

I РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата

Регионални натпревари по математика 83-95

Подготвена од Боривое Миладиновиќ

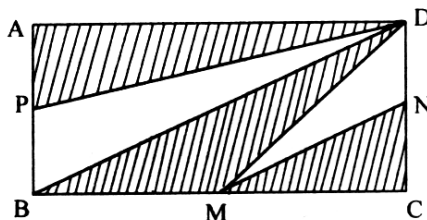
V одделение

1. Во една вазна имало вкупно 100 каранфили: бели, жолти, розови и црвени подеднакво. Во темницата ученикот треба да избере 10 каранфили од иста боја. Колку најмалку каранфили треба да извади ученикот, па меѓу нив сигурно да има 10 каранфили со иста боја? (Решението да се образложи)

2. Која цифра треба да стои на местото на ѕвездичката во бројот $3741*$ така што при делењето на тој број со 3 и со 4 се добиваат еднакви остатоци ?

3. На сите олимписки игри до 1983 год., нашите спортисти освоиле вкупно 53 медали, од тоа 31 златни и бронзени, а 38 златни и сребрени. Колку златни сребрени и бронзени медали се освоени?

4. Пресметај ја плоштината на осенчаните фигури на цртежот, ако е ABCD правоаголник чии страни се долги 16cm и 12 cm, а M, N, P се средини на соодветните страни на правоаголникот .



V отделение

1. Во 36 каранфили ако нема 10 каранфили со иста боја, тогаш од секоја боја мора да има по 9 каранфили. Со избирање на уште еден каранфил, од некоја боја, ќе има 10 каранфили. Според тоа ученикот треба да извлече 37 каранфили.

2. Остатоци на тој број при делење со 3 можат да бидат 0, 1, 2. Ако остатокот е 0 тогаш бројот е делив со 3, т.е. $3|(3+7+4+1+*)$ од каде што следува дека $* \in \{0, 3, 6, 9\}$. Остатоци на бројот при делење со 4 можат да бидат 0, 1, 2, 3. Според тоа заеднички остатоци можат да бидат 0, 1, 2. Ако остатокот е 0, тогаш бројот е делив со 4, т.е. $4|1*$ од каде што следува $* \in \{2, 6\}$. Само бројот 6 го задоволува бараниот услов, т.е. ако * се замени со 6 се добива бројот 37416 кој е делив со 3 и со 4. Да се добие остаток 1 треба * да се замени со 7, а да се добие остаток 2 треба * да се замени со 8.

3. Ако со z го означиме бројот на освоени златни медали, со s - сребрени, а со b - бронзени медали, тогаш имаме $z+b=31$ и бројот на освоени сребрени медали $s=53-31=22$. Од $z+s=38$ следува дека освоени бронзени медали се $b=53-38=15$. Бројот на освоени златни медали $z=38-22=16$ медали.

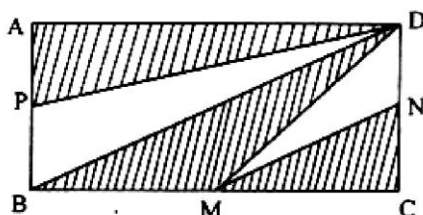
4. Осенчаната фигура APD е правоаголен триаголник со катети $\overline{AP}=6$ cm и $\overline{AD}=16$ cm. Неговата плоштина е:

$$P_{\triangle APD} = \frac{1}{2} \overline{AP} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 16 = 48 \text{ cm}^2.$$

Фигурата MNC е правоаголен триаголник со катети $\overline{MC} = 8$ cm и $\overline{NC} = 6$ cm; неговата плоштина е

$$P_{\triangle MNC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MC} \cdot \overline{CN} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24 \text{ cm}^2.$$

Фигурата BMD е триаголник со основа $\overline{BM} = 8$ cm и висина $\overline{DC} = 12$ cm. Неговата плоштина е $P_{\triangle BMD} = \frac{1}{2} \overline{BM} \cdot \overline{DC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 48 \text{ cm}^2$. Бараната плоштина е $P=120 \text{ cm}^2$.



VI одделение

1. Во една паралелка $\frac{4}{7}$ од учениците се женски. Колку ученици има во паралелката ако женски се за 5 повеќе од машки?
2. Пресметај ја вредноста на изразот: $1 - \frac{100}{101} + \frac{99}{101} - \frac{98}{101} + \frac{97}{101} - \dots - \frac{2}{101} + \frac{1}{101}$.
3. Дадени се права p и две точки A и B кои се наоѓаат на различни страни од неа. На правата p одбери точка така што аголот AMB да е преполовен со правата p .
4. Две кружници се допираат одвнатре. Дијаметарот на поголемата кружница, што минува низ центрите на двете кружници со помалата е поделен на два дела од кои едниот е три пати поголем од другиот. Определи го централното растојание, ако дијаметарот на помалата кружница е 4 cm.

VI отделение

1. Ако со x го означиме бројот на учениците во паралелката, тогаш $\frac{3}{7}$ од x се машки, а $\frac{4}{7}$ од x се женски. Бидејќи има 5 ученички повеќе, тогаш $(\frac{4}{7} - \frac{3}{7})$ од x е еднакво на 5, т.е.

$(\frac{4}{7} - \frac{3}{7}) \cdot x = 5$, па имаме $x = 7 \cdot 5 = 35$. Во паралелката има 35 ученици, од кои 15 се машки, а 20 женски.

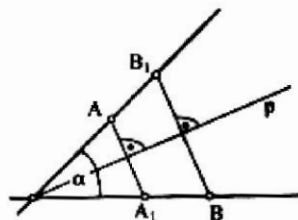
2. Бидејќи $1 = \frac{101}{101}$, изразот може да се трансформира во:

$$\left(\frac{101}{101} - \frac{100}{101}\right) + \left(\frac{99}{101} - \frac{98}{101}\right) + \left(\frac{97}{101} - \frac{96}{101}\right) + \dots + \left(\frac{3}{101} - \frac{2}{101}\right) + \frac{1}{101} = 50 \cdot \frac{1}{101} + \frac{1}{101} = \frac{51}{101}.$$

3. Ако A_1 и B_1 се осно симетрични точки на точките A и B во однос на правата p , тогаш бараната точка M е во пресекот на правите A_1B , AB_1 и p .

Ако точките A и B се на еднакво растојание од правата p , но не се осносиметрични, тогаш задачата нема решение.

Ако точките A и B се на еднакво растојание и се осносиметрични во однос на правата p , тогаш секоја точка M е решение.



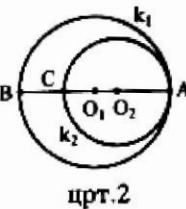
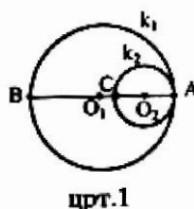
4. Нека $d_1 = \overline{AB}$ е дијаметар на кружницата K_1 , $d_2 = \overline{AC} = 4$ cm е дијаметар на кружницата k_2 и $d = \overline{O_1O_2}$ е бараното централно растојание (црт.1). Од условот на задачата $\overline{BC} = 3 \cdot \overline{CA} = 3 \cdot 4 = 12$ cm, следува дека $d_1 = 12 + 4 = 16$ cm, и $d_2 = 4$ cm. Тогаш

$$d = \frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2} = 8 - 2 = 6 \text{ cm.}$$

Ако точката C се наоѓа меѓу B и O_1 (црт.2), тогаш $\overline{AC} = 3 \cdot \overline{CB}$, т.е. $\overline{CB} = \frac{1}{3} \overline{AC} = \frac{4}{3}$ cm;

$$d_1 = \overline{AC} + \overline{CB} = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3} \text{ cm.}$$

Бараното централно растојание е: $d = \frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3} \text{ cm.}$



VII отделение

1. Цената на некоја роба намалена е за 15%, а потоа за 10%. Колкава е сегашната цена на робата ако пред намалувањето била 200 денари.
2. Најди двоцифрен број кој собран со бројот напишан со исти цифри, но во обратен ред, е квадрат на некој природен број.
3. Во дадена кружница впиши триаголник ABC со внатрешни агли $\alpha=60^\circ$ и $\beta=45^\circ$.
4. Од произволна точка на основата на рамнокракиот триаголник се повлечени прави паралелни со краците. Докажи дека периметарот на добиениот паралелограм не зависи од положбата на избраната точка.

VII одделение

1. I - начин: По првото намалување цената била $k_1 = \frac{200 \cdot 85}{100} = 170$ денари. По второто намалување, цената била $k_2 = \frac{170 \cdot 90}{100} = 153$ денари.

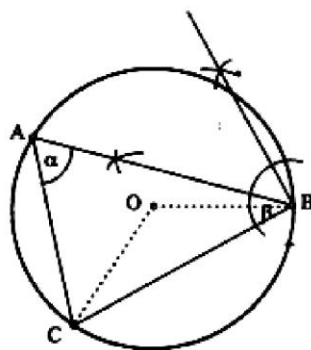
II - начин: По првото намалување цената на робата е 85% од вредноста, а по второто намалување за уште 10%, цената на робата е $85\% \cdot 8,5\% = 76,5\%$ од вредноста на робата, т.е. цената е: $\frac{200 \cdot 76,5}{100} = 153$ денари.

2. Нека $\overline{xy}$, $x, y \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ е бараниот број. Од $\overline{xy} + \overline{yx} = (10x+y) + (10y+x) = 11(x+y)$, следува дека $x+y=11$. Една од цифрите x или y е поголема од еден. Следува табелата:

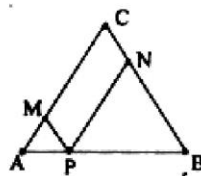
x	2	3	4	5	6	7	8	9
y	9	8	7	6	5	4	3	2

Бараните броеви се: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

3. Во дадената кружница избери две точки B и C така што $\angle COB = 120^\circ$. Во точката B конструирај агол од 45° . Добениот крак ја сече кружницата во точката A. Триаголникот ABC е бараниот триаголник, бидејќи во темето A, аголот $\alpha = 60^\circ$. (Види цртеж)



4. Нека P е произволна точка на основата на триаголникот ABC и $PM \parallel BC$, а $PN \parallel AC$. Триаголникот APM е рамнокрак, $AM = PM$. Во паралелограмот PNCM имаме: $PN = MC$ и $PM = NC$. Периметар на паралелограмот е: $L = PM + MC + CM + PN = 2AM + 2MC = 2(AM + MC) = 2AC$. Значи каде и да е точката P на основата AB, периметарот на паралелограмот секогаш е константен.



VIII одделение

1. Докажи дека $k^3 - k$ (каде k е природен број) е делив со 6.

2. Докажи ја вистинитоста на тврдењето:

$$-\frac{1}{a \cdot (a-b) \cdot (a-c)} + \frac{1}{b \cdot (b-a) \cdot (b-c)} + \frac{1}{c \cdot (c-a) \cdot (c-b)} = \frac{1}{a \cdot b \cdot c}$$

за $a \neq b \neq c \neq 0$.

3. Основите на трапезот се долги 13 cm и 2,4 dm. Одреди ја висината на трапезот, ако продолженијата на краците се сечат на растојание 9 cm од горната основа.

4. Конструирај квадрат со плоштина 7 cm^2 .

VIII одделение

1. Бројот е делив со 6, ако е делив со 2 и со 3. Изразот ќе го разложиме на производ од прости множители, т.е. $k^3 - k = k \cdot (k^2 - 1) = (k-1) \cdot k \cdot (k+1)$. Забележуваме дека тој е производ на три последователни природни броеви од кои барем еден е парен и делив со 2, а еден е делив со 3.

2. Ја трансформираме левата страна на равенството:

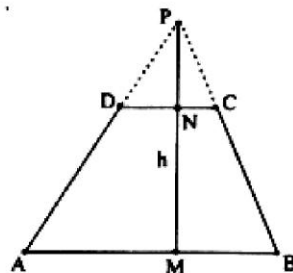
$$\begin{aligned} & \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{a(a-b)(a-c)} - \frac{1}{b(a-b)(b-c)} + \frac{1}{c(a-c)(b-c)} = \\ & = \frac{bc(b-c) - ac(a-c) + ab(a-b)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{b^2c - bc^2 - a^2c + ac^2 + a^2b - ab^2}{abc(a-b)(a-c)(b-c)} = \\ & = \frac{c^2(a-b) + ab(a-b) - c(a-b)(a+b)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{(a-b)(c^2 + ab - c(a+b))}{abc(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{(a-b)(c^2 + ab - ac - bc)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)} = \\ & = \frac{(a-b)(b(a-c) - c(a-c))}{abc(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{1}{abc} \end{aligned}$$

3. Нека $h = \overline{MN}$ е бараната висина. Триаголниците ABP и DCP се слични, бидејќи имаат еднакви агли. Ако триаголниците се слични, тогаш страните им се пропорцио-

нални со соодветните висини, т.е. $\frac{\overline{AB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{NP}}$;

$\overline{AB} = 2,4 \text{ dm} = 24 \text{ cm}$, $\overline{DC} = 13 \text{ cm}$, $\overline{NP} = 9 \text{ cm}$;

$\overline{MP} = h + 9$; имаме: $\frac{24}{13} = \frac{h+9}{9}$; $9 \cdot 24 = 13(h+9)$; $h = \frac{9 \cdot 11}{13} = \frac{99}{13} = 7\frac{8}{13} \text{ cm}$.



4. **Анализа:** Страната на бараниот квадрат е катета на правоаголниот триаголник со хипотенуза 4 cm и катета 3 cm.

Конструкција: Се конструира правоаголен триаголник ABC со хипотенуза $c=4 \text{ cm}$ и катета $b=3 \text{ cm}$. Катетата $\overline{BC} = a$ е страната на квадратот. Над страната a се конструира квадрат $BCMN$.

Доказ: Квадратот $BCMN$ е бараниот, бидејќи неговата плоштина е $p = a^2 = (\sqrt{7})^2 = 7 \text{ cm}^2$.

Дискусија: Постои единствен правоаголен триаголник со дадена хипотенуза c и катета b ($c > b$). Според тоа задачата има единствено решение.

