

## STUDENTSKA RUBRIKA

 $p$ -norme na  $\mathbb{R}^2$ , kružnice  $S_p$  i brojevi  $\pi_p$ 

LJILJANA ARAMBAŠIĆ\*

IVONA ZAVIŠIĆ†

**Sažetak.** Omjer opsega i promjera kružnice je konstantan i jednak je broju  $\pi = 3.14159\dots$ . Pritom podrazumijevamo da smo opseg i promjer kružnice računali s obzirom na uobičajenu euklidsku metriku. Umjesto nje, možemo promatrati i neke druge metrike na  $\mathbb{R}^2$ . Promatramo li metrike  $d_p$ , inducirane  $p$ -normama, omjer opsega i promjera će i dalje biti konstantan, no njegova vrijednost će se promijeniti. U ovom radu razmatramo  $p$ -norme i metrike  $d_p$  na  $\mathbb{R}^2$ , te kružnice  $S_p$  i brojeve  $\pi_p$  s obzirom na ove  $p$ -norme.

**Ključne riječi:** norma,  $p$ -norma, metrika, kružnica, broj  $\pi$

$p$ -norms on  $\mathbb{R}^2$ ,  $S_p$  circles and  $\pi_p$  numbers

**Abstract.** The ratio of the circumference of a circle to its diameter is constant and its value is the number  $\pi = 3.14159\dots$ . Here we understand that the circumference and the diameter are calculated with respect to the usual euclidean metric. Instead, we can equip  $\mathbb{R}^2$  with some other metric. Choosing the metric  $d_p$ , induced by the  $p$ -norm, the ratio of the circumference to the diameter will also be constant, but its value will be changed. In this paper we discuss  $p$ -norms and metrics  $d_p$ , the circles  $S_p$  and the numbers  $\pi_p$  with respect to these norms.

**Key words:** norm,  $p$ -norm, metric, sphere, number  $\pi$

## 1. Uvod

Norme na  $\mathbb{R}^2$  su realne funkcije na  $\mathbb{R}^2$  koje posjeduju određena svojstva. Važnu klasu takvih funkcija čine  $p$ -norme o kojima diskutiramo u ovom radu.  $p$ -norme možemo definirati za svaki realan broj  $p \geq 1$ , te za  $p = \infty$ . Pritom je 2-norma upravo standardna euklidska norma, 1-norma je poznata pod nazivom "taxicab" norma, a  $\infty$ -normu obično nazivamo max-norma. Neke relacije među ovim normama dokazujemo u teoremu 2 i propoziciji 3.

Kako svaka norma definira udaljenost (metriku), uvođenjem  $p$ -normi dobili smo razne načine za računanje udaljenosti između dviju točaka. Budući da je kružnica skup točaka koje su jednako udaljene od neke fiksne točke, to će njen oblik ovisiti o

\*PMF-Matematički odjel, Bijenička cesta 30, Zagreb, e-mail: arambas@math.hr

†Nadbiskupska klasična gimnazija, Voćarska 106, Zagreb, e-mail: izavisic@nkg-zagreb.hr

normi u kojoj računamo, pa će, na primjer, kružnice s obzirom na 1-normu i max-normu imati oblik kvadrata. Kao i u euklidskoj geometriji, omjer opsega i promjera kružnice bit će konstantan u svim  $p$ -normama. Taj omjer, kojeg označavamo s  $\pi_p$ , generalizira broj  $\pi$  i u posljednje vrijeme je proučavan u mnogim radovima ([2, 3, 4]).

## 2. $p$ -norme

Navedimo prvo preciznu definiciju norme.

**Definicija 1.** Realna funkcija  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  naziva se norma na  $\mathbb{R}^2$  ako zadovoljava sljedeća svojstva:

1.  $\|(x, y)\| \geq 0$ ,
2.  $\|(x, y)\| = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$ ,
3.  $\|(x, y) + (u, v)\| \leq \|(x, y)\| + \|(u, v)\|$ ,
4.  $\|c(x, y)\| = |c|\|(x, y)\|$ ,

za sve  $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$  i sve  $c \in \mathbb{R}$ . Zadajući neku normu na  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^2$  postaje normirani prostor.

Svima dobro poznati primjer norme na  $\mathbb{R}^2$  je euklidska norma koja predstavlja duljinu dužine čije su krajnje točke  $(0, 0)$  i  $(x, y)$ , tj.

$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ova norma je poseban slučaj  $p$ -normi.

**Definicija 2.** Za svaki realni broj  $p$ ,  $p \geq 1$ , definiramo

$$\|(x, y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

Funkciju  $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  nazivamo  $p$ -normom na  $\mathbb{R}^2$ .

Da se zaista radi o normama znat ćemo nakon što provjerimo da ove funkcije zadovoljavaju uvjete (1)-(4) iz definicije norme. Svojstva (1), (2) i (4) se lako provjere, dok je provjera trećeg svojstva, poznatog kao *nejednakost trokuta*, nešto teža. Tu ćemo koristiti Youngovu nejednakost: za sve  $a, b \geq 0$  i  $p, q > 1$  takve da je  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  vrijedi

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (2)$$

Dokaz ove nejednakosti izostavljamo, a može se pronaći u [5], str. 78.

**Teorem 1.** Za svaki  $p \geq 1$  formulom (1) definirana je norma na  $\mathbb{R}^2$ .

**Dokaz.** Kako smo već spomenuli, jedino što je ostalo za dokazati je da za svaki  $p \geq 1$  vrijedi

$$\|(x, y) + (u, v)\|_p \leq \|(x, y)\|_p + \|(u, v)\|_p,$$

odnosno,

$$(|x + u|^p + |y + v|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}} + (|u|^p + |v|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad (3)$$

za sve  $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ .

Neka je  $p = 1$ . Iz  $|x + u| \leq |x| + |u|$  i  $|y + v| \leq |y| + |v|$  slijedi  $|x + u| + |y + v| \leq |x| + |y| + |u| + |v|$ , što je točno (3) za  $p = 1$ .

Neka je sada  $p > 1$ . U (2) ćemo uvrstiti specijalne izraze za  $a$  i  $b$ : prvo uzmemo  $a = \frac{|x|}{\|(x,y)\|_p}$  i  $b = \frac{|u|}{\|(u,v)\|_q}$ , a onda  $a = \frac{|y|}{\|(x,y)\|_p}$  i  $b = \frac{|v|}{\|(u,v)\|_q}$ . Tako dobivamo sljedeće dvije nejednakosti

$$\frac{|x|}{\|(x,y)\|_p} \frac{|u|}{\|(u,v)\|_q} \leq \frac{|x|^p}{p(\|(x,y)\|_p)^p} + \frac{|u|^q}{q(\|(u,v)\|_q)^q},$$

$$\frac{|y|}{\|(x,y)\|_p} \frac{|v|}{\|(u,v)\|_q} \leq \frac{|y|^p}{p(\|(x,y)\|_p)^p} + \frac{|v|^q}{q(\|(u,v)\|_q)^q}.$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti slijedi

$$\frac{|x||u| + |y||v|}{\|(x,y)\|_p \|(u,v)\|_q} \leq \frac{|x|^p + |y|^p}{p(\|(x,y)\|_p)^p} + \frac{|u|^q + |v|^q}{q(\|(u,v)\|_q)^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

to jest,

$$|x||u| + |y||v| \leq (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}} (|u|^q + |v|^q)^{\frac{1}{q}}, \quad (4)$$

za sve  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ . Posebno, uzmemo li  $(x + u)^{p-1}$  za  $u$ ,  $(y + v)^{p-1}$  za  $v$  u (4), te uvažavajući  $(p-1)q = p$ , dobivamo

$$|x||x + u|^{p-1} + |y||y + v|^{p-1} \leq (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}} (|x + u|^p + |y + v|^p)^{\frac{1}{q}}. \quad (5)$$

Zamjenom uloga  $x$  i  $u$ , te  $y$  i  $v$  u (5) dobivamo

$$|u||x + u|^{p-1} + |v||y + v|^{p-1} \leq (|u|^p + |v|^p)^{\frac{1}{p}} (|x + u|^p + |y + v|^p)^{\frac{1}{q}}. \quad (6)$$

Konačno, imamo

$$\begin{aligned} |x + u|^p + |y + v|^p &= |x + u||x + u|^{p-1} + |y + v||y + v|^{p-1} \\ &\leq (|x| + |u|)|x + u|^{p-1} + (|y| + |v|)|y + v|^{p-1} \\ &= (|x||x + u|^{p-1} + |y||y + v|^{p-1}) \\ &\quad + (|u||x + u|^{p-1} + |v||y + v|^{p-1}) \\ (\text{prema (5) i (6)}) &\leq (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}} (|x + u|^p + |y + v|^p)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + (|u|^p + |v|^p)^{\frac{1}{p}} (|x + u|^p + |y + v|^p)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

dakle,

$$|x + u|^p + |y + v|^p \leq \left( (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}} + (|u|^p + |v|^p)^{\frac{1}{p}} \right) (|x + u|^p + |y + v|^p)^{\frac{1}{q}},$$

pa dijeljenjem s drugim faktorom s desne strane slijedi (3).  $\square$

Još jedna norma na  $\mathbb{R}^2$  koja se često koristi je *max-norma*, a definirana je kao

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (7)$$

Max-normu smatramo posebnim slučajem  $p$ -normi, za  $p = \infty$ , a razlog za to opisu-jemo u sljedećoj tvrdnji.

**Teorem 2.** Formulom (7) definirana je norma na  $\mathbb{R}^2$  i za nju vrijedi

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|(x, y)\|_p = \|(x, y)\|_\infty, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (8)$$

**Dokaz.** Svojstva (1)-(4) iz definicije norme se lako provjere. Provjerimo formulu (8). Za  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  imamo

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \|(x, y)\|_p &= \lim_{p \rightarrow \infty} (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= \begin{cases} \lim_{p \rightarrow \infty} |x| \left(1 + \left|\frac{y}{x}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{ako je } |x| > |y|; \\ \lim_{p \rightarrow \infty} |x| \cdot 2^{\frac{1}{p}}, & \text{ako je } |x| = |y|; \\ \lim_{p \rightarrow \infty} |y| \left(\left|\frac{x}{y}\right|^p + 1\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{ako je } |x| < |y|. \end{cases} \end{aligned}$$

Pokažimo da u svakom od navedenih slučajeva dobivamo  $\|(x, y)\|_\infty$ .

Neka je  $|x| > |y|$ . Tada je  $\|(x, y)\|_\infty = |x|$ . Nadalje,  $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$  pa je  $\lim_{p \rightarrow \infty} \left|\frac{y}{x}\right|^p = 0$  i zato  $\lim_{p \rightarrow \infty} |x| \left(1 + \left|\frac{y}{x}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |x| = \|(x, y)\|_\infty$ .

Neka je  $|x| = |y|$ . Tada je  $\|(x, y)\|_\infty = |x| = |y|$ , pa je  $\lim_{p \rightarrow \infty} |x| 2^{\frac{1}{p}} = |x| \lim_{p \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{p}} = |x| = \|(x, y)\|_\infty$ .

Ako je  $|x| < |y|$ , tada je  $\lim_{p \rightarrow \infty} |y| \left(\left|\frac{x}{y}\right|^p + 1\right)^{\frac{1}{p}} = |y| = \|(x, y)\|_\infty$ .  $\square$

Neka su  $T_1 = (x_1, y_1)$  i  $T_2 = (x_2, y_2)$  neke dvije točke ravnine. Udaljenost između  $T_1$  i  $T_2$  s obzirom na normu  $\|\cdot\|$  računa se kao

$$d(T_1, T_2) = \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\|.$$

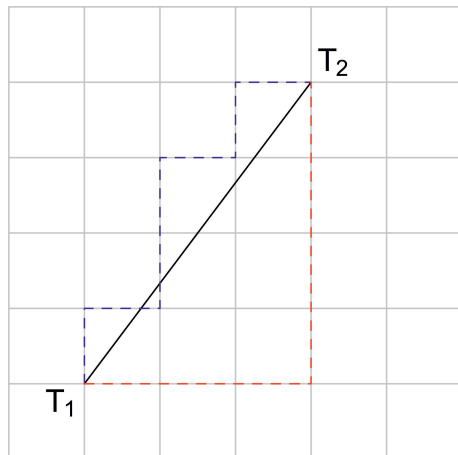
Funkciju  $d$  nazivamo *udaljenošću* ili *metrikom* induciranom normom  $\|\cdot\|$ . Prema tome, udaljenost s obzirom na  $p$ -normu dana je sa

$$d_p(T_1, T_2) = (|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p)^{\frac{1}{p}}. \quad (9)$$

Tako je, na primjer, za  $T_1 = (2, -3)$  i  $T_2 = (5, 1)$

$$\begin{aligned} d_1(T_1, T_2) &= |2 - 5| + |-3 - 1| = 7, \\ d_2(T_1, T_2) &= \sqrt{|2 - 5|^2 + |-3 - 1|^2} = 5, \\ d_\infty(T_1, T_2) &= \max\{|2 - 5|, |-3 - 1|\} = 4. \end{aligned}$$

Ako nacrtamo točke  $T_1$  i  $T_2$  u koordinatnom sustavu, tada je euklidska udaljenost  $d_2(T_1, T_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$  jednaka duljini dužine  $\overline{T_1 T_2}$ , dok je  $d_1(T_1, T_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$  duljina iscrtanih putova od  $T_1$  do  $T_2$ . Uočimo da samo jedan put od  $T_1$  do  $T_2$  ima duljinu  $d_2(T_1, T_2)$  i to je najkraći put između ove dvije točke, dok putova od  $T_1$  do  $T_2$  koji imaju duljinu  $d_1(T_1, T_2)$  ima više.



Iako smo naviknuti udaljenost između dviju točaka računati kao duljinu najkraćeg puta, ponekad nam je korisniji neki drugi način računanja udaljenosti. Na primjer, pretpostavimo da ulice u nekom gradu čine jednu pravokutnu mrežu. Želimo li doći od jednog do drugog mjesta u gradu, tj. od točke  $T_1 = (x_1, y_1)$  do  $T_2 = (x_2, y_2)$ , onda će udaljenost koju ćemo prijeći biti duljina najkraćeg puta *koji prolazi zadanim ulicama* (što je upravo  $d_1(T_1, T_2)$ ), a ne "zračna udaljenost"  $d_2(T_1, T_2)$  između ovih točaka. Sada je jasno zašto se  $\|\cdot\|_1$  često naziva "taxicab"-norma, a ponekad i Manhattan norma. Više detalja o ovim normama zainteresirani čitatelji mogu pronaći u [8].

### 3. Kružnice u $p$ -normama i brojevi $\pi_p$

Kružnica je definirana kao skup točaka ravnine koje su od jedne fiksne točke (središta) udaljene za konstantnu vrijednost (radijus). S ovim pojmom susreli smo se još u osnovnoj školi, a udaljenost smo računali pomoću  $d_2$ . Za definiranje pojma kružnice možemo, umjesto metričke  $d_2$ , uzeti neku drugu metriku  $d$ . Prema tome, skup

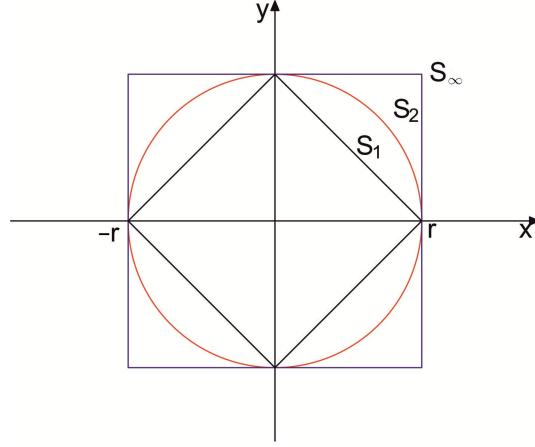
$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((x, y), (x_0, y_0)) = r\}$$

predstavlja kružnicu radijusa  $r$  sa središtem u  $(x_0, y_0)$  s obzirom na metriku  $d$ . Primjerice, kružnica radijusa  $r$  sa središtem u ishodištu s obzirom na  $d_p$  je skup

$$S_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^p + |y|^p = r^p\}, \quad p \geq 1.$$

Ponekad ćemo reći i da je  $S_p$  kružnica s obzirom na normu  $\|\cdot\|_p$ .

Na sljedećoj slici prikazane su kružnice  $S_1, S_2$  i  $S_\infty$ .



Kada bismo nacrtali i ostale kružnice  $S_p$ , sve bi one bile smještene između  $S_1$  i  $S_\infty$ , i što bi  $p$  bio veći, to bi kružnica  $S_p$  bila bliže kružnici  $S_\infty$ . To nam je jasno i iz teorema 2.

Uzmimo da je sada  $r = 1$ . Neka je  $(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0)$ . Tada točka  $\frac{1}{\|(x, y)\|_1}(x, y)$  leži na kružnici  $S_1$  (jer je  $\|\frac{1}{\|(x, y)\|_1}(x, y)\|_1 = 1$ ). Iz slike je vidljivo da kružnica  $S_1$  leži unutar kružnice  $S_2$ , te je stoga točka  $\frac{1}{\|(x, y)\|_1}(x, y)$  unutar kružnice  $S_2$  i zato je  $\|\frac{1}{\|(x, y)\|_1}(x, y)\|_2 \leq 1$ . Prema tome,  $\|(x, y)\|_2 \leq \|(x, y)\|_1$ . Ako bismo nacrtali kružnicu  $\sqrt{2}S_1$  (kružnica radijusa  $\sqrt{2}$ , s obzirom na metriku  $d_1$ ), onda bi kružnica  $S_2$  bila smještena unutar nje. Isti račun kao maloprije daje  $\|(x, y)\|_1 \leq \sqrt{2}\|(x, y)\|_2$ . Dakle, vrijedi

$$\|(x, y)\|_2 \leq \|(x, y)\|_1 \leq \sqrt{2}\|(x, y)\|_2.$$

Relacije ovog tipa vrijede za svake dvije  $p$ -norme, kao što navodimo u sljedećoj propoziciji.

**Propozicija 3.** Za sve  $p, q \geq 1$  vrijede sljedeće relacije

$$\|(x, y)\|_\infty \leq \|(x, y)\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}} \|(x, y)\|_\infty, \quad (10)$$

$$2^{-\frac{1}{q}} \|(x, y)\|_q \leq \|(x, y)\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}} \|(x, y)\|_q. \quad (11)$$

**Dokaz.** Pretpostavimo da je  $|x| \geq |y|$ . Tada je

$$\|(x, y)\|_\infty = |x| = (|x|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}} = \|(x, y)\|_p.$$

Slično se pokaže da ova nejednakost vrijedi i u slučaju  $|x| < |y|$ . S druge strane,  $|x| \leq \|(x, y)\|_\infty$  i  $|y| \leq \|(x, y)\|_\infty$  daju  $|x|^p + |y|^p \leq 2\|(x, y)\|_\infty^p$ , pa je i desna strana nejednakosti (10) dokazana.

Nejednakost (11) slijedi iz (10):

$$\|(x, y)\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}} \|(x, y)\|_\infty \leq 2^{\frac{1}{p}} \|(x, y)\|_q,$$

a zamjenom  $p \leftrightarrow q$  dobivamo  $\|(x, y)\|_q \leq 2^{\frac{1}{q}} \|(x, y)\|_p$ , tj.

$$2^{-\frac{1}{q}} \|(x, y)\|_q \leq \|(x, y)\|_p.$$

□

Vidljivo je da geometrijski oblik kružnice ovisi o odabranoj metrici. Izračunajmo opsege  $O_p$  kružnica  $S_p$ . Poznato je da je opseg kružnice  $S_2$  jednak  $2r\pi$ , dakle  $O_2 = 2r\pi$ . Nadalje,

$$O_1 = 4 \cdot d_1((r, 0), (0, r)) = 4(|r - 0| + |0 - r|) = 8r,$$

$$O_\infty = 4 \cdot d_\infty((r, -r), (r, r)) = 4 \max\{|r - r|, |-r - r|\} = 8r.$$

Uočimo da se u opsezima  $O_1$  i  $O_\infty$  broj  $\pi$  ne pojavljuje.

Općenito, za  $p \neq \infty$ , opseg  $O_p$  kružnice  $S_p$  računamo pomoću integrala. Neka je  $\mathbf{c}_p$  ona četvrtina kružnice  $S_p$  koja pripada prvom kvadrantu. Tada je  $O_p = 4 \int_{\mathbf{c}_p} ds_p$ , gdje je  $ds_p$  element duljine. S obzirom da računamo u  $p$ -normi, to će element duljine biti

$$ds_p = (|dx|^p + |dy|^p)^{\frac{1}{p}} = (|x'(t)|^p + |y'(t)|^p)^{\frac{1}{p}} dt. \quad (12)$$

Uočimo da u slučaju  $p = 2$  dobivamo uobičajenu formulu za element duljine  $ds_2 = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$  ([1], str. 209). Za parametrizaciju krivulje  $\mathbf{c}_p$  uzmimo

$$x(t) = rt^{\frac{1}{p}}, \quad y(t) = r(1 - t)^{\frac{1}{p}}, \quad t \in [0, 1],$$

pa onda imamo

$$ds_p = \frac{r}{p} (t^{1-p} + (1-t)^{1-p})^{\frac{1}{p}} dt.$$

Prema tome, za  $p \neq \infty$  je

$$O_p = \frac{4r}{p} \int_0^1 (t^{1-p} + (1-t)^{1-p})^{\frac{1}{p}} dt.$$

Kako su nam iznosi za  $O_1$  i  $O_2$  poznati, gornju formulu možemo provjeriti tako što ćemo uvrstiti  $p = 1$  i  $p = 2$ . Za  $p = 1$  je  $O_1 = 4r \int_0^1 2dt = 8r$ , dok za  $p = 2$  imamo

$$\begin{aligned} O_2 &= 2r \int_0^1 \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{1-t} \right)^{\frac{1}{2}} dt = 2r \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t-t^2}} dt \\ &= 2r \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2 - (t - \frac{1}{2})^2}} dt = 2r \arcsin(2t - 1) \Big|_0^1 \\ &= 2r(\arcsin 1 - \arcsin(-1)) = 2r\pi. \end{aligned}$$

Za svaki  $p$  omjer  $\frac{O_p}{2r}$  opsega  $O_p$  i promjera  $2r$  kružnice je konstantan. Taj omjer označavamo s  $\pi_p$  i on iznosi

$$\pi_p = \frac{2}{p} \int_0^1 (t^{1-p} + (1-t)^{1-p})^{\frac{1}{p}} dt.$$

Očito je  $\pi_1 = 4, \pi_2 = \pi, \pi_\infty = 4$ . U radovima [2] i [3] diskutirane su različite aproksimacije za brojeve  $\pi_p$ , pa je, na primjer, dobiveno da je  $\pi_{1.1} = \pi_{11} \approx 3.757, \pi_{1.5} = \pi_3 \approx 3.259, \dots$  Štoviše, u [2] je dokazano da je  $\pi_2 = \min\{\pi_p : p \in [1, \infty]\}$ .

Na kraju istaknimo da u nekim situacijama nema bitne razlike s kojom od ovih normi radimo. Tako se, koristeći relacije (10) i (11), može dokazati da za  $p, q \in [1, \infty]$  vrijedi da je neki skup ograničen u  $\|\cdot\|_p$  ako i samo ako je ograničen u  $\|\cdot\|_q$ , da niz konvergira u  $\|\cdot\|_p$  ako i samo ako konvergira u  $\|\cdot\|_q$ , itd. Napomenimo još da se, za svaki  $n \in \mathbb{N}$ , na prostoru  $\mathbb{R}^n$  mogu promatrati  $p$ -norme definirane kao

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Mi smo se u ovom radu ograničili na prostor  $\mathbb{R}^2$  zbog jednostavnijeg računa i boljeg zora.

## 4. Zahvala

Autorice se zahvaljuju recenzentu na korisnim sugestijama koje su pridonijele poboljšanju članka.

## Literatura

- [1] B. APSEN, *Repetitorij više matematike 2*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.
- [2] C. L. ADLER, J. TANTON,  $\pi$  is the minimum value for  $P_i$ , The College Mathematics Journal **31**(2000), 102–106.
- [3] J. DUNCAN, D. LUECKING, C. MCGREGOR, *On the values of  $P_i$  for norms on  $\mathbb{R}^2$* , The College Mathematics Journal **35**(2004), 84–92.
- [4] R. EULER, J. SADEK, *The  $\pi$ 's go full circle*, Mathematics Magazine **72**(1999), 59–63.
- [5] S. KUREPA, *Funkcionalna analiza - Elementi teorije operatora*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.
- [6] I. ZAVIŠIĆ, *Prostori  $\ell_p$* , diplomski rad, PMF - Matematički odjel, 2009.
- [7] <http://en.wikipedia.org/wiki/Pi>, 30.10.2010.
- [8] E.F. KRAUSE, *Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*, Dover Publications, Inc., New York, NY, 1986.