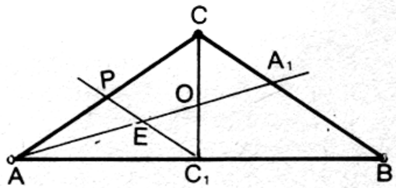
Гоце Шопкоски
Штип

НЕКОИ СВОЈСТВА НА РАМНОКРАК ТРИАГОЛНИК СО АГОЛ ОД 108^0

На математичките школи, или на натпреварите за ученици од основното образование, често се поставуват задачи во врска со рамнокрак триаголник со агол од 108^0. Овде ќе стане збор за некои од нив, разгледани како својства.

Својство 1: Бисектрисата на аголот при основата е двапати поголема од бисектрисата на аголот при врвот.

Доказ: Врз основа на цртежот 1, треба да докажеме дека $\overline{AA_1} = 2\overline{CC_1}$.



Ја повлекуваме полуправата $C_1P \parallel BC$. Таа ја пресечува бисектрисата AA_1 во точката E. Бидејќи отсечката C_1P е средна линија во триаголникот ABC, заклучуваме дека точката E ја располовува отсечката AA_1.

Лесно можеме да утврдиме дека триаголникот A_1CO е рамнокрак. Имено, $\measuredangle PAE = 18^0$, $\measuredangle ACB = 108^0$, па од триаголникот AA_1C заклучуваме дека $\measuredangle CA_1O = 54^0$. Бидејќи $\measuredangle OCA_1 = \frac{1}{2}\measuredangle ACA_1$, следува дека $\measuredangle OCA_1 = 54^0$. Значи, триаголникот A_1CO е рамнокрак.

Но, исто така и триаголникот EC_1O е рамнокрак триаголник ($\measuredangle EC_1O = \measuredangle OCA_1 = 54^0$).

Врз основа на ова што го утврдивме заклучуваме дека $\overline{A_1E} = \overline{CC_1}$ (затоа што $\overline{A_1E} = \overline{A_1O} + \overline{OE} = \overline{CO} + \overline{C_1O} = \overline{OC_1}$).

На крајот, поради тоа што е $\overline{AE} = \overline{EA_1}$, заклучуваме дека $\overline{AA_1} = 2\overline{A_1E} = 2\overline{CC_1}$.

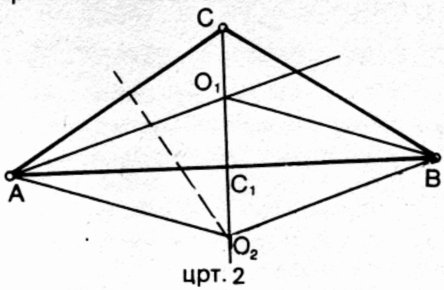
Важи и обратното својство: Ако бисектрисата на аголот при основата на еден рамнокрак триаголник е двапати поголема од бисектрисата на аголот при врвот, тогаш аголот при врвот има 108^0.

Својство 2: Центрите на впишаната и опишаната кружница се симетрични во однос на основата на триаголникот.

Доказ: Врз основа на цртежот 2 треба да докажеме дека AB е симетрала на отсечката O_1O_2.

. Центрите O_1 и O_2 лежат на полуправата CC_1 — која е истовремено и симетрала на основата AB и бисектриса на аголот ACB.

Значи $AB \perp O_1O_2$. . . . . . (1)



црт. 2

Во триаголникот ABO_1 аглите при основата имаат по 18^0, а аголот при врвот има 144^0.

Ќе го разгледаме рамнокракиот триаголник AO_2B:

Во него, $\measuredangle O_2AC_1 = 18^0$ (затоа што триаголникот AO_2C е рамнокрак; $\overline{O_2A} = \overline{O_2C}$ како радиуси на опишаната кружница па следува $\measuredangle O_2AC = \measuredangle O_2CA = 54^0$), а од тоа и $\measuredangle O_2BC_1 = 18^0$, па заклучуваме дека триаголниците O_2AB и O_1AB се складни. Според тоа

$\overline{O_1C_1} = \overline{O_2C_1}$ ....(2)

Од (1) и (2) следува дека центрите O_1 и O_2 се симетрични во однос на AB.

Обратно својство: Ако центрите на впишаната и на опишаната кружница во некој триаголник се симетрични во однос на некоја од страните, тогаш тој триаголник е рамнокрак со агол од 108^0 при врвот.

Упатство за доказ: Во рамнокракиот триаголник ACO_2 (црт. 2) $\measuredangle CAO_2 = \measuredangle ACO_2$. Понатаму, поради тоа што триаголниците O_1AC_1 и O_2AC_1 се складни, заклучуваме дека $\measuredangle O_1AC_1 = \measuredangle O_2AC_1$. Од друга страна пак, $\measuredangle O_1AC_1 = \measuredangle O_1AC$, затоа што AO_1 е бисектриса на аголот C_1AC. Значи

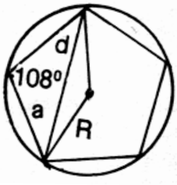
$\measuredangle O_2AC_1 = \measuredangle C_1AO_1 = \measuredangle O_1AC = \alpha$. ..... (1)

Во правоаголниот триаголник AC_1C имаме:

$\measuredangle C_1AC + \measuredangle C_1CA = 90^0$.

Бидејќи е $\measuredangle C_1AC = 2\alpha$ (според (1)), а $\measuredangle C_1CA = \measuredangle O_2AC = 3\alpha$, следува дека $2\alpha + 3\alpha = 90^0$, од каде што е $\alpha = 18^0$ итн.

Користејќи ги својствата на овој триаголник (овие и некои други) можат да произлезат занимливи својства за правилен петаголник.



Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус