меѓу точките A и C. Над отсечките AB и BC, од иста страна на правата p, се конструирани рамнострани триаголници ABE и BCD. Определи ја плоштината на четириаголникот $ACDE$ ако $\overline{AB} = a$ и $\overline{BC} = b$.

511. Даден е паралелограм $ABCD$ со плоштина 1. Средината M на страната AD е поврзана со темето B. Отсечката MB ја сече дијагоналата AC во точката Q. Определи ја плоштината на четириаголникот $MQCD$.

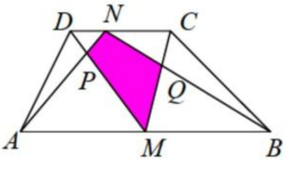
512. Определи ја плоштината на делтоидот со должини на страни $16\,cm$ и $20\,cm$, а должината на дијагоналата која не е негова оска на симетрија е $20\,cm$.

513. Даден е квадрат $ABCD$ со должина на страна $12\,cm$. Нека E е средината на страната AB и S е пресечната точка на дијагоналата AC и отсечката DE. Определи ја плоштината на четириаголникот $BCSE$.

514. Трапезот $EFGH$ е внатре во трапезот $ABCD$ и важи $AB \| EF$ и $CD \| GH$. Плоштината на $ABCD$ е $16\,cm^2$, плоштината на $EFGH$ е $4\,cm^2$. Плоштините на триаголниците 1, 2, 3, 4, 5, 6 се еднакви. Ако висината на трапезот $ABCD$ е $4\,cm$, определи ја висината на трапезот $EFGH$.



515. Четириаголникот $ABCD$ даден на цртежот десно е трапез. Определи ја плоштината на четириаголникот $MQNP$, ако плоштините на триаголниците APD и BQC се еднакви на $5\,cm^2$ и $9\,cm^2$.



516. Дијагоналите на трапезот $ABCD$ го делат трапезот на четири триаголника. Плоштините на триаголниците кои ги содржат основите AB и CD се $m\,cm^2$ и $n\,cm^2$. Определи ја плоштината на трапезот $ABCD$.

517. Даден е трапез $ABCD$ со основи AB и CD ($AB \| CD$) и таков што $\overline{AB} = \overline{AD}$.

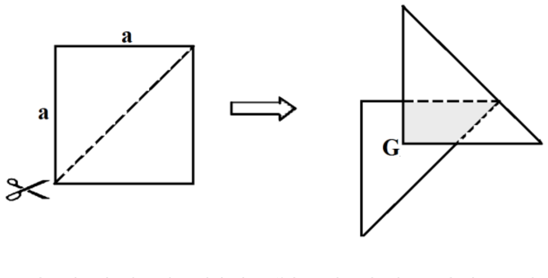
а) Ако $\overline{AB} = 8\frac{1}{3}\,cm$, $\overline{CD} = \frac{3}{10}\overline{AB}$ и растојанието од точката B до правата AD е $4{,}8\,cm$, определи ги плоштината на триаголникот ABD, плоштината на дадениот трапез и плоштината на триаголникот DOA, каде O е пресекот на дијагоналите на трапезот $ABCD$.

а) Ако трапезот е рамнокрак и M е точка од кракот AD таква што $\triangle ABM$ е четириаголникот $MBCD$ имаат еднакви плоштини, докажи дека вие две фигури имаат и еднакви периметри.

518. Основите на трапезот се $a = 25\,cm$ и $b = 15\,cm$, а едниот крак е $c = 8\,cm$. Определи го периметарот и плоштината на овој трапез ако е познато дека збирот на внатрешните агли на трапезот при поголемата основа е еднаков на 90°.

519. Во $\triangle ABC$ со должини на страни $a = 20\,cm, b = 13\,cm$ и $c = 21\,cm$ точката M е подножје на најмалата висина. Нека N, P, Q се средини на страните AB, BC, CA, соодветно. Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ е рамнокрак трапез. Определи ја плоштината на овој трапез.

520. Нека $ABCD$ е произволен четириаголник соплоштина 3. На страната AB се земени точки M и N такви што $\overline{AM} = \overline{MN} = \overline{NB}$, а на страната CD се земени точки P и Q такви што $\overline{CP} = \overline{PQ} = \overline{QD}$. Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ има плоштина 1.



521. Мартин пресекол по дијагонала квадрат со страна a и добил два правоаголни триаголника. Потоа тој делумно ги преклопил два триаголника така што хипотенузите им се паралелни, а темето во кое е правиот агол на едниот

триаголник се совпаѓа со тежиштето на другиот триаголник (цртеж десно). Определи ја плоштината на засенчениот дел.

522. Точките $M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2)$ се во првиот квадратнт и припаѓаат на графикот на функцијата $y=\frac{a}{x}, a>0$. Нека точките A_1, A_2 се проекциите соодветно на точките M_1, M_2 на $x-$оската, а точките B_1, B_2 се проекциите соодветно на точките M_1, M_2 на $y=$оската. Спореди ги плоштините на трапезите $A_1A_2M_2M_1$ и $B_1B_2M_2M_1$.

523. Точките $M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2), M_3(x_3,y_3), M_4(x_4,y_4)$ се во првиот квадратнт, припаѓаат на графикот на функцијата $y=\frac{a}{x}, a>0$ и важи $\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_3}{x_4}$. Нека точките N_1, N_2, N_3, N_4 се проекциите соодветно на точките M_1, M_2, M_3, M_4 на $x-$оската. Спореди ги плоштините на трапезите $N_1N_2M_2M_1$ и $N_3N_4M_4M_3$.

524. Даден е рамнокрак трапез $ABCD$ со $\measuredangle AOB=60^\circ$, каде O е пресекот на дијагоналите на трапезот, и разлика 2 меѓу должините на неговите основи. Правата која минува низ средината на помалата основа CD и е паралелна со кракот AD го дели трапезот на два дела такви што плоштината на помалиот дел е еднаква на $3\sqrt{3}$. Определи ја плоштината на трапезот.

525. Должината на страната на правилна петокрака ѕвезда е еднаква на $1m$. Ако страната ја продолжиме за $1cm$, тогаш плоштината на ѕвездата се зголемува за $2{,}13864\,dm^2$. Определи ја плоштината на почетната ѕвезда.

526. Нека M е точка на помалиот лак BC на кружницата опишана околу квадратот $ABCD$, кој има должина на страна a. Нека P е пресекот на AM со BD, Q е пресекот на DM со AC. Определи ја плоштината на четириаголникот $APQD$.

527. Во рамнокрак триаголник основата и соодветната висина се со должина $8\,cm$. Определи ја плоштината на кругот опишан околу овој триаголник.

528. Правилен 2014-аголник и правиле 2015-аголник имаат еднакви должини на страни. Ги разгледуваме кружниот прстен определен со впишаната и опишаната кружница околу 2014-аголникот и кружниот прстен определен со впишаната и опишаната кружница околу 2015-аголникот. Кој од овие два прстени има поголема плоштина?

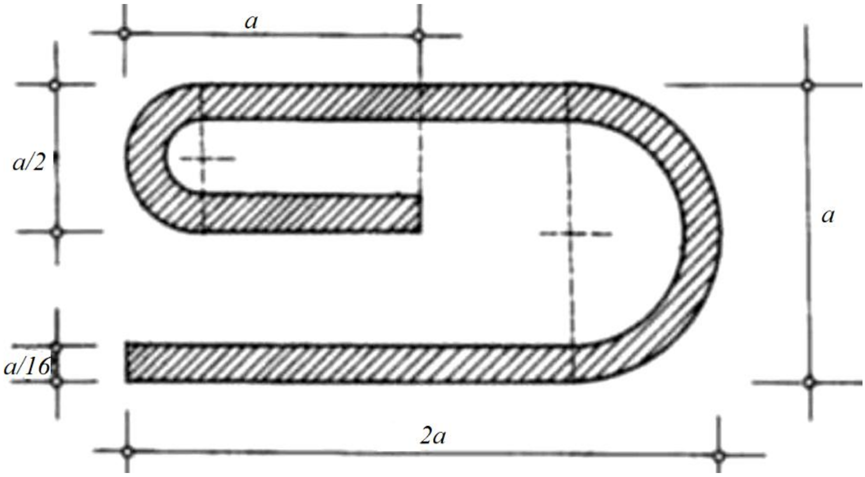
529. Должината на едната катета на правоаголниот триаголник е $a = 5\,cm$, а хипотенузата е за $1cm$ подолга од другата катета. Определи и периметарот и плоштината на кружницата опишана околу овој триаголник.

530. Околу рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{AC}$ е опишана кружница k. Низ темето A е повлечена права која основата BC ја сече во точката M, а кружницата k по втор пат ја сече во точката N. Определи ја плоштината на впишаниот круг во $\triangle ABC$, ако $\overline{AM} \cdot \overline{AN} = 25$, а периметарот на $\triangle ABC$ е еднаков на $16\,cm$.

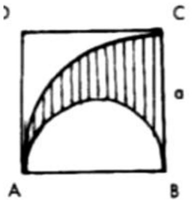
531. Во кружница со радиус $R = 10\,cm$ е впишан рамнокрак триаголник чиј агол при врвот (темето A) е еднаков на 45°.

Определи ја плоштината на кружниот отсечок определен со основата BC и помалиот лак BC.

532. Со помош на a изрази ја плоштината на штрафираната фигура.



533. Во квадрат $ABCD$ со должина на страна a вписани се два кружни лаци: првиот со цнтар во темето B и радиус a, а вториот со дијаметар AB (цртеж десно). Периметарот на штрафираната фигура е еднаков на $10(\pi+1)\,cm$. Определи ја плоштината на оваа фигура.

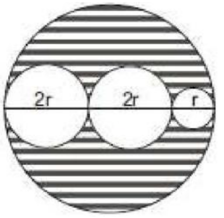


534. Две кружници чии радиуси се однесуваат како $3:1$ се допираат однадвор во точката A. Определи ја плоштината на фигурата ограничена со кружниците и заедничката надворешна тангента на кружниците.

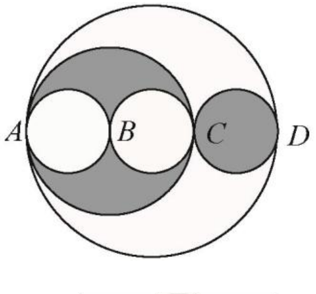
535. Кружница ги допира страните AC и BC на $\triangle ABC$ со $\measuredangle ACB = 120^\circ$ и ја сече страната AB последователно од лево надесно во точките M и N така што $\overline{AM}=8$, $\overline{MN}=24$ и $\overline{NB}=3$. Определи ја плоштината на $\triangle ABC$.

536. Центарот на еден круг е теме на квадрат со должина на страна a. Определи го радиусот на кругот за да плоштината на пресекот на кругот и квадратот е еднаква на 50% од плоштината на квадратот?

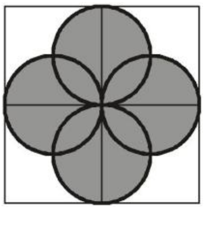
537. Определи го периметарот на штрафираната фигура на цртежот десно.



538. На цртежот десно точките A, B, C, D лежат на една права и $\overline{AB}=\overline{Bc}=\overline{CD}=d$. Отсечката AD е дијаметар на големата кружница. Плоштината на белиот дел на најголемиот круг е еднаква на $60\,cm^2$. Определи ја плоштината на сивиот дел на најголемиот круг.



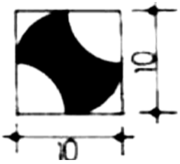
539. Радиусот на секој од круговите на цртежот десно е еднаков на $3\,cm$. Определи ја плоштината на сивата фигура прикажана на овој цртеж. Колку изнесува плоштината на белиот дел од



квадратот?

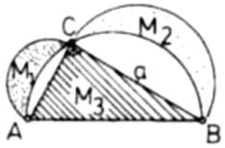
540. Над дијаметарот на полукружница е нацртан рамностран триаголник (цртеж десно). Изразија плоштината на штрафирабиот дел во функција од радиусот на полукружницата r .

541. Во рамностран триаголник со должина на страна $a = 6\,cm$ е впишана кружница k_1 . Едно теме на кружницата е центар на кружницата k_2 со радиус $\frac{a}{2}$. Определи ја плоштината на ликот ограниче со кружниците k_1 и k_2 .



542. Колкав дел од квадратот зафаќа црната површина?

543. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ околу кој е опишана кружница. Над катетите на $\triangle ABC$ како над дијаметри се конструирани полукружници, кои со опишаната кружница формираат полумесечини со плоштини M_1 и M_2 . Со M_3 да ја означиме плоштината на $\triangle ABC$. Докажи дека $M_1 + M_2 = M_3$.



544. Нека ABC е рамностран триаголник со должина на страна a и нека A и B се центри на кругови со радиус $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Определи ја плоштината на разликата на триаголникот ABC и унијата на овие кругови.

545. Две исти кружници имаат заедничка точка C и надворешно допираат трета кружница со радиус $r = 5\,cm$ во точките A и B , Определи ја плоштината на триаголникот ABC ако $\overline{AB} = 6\,cm$.

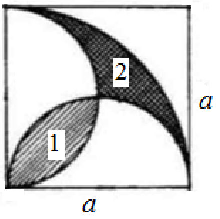
546. Во кружница со радиус r се впишани два квадрати така што е добиена правилна осумкрака ѕвезда. Определи ја должината на кракот на оваа ѕвезда.

547. Даден е правилен петаголник $ABCD$ со должина на страна $a\,cm$.

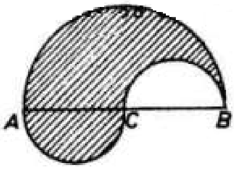
а) Определи ги внатрешниот агол на петаголникот и $\measuredangle BAC$.

б) Околу петаголникот е опишана и во него е впишана кружница. Докажи дека плоштината на кружниот прстен определен со овие кружници е еднаква на плоштината на кругот чиј радиус е еднаков на $a\,cm$.

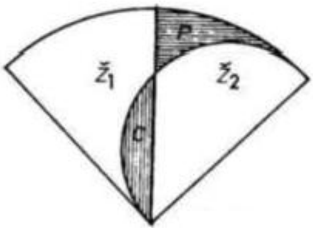
548. Две полукружници и четвртина од трета кружница во квадрат со страна a ги ограничуваат фигурите прикажани на цртежот десно. Определи ги плоштините на овие фигури.



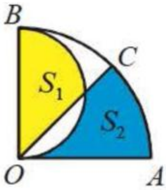
549. Отсечката $\overline{AB}=2a$ со точката C е поделена на два дела, па над отсечките AB, AC, BC како над дијаметри се конструирани полукружници (цртеж десно). Определи ја плоштината на штрафираната фигура.



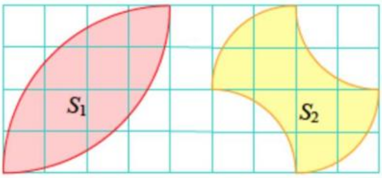
550. Кралот Филип побарал од дворскиот сликар да го обои неговиот штит, кој имал облик на четвртина круг, во три бои: жолта – боја на добрината, плава – боја на мудроста и црвена – боја на храброста. Кога боењето било готово неговиот син Александар рекол дека на цртежот има повеќе храброст од мудрост, што значи дека $C>P$. Што мислиш, дали Александар е во право? Одговорот да се образложи.

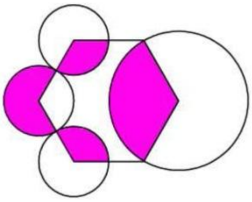


551. На цртежот десно е дадена четвртина круг со радиус $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ е во него полукруг со дијаметар OB (цртеж десно). Ако $\measuredangle A)C=\measuredangle BOC$, спореди ги плоштините наобоените делови S_1 и S_2 од добиената фигура.

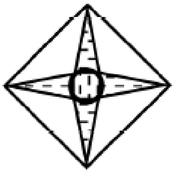


552. Нека P_1 и L_1 се плоштината и периметарот на фигурата S_1, а P_2 и L_2 се плоштината и периметарот на фигурата S_2 (цртеж десно). Спореди ги плоштините и периметрите на овие две фигури.





553. Центрите на три мали еднакви монети и една голема монета се темиња на правилен шестаголник.Определи го односот на обоениот и необоениот дел на четирите монети?



554. Во квадрат со страна $10\,cm$ е поставена симетрична ѕвезда со 8 врвови, 4 од кои се во врвовите на квадратот, а другите лежат на кружница во внатрешноста на ѕвездата. Најди го радиусот на кружницата, ако внатрешноста на ѕвездата (шрафираниот дел) е со плоштина $\frac{2}{5}$ од плоштината на квадратот.

555. Во полукружница со дијаметар $\overline{AB}=8\,cm$ и центар S над радиусите SA и SB се нацртани две полукружници со дијаметри SA и SB. Определи ја плоштината на кругот кој од внатре ја допира големата полукружница, а од надвор ги допира двете мали полукружници.

556. Во кружен исечок еднаков на шестина од кругот е впишан нов круг. Определи го односот на плоштините на исечекот и кругот кој е во него впишан.

557. Во остроаголен триаголник $ABC\,(\overline{AC}\geq\overline{BC})$ на страните AC и BC се земени соодветно точки P и Q такви што $\overline{AP}=\overline{CQ}$. Докажи дека $2\overline{PQ}\geq\overline{AB}$. Кога важи знак за равенство.

558. Нека a и b се катетите, а c е хипотенузата на правоаголниот $\triangle ABC$. Докажи дека $a+b\leq c\sqrt{2}$. Кога важи знак за равенство?

559. Даден е триаголник ABC со периметар $20\,cm$ и тежишни линии t_a,t_b,t_c. Докажи дека $t_a+t_b+t_c>15$.

560. Нека t_a и t_b се тежишните линии повлечени кон катетите a и b на правоаголниот триаголник ABC. Докажи дека $\frac{t_a+t_b}{a+b}\geq\frac{\sqrt{5}}{2}$.

561. Нека a и b се катетите, c е хипотенузата на правоаголнот триаголник ABC и $n>2$ е природен број. Докажи дека $a^n+b^n<c^n$.

562. Ако c е хипотенузата и P е плоштината на правоаголен триаголник, тогаш $c \geq 2\sqrt{P}$. Докажи!

563. Нека h е висината на правоаголен триаголник која соодветствува на хипотенузата, a и b се неговите катети и P е неговата плоштина. Докажи дека

    а) $h \leq \sqrt{P}$,

    б) $\frac{a+b+c}{2h} \geq 1+\sqrt{2}$.

564. Даден е $\triangle ABC$ и точка M во неговата внатрешност. Докажи дека $\overline{AM} \cdot \overline{BC} + \overline{BM} \cdot \overline{AC} + \overline{CM} \cdot \overline{AB} \geq 4P$, каде P е плоштината на $\triangle ABC$.

565. Определи го односот на плоштините на коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и и плоштината на пресекот на таа коцка со рамнината која минува низ средините на рабовите AB, BC и CC_1.

566. Дијагоналите на страните на квадар се со должини $15\,cm$, $\sqrt{481}\,cm$ и $\sqrt{544}\,cm$.Определи ги плоштината и волуменот на квадарот.

567. Правилна тристрана призма $ABCA_1B_1C_1$ со должина на работ на основата $10\,cm$ е пресечена со рамнината определена со точките A, B и C_1. Плоштината на пресекот е еднаквана $60\,cm^2$. Определи го волуменот на призмата.

568. Даден е квадар со димензии $2\,cm, 6\,cm$ и $12\,cm$. Определи ја должината на страната на коцка таква што плоштините на квадарот и коцката се однесуваат како нивните волумени.

569. Пократкатa дијагонала на правилна шестстрана призма е долга $12\,cm$ и со рамнината на основата зафаќа агол од 30°.Определи ги плоштината и волуменот на оваа призма.

570. Основниот раб на правилна шестстрана призма е зголемен за 200%, а висината е намалена за $p\%$. Ако волуменот на оваа призма се зголе-

мил за $p\%$ определи дали плоштината на омотачот се зголемила или се намалила и за колку проценти.

571. Правилна шестстрана призма со еднакви рабови, чија должина е $4\,cm$, е пресечена со рамнина која ја содржи подолгата дијагонала на една од основите и на неа паралелниот раб кој припаќа на другата основа. Определи ја плоштината на пресекот на рамнината и призмата.

572. Правилна шестстрана призма е пресечена со рамнина. Рамнината содржи два паралелни раба на основите кои се на различни основи и не припаѓаат на ист бочен ѕид. Плоштината на добиениот пресек е еднаква на $6\sqrt{7}\,cm^2$. Определи го волуменот на призмата ако висината на призмата е двапати подолга од нејзината основа.

573. Правилна шестаголна призма има висина $12\,dm$, а помалата дијагонала на основата е еднаква на $10\sqrt{3}\,cm$. Определи ги плоштината и волуменот на оваа призма.

574. Правилна четиристрана призма е правилна четиристраба пирамида имаат еднакви основи, плоштини и волумени. Плоштината на основата е еднаква на $100\,cm^2$. Определи ги висините на двете тела.

575. Дадена е коцка $ABCDERGH$. Отсечката која го поврзува центарот S на основата $ABCD$ со темето E ја сече дијагоналата AG во точката P. Определи ги плоштината и волуменот на коцката ако $\overline{SE} = \sqrt{6}\,cm$.

576. Должината на страната на коцката $ABCDEFGH$ е еднаква на $3\sqrt{2}\,cm$. Определи го растојанието од темето A просторната дијагонала DF.

577. Едно теме на коцката е оддалечено од нејзината дијагонала $7\,cm$. Определи ги плоштината и волуменот на оваа коцка.

578. Пресекот на коцка и рамнина е петаголник. Докажи дека плоштината на тој петаголник е помала од производот на двете негови најдолги страни.

579. Нека е дадена коцка $ABCDA'B'C'D'$ со раб $4\,cm$ и нека M е средината на работ AB. Определи ја плоштината на пресекот на рамнината $MC'D$ и дадената коцка.

580. Дадена е коцка $ABCDA'B'C'D'$ со должина на раб $a=10\,cm$. Докажи дека пресекот на коцката со рамнината која минува низ средините на рабоците AB, CC' и $A'D'$ е правилен многуаголник. Определи ја плоштината на овој многуаголник.

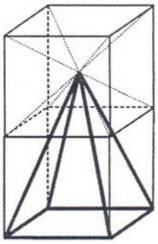
581. Дадена е коцката $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Определи го аголот меѓу рамнините ACD_1 и AB_1C_1D.

582. Работ на голема коцка е за 50% подолг од работ на мала коцка. Определи ги разликите на плоштините и волумените на двете коцки.

583. Даден а е коцка $ABCDEFGH$ со должина на раб a. Определи го волуменот на тетраедарот чии темиња се A, F, C и H.

584. Дадена е коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со центар S и должина на страна a. Определи го волуменот на пирамидата A_1BC_1S

585. Дадени се две коцки кои се ставени една врз друга со што е добиен квадар. Ја разгледуваме пирамидата чие врв е средината на горната коцка, а основа е основата на долната коцка (цртеж десно). Определи колкав дел од волуменот на целата пирамида се наоѓа во горната коцка.



586. Плоштината на омотачот на правилна шестстрана призма е еднаква на $648\,cm^2$, а дијагоналата на бочниот ѕид е $15\,cm$. Определи ја плоштината на призмата.

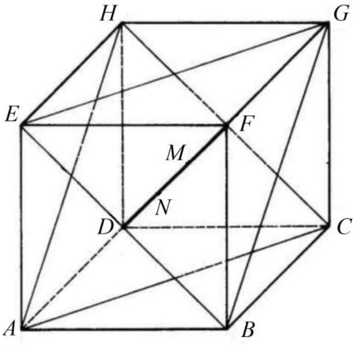
587. Коцка со должина на раб $13\,cm$ подели ја на 2007 помали коцки чии рабови се со должини $1\,cm, 2\,cm$ и $3\,cm$.

588. Основата на права призма е ромб $ABCD$ со должина на страна $a=4\,dm$ и агол $\measuredangle BAD=60^\circ$. Висината на призмата е $H=5\sqrt{3}\,dm$.

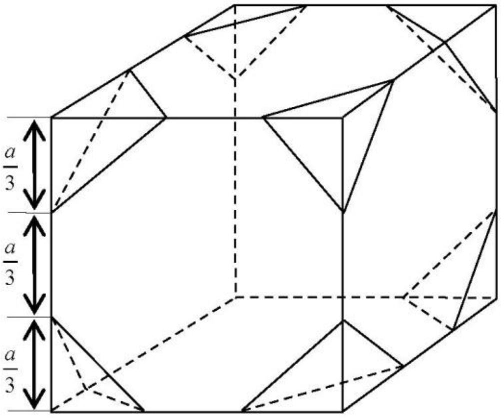
а) Определи ги волуменот и плоштината на призмата.

б) Низ страната на ромбот минува рамнина која со рамнината на основата зафаќа агол од 30°. Определи ја плоштината на пресекот на рамнината и призмата.

589. Дадена е коцка $ABCDEFGH$. Ако M и N се пресечните точки на дијагоналата FD со рамнините на триаголниците EBG и ACH, соодветно, докажи дека отсечките DN, NM и MF имаат еднаква должина.



590. Од коцка се отсечени осум еднакви делови кои имаат форма на триаголна пирамида (цртеж десно). Колкав дел е волуменот на добиеното тло од волуменот на целата коцка?



591. Решението на равенката $a-12=\frac{(2a-3)^2}{8}-\frac{2a^2-a-\frac{3}{2}}{4}$ е мерниот број во сантиметри на работ на коцката $ABCDA'B'C'D'$. Определи ги плоштината и волуменот на оваа коцка.

592. Корито за вода долго $5\,m$ собира 1440 литри вода. Пресекот на коритото е рамнокрак трапез чиј крак има должина $52\,cm$, а висината му е $48\,cm$. Колку литри вода има во коритото кога е наполнето до половина од висината?

593. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle C=90^\circ, \measuredangle A=30^\circ$ и $\overline{BC}=a$. Определи го волуменот на призмата чија основа е $\triangle ABC$, а висината и е еднаква на радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$.

594. Дијагоналата AC_1 на правилна четиристрана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и бочниот раб AA_1 зафаќаат агол од 30°. Волуменот на призмата е

еднаков на $108\sqrt{3}\,cm^3$. Определи ја должината на дијагоналата на оваа призма.

595. Сите 18 рабови на правилна призма имаат должина изразена во сантиметри еднаква на еден ист цел број. Плоштината M на омотачот е четирицифрен број, чии цифри се последователни природни броеви (не задолжително наредени по големина) и едната од нив е два пати помала од друга цифра. Определи ја должината на висината на призмата.

596. а) Бројот на ѕидовите на една пирамида е 10. Колку рабови има оваа пирамида?
б) Една пирамида има 2016 рабови. Многуаголникот кој е основа на пирамидата е основа на призма. Колку ѕидови има призмата?

597. Дадена е тристрана еднакворабна пирамида со раб $a=4\sqrt{2}$. Средините на рабовите на оваа пирамида се темиња на ново тело. Определи ги плоштината и волуменот на ова тело.

598. Висината на правилна тристрана пирамида е $6\sqrt{6}$ и бочниот раб со рамнината на основата формира агол од 45°. Определи го растојанието од центарот на основата на пирамидата до бочниот ѕид на пирамидата.

599. Нека $SABC$ е пирамида со основа ABC, а бочните рабови SA, SB, SC се еднакви. Определи го нејзиниот волумен ако

$$\overline{AB}=13\,cm,\ \overline{BC}=14\,cm,\ \overline{CA}=15\,cm \text{ и } \overline{SA}=12\tfrac{1}{8}\,cm.$$

600. Основата на пирамидата е правоаголник со периметар $20\,cm$, чии должина и ширина изразени во сантиметри се два последователни природни броја, а висината на пирамидата е еднаква на збирот на тие броеви. Определи ги волуменот и плоштината на пирамидата.

601. Во кружница се повлечени три дијаметри кои ја сечат во шест точки. Избираме една од тие точки и започнуваме од неа: ако ги поврземе точките преку една се добива триаголник, а ако ги поврземе последователно се добива шестаголник. Триаголникот е основа на пирамида, а шестаголникот е основа на призма со висина 4 пати помала од виси-

ната на пирамидата. Определи го односот на волуменот на пирамидата и волуменот на призмата.

602. На час по математика наставничката покажала макета на Египетска пирамида и ги кажала нејзините димензии. Иван направил пирамида со истата основа и со три пати помала висина, а Марко направил пирамида со истата висина и со три пати помал основен раб. Определи го односот на волумените на пирамидата на Иван и пирамидата на Марко.

603. а) Должината на основниот раб на правилна четиристрана пирамида е a, а висината е три пати подолга од основниот раб. Определи ги волуменот и плоштината на на оваа пирамида.
б) Определи ги волуменот и плоштината на правилна четиристрана призма ако должината на дијагоналата на основата е d, а дијагоналата на основата и висната се однесуваат како $1:2$.

604. Кај тристарана пирамида, со должини на рабовите на основата 6, 8 и $10\,cm$, сите бочни рабови се со должина $13\,cm$. Определи ги плоштината и волуменот на оваа призма.

605. Даден е правилен тетраедар со висина $3\,cm$. Определи ги волуменот и плоштината на овој тетраедар.

606. Должината на работ на правилен тетраедар е еднаква на a. Определи го растојанието меѓу центрите на два ѕида на тетраедарот.

607. Бочните рабови на тристрана пирамида се заемно нормални, а плоштините на бочните ѕидови се еднакви на $6\,cm^2, 4\,cm^2$ и $3\,cm^2$. Определи ги должините на рабовите, волуменот и плоштината на оваа пирамида.

608. Даден е правилен тетраедар $ABCD$ чиј раб има должина a. Рамнината Σ ја содржи точката D и ги сече рабовите AB и BC така што пресекот на рамнината Σ и тетраедарот е е триаголник. Докажи дека периметарот на пресечниот триаголник е поголем од $2a$.

609. Определи го волуменот на тристрана пирамида која има пет рабови со должина a и еден раб со должина $a\sqrt{2}$.

610. Бочниот ѕид OAB на тристраната пирамида $OABC$ е рамностран триаголник со страна $\overline{AB}=6\sqrt{3}\,cm$. Рабовите CA, CB и CO се меѓусебно еднакви. Висината на пирамидата е $\overline{OO_1}=4,5\sqrt{3}\,cm$. Определи ја плоштината на пресекот на пирамидата $OABC$ со рамнината COO_1.

611. Нека $ABCS$ е правилна тристрана пирамида со основа ABC и чии бочни рабови се двапати подолги од рабовите на основата. Нека E е точка од бочниот раб BS. Аголот меѓу рамнината ACE и основата е еднаков на половината од аголот меѓу бочната страна на пирамидата и основата. Определи го односот во кој рамнината ACE го дели волуменот на пирамидата.

612. Во правилна четиристрана пирамида, со основен раб $12\,cm$ и висина $8\,cm$, е впишана коцка така што еден нејзин ѕид лежи на основата на пирамидата, а четири темињаприпаѓаат на бочните рабови. Определи го односот на плоштините на коцката и пирамидата.

613. Плоштината на правилна тристрана пирамида е еднаква на $648\sqrt{3}\,cm^2$. Определи го волуменот на пирамидата, ако нејзината висина е два пати подолга од работ на основата на пирамидата.

614. Определи ги плоштината и волуменот на правилна тристрана пирамида чиј бочен ѕид со рамнината на основата зафаќа агол од 60°, а растојанието од тежиштето на основата до бочниот ѕид е еднакво на $3\,cm$.

615. Основниот раб на правилна четиристрана пирамида е $4\,cm$, а растојанието на средината на основата до една бочна страна е $\frac{\sqrt{15}}{2}\,cm$. Определи го волуменот на оваа пирамида.

616. Должината на бочниот раб на правилна шестстрана пирамида е $\sqrt{39}\,cm$, а апотемата со рамнината на основата зафаќа агол од 60°. Определи го волуменот на оваа пирамида.

617. Должината на дијагоналата на правилна четиристрана пирамида е еднаква на $3\,cm$. Бочните рабови на пирамидата формираат со дијаго-

налите на нејзината основа агли од 45°. Определи ги плоштината и волуменот на оваа пирамида.

618. Волуменот на еднакворабна тристрана пирамида изрази го како функција од радиусот на впишаната кружница во основата на пирамидата.

619. Определи ги волуменот и плоштината на правилна шестстрана пирамида ако нејзиниот најголем дијагонален пресек е рамнокрак триаголник чија катета е долга $8\,cm$.

620. Плоштините на основата и омотачот на права правилна шестстрана пирамида се однесуваат како $\sqrt{3}:2$. Должината на основата на пирамидата е еднаква на $a=10\,cm$. Определи ја висината на оваа пирамида.

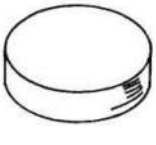
621. Во правилна четиристрана пирамида е впишана коцка. Една основа на коцката е во рамнината на основата на пирамидата, а темињата на другата основа се во тежиштата на бочните ѕидови на пирамидата. Колку пати волуменот на пирамидата е поголем од волуменот на оваа коцка?

622. Правилна четиристрана пирамида $SABCD$ со висина $8\,cm$ и бочен раб $10\,cm$ е пресечена со рамнина која минува низ темето A и е нормална на бочниот раб SC. Определи ја плоштината на пресекот на пирамидата и рамнината.

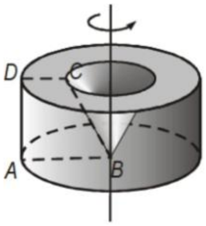
623. Дадена е пирамида $SABC$ со волумен V. Точките M и N припаѓаат на рабовите SB и SC и се такви што $MN \parallel BC$. Определи ги положбите на точките M и N така што волуменот на пирамидата $ABMNC$ (темето е во точката A) е еднаков на $\frac{3}{4}V$.

624. Определи ја равенката на правата која во однос на координатниот почеток е симетрична на правата $12x+5y+60=0$. Потоа определи го волуменот на телото кое се добива со ротација на правоаголниот триаголник определен со правата и координатните оски.

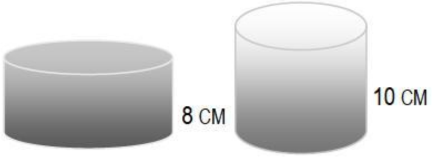
625. Радиусот на еден казан $1\ \ 2\,m$, а неговата висина е еднаква на $1\,m$ (цртеж десно). Дали може во овој казан да се турат 3000 литри вода?



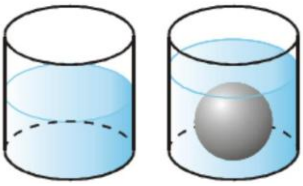
626. Правоаголен трапез $ABCD$ ротира околу оска која минува низ темето B и нормална е на основата AB, при што се добива телото прикажано на цртежот десно. Ако $\overline{AD}=6\,dm$ и $\overline{AB}=2\overline{CD}=14\,dm$, определи го волуменот на добиеното тело.



627. Правоаголен лист со димензии $8\,cm\times 10\,cm$ Иван искористил за обвивка на цилиндар со висина $8\,cm$, а Никола ист таков лист искористил за обвивка на цилиндар со висина $10\,cm$. Кој од двата цилиндри има поголем волумен и за колку?



628. Во цилиндричен стаклед сад со внатрешен радиус на основата $6\,cm$ етурена вода. Во садот е потопена метална топка така што водата целосно ја покрила топката. Колку изнесува волуменот на топката, ако по нејзиното потопување во садот нивото на водата се покачило за $1\,cm$.



629. Метален цилиндар со дијаметар $20\,cm$ и висина $30\,cm$ е потопен и од металот последователно се леат топки: мала со дијаметар $3\,cm$, средна со дијаметар $5\,cm$ и голема со дијаметар $7\,cm$, па одново мала, средна, голема итн. Каква ќе биде последната излеана точка?

630. а) Периметарот на основата на прав цилиндар е $2\pi cm$,а висината му е еднаква на дијаметарот на основата. Определи ги плоштината и волуменот на овој цилиндар.

б) Дијаметарот на основата на прав конус е $6\,cm$, а неговата изводница е $5\,cm$. Определи ги плоштината и волуменот на овој конус.

631. Едно тело е составено од полутопка и прав конус со заедничка основа – круг. Радиусот на полтопката е $2\,dm$, а висината на конусот, изразена во сантиметри е решението на равенката

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{2x+\frac{4}{5}}{1-\frac{1}{5}}+x+10=0\,.$$

Определи ги плоштината и волуменот на ова тело.

632. Од рамностран цилиндар со радиус r е изрежан квадар. Основата на квадарот има една страна еднаква на радиусот на цилиндарот. Изрази ги волуменот и плоштината на квадарот преку r .

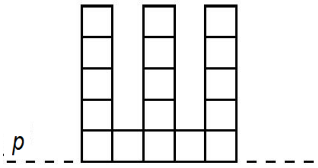
633. Топка со радиус R е вписана во прав конус со висина $H=4R$. Докажи дека плоштините на овие тела се однесуваат како нивните волумени.

634. Во топка со радиус R е впишан конус. Центарот на топката ја дели висината на конусот така што поголемиот дел е геометриска средина на помалиот дел и висината. Определи го односот на волумените на топката и конусот.

635. Плоштините на топката и правиот конус опишан околу неа се однесуваат како $1:3$. Определи го односот на нивните волумени.

636. Ненаострен молив има форма на цилиндар со должина $20\,cm$ и радиус на основата $3\,mm$. При првото острење на врвот е оформен конус со висина $15\,mm$, а останатите $185\,mm$ од должината на моливот останале непроменети. Колку проценти од моливот отпаднале при острењето?

637. Буквата Ш на цртежот десно е составена од 17 квадратчиња со должина на страна $1\,cm$. Определи ги плоштината и волуменот на телото кое се добива кога буквата Ш ротира околу правата p .



638. а) Радиусот на еден конус е зголеменм за 25%, а неговата висина е намалена за 4%. За колку проценти се зголемил неговиот волумен?

б) Радиусот на еден конус зголемен за 20%, а неговата висина е намалена за 20%. За колку проценти ќе се промени неговата плоштина?

639. За бојадисување на цилиндар со висина $5\,cm$ и радиус на основата $5\,cm$ се потребни $5\,g$ боја. Колку грама од истата боја се потребни за

бојадисување на цилиндар со висина $10\,cm$ и радиус на основата $10\,cm$? (Двата цилиндри се направени од ист материјал.)

640. Решението на равенката $(x+2)^3-(x-2)^3-x=12x^2+8$ е мерниот број на должината на кракот на рамнокрак трапез, кој има остар агол 45° и крак еднаков на помалата основа на трапезот. Определи ја плоштината на телото кое се добива со ротација на трапезот околу еден негов крак.

641. Ромб чија дијагонала е еднаква на страната a ротира околу права нормална на подолгата дијагонала во нејзината крајна точка. Определи ги плоштината и волуменот на добиеното тело.

III.5. ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

642. Како со помош на садови од $3\,l$ и $5\,l$ во сад од $8\,l$ од чешма да се турат точно $7\,l$.

643. Во три града Берово, Гевгелија и Охрид живеат 35000 жители. Ако во Берово има двојно повеќе жители отколку што ги има, тогаш вкупниот број жители во сите три града ќе биде еднаков на петтиот степен на разликата на бројот на жителите во Гевгелија и бројот на жителите во Охрид. Определи го бројот на жителите во овие градови.

644. На таблата се запишани неколку позитивни реални броеви такви што секој запишан број е еднаков на една деветтина од збирот на преостанатите броеви. Колку броеви се запишани на таблата?

645. Во чудесната земја Недојдија, покрај останатите жители, живеат и Барабасите и Карабасите. Секој Карабас познава 7 Карабаси и 9 Барабаси, а секој Барабас познава 10 Карабаси и 7 барабаси. Кои жители се повеќе, Карабасите или Барабасите?

646. Штурците A, B, C се наредиле во овој редослед на една права. Тие започнале да се прескокнуваат, така што во секој скок еден од нив прескокнува некој од останатите (но не и двете истовремено). Определи ги сите редоследи во кои тие може да се распоредени по 10 скокови.

647. Во една фабрика производите се пакуваат во пакети од по $3\,kg$ и $5\,kg$. Докажи дека со овие пакети може да се испорача секоја нарачка поголема од $7\,kg$. (Се нарачува цел број килограми од производот.)

648. Во први клас на едно средно училиште се запишале 110 ученици. Од порано секој од нив познава најмалку 11 ученици. Докажи дека секој ученик во први клас има два заеднички познаника на кои тој не им е единствен заеднички познаник.

649. Трговец со злато продава 100 вреќички со по 100 златници. Златарот Стојан дознал дека се работи за подвала и дека во 99 вреќички се наоѓаат златници од по 10 грама, а во една вреќа златници од 9 грама. Како само со едно мерење на вага со тегови Стојан ќе определи во која врeќичка се златниците од 9 грама?

650. За Велигден Марија бојадисала едно јајце. Прво го потопила јајцето во плава боја, потоа со црвена боја направила шест меридијани така како што се поврзани јужниот и северниот пол на глобусот, а потоа со зелена боја нацртала 5 паралели при што за да запази симетрија почнала со екваторот. На колку делови Марија ја поделила површината на јајцето?

651. За секое множество природни броеви A со A' да го означиме множеството природни броеви кои или припаѓаат на A, или се збир или разлика на два различни броја од A.

а) Определи го најмалиот n за кој постои $n-$елементно множество $A\subseteq\{1,2,3,...,19\}$ такво што $\{1,2,3,...,19\}\subseteq A'$.

б) Определи ги сите броеви $n>1$ за кои постои $n-$елементно множество $A\subseteq\{1,2,...,n^2\}$ такво што $A'=\{1,2,...,n^2\}$.

652. Дадена е коцка со должина на раб $13\,cm$. Подели ја коцката на 1988 коцки чии рабови изразени во сантиметри се со целобројни должини.

653. На страните на коцка на произволен начин се запишани различни природни броеви од 1 до 6. Потоа во секое теме на коцката е запишан збирот на трите броја на страните кои се сечат во тоа теме. Определи ја најголемата можна вредност на најмалиот од тие осум збирови.

654. Дрвена коцка е обоена, а потоа е расечена на најмалку 27 еднакви мали коцки. На колку мали коцки е расечена големата коцка ако се знае дека меѓу малите коцки бројот на коцките кај кои е обоена една страна е еднаков на бројот на коцките кај кои не е обоена ниту една страна?

655. Секоја страна на дадена коцка е поделена на 9 еднакви квадрати. Дали е можно во секој квадрат да се запише цел број така што за секој квадрат важи: збирот на бројот запишан во тој квадрат и четирите броја запишани во соседните квадрати е еднаков на 17? (Два квадрати се соседни акоимаат заеднички раб, вклучувајќи го и случајот кога тие квадрати не припаѓаат на ист ѕид на коцката.)

656. Првите осум природни броеви може да се распоредат во два реда така што збировите на броевите во двата реда се еднакви, а исто така и збировите на броевите во секоја колона се еднакви.

8	2	3	5
1	7	6	4

а) На ист начин во табела со два реда распореди ги броевите од 1 до 12.

б) Дали може на ист начин да се распоредат броевите од 1 до 10.

в) За кои природни броеви n на ист начи

н може да се распоредат броевите од 1 до $2n$.

657. Во равенството

$$(A+B)(C+D)(E+F)(G+H)=5005$$

буквите A, B, C, D, E, F, G, H замени ги со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (различните букви со различни броеви) така што ќе се добие точно равенство. На колку начини тоа може да се направи?

658. На колку начини може да се обојат сите едноцифрени природни броеви, боејќи го секој број со една од трите бои – плава, бела или црвена, а притоа било кои два броја чиј збир е непарен број не бидат обоени со иста боја?

659. Во 19-аголник се повлечени сите дијагонали. Определи го најголемиот број пресечни точки на дијагоналите кои не се темиња на 19-аголникот.

660. За денот на учителот Горјан на своите учители Марко, Илија, Павлина и Елена им подари 7 пенкала, 5 нотези и 6 кутии за моливи. На колку

начини Марко, Илија, Павлина и Елена можат да си ги распределат подароците така што секој од нив добие барем поеден подарок од секој вид?

661. Ангел, Бојан и Васко се во екипата по физика на едно училиште. Бојан, Гордана и Даница се во екипата по хемија, а Гордана, Елена и Живко се во екипата по биологија. На колку начини можат да седнат Ангел, Бојан, Васко, Гордана, Даница, Елена и Живко околу тркалезна маса така што да има барем двајца од една екипа еден до друг? (Подредувањето при кое X седи до Y од левата негова страна се смета за различно од подредувањето при кое X седи до Y од десната негова страна.)

662. Јанко го разгледува множеството од сите 2011-цифрени броеви кои се запишуваат со помош на две тројки, една двојка, а останатите цифри се единици. Колку елементи од ова множествосе деливи со 99?

663. Определи го бројот на броевите кои се помали од 10000 и чиј производ на цифри е еднаков на 18.

664. Палиндром е број кој на ист начин се чита одлево-надесно и оддесно-налево. На пример, бројот 3443 е палиндром. Колку најмногу последователни броеви кои не се палиндроми има меѓу броевите 1 и 9999.

665. Определи го бројот на сите триаголници чии страни се воедно страни и дијагонали на даден конвексен десетаголник.

666. Определи го бројот на трицифрените броеви во чиј запис не се содржи цифрата 0, а производот на нивните цифри е делив со 20.

667. Определи го бројот на природните броеви кои не се поголеми од 1000 и кои во својот запис имаат барем една цифра 1.

668. По завршување на учебната година група ученици размениле фотографии. Колку ученици имало во групата ако се разменети вкупно 870 фотографии?

669. Во одделение во кое учат 30 ученици, еден ученик на тестот по историја направил 13 грешки, а секој од преостанатите ученици направил помалку грешки. Докажи дека во одделението постојат барем тројца ученици кои на тестот направиле еднаков број грешки.

670. Седум рибари уловиле точно 100 риби. Меѓу нив не постојат двајца кои уловиле еднаков број риби. Докажи дека меѓу рибарите постојат тројца кои уловиле најмалку 50 риби.

671. Докажи дека во произволен конвексен седумаголник постојат две дијагонали кои зафаќаат агол помал од 13°. (Паралелни прави зафаќаат агол од 0°.)

672. Во рамностран триаголник со должина на страна $31\,dm$ се дадени 2019 точки. Докажи дека постои кружница со радиус $6\,cm$ во која се наоѓаат најмалку 3 од дадените точки.

673. Во рамнината се дадени 6 точки такви што меѓу нив нема три кои лежат на една права. Докажи дека меѓу дадените постојат три точки кои формираат триаголник таков што еден негов внатрешен агол не е помал од 120°

674. Дадени се n точки такви што меѓу нив нема 4 точки кои лежат во иста рамнина. Определи го бројот n ако се знае дека дадените точки определуваат два пати повеќе рамнини отколку прави.

675. На тениски турнир учествувале 6 тенисери и секој одиграл точно по еден натпревар со секој од останатите тенисери. За победа се добива 1 бод, а за пораз 0 бодови (во тенисот нема нерешен резултат). На крајот од турнирот се покажало дека ако тенисерот *А* има повеќе победи од тенисерот *Б*, тогаш *А* го победил *Б* во меѓусебниот натпревар.
а) Определи ја распределбата на бодовите и бројот на можните рангирања во кои секој тенисер има различен број победи.
б) Определи ја распределбата на бодовите и бројот на можните рангирања во кои само три тенисера се со еднаков број победи.
а) Докажи дека во крајното рангирање не е можно да има парен број тенисери со еднаков број победи.

676. Два шахисти одиграле меш од неколку партии во кој за победа добивале 4 поени, за реми 2 поени и за пораз 1 поен. Притоа двајцата вкупно освоиле 170 поени. Дали победникот можел да има точно 90 поени?

677. На еднокружен шаховски турнир учествувале 8 шахисти и секој од нив освои различен број бодови. Шахистот кој го освоил второто

место имал толку бодови колку што заедно имале четирите последно пласирани играчи. Како завршила партијата на играчите кои ги освоиле третото и седмото место?

678. Неколку бели и неколку зелени точки се означени на лист. Секои две тоички се поврзани со отсечка.

а) Кои отсечки се повеќе, оние кои имаат еднобојни крајни точки, или оние кои имаат разнобојни крајни точки, ако имаме:

(1) 4 бели и 3 зелени; (2) 6 бели и 3 зелени;

(3) 4 бели и 7 зелени; (4) 3 бели и $k>1$ зелени.

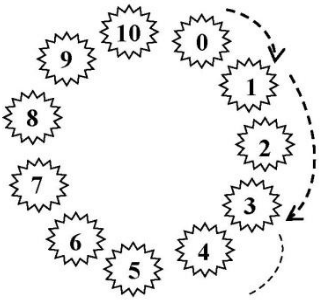
б) Нека се означени $n>1$ бели и $k>1$ зелени точки. Определи ги вредностите на n и k за кои бројот на отсечките со еднобојни крајни точки е еднаков на бројот на отсечките со разнобојни крајни точки.

в) Дозволено е следното пребојување – ако отсечката има еден бел и еден зелен крај, тогаш можеме да ја пребоиме едната крајна точка во црвена. Колку црвени точки можете да добиете на овој начин? Задачата реши ја ако бројот на точките е како под а).

г) Испитај го решението за задача под в) ако бројот на белите точки е x, а на зелените е y.

679. Дали може множеството природни броеви да се обои во 2012 различни бои така што во секоја боја да се обоени бесконечно многу броеви и да не постои тројка разнобојни броеви такви што производот на два од нив е еднаков на третиот број?

680. Ивана во круг ставила k саксии, во секоја од кои имало по еден цвет. Цветовите ги нумерирала со броевите од 0 до $k-1$. На цветот 0 слетала пчела. Таа започнува да ги обиколува цветовите во насока на стрелката на часовникот според следново правило: при првото полетување слетува на следниот цвет, при второто полетување следува преку еден цвет, потоа преку два цвета, папреку три цвета итн.



а) Нека $k=11$ (цртеж десно). Пчелата направила 50 летања. На кои цветови таа слетала барем еднаш и на кој ќе слета при последното летање?

б) Нека $k=31$. Пчелата направиле 2015 полетувања. На кој цвет таа не слетала ниту еднаш?

в) Нека $k=101$. Пчелата направила 2015 полетувања. Докажи дека постои цвет врз кој таа нема да слета ниту еднаш

г) Нека $k=300$. Докажи дека постои цвет врз кој пчелата нема да слета ниту еднаш независно од бројот на полетувањата.

д) Испитај ги можностите шчелата да не слета ниту еднаш на некој цвет при произволен $k\geq 3$ и при произволен број нејзини полетувања.

681. Дадени се седум комбинации од по 8 симболи (букви и цифри): КЕН3ГУРУ, ГУРУ4КЕН, РУ7КЕ5НГ, К7ЕНГР73, ЕНА2РАГУ, НАР5ГРАМ и ГЕР88ДАН. Во еден чекор секој од симболите може да се замени со произволен друг симбол. Определи го најмалиот број чекори во кои седумте комбинации можат да се направат еднакви?

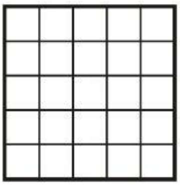
682. Капетанот им поделил на пиратите сандак златници на следниот начин: пиратите ги наредил во круг и на секој му дал парен број златници. Потоа наредил секој да даде точно половината од златниците на пиратот кој стои десно од него. На оние пирати кои потоа имале непарен број златници им дал уште по еден златник. Докажи дека по конечен број повторувања на оваа постапка сите пирати ќе имаат еднаков број златници.

683. На колку различни начини на шаховска табла може да се постават 8 топови кои меѓусебно нема да се напаѓаат?

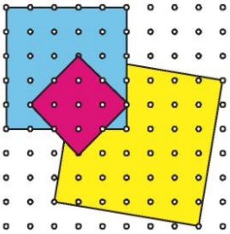
684. Ќе велиме дека едно пополнување со 0 и 1 на правоаголна таблица со 5 реда и n колони е *добро,* ако од таблицата можеме да избереме 3 реда и 3 колони такви што во полињата во кои тие се сечате запишан еден ист број. Определи го најмалиот број m за кој секое пополнување со 0 и 1 на таблица со 5 реда и n колони, каде $n\geq m$, е добро.

685. Во секое поле на таблица со димензија 3×3 е запишан по еден број. Производот на броевите запишани во секој ред и секоја колона е 1, а производот на броевите запишани во секој 2×2 квадрат е 2. Кој број е запишан во централното поле?

686. Квадрат 5×5 е поделен со прави паралелни на неговите страни на 25 мали квадратчиња, секое со должина на страна 1. Определи го бројот на сите



правоаголници со темиња во темињата на квадратчињата кои имаат плоштина 8.



687. Дадена е квадратна мрежа од 100 точки (цртеж десно). Колку различни квадрати со темиња во дадените 100 точки постојат. (На цртежот се прикажани 3 такви квадрати.)

688. Табела со димензии 6×14 е поделена на 84 единечни квадрати. На колку начини можеме да обоиме четири од единечните квадрати во плаво и два во жолто така што да нема обоени квадрати ниту во ист ред ниту во иста колона.

689. Правоаголна таблица 29×41 е пополнета со природните бројеви 1, 2, ..., $29\cdot41$ прво така што се во првиот ред, пошнувајќи од долниот лев агол , по ред запишани броевите 1, 2,... , 29, во вториот ред броевите 30, 31,..., 58 итн. Потиоа истата таблица е пополнета со истите броеви така што во првата колони почнувајќи од долни9от лев агол последователно се запишани броевите 1, 2, ..., 41, во втората колона броевите 42, 43, ..., 82 итн. Колку полиња има во таблицата во кои при двете пополнувања бил запишан ист број?

690. Дадена е табела 100×100 во која последователно во првата колона се запишани броевите од 1 до 100, во втората колона се запишани броевите од 101 до 200, ..., во стотата колона се запишани броевите од 9901 до 10000. Докажи дека за секој 7×7 квадрат кој може да се воочи во оваа табела збирот на броевите кои се во него запишани е делив со 49.

691. Павел и Јован влегле во училницата и виделе дека на таблата е напишано:

МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Тие се договориле да ја играат следнава игра. Наизменично ќе бришат букви од записот, при што во еден потег може да се избришат само неколку исти букви (барем една и не мора сите исти букви да се избришат). Победник е играчот кој ќе ја избрише последната буква. Кој играч има победничка стратегија?

692. На 2018 картончиња се запишани целите броеви од 0 до 2017. Потоа картончињата во произволен поредок се наредени на маса во еден ред.

Играчите A и B наизменично земаат по едно картонче, но притоа може да земат само едно од двете крајни картончиња во редот. Играта ја почнува играчот A. Играта се завршува кога сите картончиња се земени, а победник е играчот кај кого збирот на броевите запишани на картончињата кои ги зел е поголем. Докажи дека еден од играчите има победничка стратегија. Кој е тој играч?

693. Нека n е парен број. Двајца играчи играат игра така што наизменично на таблата запишуваат по еден број од множеството $\{6,7,8,9\}$, се додека на таблата не бидат запишани n броја. Во играта победува вториот играч ако збирот на сите запишани броеви е делив со 9, а во спротивно победува првиотиграч. Кој играч има победничка стратегија ако:
а) $n=12$, б) $n=14$?

694. Трочлено жири ги оценува писмените работи по мајчин јазик на десет ученици. Секој член на жирито ги рангира учениците, но нема право на два или повеќе ученика да му додели ист ранг. Секој член на жирито на прворангираниот му доделува 10 поени, на второрангираниот му доделува 9 поени, на треторангираниот му доделува 8 поени итн. на десетторангираниот му доделува 1 поен. Потоа за секој ученик се наоѓа збирот на поените додделени од тројцата членови на жирито. Учениците со најголем вкупен број поени добиваат награда. Кој е најголемиот можен број наградени ученици?

695. Во некои полиња на 12×5 табла е поставен по еден жетон така што секој 2×2 квадрат на таблата содржи барем два жетони. Определи го најмалиот број жетони кои може да се поставени на таблата.

IV МЕЃУНАРОДНИ НАТПРЕВАРИ

IV.1. АЛГЕБРА

1. Избрани се два различни трицифрени природни броја, а потоа за секој од нив е пресметан збирот на сите пет броја кои се добиваат со промена на редоследот на цифрите на тој број (на пример, ако еден од броевите е 707, тогаш $770+77+77+770+707=2401$ е соодветниот збир). Дали добиените резултати мора да се различни.

2. Определи ги последните четири цифри на точен квадрат на природен број, за кој се знае дека последните три од нив се еднакви.

3. За природниот број q ќе велиме дека е $K-$наследник на природниот број n ако постои природен број p таков што $n+p^2=q^2$. Нека A е множеството од сите природни броеви n кои имаат барем еден $K-$ наследник но ниту еден од $K-$наследниците на бројот n нема свој $K-$наследник. Докажи дека
$$A=\{7,12\}\cup\{8m+3\,|\,m\in\mathbb{N}_0\}\cup\{16m+4\,|\,m\in\mathbb{N}\}.$$

4. Со $p(n)$ да го означиме производот на сите цифри на бројот n. Определи ја вредноста на изразот
$$p(1001)+p(1002)+...+p(2010)+p(2011).$$

5. Нека n е природен број. Бројот A е запишан со $2n$ четворки и бројот B е запишан со n осумки. Докажи дека $A+2B+4$ е точен квадрат.

6. Ако $a^3+12a^2+49a+69=0$ и $b^3-9b^2+28b-31=0$, пресметај го $a+b$.

7. Докажи дека бојот $\underbrace{111...11}_{1997}\underbrace{22...22}_{1998}5$ е точен квадрат.

8. Нека a,b,c,x,y се реални броеви такви што
$$a^3+ax+y=0,\ b^3+bx+y=0 \text{ и } c^3+cx+y=0.$$

Ако броевите a,b,c се различни, докажи дека нивниот збир е еднаков на нула.

9. Нека x и y се позитивни реални броеви такви што

$$x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2000.$$

Докажи дека $x+y=10$.

10. Нека $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=k$. Изрази го со помош на k изразот

$$E(x,y)=\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8}-\frac{x^8-y^8}{x^8+y^8}.$$

11. Нека a е позитивен реален број таков што $a^3=6(a+1)$. Докажи дка равенката $x^2+ax+a^2-6=0$ нема реални решенија.

12. Определи ги сите реални броеви a,b,c,d такви што

$$\begin{cases} a+b+c+d=20 \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=150. \end{cases}$$

13. Нека x,y,z се реални броевви такви што $0<x,y,z<1$ и

$$xyz=(1-x)(1-y)(1-z).$$

Докажи дека најмалку еден од броевите $(1-x)y, (1-y)z, (1-z)x$ е поголем или еднаков на $\frac{1}{4}$.

14. За реалните броеви a,b,c,d важи

$$abc-d=1, bcd-a=2, cda-b=3, dab-c=-6.$$

Докажи дека $a+b+c+d\neq 0$.

15. Докажи го неравенството

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{2015^3}<\frac{5}{4}.$$

16. Нека $a,b,c\in(0,1)$. Докажи дека

$$a+b+c+2abc>ab+bc+ca+2\sqrt{abc}.$$

17. Нека x и y се реални броеви такви што $x+y\geq 0$. Докажи дека

$$(x^2+y^2)^3 \geq 32(x^3+y^3)(xy-x-y).$$

18. Нека $a,b,c,d,e \in [0,1]$. Докажи дека

$$(1+a+b+c+d+e)^2 \geq 4(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2).$$

Кога важи знак за равенство?

19. Докажи дека за позитивни реални броеви x,y,z важи неравенството:

$$(x^2y+y^2z+z^2x)(xy^2+yz^2+zx^2)(xy+yz+zx) \geq 3(x+y+z)^2x^2y^2z^2.$$

20. Нека a,b,c,d се реални броеви поголеми од 1 и x,y се реални броеви такви што

$$a^x+b^y=(a^2+b^2)^x \text{ и } c^x+d^y=2^y(cd)^{\frac{y}{2}}.$$

Докажи дека $x<y$.

21. Докажи дека за произволни позитивни реални броеви a,b,c важи неравенството

$$\frac{\sqrt{ab}}{a+b+2c}+\frac{\sqrt{bc}}{2a+b+c}+\frac{\sqrt{ca}}{a+2b+c} \leq \frac{3}{4}.$$

22. Докажи дека за пзотивини реални броеви a,b и c е исполнето неравенството

$$\frac{2a}{\sqrt{3a+b}}+\frac{2b}{\sqrt{3b+c}}+\frac{2c}{\sqrt{3c+a}} \leq \sqrt{3(a+b+c)}.$$

23. За позитивните реални броеви x,y,z важи $xyz=1$. Докажи дека:

$$\frac{2}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{2}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{2}{(z+1)^2+x^2+1} \leq 1.$$

24. Докажи дека ако m,n,p и q се позитивни броеви, тогаш

$$\frac{m}{t+n+p+q}+\frac{n}{t+p+q+m}+\frac{p}{t+q+m+n}+\frac{q}{t+m+n+p} \geq \frac{4}{5}, \text{ каде } t=\frac{m+n+p+q}{2}.$$

25. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,y,z такви што $x+y+z=1$ важи

$$\frac{x^2}{1+y}+\frac{y^2}{1+z}+\frac{z^2}{1+x} \leq 1.$$

26. Нека $x,y,z>-1$. Докажи дека

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\geq 2\,.$$

27. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажи дека
$$\frac{a^4+5b^4}{a(a+2b)}+\frac{b^4+5c^4}{b(b+2c)}+\frac{c^4+5a^4}{c(c+2a)}\geq 1-ab-bc-ca\,.$$

28. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Определи ја најмалата вредност на изразот
$$S=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\frac{1}{\sqrt{abc}}\,.$$

29. Нека a,b,c се реални броеви такви што $a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3$. Определи ја најголемата можна вредност на $a+b+c$.

30. За позитивните броеви a,b,c важи $a+b+c=k$. Определи ја најмалата вредност на изразот $M=\frac{b^2}{\sqrt{ka+bc}}+\frac{a^2}{\sqrt{kc+ab}}+\frac{c^2}{\sqrt{kb+ca}}$.

31. За реалните броеви a,b,c,d,e,f важи $a+b+c+d+e+f=20$ и
$$(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2+(d-2)^2+(e-2)^2+(f-2)^2=24\,.$$
Определи ја најголемата можна вредност на бројот d .

32. Определи го најголемиот реален број M таков што
$$a^2+b^2+c^2+3abc\geq M(ab+bc+ca)$$
аа секои ненегативни реални броеви a,b,c такви што $a+b+c=4$.

IV.2. ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

33. Определи го најмалиот број делители кои во множеството природни броеви може да ги има број од видот $|2016^m-36^n|$, каде m и n се природни броеви.

34. Определи го најголемиот природен број k таков што постои број од видот $1!+2!+...+n!, (n\in\mathbb{N})$ чиј делител е бројот 3^k .

35. Определи го најмалиот природен број n таков што
$$3^k + n^k + (3n)^k + 2014^k$$
е точен квадрат за некој природен број k, но не е точен куб за ниту еден природен број k.

36. Определи ги сите природни броеви кои имаат 6 вистински делител, т.е. 6 делители без единицата и самиот број и збирот на тие делители е 14133.

37. Дали постои природен број n таков што вкупниот број делители на бројот $n!$ во множеството природни броеви е делив со 2019?

38. Нека $n_1, n_2, ..., n_{1998}$ се природни броеви такви што
$$n_1^2 + n_2^2 + ... + n_{1997}^2 = n_{1998}^2.$$
Докажи дека најмалку два од овие броеви се парни.

39. Определи ги сите природни броеви n такви што $n^2 + 3^n$ е точен квадрат на природен број.

40. Докажи дека за секој природен број n бројот $7^n - 1$ не е делив сио бројот $6^n - 1$.

41. Природните броеви x и y се такви што $3x + 4y$ и $4x + 3y$ се точни квадрати. Докажи дека x и y се деливи со 7.

42. Ако $n > 4$ е сложен број, тогаш $2n$ е делител на $(n-1)!$. Докажи!

43. За природниот број n ќе велиме дека е перфектен ако збирот на исте негови делители (вклучувајќи ги 1 и n) е еднаков на $2n$. Определи ги сите перфектни броеви n за кои $n-1$ и $n+1$ се прости броеви.

44. Докажи дека ако p е прост број, тогаш $7p + 3^p - 4$ не е точен квадрат.

45. Определи ги сите природни броеви n за кои важи $2n + 7 \mid n! - 1$.

46. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $2^{n+1}n + 1$ е точен квадрат.

47. Определи го најголемиот природен број n таков што n е делив со сите природни броеви чиј куб не е поголем од n.

48. Определи ги сите природни броеви m,n прости броеви p такви што бројот $\frac{5^m+2^n p}{5^m-2^n p}$ е точен квадрат.

49. За секој ненегативен цел број n дефинираме $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$. Определи го најголемиот заеднички делител на броевите A_0, A_1, A_2, $..., A_{1998}, A_{1999}$.

50. а) Определи ги сите прости броеви p,q,r такви што $3 \nmid p+q+r$ и $p+q+r$ и $pq+qr+rp+3$ се точни квадрати.

б) Дали постојат прости броеви p,q,r такви што $3 \mid p+q+r$ и $p+q+r$ и $pq+qr+rp+3$ се точни квадрати?

51. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$\frac{p}{q} - \frac{4}{r+1} = 1.$$

52. Определи ги сите трицифрени природни броеви $\overline{abc}$ такви што

$$\overline{abc} = abc(a+b+c).$$

53. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$a^3 + b^3 + c^3 = 2001.$$

54. Определи ги природните броеви a,b,c,d кои го задоволуваат равенството

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 13 \cdot 4^n, n \in \mathbb{N}.$$

55. а) Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2 + xy - 2y = 64.$$

б) Ако за некои $x, y \in \mathbb{N}$ бројот $M(x,y) = x^2 + xy - 2y$ е точен квадрат, тогаш бројот $x+y+2$ е сложен. Докажи!

56. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$25x^2y^2 + 10x^2y + 25xy^2 + x^2 + 30xy + 2y^2 + 5x + 7y + 6 = 0.$$

57. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$9(x^2+y^2+1)+2(3xy+2)=2005.$$

58. Во множеството природни бртоеви реши ја равенката
$$2^x-3^y5^z=1009.$$

59. Докажи дека равенката
$$2^a+4^b+5^c=2014^d$$
нема решение во множеството ненегативни цели броеви.

60. Во множеството природни броеви реши ја равенката $x^y=y^{x-y}$.

61. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката
$$2^a3^b+9=c^2.$$

IV.3. ГЕОМЕТРИЈА

62. Во внатрешноста на паралелограмот $ABCD$ е избрана точка P таква што $\measuredangle ADP=\measuredangle ABP$ и $\measuredangle DCP=30^\circ$. Определи го $\measuredangle DAP$.

63. Од подножјето D на висината CD во триаголникот ABC се повлечени нормали на BC и AC кои ги сечат соодветно во точките M и N. Нека $\measuredangle CAB=60^\circ$, $\measuredangle CBA=45^\circ$ и H е ортоцентар на $\triangle MNC$. АКо O е средината на CD, да се определи $\measuredangle COH$.

64. Даден е рамнокрак триаголник ABC со $\overline{AB}=\overline{AC}$ и $\measuredangle BAC<60^\circ$. Точките D и E припаѓаат на страната AC и се такви што $\overline{EB}=\overline{ED}$ и $\measuredangle ABD=\measuredangle CBE$. Нека O е пресечната точка меѓу внатрешните симетрали на аглите $\measuredangle BDC$ и $\measuredangle ACB$. Определи го $\measuredangle COD$.

65. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник со $\measuredangle DAC=\measuredangle BDC=36^\circ$, $\measuredangle CBD=18^\circ$ и $\measuredangle BAC=72^\circ$. Дијагоналите на четириаголникот се сечат во точката P. Определи го $\measuredangle APD$.

66. Во конвексен четриаголник $ABCD$ дијагоналите се ссчат во точката E и $\overline{BE}=\sqrt{2}\cdot\overline{ED}$, $\measuredangle BEC=45^\circ$. Нека F е подножјето на нормалата повлечена од A на BC и P е втората пресечна точка на опишаната кружница околу $\triangle BFD$ и отсечката DC. Определи го $\measuredangle APD$.

67. Даден е $\triangle ABC$. Нека $AA_1(A_1\in BC)$ и $BB_1(B_1\in AC)$ се внатрешните симетралите на аглите во темињата A и B, соодветно. Определи го односот $\measuredangle BAC:\measuredangle ABC:\measuredangle ACB$ ако $\measuredangle AA_1B_1=24^\circ$ и $\measuredangle BB_1A_1=18^\circ$.

68. Нека ABC е триаголник таков што $\measuredangle C=90^\circ$ и $\overline{CA}\neq\overline{CB}$. Нека CH е висината и CL е симетралата на внатрешниот агол.

а) Докажи дека ако точката $X\neq C$ припаѓа на правата CL тогаш $\measuredangle XAC\neq\measuredangle XBC$.

б) Докажи дека ако точката $Y\neq C$ припаѓа на правата CH тогаш $\measuredangle YAC\neq\measuredangle YBC$.

69. Нека M е произволна точка која припаѓа на отсечокот AD на симетралата на внатрешниот агол на триаголникот ABC ($D\in BC$). Правата која минува низ точката M и е паралелна со правата BC ја сече страната AB во точката N . Вторите пресечни точки на правите AM и CM со опишаната кружница околу триаголникот ABC да ги означиме со K и L, соодветно. Докажи дека точките K, N и L се колинеарни.

70. Во остроаголен триаголник ABC со по парови различни должини на страни, аголот при темето C е еднаков на 60°. Нека A' и B' се подножјата на висините повлечени од темињата A и B, соодветно, а T е тежиштето на $\triangle ABC$. Полуправите $A'T$ и $B'T$ ја сечат опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точките M и N, соодветно. Докажи дека $\overline{MN}=\overline{AB}$.

71. Даден е $\triangle ABC$ со прав агол во темето C. Нека D е подножјето на висината повлечена од темето C, а k е кружницата која ги допира отсечката BD во точката E, отсечката CD во точката F и опишаната кружница на $\triangle ABC$ во точката G.

а) Докажи дека точките A, F и G се колинеарни.

б) Изрази го радиусот на кружницата k во зависност од должините на страните на $\triangle ABC$.

72. Дијагоналите AD, BE, CF на тетивниот шестаголник $ABCDEF$ се сечат во точката S при што отсечките AB и CF се паралелни, а правите DE и CF се сечат во точката M. Нека N е точка таква што M е средина на отсечката SN. Докажи дека кружницата опишана околу триаголникот ADN минува низ средината на отсечката CF.

73. Во правоаголен триаголник ABC, $\overline{BC} > \overline{CA}$ на катетите BC и CA се земени соодветно точки M и N такви што $\overline{BM} = \overline{CA}$ и $\overline{AN} = \overline{CM}$. Определи го аголот меѓу правите BN и AM.

74. Точките M и N припаѓаат на страните BC и CD на квадратот $ABCD$ и $\measuredangle MAN = 45^\circ$. Кружницата опишана околу $ABCD$ ги сече AM и AN во точките P и Q. Докажи дека $MN \| PQ$.

75. Темињата на петаголникот $ABCDE$ припаѓаат на една кружница, а точките H_1, H_2, H_3, H_4 се ортоцентрите на $\triangle ABC, \triangle ABE, \triangle ACD, \triangle ADE$. Докажи дека четириаголникот формиран од ортоцентрите е квадрат ако и само ако $BE \| CD$ и растојанието меѓу овие две прави е еднакво на $\frac{\overline{BE}+\overline{CD}}{2}$.

76. Вписаната кружница k во $\triangle ABC$ со страни $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{CA} = b$ се допира до страните AB, BC, CA во точките C_1, A_1, B_1, соодветно. Точката K од k е дијаметрално спротивна на точката C_1, а $C_1A_1 \cap KB_1 = N$ и $C_1B_1 \cap KA_1 = M$. Изрази ја отсечката MN преку страните на триаголникот.

77. Определи ги сите триаголници со страни a, b, c и радиус на опишана кружница R за кои важи $R(b+c) = a\sqrt{bc}$.

78. Нека ABC е триаголни таков што $\overline{AB} = \overline{AC}$. Нека точката $D \in BC$ е таква што $\overline{BC} > \overline{BD} > \overline{DC} > 0$ и k_1, k_2 се кружницте опишани околу триаголниците ABD и ADC, соодветно. Нека BB' и CC' се дијаметри во двете кружници и нека M е средината на $B'C'$. Докажи дека плоштината на триаголникот MBC е константна, т.е. дека не звиси од изборот на точката D.

79. Полукруг со дијаметар EF е поставен на страната BC на $\triangle ABC$ така што ги допира страните AB и AC во точките Q и P, соодветно. Докажи дека пресечната точка K на правите EP и FQ припаѓа на висината повлечена од темето A во $\triangle ABC$.

80. Нека D,E,F се средините на лаците BC,CA,AB на опишаната кружница околу триаголникот ABC кои не ги содржат точките A,B,C, соодветно. Нека правата DE ги сече страните BC и CA во точките G и H, соодветно и нека M е средината на отсечката GH. Нека правата FD ги сече страните BC и AB во точките K и J, соодветно и нека N е средина на отсечката KJ.
а) Определи ги аглите на триаголникот DMN.
б) Докажи дека ако P е пресечната точка на правите AD и EF, тогаш центарот на опишаната кружница околу триаголникот DMN припаѓа на опишаната кружница околу триаголникот PMN.

81. Даден е рамнокрак триаголник ABC, $\overline{AC}=\overline{BC}$. Нека M е средината на AC и нека z е правата која минува низ C и е нормална на AB. Кружницата која минува низ точките B,C и M ја сече правата z во точките C и Q. Со помош на $m=\overline{CQ}$ изрази го радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABC.

82. Нека BAC е остроаголен триаголник впишан во кружница k. Тангентата во точката A на кружницата k ја сече правата BC во точката P. Нека M е средината на отсечката AP и R е втората пресечна точка на кружницата k со правата BM. Правата PR по втор пат ја сече кружницата k во точката S. Докажи дека правите AP и CS се паралелни.

83. Темињата A и B на рамностран триаголник ABC лежат на кружница k со радиус 1, а темето C е во внатрешноста на кружницата k. Точка D, различна од B, лежи на k и важи $\overline{AD}=\overline{AB}$. Правата DC по втор пат ја сече k во точката E. Определи ја должината на отсечката CE.

84. Даден е разностран $\triangle ABC$. Нека AL ($L\in BC$) и BK ($K\in AC$) се симетралите на аглите во темињата A и B, соодветно на $\triangle ABC$. Симе-

тралата на BK ја сече правата AL во точката M. Точката N припаѓа на правата BK и LN е паралелна на MK. Докажи дека $\overline{LN} = \overline{NA}$.

85. Точките D,E и F припаѓаат соодветно на страните AB,BC и CA на остроаголниот триаголник ABC и се такви што отсечките AE,BF и CD не се подолги од $\sqrt{3}\,cm$. Докажи дека плоштината на триаголникот ABC е помала или еднаква на $\sqrt{3}\,cm^2$.

86. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник таков што $\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{CD} = 1$, $\measuredangle ABC = \measuredangle DEA = 90^\circ$ и $\overline{BC} + \overline{DE} = 1$. Определи ја плоштината на овој петаголник.

87. Нека ABC е рамностран триаголник и D,E се точки од страните AB,AC соодветно. Ако DF,EF $(F \in AE, G \in AD)$ се симетралите на внатрешните агли на тиаголникот ADE, докажи дека збирот од плоштините на триаголниците DEF и DEG е помал или еднаков на плоштината на триаголникот ABC. Кога важи знак за равенство?

88. Нека D е точка на страната BC, различна од темињата, на рамностраниот триаголник ABC. Нека I е центарот на припишаната кружница на триаголникот ABD спротивен на страната AB и J е центарот на припишаната кружница на триаголникот ACD спротивен на страната AC. Нека E е втората пресечна точка на опишаните кружници околу триаголниците AIB и AJC. Докажи дека A е центар на впишаната кружница на триаголникот IEJ.

89. Четириаголникот $ABCD$ за кој $\measuredangle BAC > \measuredangle DCB$ е впишан во кружница со центар O. Ако $\measuredangle BOD = \measuredangle ADC = \alpha$, определи за кои вредности на α е исполнето неравенството $\overline{AB} < \overline{AD} + \overline{CD}$.

90. За даден триаголник ABC, R е радиусот на опишаната кружница, r е радиусот на впишаната кружница, a е најдолгата страна и h е најкусата висина во триаголникот. Докажи дека $\frac{R}{r} > \frac{a}{h}$.

91. Нека a,b,c се страните на $\triangle ABC$, r е радисусот на впишаната кружница и r_a,r_b,r_c се радиусите на припишаните бружници на $\triangle ABC$. Докажи дека

$$\frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \leq 2 \cdot \frac{\sqrt{r_a^2+r_b^2+r_c^2}}{r_a+r_b+r_c-3r}.$$

92. Нека ABC е триаголник и нека I е центар на впишаната кружница. Нека M и N се средините на страните AB и CA, соодветно. Отсечките BI и CI ја сечат MN во точките K и L, соодветно. Докажи дека $\overline{AI}+\overline{BI}+\overline{CI} > \overline{BC}+\overline{KL}$.

93. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник таков што $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{DE}$ и k е кржница со центар на страната AE која ги допира страните AB, BC, CD и DE во точките P, Q, R и S (различни од темињата на петаголникот), соодветно. Докажи дека правите PS и AE се паралелни.

94. Во рамнината се дадени n точки $A_1, A_2, ..., A_n$ меѓу кои нема три колинеарни и такви што искршената линија $A_1A_2A_3...A_n$ не се пресекува самата себе. Определи ја најголемата вредност на n.

95. Нека AB е тетива на кружницата Γ која не минува низ нејзиниот центар и нека M е средината на AB. Нека C е променлива точка на Γ различна од A и B и P е точката во која се сечат тангентата во точката A на опишаната кружница на $\triangle CAM$ и тангентата во точката B на опишаната кружница на $\triangle CBM$. Докажи дека сите прави CP минуваат низ една иста точка.

96. Складни кружници k_1 и k_2 се сечат во точките A и B. Нека P е произволна точка од лакот AB на кружницата k_2 кој е содржан во внатрешноста на кружницата k_1 и нека правата AP по втор пат ја сече k_1 во точката C, а полуправата CB по втор пат ја сече k_2 во точката D. Нека симетралата на $\measuredangle CAD$ по втор пат ги сече кружниците k_1 и k_2 во точките E и F, соодветно, а полуправата FB по втор пат ја сече k_1 во точката Q. Ако X е една од пресечните точки на кружниците опишани околу триаголниците CDP и FQP, докажи дека тиаголникот CFX е рамностран.

IV.4. КОМБИНАТОРИКА

97. Нека $S=\{1,2,...,2012\}$. Множеството S е поделено (разбиено) на две дисјунктни множества A и B такви што не постоојат $x\in A$ и $y\in B$ за кои збирот $x+y$ е степен на бројот 2. Определи го бројот на сите вакви поделби (разбивања).

98. Даден е конвексен $n-$аголник, $n\geq 4$. Разгледуваме произволна поделба на $n-$аголникот на триаголници чии темиња се темињатаа на $n-$аголникот и кои немаат заеднички внатрешни точки. Триаголниците кои со $n-$аголникот имаат две заеднички страни ги боиме во црно, триаголниците кои со $n-$аголникот имаат една заедничка страна ги боиме во црвено и триаголниците кои со $n-$аголникот немаат заеднички страни ги боиме во бело. Докажи дека има два црни триаголници повеќе од бели.

99. На една прослава имало 2007 луѓе. За секои 1003 од присутните луѓе на прославата меѓу преостанатите луѓе постои барем еден човек кој се познава со секој од овие 1003 луѓе. Докажи дека на прославата постои човек кој се познава со сите присутни луѓе.

100. Околу тркалезна маса седат 50 мажи и 50 жени. Докажи дека можат да се најдат две лица од различен пол меѓу кои седат точно две лица од различен пол.

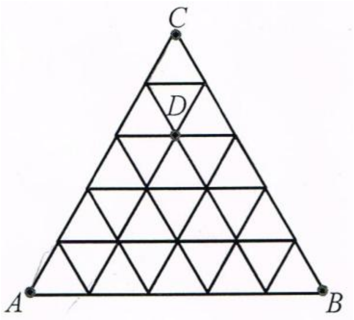
101. Дали постјат 16 трицифрени броеви запишани само со три цифри такви што при делење со 16 сите броеви даваат различни остатоци?

102. Во неколку кесиња се ставени 2003 денари, а кесињата се ставени во неколку џебови. Познато е дека бројот на сите кесиња е поголем од бројот на денарите во секој џеб. Дали е точно дека бројот на сите џебови е поголем од бројот на денарите во некое кесе?

103. Жаба се наоѓа во координатниот почеток на Декартов координатен систем. Секоја секунда жабата скока хоризонтално или вертикално во некоја од четирите соседни точки чии координати се целобројни. Определи го бројот на различните точки вокои жабата може да се најде по 2015 секунди

104. Правоаголник 9×1 е поделен на единечни квадрати. Во него треба од долниот лев до горниот десен агол да се нацрта искршена линија која самата не се сече и која минува низ сите 20 темиња и од нив се дели на 19 отсечки. Колку такви линии има?

105. Рамностранб триаголник ABC со страна n со помош на прави кои се паралелни на неговите страни е поделен на n^2 рамнострани триаголници со страна 1. Во темињата на единечните триаголници се поставени броеви. Во еден чекор се зголемуваат или се намалуваат за 1 броевите во темињата на ромб формиран од два единечни триаголника со заедничка страна. На почетокот во темињата A,B,C и D се поставени единици, а во секое од останатите темиња е поставена 0. Дали е можно со конечно многу повторување на опишаниот чекор броевите во сите темиња на единечните триаголници да станат нули?



106. На тениски турнир учествуваа $2n$ момчиња и n девојчиња. Во тенисот нема нерешени натпревари. Секој играч одигра по еден натпревар со секој друг играч. Момчињата освоија $\frac{7}{5}$ пати повеќе поени од девојчињата. Определи го бројот n.

107. Нека S е квадрат со страна 20 и нека M е множеството точки формирано од темињата на S и други 1999 точки кои се во внатрешноста на S. Докажи дека постои триаголник чии темиња се во M и таков што неговата плоштина е помала или еднаква на $\frac{1}{10}$.

108. Нека N е конвексен многуагоник со 1415 темиња и периметар 2001. Докажи дека може да се најдат 3 темиња од N кои формираат триаголник со плоштина помала од 1.

109. Докажи дека:

а) во рамнината постојат пет точки такви што меѓу сите триаголници со темиња во овие точки има 8 правоаголни.

б) во рамноната постојат 64 точки така што меѓу сите триаголници со темиња во овие точки има најмалку 2005 правоаголни триаголници.

110. Во рамнината се дадени 50 точки такви што меѓу нив нема три колинеарни. Секоја од овие точки е обоена во една од четири дадени бои. Докажи дека постојат најмалку 130 триаголници чии темиња се меѓу дадените точки и се обоени со една иста боја.

111. Во рамнината се дадени 2009 различни точки обоени во плава или црвена боја и такви што на секој круг со плав центар и радиус 1 лежат две црвени точки. Определи го најголемиот можен број од плави точки.

112. На таблата е запишан бројот 1. Во секој чекор Горјан го брише последниот запишан број n и на негово место запишува еден од броевите $n^2, (n+1)^2, (n+2)^2$. Дали со помош на оваа операција по конечен број чекори може да се добие број кој е делив со 2015?

113. Двајца играчи A и B играат игра со топка и n кутии поставени во темињата на правилен $n-$аголник, $n \in \mathbb{N}$. На почетокот играчот A ја крие во некоја од кутиите топката. Во секој чекор играчот B избира кутија, по што играчот A го кажува растојанието од топката до зибраната кутија и топката ја преместува во соседна кутија. Ако B ја најде топката тој победува. Определи го најмалиот број чекори за кои B може да гарантира дека ќе победи.

114. Двајца играчи играат на табла со димензии 2018×2018. Тие наизменично поставуваат по еден жетон на полињата на таблата. Првиот има за цел да постави свои жетони на:
а) четири, б) пет
последователни полиња во еден ред или една колона. Дали вториот играч може во тоа да го оневозможи?

115. На шаховската 8×8 табла произволно се означени 15 полиња. Да ги разгледаме сите отсечки со крајни точки во центрите на означените полиња. Докажи дека меѓу овие отсечки постојат четири со еднакви должини.

116. Во две соседни полиња (со димензии 1×1) на квадратна табла со димензии 10×10 се наоѓа богатство. Павел треба да погоди кои се тие

полиња. Со еден потез тој може да избере некое поле на таблата и да добие информација дали во него има богатство или не. Определи го најмалиот број потези кој, при соодветна стратегија, е доволен Павел со сигурност да ги определи полињата во кои се наоѓа богатството. (Соседни се полињата кои имаат заедничка страна.)

117. Полињата на табела со димензии 3×3 се пополнети со броевите 1 и -1. Во секој чекор истовремено во секое поле на табелата се впишува производот на сите броеви кои се во полињата кои со тоа поле имаат заедничка страна. Дали, независно од тоа кои полиња на почетокот биле запишани во табелата, со оваа постапка може да се добие во сите полиња од табелата да е запишан бројот 1?

118. Фигурата составена од четири единечни квадрати при што секој квадрат има заедничка страна со барем еден од преостанатите квадрати ја нарекуваме тетрамино. За две тетрамина сметаме дека се различни ако едното од другото не може да се добие со симетрија и/или ротација.
а) Колку различни тетрамина постојат?
б) Дали правоаголник со димензии 4×7 може да се покрие со тетрамина кои не се преклопуваат и така што секое тетрамино ќе се употреби најмалку еднаш?

119. Квадрат 2×2 од које отстрането едно поле се нарекува г-тримино. Од четвртиот редн на 7×7 квадрат се отстранети дел од полињата. Остатокот од квадратот е расечен на г-тримина. Определи го бројот и местата на отстранетите полиња.

120. Квадрат 4×4 е поделен на 16 единечни квадрати, во секој од кои е запишана нула или единица. Во еден чекор се избира ред или колона на квадратот и се менуваат броевите во избраниот или колона (нулите стануваат единици, а единиците стануваат нули). Квадратот го нарекуваме занулен, ако бројот на нулите во него не може да се намали. Бројот на нулите во еден занулен квадрат се нарекува степен на квадратот. Определи ги можните вредности на степенот на квадратот.

121. Квадрат $n\times n$ е поделен на n^2 единечни полиња и во секое поле е поставен по еден жетон. Во даден момент жетоните истовремено се преместуваат во соседните полиња. (Две полиња се соседни ако имаат

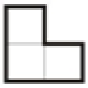
заедничка страна.) Во едно поле може да има повеќе од еден жетон. Определи го најголемиот и најмалиот можен број празни полиња по преместувањето ако:

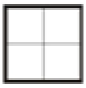
а) $n=5$, б) $n=6$, в) $n=7$.

122. Дали може 2003×2003 шаховска табла да се покрие без преклопување со 1×2 домина поставен хоризонтално и 1×3 тримина поставени вертикално?

123. Дадена е $2n\times 2n$ табла. Од $i-$тиоs ред на таблата ги отстрануваме централните $2(i-1)$ единечни квадратчиња. Определи го максималниот број правоаголници со димензии 2×1 и 1×2 кои можат да се постават на добиената фигура. (Правоагониците не се препокриваат и не излегуваат надвор од таблата.)

124. Табела со димензии 4×4 е поделена на 16 единечни бели квадратчиња. За две квадратчиња велиме дека се соседни ако имаат заедничка страна. Во еден потег избираме квадратче и ги пребојуваме неговите соседни квадратчиња, белите во црни и црните во бели. По точно n потези сите 16 квадратчиња се црни. Определи ги сите вредности на n.





125. Правоаголник со димензии 9×7 е поделен на единечни квадрати и е покриен со $L-$тримина и квадратни тетрамина (види ги цртежите десно). (Триминото може повеќекратно да се врти за агол од 90°). Нека $n\geq 0$ е бројот на квадратните тетрамина кои се искористени при покривањето. Определи ги сите вредности на n.

126. На масата има жетони од 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000 и 5000 апоени (бројот на жетоните од секоја вредност може да биде било кој природен број или нула). Киро и Рампо ја играат следнава игра: со еден потез играчот може да го земе било кој жетон со вредност поголема од 1 и да го замени со жетони со помали вредности во еднаква вкупна вредност. Киро почнува прв. Губи играчот кој не може да повлече потез. Кој има победничка стратегија?

ЛИТЕРАТУРА

1. Andrić, V. Pripremni zadaci za matematićka takmićenja, DM SRBIJA, Beograd, 1991
2. Andrić, V.; Ilić, V.; Lazarević, B.; Tomić, I.: Primpremni zadaci za matematička takmičenja za učenike osnovnih škola, DMS, Beograd, 1988
3. Arslanagić, Š.: Matematika za nadarene, Riječ, Sarajevo, 2004
4. Ilić, N. V. Odabrani zadaci sa matematičkih takmičenja 5. i 6. razred, DMS, Beograd, 1991
5. Kostić, Z. K.: Između igre i matematike, Tehnička knjiga, Beograd, 1963
6. Stojanović, V.: *Matematiskop* 2, Naučna knjiga, Beograd, 1985
7. Stojanović, V.: Vodić za šampione (pripreme takmičenja za IV, V i VI razred), Matematiskop, Beograd, 1999
8. Stojanović, V.; Zolić, A.: *Savezna takmičenja iz matematike* (*osnovne škole*), DMS, Beograd, 1991
9. Tošić, R. Invarijante – varijacije na temu, ALEF, Novi Sad, 1996
10. Tošić, R.: Rešeni zadaci iz matematike za mlade matematičare, Naučna knjiga, Beograd, 1990
11. Tošić, R.; Vukoslavčević, V.: Elementi teorije brojeva, Alef, Novi sad, 1995
12. Zbirka zadataka sa matematičkih takmičenja učenika osnovnih škola Srbija u 1993 godini, DMS, Valjevo, 1993
13. Zolić, A.: Zbirka *rešenih konkursnih zadataka*, Matematički list, Beograd, 1990
14. Андрић, В. Математика (приручник за припремање за такмичење ученика основних школа од IV разред VIII), Круг, Београд, 2006
15. Андрић, В.: Математика X (приручник за припремање за такмичење ученика основних школа од IV до VIII разред), Круг, Београд, 1996
16. Андрић, В.; Ђорић, М.; Јовчић, М.; Љубић, Д.; Петровић, Љ.; Стојановић, В.: 1000 задатака са математичких такмичења ученика основних школа 1987-1996. године, ДМС, Београд, 1997
17. Аневска, К. Логички парадокси, Нумерус, Скоје, 2014

18. Аневска, К. Покривање на шаховска табла, Нумерус, Скопје, 2014
19. Аневска, К., Главче, М. Мериме и споредуваме тежини I, Нумерус, Скопје, 2017
20. Аневска, К., Главче, М. Мериме и споредуваме тежини II, Нумерус, Скопје, 2017
21. Аневска, К., Малчески, Р.: Конгруенции во множеството на целите броеви II, Нумерус, Скопје, 2012
22. Аневска, К., Малчески, С. Геометриско пресметување на збирови, Нумерус, 2012, Скопје
23. Антонов, Н.П. и др.: Сборник задач по елементарној математике, Москва, 1961
24. Банков, К. Дали размислувате со здрав разум, Нумерус, Скопје
25. Будуров, С.; Серафимов, Д.: *Математически олимпиади* 2, Народна просвета, София, 1980
26. Василевска, Д. Немојте да се излажете, Хероновата формула помага, Нумерус, Скопје
27. Главче, М. Пресметуваме збирови, Нумерус, Скопје, 2016
28. Главче, М., Анѓелкоска, В. Магични квадрати и магична коцка, Нумерус, 2013
29. Граврилов, Ј.; Давидов, Л.: Делимост на числата, Народна просвета, София, 1977
30. Гроздев, С. Да побараме она што не се менува, Нумерус, Скопје
31. Гроздев, С. Подготовка за Европейско кенгуру. СМБ, София, 2005
32. Гроздев, С. Три задачи на шаховска табла, Нумерус, Скопје
33. Гроздев, С., Аневска, К. Боиме броеви, Нумерус, Скопје, 2017
34. Гроздев, С., Малчески, А. Малку математика на шаховска табла I, Нумерус, 2016
35. Гроздев, С., Малчески, А. Малку математика на шаховска табла II, Нумерус, 2017
36. Група аутора 1000 задатака са математичких такмичења, ДМС, Београд, 2006
37. Група аутора: Припремни задаци за математичка такмичења, ДМС, Ниш, 1998
38. Дојчев, С. Дали е можно? Дали постои?, Нумерус, Скопје
39. Дојчев, С. Кој број е поголем?, Нумерус, Скопје
40. Дуденков, С.; Чакьрян, К.: Задачи по теория на числата, Регалия 6, София, 1999

41. Златилов, В.; Тонова, Т.; Цветкова, И.; Пендалиева, В.: Математическа читанка (4 клас), Труд & прозорец, София, 2000
42. Зубелевич, Г. И.: *Сборник задач московских математических олимпиад*, Просвещение, Москва, 1967
43. Stojanović, V.: Matematiskop 2, Naučna kniga, Beograd, 1985
44. Stojanović, V.; Zolić, A.: Savezna takmičenja iz matematike (osnovne škole), DM Srbija, Beograd, 1991
45. Јанев, И. И броењето не е лесно, Нумерус, Скопје
46. Јанев, И. Пак броење, Нумерус, Скопје
47. Јанев, И., Мишевски, К,: Десет години републички натпревари по математика (основни училишта), Нумерус, Скопје, 1985
48. Косев, К.: Сборник от задачи по математика за изявени ученици в 5 клас, Модул, София, 1994
49. Лазаревић, Б.: Припремни задаци за математичка такмичења за ученике IV разреда основне школе, ДМС, Београд, 1990
50. Лесов, Х. Принцип на Дирихле, Нумерус, Скопје
51. Лукарески, М. Боиме и пребојуваме фигури, Нумерус, Скопје
52. Малчески, Р. Две задачи за правилен шестаголник, Нумерус, Скопје, 2015
53. Малчески, Р. Една задача повеќе начини на решавање, Сигма, Скопје, 2001
54. Малчески, Р. И ова е лесно – алгоритам за решавање задачи со претурање, Математика+, София, 2015
55. Малчески, Р. Идентитетот на Софија Жермен, Нумерус, Скопје, 2005
56. Малчески, Р. Историјата е добра учителка, Нумерус, Скопје, 2013
57. Малчески, Р. Кралот Артур и тркалезната маса, Нумерус, Скопје, 2012
58. Малчески, Р. Линеарна Диофантова равенка, Нумерус, Скопје, 2012
59. Малчески, Р. Математички игри 1,Нумерус, Скопје, 1994
60. Малчески, Р. Математички игри 2, Нумерус, Скопје, 1994
61. Малчески, Р. Математички игри 3, Нумерус, Скопје, 1994
62. Малчески, Р. Математички игри 4, Нумерус, Скопје, 1994
63. Малчески, Р. Метод на инваријанти 1, Нумерус, Скопје, 2005
64. Малчески, Р. Метод на инваријанти 2, Нумерус, Скопје, 2005
65. Малчески, Р. Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје, 2004
66. Малчески, Р. Покривање рамностран триаголник со рамнострани триаголници, Математика+, София, 2015

67. Малчески, Р. Пресметуваме периметри и плоштини, Нумерус, Скопје, 2017
68. Малчески, Р. Решавање задачи со Венови дијаграми, Нумерус, Скопје, 2003
69. Малчески, Р. Стрелките на часовникот се движат, па што, Нумерус, Скопје, 1995
70. Малчески, Р., Аневска, К.: Конгруенции во множеството на целите броеви I, Нумерус, Скопје, 2012
71. Малчески, Р., Главче, М. Решаваме бројни ребуси, Нумерус, Скопје, 2017
72. Малчески, Р., Малчески, А. Ајде да размислуваме правилно, Нумерус, Скопје, 2017
73. Малчески, Р.: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002
74. Малчески, Р.: Линеарна Диофантова равенка, Нумерус, Скопје, 2012
75. Младеновиќ, П. Правила на еднаков број, збир и производ, Нумерус, Скопје
76. Младеновиќ, П. Правила на еднаков број, збир и производ, Нумерус, Скопје
77. Муминагиќ, А., Карстенсен, Ј. Од страниците на забавната математика, Нумерус, Скопје
78. Муминагиќ, А., Сведрец, Р. Кои броеви недостасуваат, Нумерус, Скопје
79. Раковска, Д., Тонов, И. и др. Математически състезания 4-7 клас, Регалия 6, София, 1993
80. Сивашински, И. Х.: *Задачи по математика за изванкласна работа,* Просвета, Москва, 1968
81. Списание Нумерус, СММ, Скопје, 1975-2019
82. Србиноска, Н. Повеќе начини на решавање на една задача, Нумерус, Скопје
83. Тренчевски, К. За младите логичари, Нумерус, Скопје
84. Тренчевски, К.; Малчески, Р.; Димовски, Д.: Занимлива математика, МММ, Скопје, 1994
85. Христова, М.; Витанов, Т.; Миланова, Д.; Лозанов, Ч.: Клуб математика за всеки (5. клас), Анубис, София, 1998
86. Цофман, Ј. Користење табели броеви за одредување на збировите на елементите на некои низи природни броеви, Нумерус, Скопје
87. Шаркова, И. Последните цифри, Нумерус, Скопје